DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TSALLIS ENTROPİ EŞİTSİZLİĞİ

Sibel USLU

Şubat, 2009
İZMİR

TSALLIS ENTROPİ EŞİTSİZLİĞİ

Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Fizik Bölümü, Fizik Anabilim Dalı

SİBEL USLU

Şubat, 2009
İZMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

SİBEL USLU tarafından **Doç. Dr. EKREM AYDINER** yönetiminde hazırlanan **"TSALLIS ENTROPİ EŞİTSİZLİĞİ"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

....

Doç. Dr. Ekrem AYDINER

Danışman

....

Prof. Dr. Hamza POLAT — Jüri Üyesi

Doç. Dr. Gökhan BİLHAN — Jüri Üyesi

Prof. Dr. Cahit HELVACI

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesi sırasında bilimsel katkıları ile bana yardımcı olan, eğitimim süresince yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Ekrem AYDINER' e, bana maddi, manevi her türlü desteği sağlayan aileme ve sevgili eşim Özenç TAMTIRAK' a en içten teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Sibel USLU

TSALLIS ENTROPİ EŞİTSİZLİĞİ

ÖZ

Bu tezde, Heisenberg' in belirsizlik ilkesi (Heisenberg eşitsizliği) ve diğer entropi eşitsizlikleri ayrıntılı olarak gözden geçirildi. Pöschl-Teller potansiyeline karşı gelen dalga fonksiyonunun Tsallis entropi eşitsizliğini sağladığı gösterildi. Nümerik sonuçlar ve ayrıntılı tartışmalar tezde verildi.

Anahtar sözcükler: Extensif olmayan entropi, Tsallis entropisi, Pöschl-Teller potansiyeli

TSALLIS ENTROPIC UNEQUALITY

ABSTRACT

In this thesis, Heisenberg' s uncertanity principle (Heisenberg unequality) and other unqualities have been reviewed in detail. It has been shown that Tsallis' s entropy unequality is satisfied by the wave function correspond Pöschl Teller potential. Numerical results and detail discussions have been given in thesis.

Keywords: Non-extensive entropy, Tsallis entropy, Pöschl-Teller potential

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BÖLÜM BİR
GİRİŞ

20. yüzyılın başlarından itibaren fizik alanında büyük gelişmeler olmuştur. 1900 yılında Max Planck' ın ortaya attığı "kuantum varsayımları" nın ardından, yüzyılın ilk çeyreğinde kuantum fiziği açısından önemli keşifler yapılmıştır.

Klasik mekaniğin maddeyi makroskobik bir yaklaşımla incelemesine karşın, kuantum mekanik kuram maddeyi mikroskobik bir yaklaşımla inceler. 20. yüzyılın başından itibaren atomların iç yapıları araştırılmaya başlanmış ve klasik kuramların bu çalışmalarda yetersiz kaldığı görülmüştür. 1924' de ortaya atılan de Broglie varsayımı ve 1927' de ortaya atılan Heisenberg belirsizlik ilkesi bilim dünyasında yeni ufukların doğmasına sebep olmuştur. Bu gelişmeler Max Planck' ın kuantum varsayımları ve Schrödinger' in dalga mekaniği ile birleştirilerek kuantum mekanik kuram ortaya çıkmıştır. Bu kuram parçacıktan ziyade ona eşlik eden, olasılık genliği dediğimiz bir dalga fonksiyonu ile ilgilenir. Kuantum mekanik kuram küçük kütleli hareketli cisimlerin olasılık dalgaları mekaniği kavramı anlamını taşıdığından, maddeyi mikroskobik bir yaklaşımla ele alır. Bu kuram ile birlikte gözlenebilirlik, işlemci, özdeğer, beklenen değer, dalga fonksiyonu gibi yeni kavramlar da ortaya çıkmıştır.

Bu tezin ikinci bölümünde kuantum mekanik kurama genel bir giriş yapıldıktan sonra, bu kuramın temel postülaları ve ortaya koyduğu yeni kavramlar ışığında Heisenberg' in belirsizlik eşitsizliğini elde edeceğiz. Heisenberg' in belirsizlik ilkesine göre birbirine bağlı iki büyüklükten birinin ölçülmesindeki duyarlık arttıkça, diğerinin ölçülmesindeki duyarlık azalır. Öyle ki, ölçümler sonucu her iki büyüklüğe ait belirsizliklerin çarpımı daima Planck sabitinden büyük veya en az ona eşittir. Heisenberg' in belirsizlik eşitsizliği Gaussyan yada yarı Gaussyan dağılıma sahip olasılık yoğunlukları için kullanışlı bir formülasyondur. Fakat kuantum tek parçacığı her zaman bu tarz bir olasılık dağılımına sahip olmayabilir. Bu gibi durumlarda, dağılımı hesaplamada standart sapma kullanışlı bir yöntem değildir. Yine aynı bölümde Gaussyan forma sahip olmayan dalga fonksiyonları için geliştirilen entropi eşitsizlikleri üzerinde duracağız.

Tezin üçüncü bölümünde ektensif olmayan istatistik mekanik ve Tsallis istatistiğini ayrıntılı bir biçimde açıkladıkdan sonra, dördüncü bölümde Tsallis entropik eşitsizliğini elde edeceğiz. Beşinci bölümde ise Pösch-Teller potansiyelinin Schrödinger denklem çözümü yapılıp, bu potansiyelin Gaussyan forma sahip olmayan dalga fonksiyonunu çıkartacağız. Son olarak altıncı bölümde Pösch Teller dalga fonksiyonuna Tsallis eşitsizliğini uygulayacağız ve bulduğumuz sonuçları oluşturacağımız tablodan yararlanarak yorumlayağız.

BÖLÜM İKİ
HEİSENBERG BELİRSİZLİK İLKESİ VE ENTROPİ EŞİTSİZLİKLERİ

2.1 Kuantum Mekaniğinin Postülaları

Kuantum mekaniğinde bir çok postüla olmasına rağmen kuram üç ana postüla üzerine kurulmuştur (Saçlıoğlu, 2000). Bu postülaları şöylece sıralayabiliriz.

I. Postüla: Bu postüla dalga fonksiyonu ile ilgilidir. Bu postülaya göre; $\vec{r} = \mid r \mid = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ olmak üzere $0 \leq r \leq \infty$ aralığında $\psi(r)$ dalga fonksiyonu ile onun birinci türevi $\dfrac{\partial \psi(r)}{\partial r}$ sürekli ve $r \to \infty$ iken $\psi(r) \to 0$ olmalıdır.

II. Postüla: Bu postüla işlemci (operatör) veya gözlenebilirlerle ilgilidir. Kuantum mekaniğinde ölçülebilen her şey bir dinamik değişkendir ve her dinamik değişkene lineer ve hermitik bir işlemci ($\hat{A}$) karşılık gelir. Bu şekilde belirlenen işlemciler dinamik halleri belirleyen dalga fonksiyonuna uygulandığında; $\hat{A}\psi = a\psi$ elde edilir. Bu ifadede $''\psi''$ fonksiyonu ($\hat{A}$) işlemcisinin özfonksiyonu, $''a''$ ise özdeğeri adını alır ve bu denklem özdeğer denklemi olarak bilinir.

III. Postüla: Bu postüla ise beklenen değerlerle ilgilidir. Bir dalga fonksiyonu ile belirli bir dinamik halde α gibi bir dinamik değişken ölçüldüğü zaman bu dinamik değişkenin ölçüm sonucundan beklenen değeri, bu dinamik değişkene karşılık gelen ($\hat{A}$) işlemcisinin ortalama değerine eşit olur. Yani beklenen değer;

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\int \psi^* \hat{A} \psi dV}{\int \psi^* \psi dV} \tag{2.1.1}$$

ifadesiyle verilir.

Schrödinger Dalga Denklemi: Verilen herhangi bir $V(r)$ potansiyeli için Schrödinger dalga denklemi;

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r}\psi(r) + V(r)\psi(r) = E\psi(r) \qquad r = (x_1, ..., x_n) \tag{2.1.2}$$

ifadesiyle verilir. Burada $\hbar = h/2\pi$'dir ve h Planck sabitidir. m parçacığın kütlesi ve E parçacığın enerjisidir. Verilen $V(r)$ potansiyeli için Schrödinger dalga denklemi çözülürse $\psi(r)$ ifadesi bulunabilir. (2.1.2) denklemi lineer potansiyeller için tam çözüm verir.

2.2 Heisenberg Belirsizlik İlkesi

Kuantum fiziğinde her gözlenebilir niceliğe (enerji, çizgisel momentum, açısal momentum, konum vb.) bir işlemci karşılık gelir. Her işlemci için bir özdeğer denklemi yazılır ve bu denklem çözülerek özdeğerler ve öz-durumlar bulunur. Kuantum fiziğinde ölçümleri sınırlayan çok önemli bir ilke söz konusudur. Bu ilkeye göre, tüm nicelikleri aynı anda aynı kesinlikle ölçemeyiz, eğer ölçmek istersek bir belirsizlikle karşılaşırız. Bu belirsizlik Heisenberg belirsizlik ilkesi olarak bilinir. Örneğin, bir kuantum sisteminin konumunu kesin olarak biliyorsak çizgisel momentumunu kesin olarak belirleyemeyiz. Bu durumda, konumdaki belirsizlik asgari düzeyde olmakla birlikte çizgisel momentumdaki belirsizlik azami düzeydedir.

Kuantum mekaniğinde tanımlanan operatör kavramlarının komütasyon ilişkisi ve yine kuantum mekaniğinde tanımlanan belirsizlik ilkesi (Heisenberg) arasındaki ilişkiyi gösterebilmek için $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ komütasyon bağıntısını elde edelim. Burada $\hat{p}_x$ lineer momentum operatörünün x bileşenidir ve

$\hat{p}_x = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned}
(\hat{x}\hat{p}_x)\psi &= \hat{x}(-i\hbar\frac{d}{dx})\psi = -i\hbar\hat{x}\frac{d\psi}{dx} && (2.2.1)\\
(\hat{p}_x\hat{x})\psi &= -i\hbar\frac{d}{dx}(\hat{x}\psi) = -i\hbar\psi\frac{dx}{dx} - i\hbar\hat{x}\frac{d\psi}{dx} && (2.2.2)\\
\hat{x}\hat{p}_x\psi - \hat{p}_x\hat{x}\psi &= (-i\hbar\hat{x}\frac{d\psi}{dx}) - (-i\hbar\psi\frac{dx}{dx} - i\hbar\hat{x}\frac{d\psi}{dx}) && (2.2.3)\\
\hat{x}\hat{p}_x\psi - \hat{p}_x\hat{x}\psi &= i\hbar\psi && (2.2.4)
\end{aligned}$$

$\hat{x}$ ve $\hat{p}_x$ işlemcilerini ψ dalga fonksiyonuna uygularsak

$$(\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x})\psi = i\hbar\psi \qquad (2.2.5)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \qquad (2.2.6)$$

olarak elde edilir. Heisenbergin önerisi $\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar$ olarak düzenlenmiştir. Bu kuantum mekaniğinin en önemli ifadesidir (komütasyon bağıntısı). Kuantum mekaniğinde $\hat{x}$ ve $\hat{p}_x$ işlemcidir. İşlemcilerin yerinin değişmesi sonucu etkiler. Görüldüğü gibi $\hat{x}\hat{p}_x$ ve $\hat{p}_x\hat{x}$ sonucu birbirinden farklıdır.

Kuantum mekaniğinde iki tane operatör sıra değiştirebiliyor ise bu operatörlere karşı gelen fiziksel nicelikler aynı anda tam olarak ölçülebilir, eğer sıra değiştiremiyor ise bu nicelikler aynı anda tam olarak ölçülemez. Yani $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ gibi iki kuantum mekaniksel operatör için $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ ise $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ operatörlerine karşı gelen fiziksel nicelikler tam olarak ölçülebilir. $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ olduğu durumda her iki fiziksel nicelik aynı anda ölçülemez deriz.

Şimdi kuantum mekaniğinde tanımlanan operatör kavramlarının komütasyon ilişkisinin elde edilmesini gösterelim. $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ nin komütatörü;

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = -(\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}) = -[\hat{B}, \hat{A}] \qquad (2.2.7)$$

şeklinde gösterilir. $\hat{C}$ herhangi bir işlemci, $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ hermityen iki işlemci olmak üzere $[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C}$ olduğunu kabul edelim.

$\hat{A}$ ve $\hat{B}$ nin ortalama değerleri;

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi d\tau \qquad \langle \hat{B} \rangle = \int \psi^* \hat{B} \psi d\tau \tag{2.2.8}$$

ve ortalama değerlerinden sapmaları;

$$\Delta \hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \qquad \Delta \hat{B} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle \tag{2.2.9}$$

şeklindedir. Beklenen değerler sadece birer sayıdırlar ve bu nedenle tüm işlemciler ile komüte ettikleri için $\Delta\hat{A}$ ile $\Delta\hat{B}$ nin komütasyon ilişkilerinin $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ arasındaki komütasyonla aynı olduğunu (2.2.8) ve (2.2.9) denklemlerini kullanarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = [\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle, \hat{B}-\langle\hat{B}\rangle] = (\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)-(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle) \tag{2.2.10}$$

$$= \hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle\hat{B}\rangle - \langle\hat{A}\rangle\hat{B} + \langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle - \hat{B}\hat{A} + \hat{B}\langle\hat{A}\rangle + \langle\hat{B}\rangle\hat{A} - \langle\hat{B}\rangle\langle\hat{A}\rangle \tag{2.2.11}$$

$$= \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} + \langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle - \langle\hat{B}\rangle\langle\hat{A}\rangle + \hat{B}\langle\hat{A}\rangle - \hat{A}\langle\hat{B}\rangle + \langle\hat{B}\rangle\hat{A} + \langle\hat{A}\rangle\hat{B} \tag{2.2.12}$$

$$= [\hat{A},\hat{B}] + [\langle\hat{A}\rangle, \langle\hat{B}\rangle] + [\hat{B}, \langle\hat{A}\rangle] + [\hat{A}, \langle\hat{B}\rangle] \tag{2.2.13}$$

$$= [\hat{A},\hat{B}] - [\langle\hat{A}\rangle, \hat{B}] + [\hat{A}, \langle\hat{B}\rangle] + [\langle\hat{A}\rangle, \langle\hat{B}\rangle] \tag{2.2.14}$$

$$= [\hat{A},\hat{B}] - \{\langle\hat{A}\rangle\hat{B} - \hat{B}\langle\hat{A}\rangle + \hat{A}\langle\hat{B}\rangle - \langle\hat{B}\rangle\hat{A} + \langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle - \langle\hat{B}\rangle, \langle\hat{A}\rangle\} \tag{2.2.15}$$

$$= [\hat{A},\hat{B}] + \langle\hat{A}\rangle\{\hat{B} + \langle\hat{B}\rangle\} - \{\hat{B} + \langle\hat{B}\rangle\}\langle\hat{A}\rangle + \hat{A}\langle\hat{B}\rangle - \langle\hat{B}\rangle\hat{A} \tag{2.2.16}$$

Beklenen değer bir sayı olduğu için bütün işlemciler ile komütasyonu sıfırdır, ve buradan $[\Delta A, \Delta B] = [\hat{A},\hat{B}]$ bulunur.

Şimdi şu integrali ele alalım.

$$I = \int (\mid \alpha\Delta A - i\Delta B)\psi \mid^2 d\tau \geq 0 \tag{2.2.17}$$

$$(\mid \alpha\Delta A - i\Delta B)\psi \mid^2 = \{(\mid \alpha\Delta A^* + i\Delta B^*)\psi^*\}\{(\mid \alpha\Delta A - i\Delta B)\psi\} \tag{2.2.18}$$

$$= (\alpha\Delta A^*\psi^* + i\Delta B^*\psi^*)(\alpha\Delta A\psi - i\Delta B\psi) \tag{2.2.19}$$

ΔA ve ΔB hermityen oldukları için,

$$I = \alpha \int (\Delta A^*\psi^*)(\alpha\Delta A - i\Delta B)\psi d\tau + i \int (\Delta B^*\psi^*)(\alpha\Delta A - i\Delta B)\psi d\tau \tag{2.2.20}$$

$$I = \alpha \int \psi^*\Delta A(\alpha\Delta A - i\Delta B)\psi d\tau + i \int \psi^*\Delta B(\alpha\Delta A - i\Delta B)\psi d\tau \tag{2.2.21}$$

$$I = \int \psi^*(\alpha\Delta A + i\Delta B)(\alpha\Delta A - i\Delta B)\psi d\tau \tag{2.2.22}$$

olarak yazabiliriz. Şimdi (2.2.22) integralini açarsak;

$$I = \int \psi^*(\alpha^2\Delta A^2 + \Delta B^2 - i\alpha\Delta A\Delta B + i\alpha\Delta B\Delta A)\psi d\tau \tag{2.2.23}$$

$$I = \alpha^2\langle\Delta A^2\rangle + \langle\Delta B^2\rangle - i\alpha\langle[\Delta A, \Delta B]\rangle \tag{2.2.24}$$

denklemini elde ederiz. Buradaki $[\Delta A, \Delta B]$ ifadesinin $i\hat{C}$ olduğunu önceden kabul etmiştik. Bunu denklemde yerine yazarsak;

$$I = \alpha^2\langle\Delta A^2\rangle + \langle\Delta B^2\rangle + \alpha\langle C\rangle \tag{2.2.25}$$

$$I = \langle\Delta A^2\rangle(\alpha^2 + \alpha\frac{\langle\hat{C}\rangle}{\langle\Delta A^2\rangle}) + \langle\Delta B^2\rangle \tag{2.2.26}$$

ifadesini elde ederiz. Burada ilk terimi kareye tamamlamak için $\langle\Delta A^2\rangle\dfrac{\langle\hat{C}\rangle^2}{4\langle\Delta A^2\rangle^2}$ ifadesini ekleyip çıkaralım.

$$I = \langle\Delta A^2\rangle(\alpha^2 + \alpha\frac{\langle\hat{C}\rangle}{\langle\Delta A^2\rangle} + \langle\Delta A^2\rangle\frac{\langle\hat{C}\rangle^2}{4\langle\Delta A^2\rangle^2}) + \langle\Delta B^2\rangle - \langle\Delta A^2\rangle\frac{\langle\hat{C}\rangle^2}{4\langle\Delta A^2\rangle^2} \tag{2.2.27}$$

$$I = \langle \Delta A^2 \rangle (\alpha + \alpha \frac{\langle \hat{C} \rangle}{2\langle \Delta A^2 \rangle})^2 + \langle \Delta B^2 \rangle - \frac{\langle \hat{C} \rangle^2}{4\langle \Delta A^2 \rangle^2} \geq 0 \tag{2.2.28}$$

Eşitsizlik, tüm reel a sayıları için doğrudur ve bu nedenle sol tarafı minimum yapan bir değeri seçebiliriz. Bu değer, ilk terimin gitmesine neden olan değerdir, çünkü sol tarafa pozitif bir nicelik ekler. İlk terimi sıfır seçerek;

$$\langle \Delta B^2 \rangle - \frac{\langle \hat{C} \rangle^2}{4\langle \Delta A^2 \rangle^2} \geq 0 \tag{2.2.29}$$

denklemini elde ederiz. (2.2.27) denklemini düzenlersek

$$\langle \Delta A^2 \rangle \langle \Delta B^2 \rangle \geq \frac{\langle \hat{C} \rangle^2}{4} \tag{2.2.30}$$

ifadesini elde ederiz. (2.2.30) denklemindeki $\hat{A}$ nın kare ortalaması ($\langle \Delta A^2 \rangle$) için;

$$\langle \Delta A^2 \rangle = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle = \langle (\hat{A}^2 - 2\hat{A}\langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2) \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - 2\langle \hat{A}^2 \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2 \tag{2.2.31}$$

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \tag{2.2.32}$$

ifadesini yazabiliriz. Buradan;

$$\delta A = \sqrt{\langle (\Delta A)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2} \tag{2.2.33}$$

$$\delta B = \sqrt{\langle (\Delta B)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2} \tag{2.2.34}$$

$$\delta A \delta B = \sqrt{\langle \Delta A^2 \rangle \langle \Delta B^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} \mid \langle \hat{C} \rangle \mid \tag{2.2.35}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $\hat{C}[\hat{A}, \hat{B}]/i$ dir. $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ ise $\hat{C} = 0$ olur. Bu durumda $\delta A \delta B$ nin alt sınırı sıfırdır. $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ olursa $\delta A \to 0$ için $\delta B \to \infty$ dir. Bu durumda ise $\delta A \delta B$ nin alt sınırı $\frac{1}{2}\langle \hat{C} \rangle$ olur. Böylece;

$$\delta A \delta B = \frac{1}{2} \langle \hat{C} \rangle \tag{2.2.36}$$

yazılabilir. (2.2.36) eşitsizliği tüm gözlenebilir çiftlerine uygulanabilir. Yapılması gereken tek şey, iki gözlenebilir arasındaki komütasyon bağıntısının bilinmesidir.

(2.2.6) komütasyon bağıntısına göre sonucun $i\hbar$, bu iki operatöre karşı gelen gözlenebilirlerin aynı anda tam olarak ölçülemeyeceğini gösterir. Bir başka ifade ile, bir parçacığın herhangi bir noktadaki yeri ve momentumu aynı anda kesin olarak ölçülemez. Eğer ölçmeye kalkarsak ölçümde bir belirsizlik oluşur ve bu belirsizlik (2.2.36) denklemine göre;

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{2.2.37}$$

ifadasiyle verilir. Bu ifade Heisenberg belirsizlik ilkesi olarak bilinir. Burada Δx ve Δp sırasıyla konumun ve momentumun standart sapmasıdır.

Heisenberg belirsizlik ilkesi, Gaussyan formdaki dalga fonksiyonları için iyi çalışır. Fakat, konum ve momentum uzayındaki kuantum tek-parçacık olasılık yoğunluklarının Gaussyan yada yarı Gaussyan olması şart değildir, farklı formlarda da olabilir. Bu gibi durumlarda standart sapma kullanışlı bir hesaplama olmaz (Ohya ve Petz, 1993).

2.3 Genelleştirilmiş Entropiler

2.3.1 Shannon Bilgi Entropisi

Bölüm beşte Schrödinger denklem çözümünü yaptığımız Pösch-Teller potansiyeline karşılık gelen dalga fonksiyonu Gaussyan forma sahip değildir. Gaussyan olmayan bu tip çözümler için Heisenberg belirsizlik ilkesi uygun değildir. 1975 yılında Bialynicki-Birula ve Mycielski (BBM), Boltzman-Shannon bilgi entropilerini kullanarak belirsizliğin formülasyonunda yeni bir ifade elde ettiler.

(2.1.2) Schrödinger dalga denkleminin $\psi(r)$ çözümü kullanılarak Boltzman Shannon bilgi entropisi n boyutlu konum uzayında

$$S(r) = -\int \mid \psi(r) \mid^2 \ln \mid \psi(r) \mid^2 d^n r \tag{2.3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Shannon, 1948). $S(r)$ konum entropisi,konuma bağlı entropik belirsizliği ölçer. Bu integral ifadesi içinde yer alan $\mid \psi(r) \mid^2 \ln \mid \psi(r) \mid^2$ çarpımı konum uzayındaki entropi yoğunluğudur. Momentum uzayındaki bilgi entropisi ise

$$S(p) = -\int \mid \tilde{\psi}(p) \mid^2 \ln \mid \tilde{\psi}(p) \mid^2 d^n p \tag{2.3.2}$$

ifadesi ile verilir. Burada $\tilde{\psi}(p)$, $\psi(r)$'nin

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int \psi(r) e^{-ir.p} d^n r \tag{2.3.3}$$

şeklindeki Fourier dönüşümüdür. Bölüm dörtde ayrıntılı olarak bahsettiğimiz Sobolev eşitsizliğini (4.0.35) kullanarak Heisenberg eşitsizliği yerine ondan daha güçlü olduğu kabul edilen entropi eşitsizliğini yazabiliriz. (4.0.35) denklemini

$$W(q) = k(p_1, q_1) \parallel \psi \parallel_{p_1} - \parallel \tilde{\psi} \parallel_{q_1} \geq 0 \tag{2.3.4}$$

şeklinde yazabiliriz. p_1 ' i q_1 cinsinden yazarak bu ifadenin $q = 2$ noktasında türevini alırsak

$$W(2) = -\frac{n}{4} N(1 + \ln \pi) - \frac{1}{2} N^{-1} \int \mid \psi(r) \mid^2 \ln \mid \psi(r) \mid^2 d^n r \tag{2.3.5}$$

$$-\frac{1}{2} N^{-1} \int \mid \tilde{\psi}(k) \mid^2 \ln \mid \tilde{\psi}(k) \mid^2 d^n k + N \ln N \geq 0$$

bulunur. Burada $N = \parallel \tilde{\psi} \parallel_2 = \parallel \psi \parallel_2$ dir. $N = 1$ için bu ifade

$$S(r) + S(p) \geq n(1 + \ln \pi) \tag{2.3.6}$$

halini alır (Bialynicki-Birula ve Mycielski, 1975). Bu eşitsizlik ifadesi Bialynicki Birula, Mycielski (BBM) eşitsizliği olarak bilinir. Bu eşitsizlik n boyutlu uzayda geçerlidir. n burada uzaysal boyutu temsil eder. Burada $S(x)$, Δx belirsizliğine karşı gelen belirsizlik entropisi, $S(p)$ de Δp belirsizliğine karşı gelen belirsizlik entropisidir. Heisenberg belirsizlik ifadesini entropi cinsinden

$$(\Delta x)(\Delta p) \rightarrow -k\ln[(\Delta x)(\Delta p)] = S \tag{2.3.7}$$

$$-k\ln[(\Delta x)(\Delta p)] = S \tag{2.3.8}$$

$$S(x) + S(p) = S \tag{2.3.9}$$

şeklinde yazabiliriz.

Elbette Shannon entropisinden başka entropilerde ortaya konabilir. Bunlardan bazıları termoistatistikte kullanılabilir, bazıları kullanılamaz. Son yıllarda ortaya konan Kaniadakis entropisi, Abe entropisi ve Gamma entropisi (G.Lissia ve Scarfeno, 2005) kullanılabilir olanlardandır. Bu entropilerin ortak özellikleri iç bükeylik (sistemin termodinamik kararlılığı), Lesche kararlılığı (deneysel güvenilirlik ve deney sonuçlarının yeniden üretilebilmesi), ektensiflik, her zaman her adımında üretilen entropinin sonlu olmasıdır.

Genelleştirilmiş herhangi bir entropi ifadesi Boltzmann-Gibbs entropisi tanımındaki standart logaritma yerine,

$$\ln(x) = \frac{x^{\alpha} - x^{-\beta}}{\alpha + \beta} \tag{2.3.10}$$

şeklindeki genelleştirilmiş logaritma tanımı kullanılarak ifade edilebilir, burada α ve β iki parametre, x ise fonksiyonun argümanıdır. Bu logaritma tanımı altında genelleştirilmiş entropilerin en genel formu

$$S(t) = \langle \sum_{i=1}^{W} p_i(t) \tilde{\ln}(\frac{1}{p_i(t)}) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{W} \frac{p_i^{1-\alpha}(t) - p_i^{1+\beta}(t)}{\alpha + \beta} \rangle \qquad (2.3.11)$$

şeklindedir (Coraddu ve diğer., 2006). W faz uzayındaki girilebilir durumların sayısıdır. α ve β nın aldığı değerlere göre çeşitli entropi tanımları yapılabilir. Bu entropi tanımları ve genelleştirilmiş logaritmaları aşağıdaki gibi verilebilir.

2.3.2 Abe Entropisi

Abe logaritması için; $\alpha = \dfrac{1-q_A}{q_A}$ ve $\beta = \dfrac{\alpha}{1+\alpha} = 1 - q_A$ alınarak denklem (2.3.10) de kullanırsak

$$\ln(x) = \ln_A(x) \equiv \frac{x^{\frac{1-q_A}{q_A}} - x^{q_A - 1}}{\frac{1-q_A}{q_A} + 1 - q_A} \qquad (2.3.12)$$

ifadesini elde ederiz ve bunu (2.3.11) denkleminden yararlanarak düzenlersek, Abe entropisini

$$S_A = \sum_{i}^{W} \frac{p_i^{\frac{2q_A - 1}{q_A(t)}} - p_i^{2-q_A(t)}}{\frac{1-q_A}{q_A} + 1 - q_A} \qquad (2.3.13)$$

olarak elde ederiz.

2.3.3 Kaniadakis Entropisi

Kaniadakis logaritması için; $\alpha = \beta = \kappa$ ifadesini alarak bunları (2.3.10) denkleminde yerlerine yazarsak;

$$\ln(x) = \ln_\kappa(x) \equiv \frac{x^\kappa - x^{-\kappa}}{2\kappa} \qquad (2.3.14)$$

denklemini buluruz. Bu ifadeyi denklem (2.3.11) de kullanırsak Kaniadakis entropisini

$$S_\kappa = \langle \sum_i^W \frac{p_i^{1-\kappa}(t) - p_i^{1+\kappa}(t)}{2\kappa} \rangle \tag{2.3.15}$$

olarak buluruz.

2.3.4 Gamma Entropisi

Gamma logaritması için; $\alpha = 2\beta = 2\gamma$ değerleri gözönüne alınarak (2.3.10) denkleminde kullanılırsa

$$\ln(x) = \ln_\gamma(x) \equiv \frac{x^{2\gamma} - x^{-\gamma}}{3\gamma} \tag{2.3.16}$$

ifadesini elde ederiz ve bu ifadeyi (2.3.11) denkleminde kullanırsak Gamma entropisini

$$S_\gamma = \langle \sum_i^W \frac{p_i^{1-2\gamma}(t) - p_i^{1+\gamma}(t)}{3\gamma} \rangle \tag{2.3.17}$$

olarak buluruz.

BÖLÜM ÜÇ
EKTENSİF OLMAYAN İSTATİSTİK MEKANİK: TSALLİS İSTATİSTİĞİ

1865' te Clausius entropiyi klasik termodinamik çerçevesinde ortaya koydu. Bundan birkaç yıl sonra o yıllarda genç bir fizikçi olan Boltzmann' ın ve daha sonrada Gibbs' in katkılarıyla entropi mikroskopik niceliklere dayalı bir şekilde ifade edildi. Böylece makroskopik ve mikroskopik dünyalar arasında bir bağlantı kurulmuş oldu. Boltzmann-Gibbs entropisi ısısal denge halindeki sistemlerin faz uzayında her hali eşit olasılıkla işgal ettikleri prensibine dayanır. Bir sistemin entropisi faz uzayında girilebilir durumların sayısı cinsinden ifade edilebilir. Bu girilebilir durumların işgal edilme olasılıkları eşit değilse entropi,

$$S_{BG} = -k\sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i \tag{3.0.18}$$

olarak ifade edilebilir. Burada k Boltzmann sabiti, W girilebilir durumların sayısı, p_i ise i. durumun işgal edilme olasılığıdır. Eğer her hangi bir mikro hal işgal edilmemişse entropiye katkısı sıfır olur. Eğer bir sistemin N tane alt sistemden oluştuğunu düşünürsek ve bu alt sistemlerin olasılıkları eşitse $S_{BG} \propto NS_{BG}$ orantısı vardır. Bu alt sistemlerin etkileşimleri kısa erimli ise $S_{BG} \propto N$ şeklinde basite indirgenebilir. Fakat dengede olmayan sistemler için Boltzmann-Gibbs entropisi yetersiz kalır. Tam bu noktada yine mikroskopik olasılık terimleri içeren başka bir entropi ifadesini dengede olmayan sistemler için türetme gereksinimi ortaya çıkar. Böyle bir yaklaşım 1988' de Tsallis tarafından ilk kez ortaya kondu (Tsallis, 1988). Boltzmann-Gibbs entropisini içinde özel bir durum olarak içeren entropi tanımı;

$$\beta = 0, \quad S_q = k\frac{1-\sum_{i=1}^{W} p_i^q}{q-1} \tag{3.0.19}$$

şeklindedir. Tsallis entropisi ya da q entropisi diye adlandırılır. Burada q nonekstensivilik parametresidir. A ve B gibi iki alt sistem için $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$,

$\forall(ij)$ ise sistemin toplam entropisi

$$S_{q^*}(A+B)/k = [S_q(A)/k] + [S_q(B)/k] + (1-q)[S_q(A)/k][S_q(B)/k] \quad (3.0.20)$$

şeklinde nonekstensive olarak ifade edilir. q parametresinin özel bir halinde entropi artışı doğrusal olur. Bu özel halde q, q^* olarak gösterilir ve bu halde toplam entropi için

$$S_q(A+B) = S_{q^*}(A) + S_{q^*}(B) \quad (3.0.21)$$

ifadesi yazılabilir (Gell-Mann ve Tsallis, 2004).

Genelleştirilmiş herhangi bir entropi ifadesi Boltzmann-Gibbs entropisi tanımındaki standart logaritma yerine,

$$\ln(x) = \frac{x^{\alpha} - x^{-\beta}}{\alpha + \beta} \quad (3.0.22)$$

şeklindeki genelleştirilmiş logaritma tanımı kullanılarak ifade edilebilir, burada α ve β iki parametre, x ise fonksiyonun argümanıdır. Bu logaritma tanımı altında genelleştirilmiş entropilerin en genel formu

$$S(t) = \langle \sum_{i=1}^{W} p_i(t) \tilde{\ln}(\frac{1}{p_i(t)}) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{W} \frac{p_i^{1-\alpha}(t) - p_i^{1+\beta}(t)}{\alpha + \beta} \rangle \quad (3.0.23)$$

şeklinde verilir (Coraddu ve diğer., 2006). W faz uzayındaki girilebilir durumların sayısıdır. α ve β nın aldığı değerlere göre çeşitli entropi tanımları yapılabileceğinden bölüm ikide bahsetmiştik. Tsallis logaritması için $\alpha = 1-q$ ve $\beta = 0$ olmak üzere

$$\tilde{\ln}(x) = \ln_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \quad (3.0.24)$$

kullanıldığında, Tsallis entropisi;

$$S_q = \langle \frac{\sum_{i=1}^{W} p_i^q(t) - 1}{1-q} \rangle \quad (3.0.25)$$

olarak yazılabilir.

Tsallis termoistatistiği genelleştirilmiş bir istatistik teoridir ve bu teorinin özellikleri şu şekilde sıralanabilir.

- Her keyfi $\{p_i\}$ kümesi ve q parametresinin her değeri için $S_q \geq 0$ 'dır.

- Her i değeri için $p_i = 1/W$ olduğunda,

$$S_q = \langle \frac{\sum_{i=1}^{W} p_i^q(t) - 1}{1-q} \rangle$$

ifadesi $q > 0$için maksimum, $q < 0$ için minimum değerini alır.

- Sistemin termodinamik kararlılığını (Ramshaw, 1995) garanti edecek şekilde, tüm $\{p_i\}$ ler için $q > 0$ iken S_q konkav, $q < 0$ iken S_q konvekstir.

- **H teoremi:** (Mariz, 1992) $\frac{\partial S_q}{\partial t}$ ifadesi, $q > 0$ için pozitif, $q = 0$ için sıfır ve $q < 0$ için negatif olur. Burada t zamandır.

- A ve B birbirinden bağımsız iki sistem olmak üzere $(p_{ij}^{A\cup B} = p_i^A p_j^B)$, S_q aşağıdaki toplanabilirlik kuralına uyar (Curado ve Tsallis, 1991).

$$\frac{S_q^{A\cup B}}{k} = \frac{S_q^A}{k} + \frac{S_q^B}{k} + (1-q)\frac{S_q^A}{k}\frac{S_q^B}{k} \tag{3.0.26}$$

Bu bağıntıda;

$S_q^{A\cup B} = S_q^A + S_q^B$, $(q = 1)$ ise toplanabilirdir (yani ektensiftir).

$S_q^{A\cup B} < S_q^A + S_q^B$, $(q > 1)$ ise alt toplanabilirdir.

Alt toplanabilir: tüm sistemin entropisinin, sistemi oluşturan parçacıkların entropilerinin toplamından küçük olduğunu gösterir.

$S_q^{A\cup B} > S_q^A + S_q^B, \qquad (q<1)$ ise süper toplanabilirdir.

Süper toplanabilir: tüm sistemin entropisinin sistemi oluşturan parçacıkların entropilerinin toplamından büyük olduğunu gösterir. Bu durumda q entropi indisine sistemin nonextensifliğinin bir ölçüsü olarak bakabiliriz.

- W tane mikrohal, W_a ve W_b mikrohallerine sahip iki tane a ve b alt kümelerine ayrılırsa bunlara karşılık gelen olasılıklar $p_1, p_2, ..., p_{W_{u+1}}$ ve $p_{W_{u+1}}, p_{W_{u+2}}, ..., p_W$ olarak yazılabilir. Böyle bir sistem için aşağıdaki toplanabilirlik kuralı geçerlidir.

$$S_q(p_1,...,p_W) = S_1(p_a,p_b) + p_a^p S_q(\frac{p_1}{p_\alpha},...,\frac{p_{W_a}}{p_a}) + p_b^q S_q(\frac{p_{W_{\alpha+1}}}{p_b},...,\frac{p_W}{p_b})$$

S_q entropisi;

$$\sum_{i=1}^{W} p_i = 1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{W} p_i^q \varepsilon_1}{\sum_{i=1}^{W} p_i^q} = U_q^{(3)}$$

bağ koşulları altında elde edilen dağılım fonksiyonu;

$$p_i^{(3)} = \frac{[1-(1-q)\beta(\varepsilon_i - U_q^{(3)})/\sum_{j=1}^{W}(p_j^{(3)})^q]^{\frac{1}{1-q}}}{f_q^{(3)}} \qquad (3.0.27)$$

burada $f_q^{(3)}$ ifadesi entropi indisi içeren ve sistemin enerjisi için 3. seçim kullanılarak ortaya çıkarılmış sistemin partisyon fonksiyonudur.

$$f_q^{(3)} = \sum_{i=1}^{W} [1 - (1-q)\beta(\varepsilon_i - U_q^{(3)}) / \sum_{j=1}^{W} (p_j^{(3)})^q]^{\frac{1}{1-q}} \tag{3.0.28}$$

Sistemin enerji ifadesi için kullanılan ilk iki seçim şu şekildedir.

$$\sum_{i=1}^{W} p_i \varepsilon_i = U_q^{(1)} \tag{3.0.29}$$

$$\sum_{i=1}^{W} p_i^q \varepsilon_i = U_q^{(2)} \tag{3.0.30}$$

İlk iki seçim son yıllarda birçok farklı sisteme uygulanmıştır (Curado ve Tsallis, 1991). Örneğin ortalama enerji için ilk seçim düzensiz Levy süperpozisyonu gibi düzensiz sistemlerin seri matematik zorluklarını ele almak için uygundur. İkinci seçim ilk olarak (Tsallis, 1988) hesapladı ve ondan sonra yoğun olarak çalışıldı ve kullanıldı. İlk iki seçimin dezavantajı, olasılık teorisine uymamasıdır. Yani ilk iki seçim ayrı ayrı kullanılarak ve 1. bağ koşulu ile elde edilen dağılım fonksiyonu olasılık teorisine göre olması gereken normalizasyon şartını sağlamaz. Fakat 3. seçim en iyi yaklaşımdır ve kullanılması ile elde edilen (3.0.27) numaralı denklemdeki dağılım fonksiyonu 1' e normalizedir. Bu seçim en iyi yaklaşım olarak fiziksel sistemleri tanımlamada kullanılır ve Tsallis-Mendes-Plastino seçimi olarak adlandırılır (Tsallis ve diğer., 2000). Bu seçim kullanılarak herhangi bir gözlenebilirliğin normalize olmuş q ' ya bağlı beklenen değeri;

$$A_q = \frac{\sum_{i=1}^{W} p_i^q A_i}{\sum_{i=1}^{W} p_i^q} = \langle A_i \rangle_q \tag{3.0.31}$$

şeklindedir. Burada A; hamiltonyen ile komüt olan herhangi bir gözlenebilir niceliği gösterir.

BÖLÜM DÖRT
TSALLİS ENTROPİ EŞİTSİZLİĞİ

1975 yılında Bialynicki-Birula ve Mycielski (Bialynicki-Birula ve Mycielski, 1975), Sobolev eşitsizliğinden yararlanarak momentum ve konumdaki olasılık yoğunluklarını Shannon-von Neumann entropisi ile ilişkilendirmişlerdir. $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$ alınarak Sobolev eşitsizliği konum uzayındaki dalga fonksiyonu ($\psi \in L^{p_1}$) ve onun Fourier transformu ($\tilde{\psi} \in L^{q_1}$) arasında ilişki kurar (Rajagopal, 1995). Bu ilişki aşağıda gösterildiği gibidir;

$$\parallel \psi \parallel_{p_1} = (\int d^n r \mid \psi(r) \mid^{p_1})^{1/p_1} \quad (n = uzay \ \ boyutu) \tag{4.0.32}$$

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n r \psi(r) exp(-ikr) \tag{4.0.33}$$

$$\parallel \psi \parallel_{q_1} = (\int d^n r \mid \tilde{\psi}(k) \mid^{q_1})^{1/q_1} \tag{4.0.34}$$

Sobolev eşitsizliği (Bialynicki-Birula ve Mycielski, 1975);

$$k(p_1, q_1) \parallel \psi \parallel_{p_1} \geq \parallel \tilde{\psi} \parallel_{q_1} \tag{4.0.35}$$

ifadesiyle verilir. Burada k sabiti q_1 ve p_1 in fonksiyonu olup

$$k(p_1, q_1) = (\frac{2\pi}{q_1})^{n/2q_1} (\frac{2\pi}{p_1})^{n/2p_1} \tag{4.0.36}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi Sobolev eşitsizliği dalga fonksiyonun reel değeri ile onun Fourier uzayındaki değeri arasındaki ilişkisinini tanımlar.

Maassen and Uffink (Maassen ve Uffink, 1988), BBM eşitsizliğini genelleştirmek için denklem (4.0.36) de verilen Hausdorff-Young (Reed ve Simon, 1975) formunu, $k(p_1, q_1) = (2\pi)^{n(p_1^{-1} - q_1^{-1})/2}$ denklemini kullanarak dikkate aldılar.

Bunun için aşağıda verilen yeni bir ölçüm birimi geliştirdiler.

$$M_r(P) = (\int dx[P(x)]^{1+r})^{1/r} \tag{4.0.37}$$

Denklem (4.0.37) de $r = 0$ alınırsa, denklem Shannon-von Neumann entropisine dönüşür. Shannon-von Neumann entropisi özellikle ektensif sistemlere uygulanmak için dizayn edilmiştir. Bunun ektensif olmayan sistemlere uygulanması Tsallis tarafından önerilmiştir. Tsallis entropinin yeni formülünü;

$$S_q(P) = \frac{1}{1-q}(1 - \int dx[P(x)]^q) \tag{4.0.38}$$

denklemi ile ifade etmiştir. Burada nonextensivite derecesini gösteren entropi indeksi q reel sayıdır. $q \to 1$ iken nonextensive entropisi,

$$S_{q\to 1}(P) = -\int dxp(x)\ln p(x)$$

ile verilen konum uzayındaki Shannon bilgi entropisine dönüşür.

Aşağıda verilen denklem yardımı ile Maassen and Uffink ölçümü Tsallis entropisi ile ilişkilendirilebilir.

$$S_q(P) = \frac{1}{1-q}[1-(1-q)\ln M_{q-1}(P)] \quad 0 \le q \le \infty \tag{4.0.39}$$

Kuantum mekaniğinde, konum uzayında olasılık yoğunluğu $\mid \psi(r) \mid^2$, momentum uzayında ise olasılık yoğunluğu $\mid \psi(k) \mid^2$ şeklindedir. $p_1 = 2p$, $q_1 = 2q$ olarak seçilirse Sobolev normları $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 2$ haline gelir. Bunları (4.0.32) ve (4.0.34) denklemlerinde kullanırsak, Tsallis' in önerdiği konum ve momentum entropilerini;

$$S_p(X) = \frac{1}{1-p}(1 - \int d^n r \mid \psi(r) \mid^{2p}) \tag{4.0.40}$$

$$S_q(P) = \frac{1}{q-1}(1 - \int d^n k \mid \tilde{\psi}(r) \mid^{2q}) \tag{4.0.41}$$

olarak elde ederiz. Bunlardan faydalanarak denklem (4.0.36)' ü tekrar düzenlersek Tsallis entropisine uygun entropi belirsizlik eşitsizliğini;

$$[1 + (1-q)S_q(P)]^{1/2q} \leq (\frac{\pi}{q})^{n/4q}(\frac{\pi}{p})^{-n/4p}[1 + (1-p)S_p(X)]^{1/2p} \tag{4.0.42}$$

şeklinde elde ederiz. Bu denklemde p ve q için limit alırsak;

$$n(1 + \ln \pi) \leq S(X) + S(P) \tag{4.0.43}$$

ile verilen BBM eşitsizliğini elde ederiz.

BÖLÜM BEŞ
PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİ İÇİN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde Pöschl-Teller potansiyeli için Schrödinger denklemini çözerek bu potansiyele karşı gelen dalga fonksiyonunu elde edecegiz. Pöschl-Teller potansiyeli

$$V_{PT}(X) = \frac{V_0}{\cosh^2(\frac{x}{a})} \tag{5.0.44}$$

şeklinde verilir. Şimdi Pöschl-Teller potansiyeli için özdeğerleri bulalım. Pöschl-Teller potansiyeli için Schrödinger denklemi

$$-\frac{\hbar}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} - [E - \frac{V_0}{\cosh^2(\frac{x}{a})}]\psi(x) = 0 \tag{5.0.45}$$

ifadesiyle verilir. Bu denklemin çözümü pek çok araştırmacı tarafından farklı yollar izlenerek yapılmıştır (Arias ve diğer., 2004; Pöschl ve Teller, 1933). Denklemi çözebilmek için aşağıdaki değişken değiştirme işlemleri yapılarak fonksiyon çözümü bilinen bir fonksiyona dönüştürülebilir.

$$\psi(x) = (\cosh^2(\frac{x}{a}))^{-2\lambda u} \quad , \quad \lambda = \frac{1}{4}(\sqrt{\frac{8\mu V_0 a^2}{\hbar^2} + 1} - 1) \tag{5.0.46}$$

Bu ifadeleri (5.0.45) denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{4\lambda}{a}\tanh\frac{x}{a}\frac{du}{dx} + \frac{4}{a^2}(\lambda^2 - \kappa^2)u = 0 \tag{5.0.47}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemde $\kappa = \sqrt{-\frac{\mu E a^2}{2\hbar^2}}$ şeklindedir.

Böylece denklem u nun bir fonksiyonuna dönüştürüldü. Bağlı hal için $E < 0$ ve $\alpha > 0$ yeni bağımsız değişken z olmak üzere, $z = \sinh(\frac{x}{a})$ yazılarak denklem,

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [\frac{1}{2} - (1-2\lambda)z]\frac{du}{dz} + (\lambda^2 - \kappa^2)u = 0 \tag{5.0.48}$$

haline dönüşür. (5.0.48) ifadesi hipergeometrik diferansiyel denklemdir.

Hipergeometrik diferensiyel denklemi için form,

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{du}{dz}+\alpha\beta u=0 \tag{5.0.49}$$

şeklindedir. (5.0.49) denkleminden;

$$E_n=-D+\hbar\omega((n+\frac{1}{2})-\frac{1}{\zeta}(n+\frac{1}{2})) \tag{5.0.50}$$

$$\gamma=\frac{1}{2}, \qquad \alpha=\kappa-\lambda, \qquad \beta=-\kappa-\lambda$$

değerlerini yazılabiliriz. Hipergeometrik denklem için çözümler,

$$u_1=F(-\lambda+\kappa,-\lambda-\kappa,\frac{1}{2};z) \tag{5.0.51}$$

$$u_2=F(-\lambda+\kappa+\frac{1}{2},-\lambda-\kappa+\frac{1}{2},\frac{3}{2};z)\sqrt{z} \tag{5.0.52}$$

biçimindedir. Bu çözümler $x = 0$' da ($z = 0$' da) sonlu değerler verir. $\psi = (\cosh\frac{x}{a})^{-2\lambda}$, $x \to \pm\infty$' da sıfıra gidebilmesi için yukarıdaki hipergeometrik fonksiyonların polinomlara dönüşmesi gerekir. $\lambda-\kappa > 0$ ve $\lambda+\kappa > 0$ olması gerekir. Bu duruma ikinci çözüm uygun değildir. Bu durumda birinci çözüm $\lambda-\kappa > 0$ alınır ($\kappa = 0, 1, 2, ...$). Buradan u_1 için çözüm;

$$E_n=-\frac{\hbar^2}{2\mu a^2}[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\mu V_0 a^2}{\hbar^2}+1}-2\kappa-\frac{1}{2}]^2 \tag{5.0.53}$$

şeklinde bulunur. u_2 çözümünün $x \to \pm\infty$' da sonlu kalabilmesi için $\lambda-\kappa-\frac{1}{2}=0$ ($l = 0, 1, 2, ...$) alınarak u_2 için çözüm;

$$E_n=-\frac{\hbar^2}{2\mu a^2}[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\mu V_0 a^2}{\hbar^2}+1}-2(2l+1)-\frac{1}{2}]^2 \tag{5.0.54}$$

olarak bulunur. (5.0.53) ve (5.0.54) denklemlerinin çözümleri birleştirilerek enerji spektrumu ve dalga fonksiyonunu;

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu a^2}[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\mu V_0 a^2}{\hbar^2}+1} - 2(n+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}]^2 \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.0.55}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{2(\beta[\frac{1}{2},\lambda-1] - \beta[\frac{1}{2},\lambda])}}(sech(\frac{x}{2}))^{\lambda-1}\tanh(\frac{x}{2}) \tag{5.0.56}$$

şeklinde elde ederiz.

BÖLÜM ALTI
SONUÇ

6.1 Pöschl-Teller Potansiyeli İçin Entropik Eşitsizlik

Pöschl-Teller potansiyeline karşı gelen dalga fonksiyonunu bölüm 5' te

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{2(\beta[\frac{1}{2}, \lambda - 1] - \beta[\frac{1}{2}, \lambda])}}(sech(\frac{x}{2}))^{\lambda-1} \tanh(\frac{x}{2})$$

şeklinde elde etmiştik. Bu bölümdeki amacımız bu dalga fonksiyonun Tsallis entropi eşitsizliğini sağlayıp sağlamadığını göstermektir. Dördüncü bölümde Tsallis entropi eşitsizliği ifadesinin

$$[1 + (1 - q)S_q(P)]^{1/2q} \leq (\frac{\pi}{q})^{n/4q}(\frac{\pi}{p})^{-n/4p}[1 + (1 - p)S_p(X)]^{1/2p}$$

şeklinde yazılabileceğini ifade etmiştik. Burada öncelikle (5.0.56) dalga fonksiyonunu kullanarak $S_q(P)$ ve $S_p(X)$ entropi fonksiyonlarını hesaplamak gerekir. Bu işlemi Mathematica paket programı kullanarak gerçekleştirdik. Kullandığımız mathematica kodu ek de verilmiştir. Mathematica paket programından elde ettiğimiz sonuçlar aşağıda bir tabloda verilmiştir. Bu tabloda görüldüğü gibi farklı q, λ ve p değerleri için eşitsizlik tekrar tekrar çözülerek sonuçlar elde edilmiştir. Bu tabloda gösterilen sonuçlardan da anlaşıldığı gibi Pöschl-Teller potansiyeline karşı gelen (5.0.56) dalga fonksiyonunu Tsallis entropi eşitsizliğini sağlamaktadır. Aynı zamanda farklı parametreler için bu eşitsizlik sağlanmaya devam etmektedir.

Tablo 6.1 Pöschl-Teller potansiyeline karşı gelen dalga fonksiyonu için Tsallis eşitsizliği sonuçları.

λ	q	p	$S_q(P)$	$S_p(X)$	Tsallis Entropi Eşitsizliği
2	5/7	5/3	0.486715	3.34351	$0.888988 \leq 1.047222$
3	5/7	5/3	0.686604	2.51685	$0.832439 \leq 0.956979$
4	5/7	5/3	0.785095	2.11394	$0.800658 \leq 0.911658$
5	5/7	5/3	0.848609	1.85543	$0.778622 \leq 0.882065$
6	5/7	5/3	0.894266	1.66798	$0.761831 \leq 0.860337$
7	5/7	5/3	0.929332	1.52224	$0.748322 \leq 0.843282$
8	5/7	5/3	0.957485	1.40374	$0.737049 \leq 0.829304$
9	5/7	5/3	0.980801	1.30431	$0.727399 \leq 0.817497$
10	5/7	5/3	1.000577	1.21893	$0.718978 \leq 0.807299$
2	3/4	3/2	0.528497	3.16128	$0.902777 \leq 1.034687$
3	3/4	3/2	0.750036	2.40212	$0.854988 \leq 0.960195$
4	3/4	3/2	0.865449	2.02692	$0.827811 \leq 0.922304$
5	3/4	3/2	1.78418	0.94166	$0.808844 \leq 0.897377$
6	3/4	3/2	0.99736	1.60713	$0.794325 \leq 0.878963$
7	3/4	3/2	1.04139	1.46886	$0.782599 \leq 0.864454$
8	3/4	3/2	1.07777	1.35602	$0.772781 \leq 0.852521$
9	3/4	3/2	1.10686	1.26105	$0.764357 \leq 0.842414$
10	3/4	3/2	1.10686	1.17929	$0.756987 \leq 0.833662$

KAYNAKLAR

Abe, S., Martinezb, S., Pennini, F., ve Plastino, A. (2002). Entropic uncertainty relation for power-law wave packets. *Physics Letters A*, 295(74-77).

Arias, J., Gomez-Camacho, J., ve Lemus, R. (2004). An su(1,1) dynamical algebra for the morse potential. *J.Phys.A: Math.Gen.*, 37(1805-1820).

Aydıner, E., Orta, C., ve Sever, R. (2006). Quantum-information entropies of the eigenstates of the morse potential. *arXiv:quant-ph*, 1(0602203).

Bialynicki-Birula, I., ve Mycielski, J. (1975). Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 44(129-132).

Coraddu, M., Lissia, M., ve Tonnelli, R. (2006). Statistical descriptions of nonlinear system at the onset of chaos. *Physica A*, 365, 252–272.

Curado, E., ve Tsallis, C. (1991). *J.Phys. A*, 24(L69).

Gell-Mann, M., ve Tsallis, C. (2004). *Nonextensive entropy interdisciplinary applications*. New York: Oxford University Press INC.

G.Lissia, K., ve Scarfeno, A. (2005). Two-parameter deformation of logarithm, exponential, and entropy: A consistent framework for generalized statistical mechanics. *Phys. Rev. E*, 71(046128).

Maassen, H., ve Uffink, J. (1988). *Phys. Rev. Lett*, 60(1103).

Mariz, A. (1992). On the irreversible nature of the tsallis and reyni entropies. *Phys.Lett.A*, 165(409).

Ohya, M., ve Petz, D. (1993). Quantum entropy and its use. *Springer Verlag,Berlin.*

Pöschl, G., ve Teller, E. (1933). Bemerkunger zur quantenmechanik des anharmonischen oszillators. *Z. Physik*, 83(143-151).

Rajagopal, A. K. (1995). The sobelev inequality and tsallis entropic uncertainty relation. *Phys. Lett. A*, 205, 32–36.

Ramshaw, J. (1995). Thermodynamic stability conditions for the tsallis and reyni entropies. *Phys.Lett.A*, 175(171).

Reed, M., ve Simon, B. (1975). *Methods of modern mathematical physics*, vol. 2. New York: Acedemic Press.

Saçlıoğlu, C. (2000). Felsefenin kuantum mekaniksel temelleri. *Bilim Teknik*, (395), 56–63.

Shannon, C. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell Sys.Tech.J.*, 27, 379–423.

Tsallis, C. (1988). Possible generalizattion of boltzmann-gibs statistic. *J. Stat.Phys.*, 52(479).

Tsallis, C., Mendes, R., ve Plastino, A. (2000). *Physica A*, 534.

Uffink, J., ve Hilgewoord, J. (1985). Uncertainty principle and uncertainty relations. *Found.Phys.*, 15(925-944).

EK

Tsallis Entropi Eşitsizliğinin Pöschl-Teller Potansiyeline Uygulandığı Mathematica Paket Programı :

****

ClearAll;Clear[λ,c,p,q,x,k,Spos,Smom,Φ, Ψ, ρ, σ,D1,D2];

$\lambda; q = \frac{3}{4}; p = \frac{3}{4}$

Do$\left[\Psi = \sqrt{\frac{1}{2 * (Beta[\frac{1}{2}, \lambda - 1] - Beta[\frac{1}{2}, \lambda])}} * (Sech[\frac{x}{2}])^{\lambda-1} Tanh[\frac{x}{2}];\right.$

$\rho = \Psi * Conjugate[\Psi];$

Φ=FourierTransform[Ψ, x, k];

$\sigma = \Phi * Conjugate[\Phi];$

Spos=$(\frac{1}{q-1}) * [1 - N[NIntegrate[\rho^q, x, -100, 0, 100]])]);$

Smom=$(\frac{1}{p-1}) * [1 - N[NIntegrate[\sigma^p, k, -100, 0, 100]])]);$

D1=$(1 + (1 - p) * Smom)^{\frac{1}{2*p}}$

D2=$(\frac{3.14}{q})^{-\frac{1}{4*q}} * (\frac{3.14}{p})^{\frac{1}{4*p}} * (1 + (1 - q) * Spos)^{\frac{1}{2*q}};$

Print[$''\lambda ='';\lambda$];

Print["Tsallis Position Entropy = ", Spos];

Print["Tsallis Momentum Entropy = ", Smom];

Print["Left=",D1];

Print["Right=",D2];

Print["——————"],

$\lambda, 2, 10]$

****