

**DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YERALTISUYU AKIMLARININ**  
**MODELLENMESİNDE KOLLOKASYON METODU**

**Hasan Utku ÇAKIR**

**Ekim, 2011**  
**İZMİR**

# **YERALTISUYU AKIMLARININ MODELLENMESİNDE KOLLOKASYON METODU**

**Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Yüksek Lisans Tezi**

**İnşaat Mühendisliği Bölümü, Hidrolik Hidroloji-Su Kaynakları**

**Hasan Utku ÇAKIR**

**Ekim, 2011**

**İZMİR**

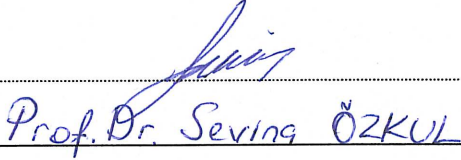
## YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

HASAN UTKU ÇAKIR, tarafından DOÇ. DR. BİROL KAYA yönetiminde hazırlanan “YERALTI SUYU AKIMLARININ MODELLENMESİNDE KOLLOKASYON METODU” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



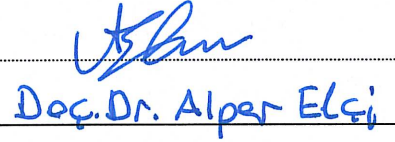
Doç. Dr. Birol KAYA

Yönetici



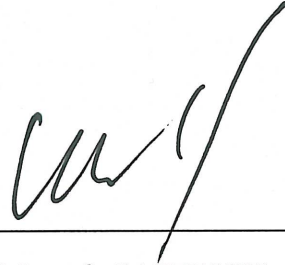
Prof. Dr. Sevinç ÖZKUL

Jüri Üyesi



Doç. Dr. Alper Elçi

Jüri Üyesi



Prof. Dr. Mustafa SABUNCU

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

## TEŞEKKÜR

Çalıőmalarımnda bana yardımcı olan, bilgi, tecrübe ve desteğini benden esirgemeyen, tezin oluőumunda önemli katkılarda bulunan danıőman hocam Doç. Dr. Birol KAYA'ya,

Tez çalıőmam sırasındaki anlayıőlarından dolayı, yakın arkadaőlarıma, kurum amirlerime ve çalışma arkadaőlarıma,

Bugünlere gelmemde üzerimdeki emeklerinden dolayı, bana her zaman inanan, güvenen, destekleyen; hayatın en zor dönemlerindeki desteklerinden dolayı canımdan çok sevdiğim abime, anneme ve babama teőekkürlerimi sunarım.

Hasan Utku ÇAKIR

İnşaat Mühendisi

# YERALTI SUYU AKIMLARININ MODELLENMESİNDE KOLLOKASYON METODU

## ÖZ

Mühendislik sistemleri veya problemleri çoğu zaman yapılan kabullere bağlı olarak 1, 2 veya 3 boyutta kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edilebilirler. Fakat gerek problemin doğasının karmaşıklığı gerekse sınır şartlarının çokluğundan dolayı bu kısmi diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerine matematiksel yöntemlerle ulaşamaz. Bu noktada kesin çözümü bulunamayan diferansiyel denklemlere belirli bir hata kabulü yapılarak yaklaşık çözümler sunulmaya çalışılmıştır. Sonlu farklar, sonlu elemanlar, sonlu hacimler yöntemleri gibi klasik yöntemlerin yanı sıra son yıllarda kollokasyon yöntemleri de mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılmaya başlanmıştır. Daha az düğüm noktası kullanarak daha hassas sonuçlar elde edebilmesine olanak sağlayan kollokasyon yöntemi, sonlu elemanlar ve sonlu farklar gibi verilen diferansiyel denklemi, çözüm bölgesi için önceden seçilen düğüm noktalarında bilinmeyen fonksiyon değerlerine bağlı bir lineer denklem takımına indirgemektedir.

Günümüze kadar yaklaşık çözümler elde etmek amacıyla bir çok yöntem geliştirilmiş ve bunların bir kısmı teoriden pratiğe teknolojik yetersizliklerden dolayı geçememiştir. Teknolojideki gelişme bir çok yöntemi uygulanabilir kılmıştır

Bu çalışmada, iki boyutlu yeraltı suyu akımı incelenerek kollokasyon yöntemi ile sayısal bir model geliştirilmiştir. Karşılaştırma amacıyla kapalı ve açık formda sonlu farklar yöntemi ile de çözüm yapılmıştır. Öncelikle analitik çözümü bilinen 2 boyutlu kısmi diferansiyel denklem çözülmüş ve sonlu fark yöntemleri ile kollokasyon yöntemi karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar kollokasyon yönteminin sonlu fark yöntemlerinde daha iyi sonuçlar verdiğini göstermektedir. İkinci örnekte ise iki boyutlu bir yeraltı suyu problemi sonlu fark yöntemleri ve kollokasyon yöntemi ile çözülmüştür. Programlamada MATLAB programı kullanılmıştır.

**Anahtar sözcükler:** yeraltı suyu akımı, iki boyutlu, nümerik çözüm, kollokasyon yöntemi, sonlu farklar yöntemi

**COLLOCATION METHOD ON MODELLING OF GROUNDWATER  
FLOWS  
ABSTRACT**

Engineering systems or problems can be expressed usually with partial differential equations in one, two or three dimensions. But because of complexity of problem comes from nature itself and considerable amount of limit conditions, differential equations cannot be solved precisely by mathematical methods. At this point approximate solutions with specific error assumption are presented to differential equations which cannot be solved absolutely. Beside classical methods like finite differences, finite elements and finite volumes, in last years collocation methods are used frequently in solving engineering problems. Collocation method that provides more accurate by using less tie points, can degrade given differential equation like finite elements and finite differences, to linear equation system that is bounded to unknow function values on tie point selected before for solution area.

Until today many methods developed for acquiring approximate solutions and some of them cannot be practiced due to technological insufficiency. Technological advances make many applicable methods in theory. Each methods have their own advantages and disadvantages in respect to needed computation capacity, time or precision.

In this study, by examining two-dimensional groundwater flow, a numerical model developed with collocation method. For reference, the problem is solved with finite differences method in open and close forms. First of all, 2 dimensional partial differential equation which has exact solution is solved and then that solution is used to compare to finite difference method and collocation method. this comparison shows us, that the collocation method is better than the finite differences method. For the second example a groundwater flow problem is solved with finite differences and collocation methods. MATLAB is used for programming.

**Keywords:** groundwater flow, two dimension, numerical solution, collocation method, finite differences method

## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU .....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZ .....	iv
ABSTRACT.....	v
<b>BÖLÜM BİR - AMAÇ ve KAPSAM.....</b>	<b>1</b>
1.1 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı .....	1
1.2 Önceki Çalışmalar .....	2
<b>BÖLÜM İKİ - YERALTI SUYU AKIMI .....</b>	<b>5</b>
2.1 Su Potansiyeli ve Hidrolojik Çevrim.....	5
2.2 Yeraltı Suyu.....	7
2.3 Darcy Yasası ve Hidrolik İletkenlik .....	9
2.4 Basıncılı Akiferlerde İletimlilik ve Depolama .....	12
2.5 Serbest Yüzeyle Akiferlerde İletimlilik ve Özgül Verimlilik.....	12
<b>BÖLÜM ÜÇ - YERALTI SUYU AKIMININ TEMEL DENKLEMLERİ .....</b>	<b>14</b>
3.1 Basıncılı Akiferde Yeraltı Suyu Akımının Temel Denklemleri.....	14
3.2 Serbest Yüzeyle Akiferde Yeraltı Suyu Akımının Temel Denklemleri .....	16
<b>BÖLÜM DÖRT - NÜMERİK METODLAR .....</b>	<b>19</b>
4.1 Genel .....	19

4.2 Sonlu Farklar Yöntemi .....	20
4.3 Sonlu Farklar Formülasyonu .....	21
<b>BÖLÜM BEŞ - KOLLOKASYON METODU .....</b>	<b>25</b>
5.1 Kollokasyon Metodu .....	25
5.1.1 Başlangıç ve Sınır Koşulları .....	26
5.1.2 Kollokasyon Noktalarının Sayısı ve Seçimi .....	27
5.2 1 ve 2 Boyutlu Sistemler İçin Kollokasyon Metodu .....	30
<b>BÖLÜM ALTI - YERALTI SUYU AKIM PROBLEMLERİMİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ .....</b>	<b>35</b>
6.1 Basıncılı Akiferde Yeraltı Suyu Problemi.....	35
6.1.1 Sonlu Farklar Yöntemi.....	35
6.1.2 Kollokasyon Metodu.....	36
6.2 Serbest Yüzeyle Akiferde Yeraltı Suyu Problemi .....	37
6.2.1 Sonlu Farklar Yöntemi.....	38
6.2.2 Kollokasyon Metodu.....	39
<b>BÖLÜM YEDİ - UYGULAMALAR.....</b>	<b>41</b>
7.1 Örnek 1 .....	41
7.2 Örnek 2 .....	60
7.3 Örnek 3 .....	74
<b>BÖLÜM SEKİZ - SONUÇ .....</b>	<b>88</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>90</b>



# BÖLÜM BİR

## AMAÇ ve KAPSAM

### 1.1 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Genel olarak mühendislik problemleri, karmaşık sınır ve başlangıç şartları ile tanımlanabilmektedir. Bu nedenle mühendislik problemlerinin matematiksel ifadesi olan kısmi diferansiyel denklemlerin, bu karmaşık ve çok sayıdaki sınır ve başlangıç şartlarının etkisiyle, kesin çözümüne matematiksel olarak ulaşmak çok özel durumlar haricinde mümkün olmamaktadır. Bu noktada probleme kabul edilebilir bir hata payı ile yaklaşık çözümler bulma fikri doğmuştur. Günümüze kadar yaklaşık çözümler elde etmek amacıyla birçok yöntem geliştirilmiş ve bunların bir kısmı teoriden pratiğe teknolojik yetersizliklerden dolayı geçememiştir. Teknolojideki gelişme geçmişte teoride kalmış bir çok yöntemi uygulanabilir kılmıştır.. Bu yöntemlerin her birinin; ihtiyaç duyulan bilgisayar kapasitesi, zaman ve hassasiyet açısından birbirlerine göre avantajları ve dezavantajları bulunmaktadır.

Yöntemlerin problemler üzerinde uygulanabilirliği de ayrı bir sorundur. Olayın yada gerçek hayattaki problemin doğasına, onu tanımlayan matematiksel ifadenin yapısına, sınır ve başlangıç şartlarına bağlı olarak yaklaşık çözüm yöntemleri de iyi yada kötü sonuçlar verebilmektedirler ve bu konu da araştırılması gereken bir konudur.

Bu çalışmada son zamanlarda mühendislik problemlerinde kullanılmaya başlanan kollokasyon yöntemi incelenecek ve yeraltı suyu problemlerine uygulanabilirliği incelenecektir.

## 1.2 Önceki Çalışmalar

Yeraltı suyu akımlarının iki boyutlu olarak nümerik modellenmesi konusunda sonlu farklar, sonlu elemanlar, sonlu hacimler gibi yöntemler kullanılmaktadır. Modellemede hesap süresi ve sonuçların doğruluğu açısından optimum çözümü elde etmek açısından gerek yöntemlerin farklı yaklaşımlarla kullanılması ve gerekse farklı yöntemlerin uygulanması konusunda araştırmalar sürmektedir.

Özellikle yakın zamanda yapılan çalışmalar incelendiğinde, çalışmaların sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri üzerinde yoğunlaştığı görülmektedir. Kararlı bölgedeki yeraltı suyu akımı için geliştirilmiş bir matematiksel modeli kullanarak, Freeze ve Witherspoon (1966) sayısal ve analitik çözümleri karşılaştırmıştır. Yapılan bu çalışmada özellikle sayısal çözümün analitik çözüme olan avantajları belirtilmiştir. Bredehoeft ve Pinder (1968) tarafından, basınçlı akiferlerdeki kararsız akım kapalı şema ile sonlu farklar yöntemi uygulanarak bir sayısal model geliştirilmiştir. Yapılan çalışmada elde edilen sonuçlar basit geometri akiferlerin analitik sonuçlarıyla ve arazi çalışmalarının sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Bredehoeft (1969) daha önce yaptığı çalışmaları da içeren bir modelde sonlu farklar yöntemini yeraltı suyu akımı denklemlerine uygulamış ve analog modellerle karşılaştırma yapılmıştır. Taylor ve Luthin (1969) tarafından yapılmış çalışmada hesaplamalı bilgisayar yöntemleri, akiferlerin zamana bağlı çözümlemesinde önerilmiş ve sonlu farklar yönteminin serbest yüzeyli akiferdeki alçalma için doğru sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Bredehoeft ve Pinder (1970) tarafından yapılmış bir başka çalışmada ise çok akiferli sistemler ele alınmıştır. Çok akiferli yeraltı suyu sistemlerinde alansal akımın sayısal çözümlemesinin gerçekleştirildiği bu çalışmada sonlu fark yöntemi ile çözüm yapmak için iteratif ADIM (alternating direction implicit method – alternatif yönlü implisit yöntem) kullanılmıştır. Anılan model basınçlı bir tabaka ve iki akifer için üç boyutlu olarak çözülmüştür. Sızdırmalı ve sızdırmaz artezyen koşullarındaki heterojen akiferlere ilişkin çalışmalarında Prickett ve Lonquist (1971) bir, iki ve üç boyutlu, üniform olmayan yeraltı suyu benzetimi için genel bir bilgisayar programı geliştirmiştir. Larson ve Trescott (1977) anizotropik akım problemlerinin çözümüne yönelik etkili bir kapalı yöntem geliştirmiştir. Bu çalışmada test problemleri için farklı iteratif yöntemler gerektiren

hesaplamalar karşılaştırılmıştır. İki boyutlu kararsız heterojen anizotrop ortamda yeraltı suyu kirliliğini önlemek amacıyla İrfanoğlu (1994) bir çalışma yapmıştır. Burada sabit grid aralıkları kullanılmış ve problemi çözmek için C++ dilinde bir benzetim programı yazılmıştır. Gürarlan (2004), düzensiz sonlu farklar hesap şeması kullanarak iki boyutlu yeraltı suyu akımını modellemiştir. Abay (2006) yaptığı çalışmada heterojen zeminlerde geçiş bölgesindeki akım karakteristiklerini sayısal olarak incelemiştir. Bu çalışmada sayısal yöntemlerden biri olan sonlu farklar yöntemi ile değişken ve sabit grid aralıkları kullanılmıştır. Sonlu farklar yöntemi kapalı yaklaşımla ele alınmıştır.

Sonlu fark yönteminin yanı sıra sonlu elemanlar yöntemi de yeraltı suyu akımlarının modellenmesinde yaygın kullanılan yöntemlerdendir. Kinzelbach (1986) yeraltı suyu akımı ve çözünmüş madde taşınımına ilişkin bir model sunmuştur. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemlerine ilişkin kodlar ve bu kodların uygulamaları verilmiştir. Kamkar-Rouhani(2008) yaptığı çalışmada iki boyutta yeraltı suyu akımı modellemesi yapmıştır. Çalışmada sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemini kullanmış ve sonuçlarını karşılaştırmıştır. Sonuç olarak sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçların sonlu farklar yöntemine kıyasla daha iyi olduğunu ifade etmiştir. Gutierrez ve Linares (2008) yaptıkları çalışmada yeraltı suyu parametrelerinin tahmini için sonlu elemanlar yöntemi ile matematiksel bir model oluşturmuşlardır. Igboekwe ve Achi (2011) çalışmalarında yeraltı suyu akımını sonlu elemanlar yöntemini kullanarak 2 boyutlu olarak modellemişlerdir. Elde ettikleri akım yönü, hızı, enerji seviyesi gibi değerlerin pratikteki gözlem değerleriyle paralellik gösterdiğini ifade etmişlerdir.

Kollokasyon yöntemi diğer bir tanımla Diferansiyel kuadratur yöntemi ise Bellman vd. (1971) tarafından ilk kez önerilen bir yöntemdir. Farklı mühendislik problemlerinin çözümlerinde kullanımı konusunda çalışmalar söz konusu olmakla birlikte, su mühendisliği alanındaki kullanımı son yıllarda söz konusu olmuştur. Hashemi ve diğerleri (2006,2007) tarafından yapılan çalışmalarda, açık kanallardaki kararsız akımların matematik modellerinde differansiyel kuadratur yöntemi kullanılmıştır. Yeraltı kanallarındaki su yüzü profilleri Robati ve Barani (2009) tarafından differansiyel kuadratur yöntemi ile modellenmiştir. Kaya (2010, 2011)

adveksiyon difüzyon denkleminin çözümünde ve tedrici değişken akım durumunda su yüzeyi profillerinin belirlenmesinde diferansiyel kuadratur yöntemini uygulamıştır. Kaya vd(2011)'de ise taşkın dalgalarının yayılımı diferansiyel kuadratur yöntemi ile modellenmiştir.

Diferansiyel kuadratur yönteminin yeraltı suyu problemlerine uygulanması ise Kaya ve Arisoy (2010) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada bir boyutlu yeraltı suyu akımı diferansiyel kuadratur yöntemi ile modellenmiş ve bu yöntemin sonlu farklar yöntemine olan üstünlüklerine değinilmiştir.

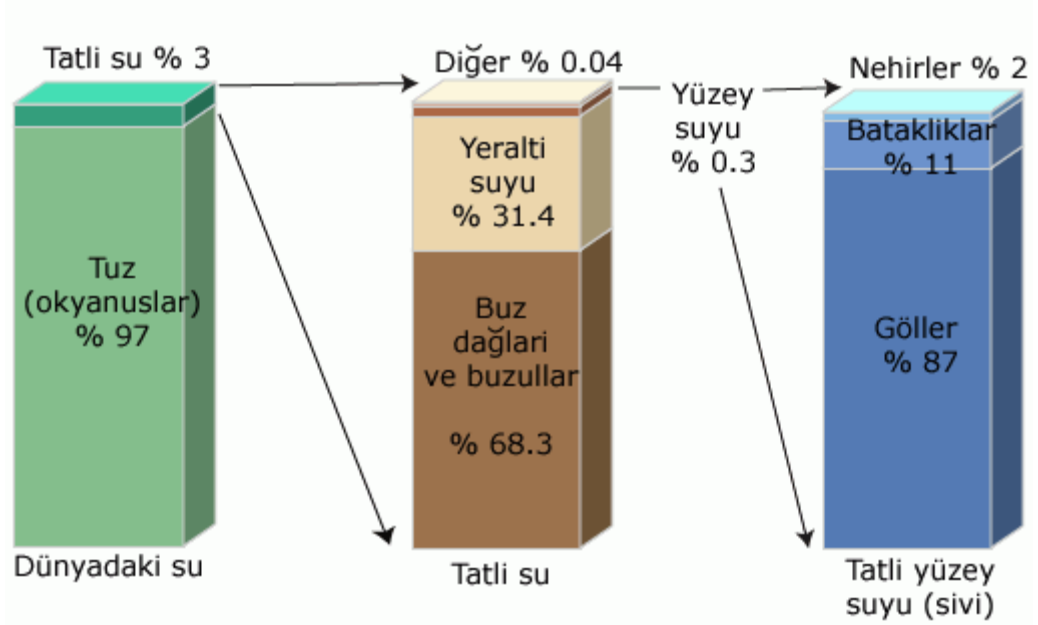
Bu çalışmada ise Kollokasyon yöntemi 2 boyutlu yeraltı suyu akım problemlerine uygulanacak ve elde edilen sonuçlar sonlu fark yöntemi ile elde edilen sayısal çözüm sonuçları ile karşılaştırılacaktır.

## BÖLÜM İKİ

### YERALTI SUYU AKIMI

#### 2.1 Su Potansiyeli ve Hidrolojik Çevrim

Yeryüzünün dörtte üçü sularla kaplıdır. Bu dünyada su bolluğu olduğu görünümü veriyorsa da, içilebilir nitelikteki su oranı ancak % 0.74'tür. (Akın ve Akın, 2007). Dünyanın su arzı, 1.46 milyar kilometre küp gibi büyük bir miktardadır. Bu suyun hepsi Türkiye'nin üzerine yayılsa idi, ülkenin tüm yüzey alanı 1870 kilometre kadar suyun altında kalırdı.(Hacettepe üni. Fiziksel Jeoloji ders notları)



Şekil 2. 1 Suyun dünyadaki dağılımı (<http://ga.water.usgs.gov/edu/watercycletrkishhi.html>)

Türkiye’de ortalama yıllık yağış miktarı 643 mm. olup, bu yağış miktarı ortalama 501 milyar m<sup>3</sup> suya karşılık gelmektedir. Yağışın 274 milyar m<sup>3</sup>’ü çay, nehir, göl ve denizler ile bitkilerden buharlaşma yoluyla atmosfere geri döner. Yağışla toprağa düşen suyun 158 milyar m<sup>3</sup>’ü irili ufaklı pek çok akarsuyla deniz ya da göllere taşınmaktadır. Geriye kalan 69 milyar m<sup>3</sup>’ü yeraltı suyunu oluşturur. Oluşan yeraltı suyunun 28 milyar m<sup>3</sup>’ü kaynak suyu (pınarlar) halinde yüzey sularına tekrar katılmaktadır (Akın ve Akın, 2007).

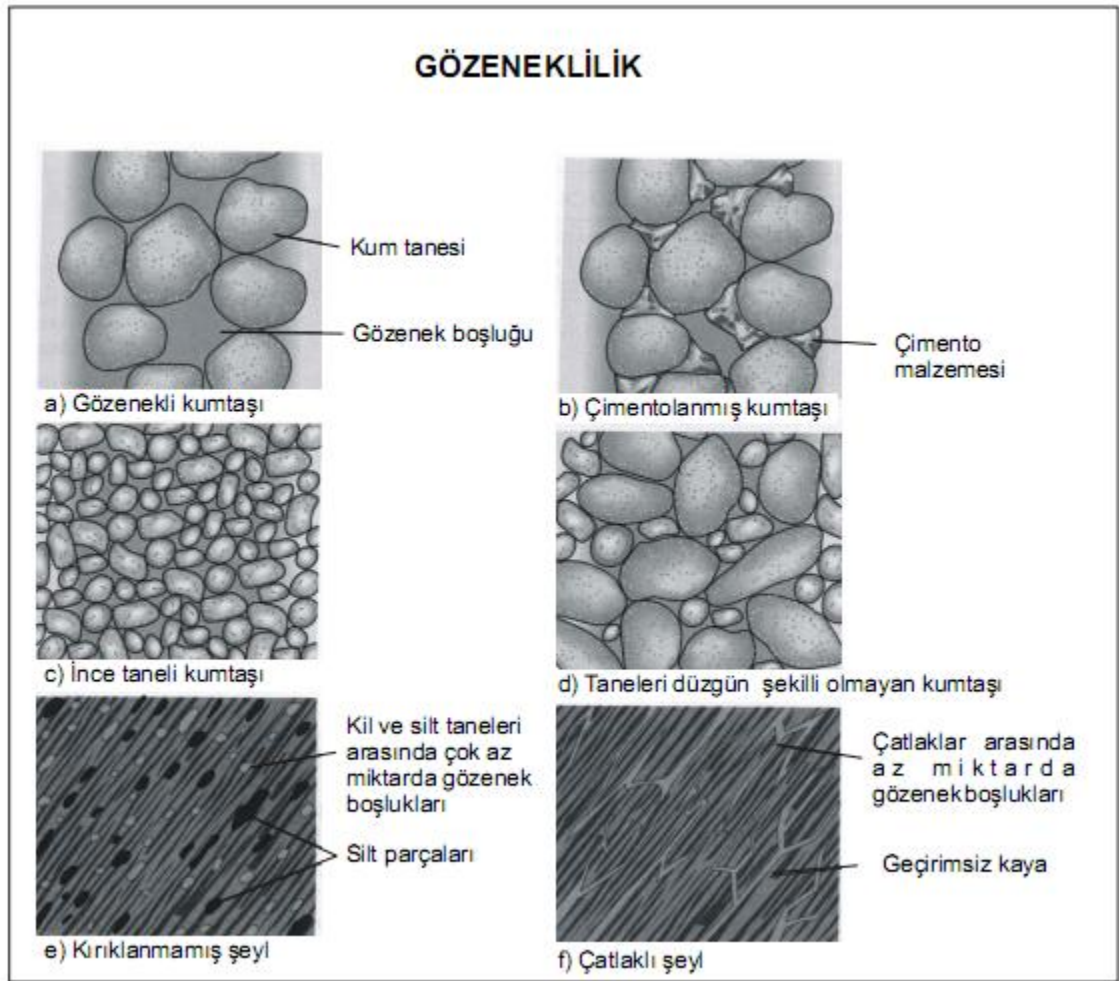
Suyun yeryüzünde, buharlaşma, yağış, yeraltına süzülme, kaynak ve akarsu olarak tekrar çıkma, bir göl veya denize akma vs gibi hareketlerine su döngüsü denmektedir (Şekil 2.2). Bu hareketlerle su bir rezervuardan diğerine taşınır, veya aktarılmakta ve üç halde de (katı, sıvı veya gaz) bulunabilmektedir. Denizlerde (okyanuslarda) yağıştan daha fazla buharlaşma olmaktadır. Karalardaki buharlaşmaya göre daha fazla olan yağışın yüzeysel akışla denizlere ulaşmasıyla denizlerdeki su miktarı dengelenmektedir. Karalarda yağışın bir kısmı da yeraltına süzülerek yeraltı suyunu beslemekte ve bitki kökleri tarafından emilmektedir. Terleme ile bu su tekrar bitkilerden atmosfere dönmektedir.



Şekil 2.2 Hidrolojik çevrim (<http://ga.water.usgs.gov/edu/watercyclturkishhi.html>)

## 2.2 Yeraltı Suyu

Atmosferden yeryüzüne düşen yağışların bir kısmı (yağmur, kar, buzulların erimesi), yüzeysel akış ile yüzey sularını meydana getirirken geri kalanı uygun koşullar altında yeraltına geçmektedir. Bu sular yerin derin kısımlarına sızarak, alt kısmı geçirimsiz kayaçların oluşturduğu zonun üzerindeki geçirimli kayaçların gözenek, yarık, çatlak gibi kısımlarını doldurarak bir su tabakası oluştururlar. Yeraltı suları, yeryüzüne doğal olarak çıkabildikleri gibi (kaynak), kuyular vasıtası ile de kullanılabilir hale getirilebilmektedir. Yeraltı suyunu tutan ve ileten kayaç ortamlarına akifer adı verilmekte ve su bu ortamları oluşturan tanelerin arasındaki boşluklardan geçmektedir. Gözeneklilik, taneler arasındaki çimentolanma ile azalmakta, kayaç ortamında kırılanma arttıkça artmaktadır (Şekil 2.3).



Şekil 2.3 Çeşitli kayaçların gözeneklilikleri (Hacettepe üni. fiziksel jeoloji ders notları)

Gözeneklilik suyun bulunması için yeterli olsa da iletimi için yeterli olmayabilir. Kayaç boşluklarında bulunan suyun bir boşluktan diğerine geçebilmesi gerekmektedir. Buna kayacın geçirirliliği (permeabilite) denir. İstisnaları olmakla beraber genellikle gözeneklilik arttıkça geçirirlilikte artmaktadır.

Yeraltı suyunun kendiliğinden yüzeye çıktığı noktalar olan kaynaklar, suların sıcaklıkları, kırılmalar veya faylanmalar neticesinde ortaya çıkmaları (fay kaynakları), karstik sahalardan gelmeleri (karstik kaynaklar, voklüzler), akımları ve kimyasal bileşimleri (maden suları), yeryüzüne çıkma tarzları (aralı kaynaklar ve gayzerler) ve yeraltında bulunuş özelliklerine göre (serbest ve tünemiş akifer kaynakları, artezyen kaynakları) çeşitli tipte olabilmektedir.

Kuyularla yeraltındaki haznedan çıkarılan veya kaynaklarda kendiliğinden yüzeye çıkan su insanlar tarafından geniş ölçüde kullanılmaktadır. Yeraltından elde edilen suyun iyi bir özelliğide tabii bir şekilde filitrelenmiş olmasıdır. Akiferlerde genellikle bakterilerden, organik maddelerden, koku ve tatlardan arınmış, kimyasal bileşimi ve sıcaklık derecesi fazla değişmeyen, iyi kalitede bir su bulunmaktadır. Yerüstü su kaynaklarının tükendiği kurak mevsimlerde insanlar su ihtiyacını kuyularla yeraltından sağlayabilmektedir. Bugün yeryüzünde kullanılan suyun %40 kadarı yeraltından sağlanmaktadır. (Beyazıt, 1999).

Yeraltı su seviyesindeki değişmeler, ya doğal yada insan eli ile oluşturulan olaylar sonucunda, sürekli yada kısa süreli olarak meydana gelmektedir. Yeraltı su seviyesi değişimleri, meteorolojik ve jeolojik faktörlerin etkisi ile gerçekleşmektedir. Bu faktörlerin en önemlileri şunlardır (Erguvanlı ve Yüzer, 1984):

- 1.Yağış
- 2.Yüzeysel akış
- 3.Buharlaşma-terleme
4. Atmosfer basıncı değişimi
- 5.Gel-git
- 6.Deprem



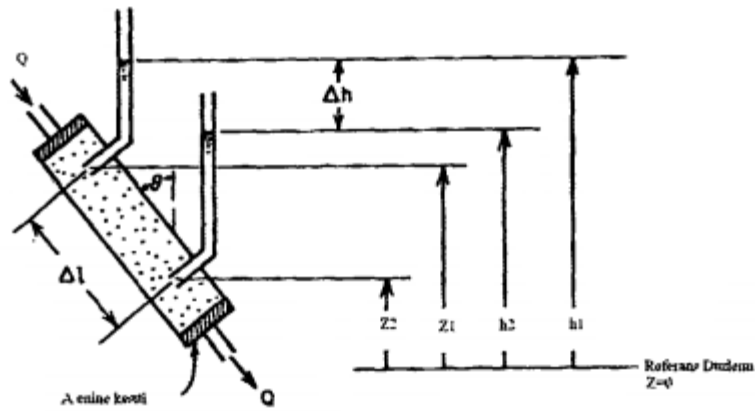
Diğer taraftan yeraltı su seviyesinde insan eli ile oluşan değişimler şu şekilde özetlenebilmektedir:

- 1.Yeraltından fazla su çekilmesi (pompaj)
- 2.Yeraltına su verilmesi (suni besleme)
- 3.Baraj,gölet vb. gibi yerüstü sularının depolama tesislerinin yapılması

### 2.3 Darcy Yasası ve Hidrolik İletkenlik

Gözenekli ortamlarda akış ile ilgili ilk rastlanan çalışma Henry Philibert Gaspard Darcy tarafından 1856 yılında Fransa'nın Dijon kentine temiz su getirme projesi kapsamında yapılan bir deneysel çalışmadır. Bu deneysel çalışmanın sonucunda kentin su bilançosunu yayınlamıştır. Raporlarında kumlarda suyun akışını analiz eden bir laboratuvar deneyini tanımlamıştır. Bu deneysel çalışmanın (Darcy, 1856) sonuçları daha sonraları gözenekli ortamlarda akış problemlerine uygulanabilecek güncel bir matematik model haline getirilmiştir ve kendi adını taşıyan ampirik yasa şeklinde bilinmektedir.

Gözenekli ortamda akışı modelleyen en eski yasa Henry Darcy tarafından 1856 yılında yapılan deneysel çalışma sonucu ortaya çıkmıştır, çalışmanın temsili düzeneği Şekil 2.4' de gösterilmiştir.



Şekil 2.4 Darcy yasasını ifade eden deneysel düzenek (Freeze ve Cherry, 2003)

Darcy'nin deney düzeneği, içinde kum bulunan A kesitli silindirik bir borudan ibarettir. Akış çok yavaştır ve silindirin üst kısmından giren su aşağı doğru kum taneleri arasından süzülerek iner. Akış daimi, gözenekli ortam özdeş ve akış tek yönlüdür. Darcy, deney sırasında akışkanın kum ile dolu kısmına girdiği sütunun üst ve çıktığı alt seviyelerindeki basınç farkı ile akışkan akışı arasında doğrusal bir ilişki olduğunu bulmuştur.

Şekil 2.4' de gösterilen deney düzeneğini göz önüne alalım. Enine kesiti A olan silindir, kumla dolu ve iki ucu da tıpalıdır. İki adet manometrenin ilişitirildiği silindirin bir ucunda su giriş tüpü, diğerinde de su çıkış tüpü bulunmaktadır. Silindir içine, tüm gözenekler suyla dolana ve girişteki debi çıkıştaki debiye eşit olana kadar su verilmektedir. Eğer  $z=0$  gibi keyfi bir referans düzlemi tayin edersek, manometre girişleri  $z_1$  ve  $z_2$ , tüplerdeki akışkanın yükseklikleri  $h_1$  ve  $h_2$  ve manometre girişleri arasındaki mesafe  $\Delta l$  olmaktadır.

Silindir içindeki özgül debi veya diğer adıyla Darcy hızı  $v$

$$v = Q/A \quad (2.1)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada  $Q$ ' nun boyutunun  $[L^3/T]$  ve  $A$ 'ninki  $[L^2]$  olduğundan  $v$  hız boyutunda  $[L/T]$  elde edilmektedir.

Darcy tarafından yapılan deneyler  $\Delta l$  sabit olduğu zaman  $v$ ' nin  $h_1 - h_2$  ile doğru orantılı ve  $h_1-h_2$  sabit olduğu zamanda  $\Delta l$  ile ters orantılı olduğunu göstermiştir.  $\Delta h = h_2 - h_1$  olursa Darcy yasası bugünkü düzenlenmiş hali ile,

$$v = -K(\Delta h/\Delta l) \quad (2.2)$$

şeklinde veya

$$v = -K(dh/dl) \quad (2.3)$$

diferansiyel formunda yazılabilir. (2.3) eşitliğinde  $h$ : hidrolik yük ve  $dh/dl$ : hidrolik eğim olarak adlandırılmaktadır.  $K$  bir oransallık sabitidir. Silindir içindeki hidrolik

eğimi sabit tuttuğumuzdan dolayı,  $K$  zemin özelliği olmalıdır. Özgöl debi zeminden zemine değişmektedir. Başka bir deyişle,  $dh/dl$  sabit tutulursa,  $v$  ile  $K$  doğru orantılı olacaktır.  $K$  parametresi hidrolik iletkenlik olarak adlandırılmaktadır. Kum ve çakıllardaki değeri yüksek iken çoğu kayalarda ve killerde düşüktür.  $\Delta h$  ve  $\Delta l$ ' nin ikisinin de birimi uzunluk  $[L]$  olduğundan (2.2) bağıntısından hareketle  $K$ 'nin boyutunun hız boyutu  $[L/T]$  olduğu görülecektir.  $K$  sadece akış ortamının bir fonksiyonu değil; aynı zamanda ortamda akan akışkanın kendisinin de bir fonksiyonudur.

Darcy yasasının bir alternatif formu (2.1) eşitliği (2.3) eşitliğine konularak elde edilebilmektedir.

$$Q = -K(dh/dl)A \quad (2.4)$$

Bu eşitlik bazen daha da kısaltılarak,

$$Q = -KiA \quad (2.5)$$

şeklinde yazılmaktadır. Bağıntıdaki  $i$  hidrolik eğim olmaktadır.

Darcy yasası ampirik bir yasa olup sadece deneysel kanıtlara dayanmaktadır. Darcy yasası sıkıştırılmaz ve Newtonyen bir akışkan içindir. Ayrıca hız çok yavaştır, Reynolds sayısının büyüklük derecesi birden küçüktür ve akış tek yönlüdür. Darcy yasası yüksek akış hızlarında yani Reynolds sayısının büyüklük derecesinin biri geçtiği durumlarda geçerliliğini yitirmektedir. Çünkü Darcy yasasının ifadesi doğrusal bir denklemdir ve akışın doğrusal olmayan etkisini modelleyememektedir. Denklemden viskoz etkiler de yer almaz ve en önemlisi katı sınırlar göz önüne alındığında sınırın sürtünme etkisini dikkate almamaktadır.

Darcy yasasını daha temel fiziksel yasalardan türetmek için birçok çalışma yapılmıştır. (Bear, 1972) bu çalışmaları derinlemesine incelemiştir. En başarılı yaklaşımlar, akışkanlar mekaniğinde çok iyi bilinen Navier-Stokes denklemlerinin, gözenekli ortamın idealize edilmiş kavramsal modelinin gözenek kanallarındaki su akışına uygulanması şeklinde olmuştur.

## 2.4 Basınçlı Akiferlerde İletimlilik ve Depolama

Doygun bir basınçlı akiferin depolama katsayısı  $S$ , akiferin birim yüzey alanı başına, hidrolik yükün o yüzeye dik bileşenindeki birim azalım için depodan bıraktığı suyun miktarı olarak tanımlanmakta ve

$$S = S_s b \quad (2.6)$$

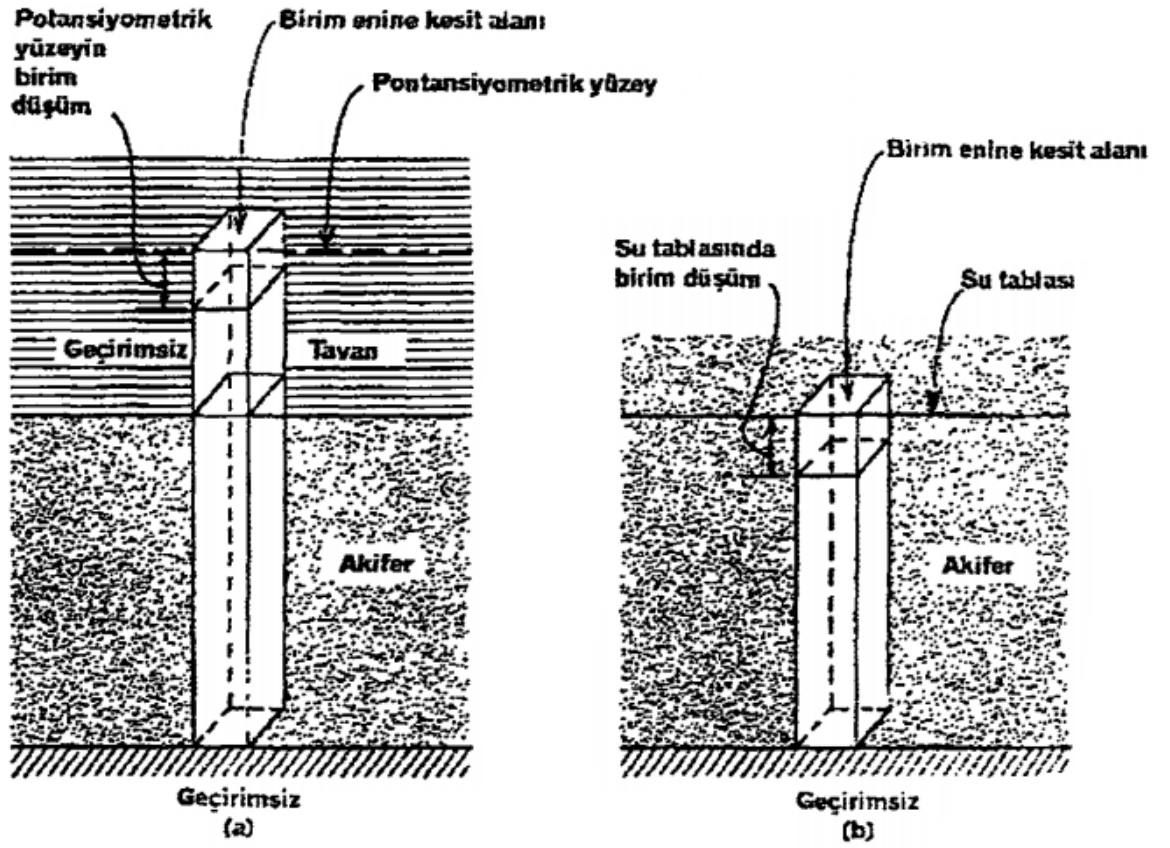
olarak ifade edilmektedir. Basınçlı akiferin iletimlilik katsayısı  $T$  ise,

$$T = Kb \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.  $S_s$  özgül depolamayı (2.6), Denklemlerde  $b$  akifer kalınlığını (2.7) göstermektedir. eşitliğinden görüldüğü gibi iletimlilik katsayısının boyutu  $L^2/t'$  dir.(Freeze and Cherry, 2003).

## 2.5 Serbest Yüzeyle Akiferlerde İletimlilik ve Özgül Verimlilik

Serbest yüzeyle akiferler için iletimlilik katsayısı kavramı basınçlı akiferlerdeki kadar iyi tanımlanmamakla birlikte serbest yüzeyle akiferlerde de kullanılmaktadır. Ancak akifer kalınlığı yerine suya doymuş bölgenin kalınlığı veya akıtarı yada akiferi aşağıdan sınırlayan geçirimsiz yüzeyin üzerindeki su yüksekliği kullanılmaktadır. Depolama terimi yerine serbest yüzeyle akiferde özgül verim  $S_y$  kullanılır. Serbest yüzeyle akiferin su tablasındaki birim alçalım başına akiferin birim yüzey alanı için depodan salıverdiği su miktarı olarak tanımlanmaktadır. Bazen serbest depolama katsayısı olarak da tanımlanabilmektedir. Şekil 2.5.b' de bu kavram şematik olarak ifade edilmiştir. (Freeze and Cherry, 2003).



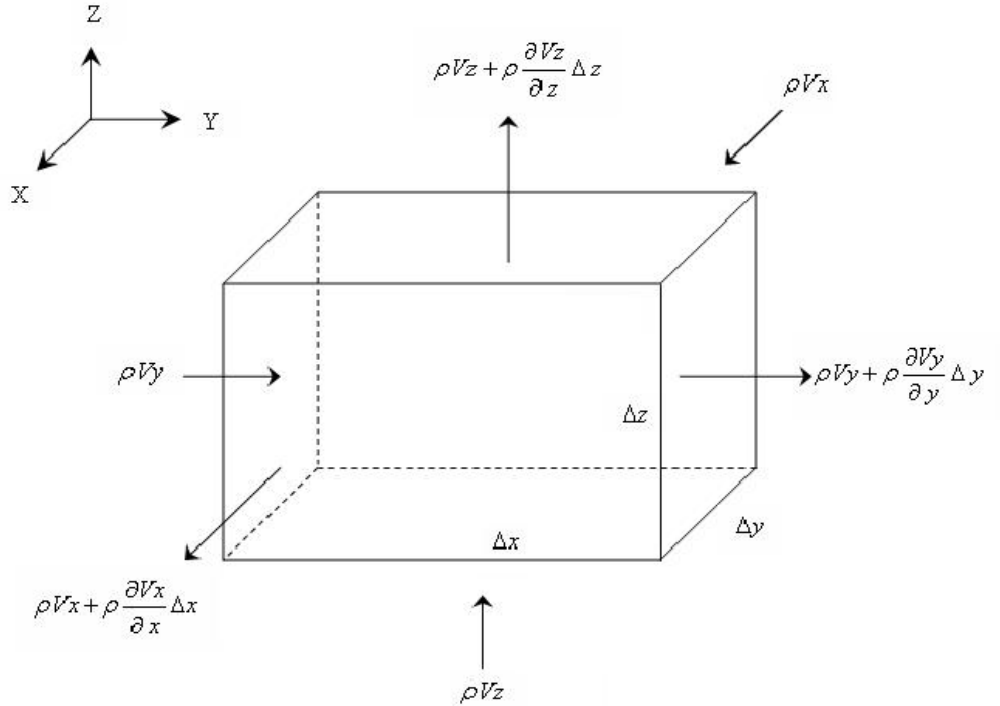
Şekil 2.5 a: Basınçlı akiferde  $S'$  nin şematik gösterimi b: serbest yüzeyli akiferde  $S_y'$  nin şematik gösterimi (Freeze and Cherry, 2003)

## BÖLÜM ÜÇ

### YERALTI SUYU AKIMININ TEMEL DENKLEMLERİ

Yeraltı suyu akımı diğer bütün mühendislik problemlerinde olduğu gibi bilimsel çalışmalarla tanımlanabilirler, basite indirgenebilirler ve çoğu kez sınır şartlarına ve dış etkenlerin doğru bir şekilde tanımlanmasına bağlı olarak matematiksel olarak gerçeğine uygun şekilde gösterilebilir. Akış termodinamik ve fizik kuralları ile ifade edilebilir şekilde oluşmaktadır. Yeraltı suyu bir yerden başka bir yere enerji farkından dolayı ve bu farkı hareket ederek ortadan kaldırmaya yönelik hareket eder. Yeraltı suyunun matematiksel ifadesine, temelde kütle korunumu ve Darcy yasasının birlikte kullanılmasıyla ulaşılmıştır. Bu ifade derecesi modellemenin boyutlarına bağlı olarak değişen bir kısmi diferansiyel denklemdir.

#### 3.1 Basınçlı Akiferde Yeraltı Suyu Akımının Temel Denklemleri



Şekil 3. 1 Gözenekli ortadaki akış için birim kontrol hacmi

Doygun gözenekli ortamda boyutları  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  ve  $\Delta z$  olan kontrol hacmi (Şekil 3.1) için kontrol hacmine giren ve çıkan akışkan kütlesi farkının kontrol hacmindeki akışkan kütlesinin değişimine eşit olduğu şeklindeki kütlenin korunumu yasası uygulandığında,

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho n)}{\partial t} \quad (3.1)$$

Şeklini alır yada denklemin sağ tarafı açılacak olursa:

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = n \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial n}{\partial t} \quad (3.2)$$

(3.2) denkleminin sağ tarafındaki ilk terimi,  $\rho$  yoğunluğundaki değişim altında suyun genişlemesi ile üretilen suyun kütle oranıdır. İkinci terim ise,  $n$  gözenekliliğindeki değişim altında gözenekli ortamın kompaksiyonu ile üretilen suyun kütle oranıdır. Birinci terim akışkanın sıkışabilirliği  $\alpha$  tarafından kontrol edilir.  $\rho$  daki değişim ve  $n$  deki değişimin ikisinde de hidrolik yük  $h$ ' daki değişim ile meydana geldiğini ve ayrıca yükteki birim azalma için bu iki mekanizma ile üretilen suyun hacminin  $S_s$  olduğunu bilinmektedir. Üretilen suyun kütle oranı  $\rho S_s \partial h / \partial t$ ' dir ve (3.2) denklemi şu şekli alır;

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \rho S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.3)$$

Suyun yoğunluğu sabit kabul edilirse (3.3) denkleminin iki tarafındaki  $\rho$  terimleri sadeleşmektedir. Hız terimi Darcy yasasına göre yazıldığında ise (3.4) denklemi elde edilmektedir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.4)$$

Denklem (3.4), doygun anizotrop gözenekli ortamdaki kararsız akışın denklemini temsil etmektedir. Ortam homojen ve izotrop olursa (3.4) denklemi,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{S_s}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.5)$$

şekline indirgenebilir.

Kalınlığı  $b$  olan basınçlı yatay akifer özel durumu için  $S=S_s \cdot b$  ve  $T = K \cdot b$ 'dir.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.6)$$

şeklini almaktadır.  $h(x,y,t)$  akım alanında yatay akiferde yatay düzlem üzerinde herhangi bir zamandaki hidrolik yük değerini göstermekte ve çözüm için akifer parametreleri  $S$  ve  $T$ 'nin bilinmesi gereklidir. (Freeze and Cherry, 2003).

Akiferden herhangi bir noktadan beslenme yapılması durumunda

$$\frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{d^2 h}{dy^2} = \frac{S}{T} \frac{dh}{dt} - \frac{R(x,y,t)}{T} \quad (3.7)$$

denklemini akım ifade etmektedir (Wang ve Anderson, 1981).

### 3.2 Serbest Yüzeyle Akiferde Yeraltı Suyu Akımının Temel Denklemleri

Serbest yüzeyle akiferlerin su deposundaki gözeneklerde bulunan su düşey drenaj yolu ile alınır. Bu drenaj, zaman ilerledikçe pompaj kuyusu yakınındaki su tablasında alçalmayla sonuçlanır. Basınçlı akifer durumunda basınç düzeyi düşse de akiferin doygun kalınlığı zamanla değişmemektedir fakat serbest yüzeyle akiferde durum tam olarak böyle değildir. Bu şartlarda iletkenlik ( $K$ ) ve doygun kalınlık ( $h$ ) çarpılması sonucu bulunan akiferin suyu geçirebilme özelliği (iletimliliği) değişmektedir (Fetter, C.W., çev., 2004).



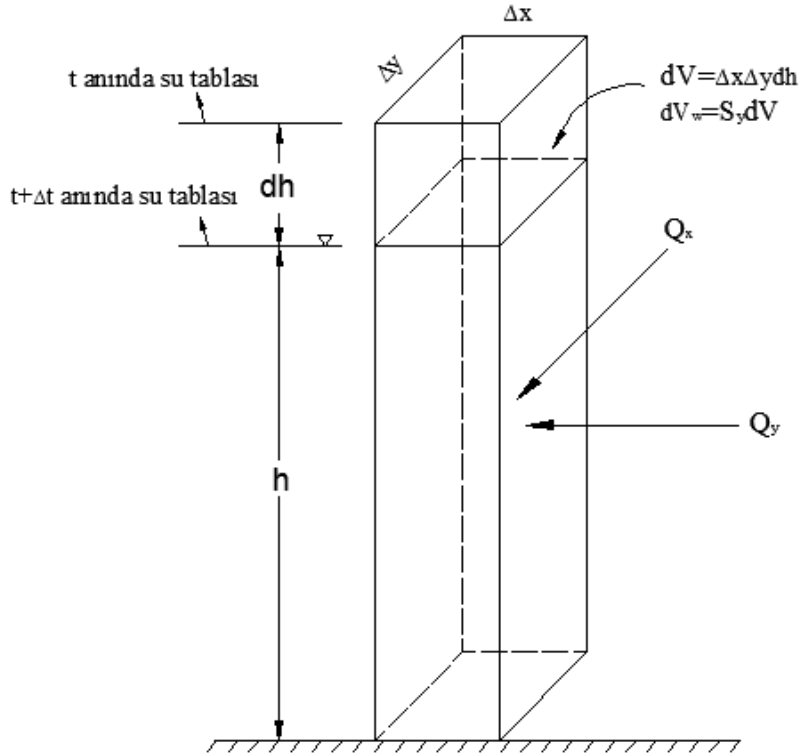
Serbest yüzeyli akiferlerde suyun yoğunluğundaki değişimin önemsiz olmasından dolayı kütle korunumuna, hacmin korunumundan geçilebilir.

$$\text{Çıkan Net Debi Değeri} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y \quad (3.8)$$

Denklem (3.8), her iki ekseninde izotrop zemindeki akifer için yazılırsa,

$$\frac{\text{Çıkan Net Debi Değeri}}{\Delta x \Delta y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( Kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( Kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial V_w}{\partial t} = S_y \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \quad (3.10)$$



Şekil 3. 2 Serbest yüzeyli akiferde kontrol hacmi

(3.9) ve (3.10) birlikte yazılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y h \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S_y \frac{dh}{dt} \quad (3.11)$$

ve akifer homojense

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{S_y}{K} \frac{dh}{dt} \quad (3.12)$$

(3.12) denklemini lineer olmayan Boussinesq denklemleri olarak bilinmektedir (Boussinesq, 1904). (3.12) denkleminin çözümü analitik metotlarla oldukça zordur fakat belirli sınır şartları için yaklaşık ve kesin çözümleri elde edilmiştir (McWhorter ve Sunada, 1977).

Akiferden herhangi bir noktadan beslenme yapıldığında

$$\frac{K}{2} \left( \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right) = S_y \frac{\partial h}{\partial t} - R(x, y, t) \quad (3.13)$$

denklemini akımı ifade etmektedir (Wang ve Anderson, 1981).

## **BÖLÜM DÖRT**

### **NÜMERİK METODLAR**

#### **4.1 Genel**

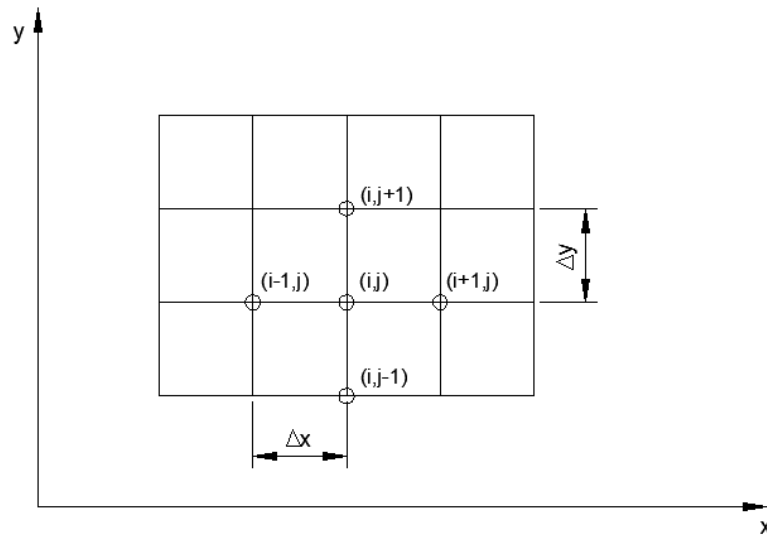
Genel olarak mühendislik problemleri, karmaşık sınır ve başlangıç şartları ile tanımlanabilmektedir. Bu nedenle mühendislik problemlerinin matematiksel ifadesi olan kısmi diferansiyel denklemlerin, bu karmaşık ve çok sayıdaki sınır ve başlangıç şartlarının etkisiyle, kesin çözümüne matematiksel olarak ulaşmak çok özel durumlar haricinde mümkün olmamaktadır. Bu sorun yaklaşık çözüm yöntemlerine ihtiyaç duyulmasına ve bu konu üzerinde yoğun çalışmalar yapılmasına neden olmuştur. Mühendislik problemleri çoğu zaman o kadar karışıktır ki kolay yada uygulanabilir olarak görünen bu yaklaşık çözüm yöntemlerinin uygulanabilmesi için bile bir çok kabuller ve basitleştirmelere gerek duyulur (sınırlar geometrilerini değiştirme, büyük zaman aralıkları seçme, problem doğasını ifade eden değerlerde kabullerde bulunma vb.). Kısmi diferansiyel denklemlerde yer alan türevlerin bilgisayarda sayısal hesabı için ayrık formda yazılması gerekir. Bu tip ayrıklaştırma işlemlerinde Sonlu Farklar , Sonlu Elemanlar, Sonlu Hacimler, Kollokasyon yöntemleri gibi yöntemlerden yararlanılmaktadır. Yöntemlerin problemler üzerinde uygulanabilirliği de ayrı bir sorundur. Olayın yada gerçek hayattaki problemin doğasına, onu tanımlayan matematiksel ifadeni yapısına, sınır ve başlangıç şartlarına bağlı olarak yaklaşık çözüm yöntemleride iyi yada kötü sonuçlar verebilmektedirler. Bu konu araştırılması gereken bir konudur.

Bu çalışmada iki boyutlu yeraltı suyu problemlerinin çözümünde, Hidrolik Mühendisliği son yıllarda kullanım alanı bulan Kollokasyon metodu kullanılacaktır. Kollokasyon yöntemi uygulamalı bilim dallarını ve mühendisliklerin ilgilendiği

konularda karşılaşılan problemlerin çözülmesi amacıyla geliştirilmiştir. Simülasyonlar tamamen gözlenememiş olan olayları görselleştirebilmek amacıyla kullanılmıştır. Kollokasyon yöntemi detaylı olarak 5. Bölümde incelenecektir. Kollokasyon metodu sonuçlarını karşılaştırmak amacıyla analitik çözümün yanı sıra sonlu fark metodu kullandığından, sonlu fark metodu aşağıda anlatılmıştır.

#### 4.2 Sonlu Farklar Yöntemi

Sonlu farklar yöntemi, lineer ve lineer olmayan birçok kısmi diferansiyel denklemin çözümünde kullanılabilir. Bir kısmi diferansiyel denklemin sonlu fark yaklaşımı bulunurken öncelikle problemin çözüm bölgesi Şekil 4.1’ de gösterildiği gibi genellikle dikdörtgensel şekiller içeren kafeslere bölünür. Kısmi diferansiyel denklemlerde yer alan türevlerin bilgisayarda sayısal hesabı için yaklaşık formda yazılması gerekir. Bu nedenle diferansiyel denklemdaki türevler ve sınır şartları yerine belirli fonksiyonlar yardımı ile elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece diferansiyel denklemin çözümü, problemin matematiksel ifadesi olan kısmi diferansiyel denklemin fark denklemlerinden oluşan lineer veya lineer olmayan bir cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenebilir. Elde edilen cebirsel denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri yardımıyla kolayca çözülebilmektedir. (Wang ve Anderson, 1981)



Şekil 4. 1 Sonlu farklar karelağı ve notasyonları

Verilen bir diferansiyel denklemi sonlu fark formunda ifade etmek için

- Açık (Explicit) Sonlu Fark Yöntemi
- Kapalı (Implicit) Sonlu Fark Yöntemi
- Crank-Nicholson Sonlu Fark Yöntemi

olarak tanımlanan yöntemler kullanılabilirlerdir.

Nümerik çözümler yapılırken, konuma göre türevlerin  $t - \Delta t$  anında veya  $t$  anında ayrıştırılmasına göre denklemler iki farklı biçimde yazılabilmektedir. Diferansiyel denklem  $t - \Delta t$  anında ayrıştırılırsa açık sonlu fark yöntemi,  $t$  anında ayrıştırılırsa kapalı sonlu fark yöntemi olarak adlandırılmaktadır.

$t - \Delta t$  anındaki değerler bilinen değerler olduğundan açık formda ayrıştırılmış olan denklem ile bütün ağ noktalarındaki değerler kolaylıkla hesaplanabilmektedir. Açık çözümlerin stabil olabilmesi için Courant şartını sağlaması gerekmektedir.

Kapalı formda ayrıştırılmış olan denklemin her bir ağ noktasında bağımsız olarak çözümü mümkün değildir. Bütün ağ noktalarında yazılan denklemlerden oluşan sistemin birlikte çözülmesi gerekmektedir.

### 4.3 Sonlu Farklar Formülasyonu

Sonlu fark formülasyonları çoğu zaman Taylor seri açılımına dayanılarak yapılmaktadır. Bunun yanında polinomlar yardımıyla da ayrıştırma yapılabilmektedir. Bu çalışmada Taylor seri açılımına dayalı sonlu farklar yaklaşımları kullanılacaktır.

Bir  $f(x)$  fonksiyonunun  $(x+\Delta x)$  noktasındaki değeri Taylor seri açılımı ile

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan 1. türev çekilirse ve  $O(x)$  hata terimi olmak üzere kısaca ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + O(x) \quad (4.2)$$

yazılabilir. Bu ifade  $f$  büyüklüğünün  $x$  'e göre birinci türevi için yapılmış birinci dereceden bir yaklaşımdır. (4.2) denklemini indisli notasyonla

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.3)$$

şeklinde gösterilir ve türev için birinci mertebeden ileri fark formülasyonu olarak adlandırılır. Adım uzunluğu azaltıldıkça bu yaklaşık formülün gerçek türeve o kadar yakın olacağı açıktır. Taylor açılımı,

$$f(x - \Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (4.4)$$

şeklinde yazılarak benzeri işlemlerle

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i-f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.5)$$

şeklinde birinci mertebeden geri fark formülasyonu veya (4.1) ve (4.4) Taylor açılımları birbirinden çıkartılarak

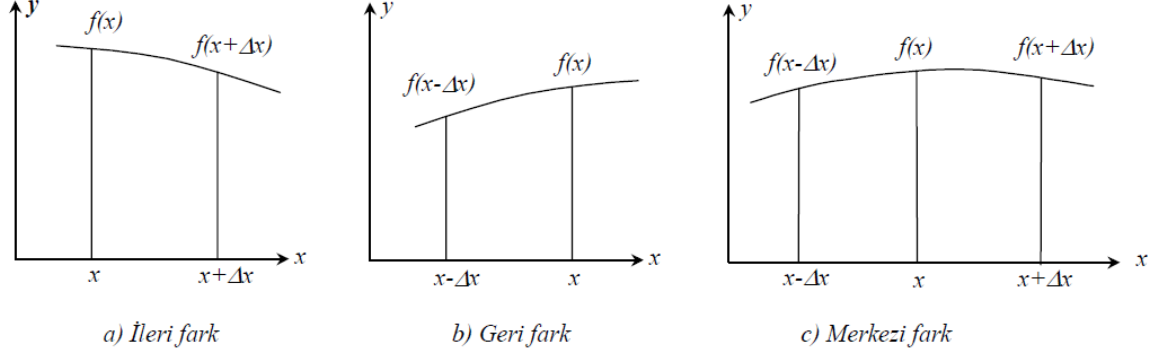
$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (4.6)$$

benzeri işlemler sonucu

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (4.7)$$

şeklinde merkezi fark formülasyonu elde edilebilir. Bu formülasyonun ikinci mertebeden olduğu dikkat çekmektedir.

Birinci türev için yazılan formülasyonlarda hangi ağ noktalarının kullanıldığı aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Şekil 4. 2 İleri, geri ve merkezi farkların gösterimi

İkinci mertebeden türev için Taylor serisinin  $(x+2\Delta x)$  ve  $(x-2\Delta x)$  noktalarındaki açılımları

$$f(x + 2\Delta x) = f(x) + (2\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (4.8)$$

$$f(x - 2\Delta x) = f(x) - (2\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilmektedir. (4.1) eşitliği 2 ile çarpıp (4.8) denkleminde çıkartılırsa ve buradan ikinci türev çekilirse,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \quad (4.10)$$

elde edilmektedir. Bu bağıntı indisli notasyonla yazılarak *ikinci türevin*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (4.11)$$

şeklinde ileri fark formülü elde edilir. Benzeri işlemler (4.1) ve (4.9) seri açılımları arasında yapılırsa ikinci türevin geri fark formülü

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (4.12)$$

şeklinde ve (4.1) ve (4.2) bağıntıları birbiriyle toplanarak benzeri işlemler sonucu ikinci türevin merkezi fark formülü

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (4.13)$$

şeklinde elde edilebilmektedir.(Yükselen, Uygulamalı Sayısal Yöntemler Ders Notları,2011)



## BEŞİNCİ BÖLÜM

### KOLLOKASYON METODU

#### 5.1 Kollokasyon Metodu

Kollokasyon Metodu literatürde birçok alanda görülmektedir. Diferansiyel Kuadratur Metodu olarak bilinen metod ilk olarak 1972 yılında Bellman ve Casti tarafından önerilmiş ve birçok bilim adamı tarafından uygulanıp geliştirilmiştir (Chen, 1992 ve 2000; Shu ve Richards, 1992; Bert ve Malik, 1996 ve 1998; Kaya,2010; Hashemi, 2006 ve 2007). Hidrolik Mühendisliği alanında ise son yıllarda kullanılmaya başlanmıştır

Kollokasyon yönteminde; bir fonksiyonun belirlenmiş bir ayrık noktadaki (kollokasyon noktası) (şekil 5.1) uzay değişkenlerine göre kısmi türevi, o değişken bölgesinin bütün ayrık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı lineer toplamı ile ifade edilmektedir.

Yöntemin işleyişi şu maddeler altında toplanabilir;

- 1) Uzay değişkenleri;  $x, y$  uygun sayıdaki kollokasyon noktalarına ayrılır.
- 2) Bağımlı değişken  $u(t, x, y)$ , enterpole edilen polinom veya fonksiyonların kollokasyon noktalarındaki  $u = u(t, x_i, y_j)$ 'nin değerleri kullanılarak ifade edilir.
- 3) Uzaydaki türevlerde 2. maddede bahsedilen şekilde ifade edilebilir.
- 4) Başlangıç ve/veya sınır problemleri kollokasyon noktaları üzerindeki bağımlı değişkenin değerleri olan  $u_{ij}(t)$  'yi ifade eden basit diferansiyel denklemlere dönüştürülür.
- 5) Sınır bölgelerine karşılık gelen kollokasyon noktalarına sınır koşulları uygulanır.
- 6) Başlangıç ve/veya sınır şartı probleminin çözümü 4. ve 5. maddelerde ifade edilen başlangıç değer probleminin çözülmesiyle elde edilir. Sonucun enterpole edilmesi ise 2. maddede ifade edilen şekilde yapılır.

### 5.1.1 Başlangıç ve Sınır Koşulları

Sınır şartları doğru bir şekilde tanımlanması kollokasyon metodunda önemli bir yer tutmaktadır.

$u(t, x): [0,1] \times D \in R$  ve  $D$  uzaydaki hesap alanı olmak üzere: Şu genel tanımlar yapılabilir;

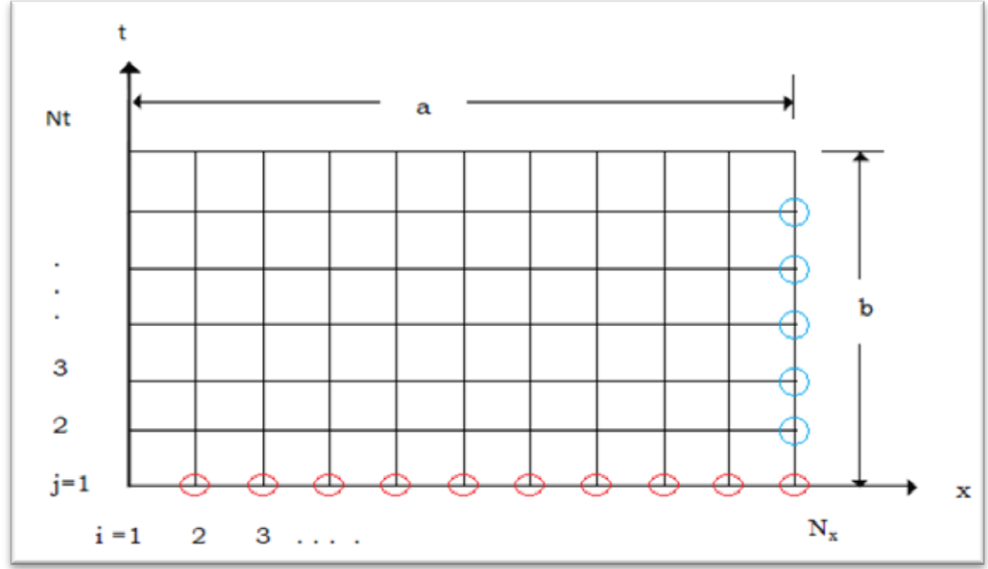
$t=0$  anında  $D$  alanı içindeki tüm  $x'$  ler için  $u$  fonksiyonunun değeri, başlangıç koşulları olarak tanımlanmaktadır.  $x \in D$  olmak üzere  $u_0(x) = u(t = 0, x)$  şeklinde ifade edilmektedir.

Sınır koşulları  $t > 0$ 'dan büyük veya  $0$ 'a eşit olduğunda,  $D$  alanının sınırlarındaki  $x'$  ler için  $u$  fonksiyonunun değeridir.

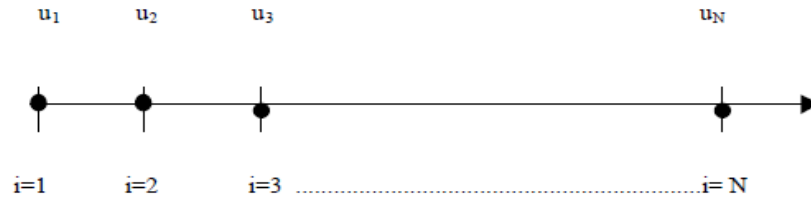
#### Problemin ifade edilmesi:

Eğer bir problemin matematiksel modelinde hem zamana hem de uzaya göre türevler bulunuyorsa bu problem hem başlangıç hem de sınır şartlarına sahiptir ve başlangıç-sınır değer problemi olarak tanımlanmaktadır.

Eğer matematiksel model zamandan bağımsız ise başlangıç koşullarına gerek duyulmaz ve problem sınır değer problemi olarak adlandırılmaktadır. Problemi ya da matematiksel model denklem takımları tarafından oluşturulmuş ise başlangıç ve/veya sınır şartlarının modeli oluşturan tüm denklem takımları için tanımlanması gerekmektedir.



Şekil 5. 1 Başlangıç ve sınır şartları



Şekil 5. 2 Bir boyutlu sistemler için düğüm noktaları

### 5.1.2 Kollokasyon Noktalarının Sayısı ve Seçimi

Kollokasyon yönteminde çözümün doğruluğu bazı problem türlerinde sınır şartına bağlı olsa da (sınır değer problemlerinde) genelde bu doğruluk, noktaların seçimine ve sayısına bağlıdır.

$x_i$  ve  $y_j$  x ve y eksenlerindeki kollokasyon noktalarını,  $i$  ve  $j$  sırasıyla x ve y eksenlerindeki hesap noktalarını,  $N_x$  ve  $N_y$  x ve y eksenlerindeki toplam hesap nokta sayısını ifade etmek üzere; Kollokasyon noktalarının seçiminde kullanılan başlıca metotlar şunlardır;

#### 5.1.2.1 Eşit aralıklı Kollokasyon Noktaları

Her iki doğrultuda (tek boyutluysa tek yönde) eşit aralıklarla nokta yeri belirlenir.

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-1}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (5.1)$$

$$y_j = \frac{j-1}{N_y-1}; \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (5.2)$$

#### 5.1.2.2 Chebychev Kollokasyon Noktaları

Bazı durumlarda eşit aralıklı olmayan noktaların seçiminin daha iyi sonuç verdiği bilinmektedir. Yine iki boyutlu problemler için eşit olmayan düğüm noktaları;

$$x_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \right]; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (5.3)$$

$$y_j = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{j-1}{N_y-1} \pi \right) \right]; \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (5.4)$$

### 5.1.2.3 Legendre Polinomunun Köklerinden Elde Edilen Normalize Kollokasyon Noktaları

Eksenler için belirlenmiş olan kollokasyon noktalarının sayılarına bağlı olan  $r$  katsayıları yardımıyla hesaplanırlar.

$$x_i = \frac{r_i - r_1}{r_N - r_1}; \quad j = 1, 2, \dots, N_x \quad (5.5)$$

$$y_j = \frac{r_j - r_1}{r_N - r_1}; \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (5.6)$$

Burada

$$r_i = \cos \frac{4i-1}{4N_x+2} \pi \left( 1 - \frac{1}{8N_x^2} + \frac{1}{8N_x^3} \right) \quad (5.7)$$

ve

$$r_j = \cos \frac{4j-1}{4N_y+2} \pi \left( 1 - \frac{1}{8N_y^2} + \frac{1}{8N_y^3} \right) \quad (5.8)$$

şeklindedir.

### 5.1.2.4 Shu ve Chew (1998) tarafından önerilen kollokasyon noktaları

$$r_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \quad (5.9)$$

$$x_i = (1 - \alpha)(3r_i^2 - 2r_i^3 + \alpha r_i) \beta \quad (5.10)$$

$$s_j = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{j-1}{N_y-1} \pi \right) \quad (5.11)$$

$$y_j = (1 - \alpha)(3s_j^2 - 2s_j^3 + \alpha s_j) \beta \quad (5.12)$$

şeklinde tanımlanan Shu ve Chew tarafından önerilmiş kollokasyon nokta dağılımıdır.

Bunlar diğer denklemlerde r ve s sırasıyla x ve y yönündeki boyutlar; N ve M yine x ve y yönündeki düğüm nokta sayısı ;  $\alpha$  ve  $\beta$  ise düğüm nokta dağılımını kontrol eden sabitlerdir. Yani;

Eğer  $\alpha < 1$  ve  $\beta < 1$  ise sınır yakınında veya civarında daha sık nokta seçimi,

Eğer  $\alpha > 1$  ve  $\beta > 1$  ise sınır yakınında veya civarında daha seyrek nokta seçimi uygulanır.

Ayrıca sınıra yakın noktalar için yani bitişik noktalar için bilinen çok küçük değerler atanarak işlem yapılabilir.

Yapılmış olan çalışmalar doğrusal türden denklemler ve homojen sınır koşullarına sahip problemlerde eşit aralıklı seçilen düğüm noktalarının çözüm hasasiyeti açısından yeterli olduğunu göstermiştir. Bununla beraber titreşim problemlerinde ise daha çok Chebychev tarzı kollokasyon noktalarının daha uygun olduğu da görülmüştür. Zamana bağlı ve başlangıç değer problemlerinde ise eşit aralıklı olmayan türden düğüm nokta seçimi en uygun çözümü türetmiştir. Sonuç olarak her tür problem için en etkili seçimin bilinmesi, analiz süresini ve hata miktarını azaltacaktır (Civalek, 2003).

## 5.2 1 ve 2 Boyutlu Sistemler İçin Kollokasyon Metodu

$I_x = \{x_1 = 0, \dots, x_i, \dots, x_n = 1\}$  kollokasyon noktaları kümesi

Bir boyutlu bir  $u(x)$  fonksiyonun birinci türevini ele alalım,  $x_i(1,2,\dots,N)$  noktalarında N adet ayrık nokta için göz önüne alırsak i. Ayrık nokta için 1. türev;

$$u_x(x_i) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{i,j} u(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.13)$$

olacaktır.

Burada  $x_j$  değişken bölgesindeki ayrık noktaları,  $u(x_j)$  bu noktalardaki fonksiyon değerlerini ve  $A_{ij}$  birinci dereceden türev için bu değerleri fonksiyon değerlerine bağlayan ağırlık katsayılarını ifade eder. Ağırlık katsayılarının hesabı, fonksiyonel yaklaşımlarla gerçekleştirilmektedir.

Bu denklem matris formda şöyle gösterilebilir;

$$\begin{Bmatrix} u'(x_1) \\ u'(x_2) \\ \vdots \\ u'(x_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdot & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdot & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ A_{n1} & A_{n1} & \cdot & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_n) \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

Benzer ifadeler iki ve daha fazla dereceden türev ifadeleri için de yazılabilmektedir.

$$u_{xx}(x_i) = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N B_{ij} u(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.15)$$

Bu denklem matris formda şöyle gösterilebilmektedir;

$$\begin{Bmatrix} u''(x_1) \\ u''(x_2) \\ \vdots \\ u''(x_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdot & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdot & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ B_{n1} & B_{n1} & \cdot & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_n) \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Burada  $B_{ij}$  ikinci dereceden türev için ağırlık katsayısıdır. Bu denklem birinci dereceden ağırlık katsayıları cinsinden;

$$u_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{jk} u(x_k) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.17)$$

Genellikle  $u=u(t,x)$ , Lagrange ara değer polinomlarının ortalaması kullanılarak şu şekilde tahmin ve entegre edilebilmektedir;

$u_i(t) = u(t, x_i)$  ve Lagrange polinomu

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (5.18)$$

iken

$$u(t, x) \cong u^n(t, x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) u_i(t) \quad (5.19)$$

şeklinde gösterilirse, fonksiyonun düğümlerdeki kısmi diferansiyelleri şu şekilde hesaplanabilmektedir;

$$a_{hi}^{(r)}(n) = \frac{\partial^r L_h}{\partial x^r}(x_i) \quad (5.20)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial^r u}{\partial x^r}(t; x_i) \cong \sum_{h=1}^n a_{hi}^{(r)}(n) u_h(t) ; \quad r = 1, 2, \dots \dots \dots \quad (5.21)$$

Katsayıların değerleri kollokasyon noktalarının sayılarına ve yerlerine bağlıdır. Hesaplamalar sonucunda katsayılar için şu eşitliklere ulaşılmıştır;

$$\Pi(x_i) = \prod_{p \neq i} (x_i - x_p) , \quad \Pi(x_h) = \prod_{p \neq h} (x_h - x_p) \quad (5.22)$$

iken

$$h \neq i : \quad a_{hi}^{(1)} = \frac{\Pi(x_i)}{(x_i - x_h) \Pi(x_h)} \quad (5.23)$$

$$h = i : \quad a_{ii}^{(1)} = \sum_{h \neq i} \frac{1}{(x_i - x_h)} \quad (5.24) \text{ dir.}$$



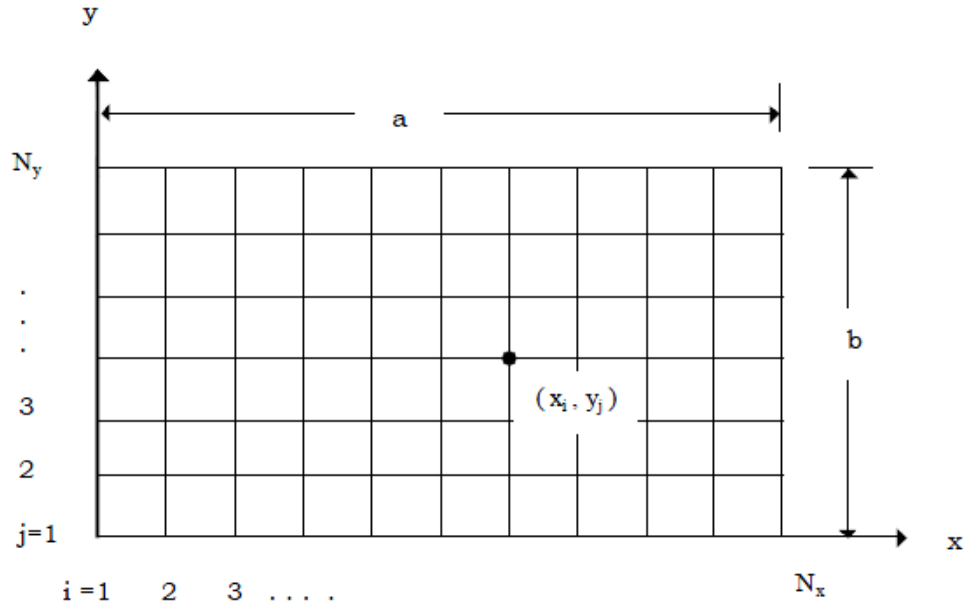
Yüksek dereceden katsayılar ise şu ifadelerle hesaplanabilmektedir;

$$a_{hi}^{(r)} = r \left( a_{hi}^{(1)} a_{ii}^{(r-1)} + \frac{a_{hi}^{(r-1)}}{x_h - x_i} \right) \quad (5.25)$$

$$a_{ii}^{(r+1)} = - \sum_{h \neq i} \left( a_{hi}^{(r+1)} \right) \quad (5.26)$$

Bir boyutlu fonksiyonlar için elde edilmiş olan denklemlerde değişiklikler yapılarak 2 boyutlu fonksiyonlar için gerekli olan katsayı değerlerinin hesaplanması mümkün olur. Buna göre bir boyutludan farklı olarak uzayda x boyutuna ek olarak y boyutuda eklenebilmektedir.

Y eksenindeki kollokasyon noktaları kümesi;  $I_y = \{y_1 = 0, \dots, y_j, \dots, y_m = 1\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , X eksenindeki kollokasyon noktaları kümesi;  $I_x = \{x_1 = 0, \dots, x_j, \dots, x_n = 1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  dir.



Şekil 5.3 İki boyutlu bölge için düğüm noktaları

$$u = u(t, x, y) \cong u^{nm}(t, x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m L_i(x) L_j(y) u_{ij}(t) \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial^r u}{\partial x^r}(t; x_i, y_j) \cong \sum_{h=1}^n a_{hi}^{(r)} u_{hj}(t) \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial^r u}{\partial y^r}(t; x_i, y_j) \cong \sum_{k=1}^m b_{kj}^{(r)} u_{ik}(t) \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t; x_i, y_j) \cong \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^m a_{hi}^{(1)} b_{kj}^{(1)} u_{hk}(t) \quad (5.30)$$

a ve b katsayılarının hesabı 1 boyutlu sistemdekilerle aynı şekilde yapılabilmektedir.

## BÖLÜM ALTI

### YERALTI SUYU AKIM PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

#### 6.1 Basınçlı Akiferde Yeraltı Suyu Problemi

Kuyudan çekimin olduğu bir basınçlı akiferde yeraltı suyu akım ,denklem (3.7) ile ifade edilebilmektedir. Buradaki  $h$  yeraltı suyu yüksekliğini,  $x$  ve  $y$ , yatay ve düşey konumları,  $t$  zaman değişkenini,  $S$  depolama katsayısını,  $T$  iletimlilik katsayısını ve  $R$ 'de beslenimi ifade eder. Problem alanında 1. ve sonuncu noktalarda sınır şartları tanımlanmakta ve her başlangıç anındaki  $h$  değerleri bilinmektedir.

##### 6.1.1 Sonlu Farklar Yöntemi

###### 6.1.1.1 Açık Formda Sonlu Farklar

Problemin matematiksel ifadesi olan kısmi diferansiyel denklem sonlu farklar yöntemine göre  $t$  anında ayrıklaştırılırsa;

$$\frac{h_{i+1,j}^{t-\Delta t} - 2h_{i,j}^{t-\Delta t} + h_{i-1,j}^{t-\Delta t}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j+1}^{t-\Delta t} - 2h_{i,j}^{t-\Delta t} + h_{i,j-1}^{t-\Delta t}}{(\Delta y)^2} = \frac{S}{T} \frac{h_{i,j}^t - h_{i,j}^{t-\Delta t}}{\Delta t} - \frac{R(x,y,t)}{T} \quad (6.1)$$

(6.4) denkleminde bilinmeyen sadece  $h_{i,j}^t$  terimidir. Bu denklemden  $h_{i,j}^t$  çekilirse

$$h_{i,j}^t = \frac{T\Delta t}{S} \frac{h_{i+1,j}^{t-\Delta t} - 2h_{i,j}^{t-\Delta t} + h_{i-1,j}^{t-\Delta t}}{(\Delta x)^2} + \frac{T\Delta t}{S} \frac{h_{i,j+1}^{t-\Delta t} - 2h_{i,j}^{t-\Delta t} + h_{i,j-1}^{t-\Delta t}}{(\Delta y)^2} + h_{i,j}^{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{S} R(x,y,t) \quad (6.2)$$

denklemini elde edilmektedir.

###### 6.1.1.2 Kapalı Formda Sonlu Farklar

(3.7) denklemini  $t_{n+1}$  anında ayrıklaştırıldığı takdirde ise

$$\frac{h_{i+1,j}^t - 2h_{i,j}^t + h_{i-1,j}^t}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j+1}^t - 2h_{i,j}^t + h_{i,j-1}^t}{(\Delta y)^2} = \frac{S}{T} \frac{h_{i,j}^t - h_{i,j}^{t-\Delta t}}{\Delta t} - \frac{R(x,y,t)}{T} \quad (6.3)$$

elde edilir.

(6.3) denkleminde 5 bilinmeyen vardır. Denklem bilinenler ve bilinmeyenler olarak düzenlenirse;

$$\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}\right) h_{i+1,j}^t + \left(\frac{1}{(\Delta y)^2}\right) h_{i,j+1}^t - \left(\frac{2}{(\Delta x)^2} + \frac{2}{(\Delta y)^2} + \frac{S}{T\Delta t}\right) h_{i,j}^t + \left(\frac{1}{(\Delta x)^2}\right) h_{i-1,j}^t + \left(\frac{1}{(\Delta y)^2}\right) h_{i,j-1}^t = -\frac{S}{T} \frac{h_{i,j}^{t-\Delta t}}{\Delta t} - \frac{R(x,y,t)}{T} \quad (6.4)$$

elde edilmektedir.

### 6.1.2 Kollokasyon Metodu

#### 6.1.2.1 Açık Formda Kollokasyon Metodu

( $t - \Delta t$ ) anında, (i,m) noktası için, açık formda, yeraltı suyu akım denkleminin kollokasyon yöntemine göre ayrıklaştırılmış hali;

$$\sum_{j=1}^{N_x} A_{j,i} h_{j,m}^{t-\Delta t} + \sum_{n=1}^{N_y} B_{n,m} h_{i,n}^{t-\Delta t} = \frac{S}{T} \times \frac{h_{i,m}^t - h_{i,m}^{t-\Delta t}}{\Delta t} - \frac{R(i,m,t)}{T} \quad (6.5)$$

dir.

(6.5)denkleminde bilinmeyen çekilirse;

$$h_{i,m}^t = \frac{R(i,m,t) \times \Delta t}{S} + \left(\sum_{j=1}^{N_x} A_{j,i} h_{j,m}^{t-\Delta t} + \sum_{n=1}^{N_y} B_{n,m} h_{i,n}^{t-\Delta t}\right) \times \frac{T \times \Delta t}{S} + h_{i,m}^{t-\Delta t} \quad (6.6)$$

elde edilmektedir.

#### 6.1.2.2 Kapalı Formda Kollokasyon Metodu

t anında, (i,m) noktası için, kapalı formda yeraltı suyu akım denkleminin kollokasyon yöntemine göre ayrıklaştırılmış hali;

$$\sum_{j=1}^{N_x} A_{j,i} h_{j,m}^t + \sum_{n=1}^{N_y} B_{n,m} h_{i,n}^t = \frac{S}{T} \times \frac{h_{i,m}^t - h_{i,m}^{t-\Delta t}}{\Delta t} - \frac{R(i,m,t)}{T} \quad (6.7)$$

(6.7)denklemini daha açık formda yazarsak;

$$A_{1,i} \times h_{1,m}^t + A_{2,i} \times h_{2,m}^t + \dots + A_{nx-1,i} \times h_{nx-1,m}^t + A_{nx,i} \times h_{nx,m}^t + B_{1,m} \times h_{i,1}^t + B_{2,m} \times h_{i,2}^t + \dots + B_{ny-1,m} \times h_{i,ny-1}^t + B_{ny,m} \times h_{i,ny}^t = \frac{S}{T} \times \frac{h_{i,m}^t - h_{i,m}^{t-\Delta t}}{\Delta t} - \frac{R(i,m,t)}{T} \quad (6.8)$$

halini almaktadır.

(6.8) denklemini bilinenler ve bilinmeyenler olarak gruplandırılırsa;

$$-\frac{S}{T\Delta t} \times h_{i,m}^t + \sum_{j=2}^{Nx-1} A_{j,i} h_{j,m}^t + \sum_{n=2}^{Ny-1} B_{n,m} h_{i,n}^t = -\left(\frac{S}{T\Delta t} \times h_{i,m}^{t-\Delta t} + A_{1,i} \times h_{1,m}^t + A_{nx,i} \times h_{nx,m}^t + B_{1,m} \times h_{i,1}^t + B_{ny,m} \times h_{i,ny}^t + \frac{R(i,m,t)}{T}\right) \quad (6.9)$$

(6.9) denkleminde 1. ve sonuncu noktaları sınır şartı olarak kabul edildiğinden beri  $(N_x - 2) \times (N_y - 2)$  adet bilinmeyen vardır. Her nokta için bu ayrık forma ulaşılır ve toplamda  $(N_x - 2) \times (N_y - 2)$  adet denklem ve  $(N_x - 2) \times (N_y - 2)$  adet bilinmeyen elede edilir. Daha sonra oluşan matris, matris işlemleri sayesinde çözülmektedir.

## 6.2 Serbest Yüzeyle Akiferde Yeraltı Suyu Problemi

Serbest yüzeyle akiferdeki yeraltı suyu akışının matematiksel ifadesi olan (3.13) kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Denklem  $v = h^2$  dönüşümü ile

$$\frac{K}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{S}{2\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial t} - R(x, y, t) \quad (6.10)$$

halini almaktadır (Wang ve Anderson, 1981).

Nümerik çözüm yöntemleri ile (6.10) denklemi çözümlendirildikten sonra, gerçekte aradığımız h değerlerine;  $h = \sqrt{v}$  ters dönüşümü ile ulaşılmaktadır.

### 6.2.1 Sonlu Farklar Yöntemi

#### 6.2.1.1 Açık Formda Sonlu Farklar

(6.10) denklemini  $(i, j)$  noktalarında ve  $t - \Delta t$  anında, açık formda, ayrıklaştırırsak

$$v_{i,j}^t = (1 - \omega)v_{i,j}^{t-\Delta t} + \omega \left( \frac{v_{i-1,j}^{t-\Delta t} + v_{i+1,j}^{t-\Delta t} + v_{i,j-1}^{t-\Delta t} + v_{i,j+1}^{t-\Delta t}}{4} \right) + \frac{2R_{i,j}^{t-\Delta t} \sqrt{v_{i,j}^{t-\Delta t} \Delta t}}{S} \quad (6.11)$$

Elde edilir. Burada

$$a = \Delta x = \Delta y \quad (6.12)$$

$$\omega = \frac{4K \sqrt{v_{i,j}^{t-\Delta t} \Delta t}}{Sa^2} \quad (6.13) \text{ dir.}$$

(6.11) denkleminde tek bilinmeyen vardır ve çözüm alanındaki her nokta için kolaylıkla hesaplanabilmektedir.

#### 6.2.1.2 Kapalı Formda Sonlu Farklar

(6.10) denklemi doğrusal olmadığı için kapalı formda ayrıklaştırıldığında yine doğrusal olmayan bir denklem elde edilmektedir. Denklemi doğrusallaştırmak amacıyla  $\frac{S}{2\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial t}$  terimindeki  $1/\sqrt{v}$  çarpanı açık formda ifade edilmiştir (yarı kapalı form). Bu yaklaşımla (6.10) denklemi kapalı formda sonlu farklar yöntemi ile ayrıklaştırıldığında;

$$v_{i,j}^t = \frac{1}{\left( \frac{a^2 S}{4K \sqrt{v_{i,j}^{t-\Delta t}}} + \alpha \right)} \left[ \alpha \tilde{v}_{i,j}^t + \frac{a^2 S}{4K \sqrt{v_{i,j}^{t-\Delta t}}} v_{i,j}^{t-\Delta t} + (1 - \alpha)(\tilde{v}_{i,j}^{t-\Delta t} - v_{i,j}^{t-\Delta t}) + \frac{a^2 R_{i,j}^{t-\Delta t}}{2K} \right] \quad (6.14)$$

elde edilir.

Burada,

$$\tilde{v}_{i,j}^{t-\Delta t} = \frac{v_{i-1,j}^{t-\Delta t} + v_{i+1,j}^{t-\Delta t} + v_{i,j-1}^{t-\Delta t} + v_{i,j+1}^{t-\Delta t}}{4} \quad (6.15)$$

ve benzer şekilde

$$\tilde{v}_{i,j}^t = \frac{v_{i-1,j}^t + v_{i+1,j}^t + v_{i,j-1}^t + v_{i,j+1}^t}{4} \quad (6.16) \text{ dir.}$$

(6.16) denkleminde 5 adet bilinmeyen bulunmaktadır. Elde edilen bu denklem yardımıyla oluşturulan bilinmeyenler matrisi iteratif yöntemler ile çözümlendirilmektedir.

## 6.2.2 Kollokasyon Metodu

### 6.2.2.1 Açık Formda Kollokasyon Metodu

( $t - \Delta t$ ) anında, (i,m) noktası için, açık formda, yeraltı suyu akım denkleminin kollokasyon yöntemine göre ayrıklaştırılmış hali;

$$\frac{K}{2} \left( \sum_{j=1}^{Nx} A_{j,i} v_{j,m}^{t-\Delta t} + \sum_{n=1}^{Ny} B_{n,m} v_{i,n}^{t-\Delta t} \right) = \frac{S}{2\sqrt{v^{t-\Delta t}}} \times \frac{v_{i,m}^t - v_{i,m}^{t-\Delta t}}{\Delta t} - R(i, m, t) \quad (6.17)$$

dir.

(6.17)denklemininden bilinmeyen çekilirse;

$$v_{i,m}^t = \frac{2\sqrt{v^{t-\Delta t}} \times \Delta t}{S} \left( R(i, m, t) + \frac{K}{2} \left( \sum_{j=1}^{Nx} A_{j,i} v_{j,m}^{t-\Delta t} + \sum_{n=1}^{Ny} B_{n,m} v_{i,n}^{t-\Delta t} \right) \right) + v_{i,m}^{t-\Delta t} \quad (6.18)$$

elde edilmektedir.

### 6.2.2.2 Kapalı Formda Kollokasyon Metodu

6.1.3 bölümündekine benzer olarak zamana bağlı olan kısmi türev ifadesi kollokasyon yöntemiyle açılacaktır.(6.10) denklemini t anında, (i,m) noktaları için, Yeraltı suyu akım denkleminin Kollokasyon yöntemine göre ayrıklaştırılmış hali;

$$\frac{K}{2} \left( \sum_{j=1}^{N_x} A_{j,i} v_{j,m}^t + \sum_{n=1}^{N_y} B_{n,m} v_{i,n}^t \right) = \frac{S}{2\sqrt{v^{t-\Delta t}}} \times \frac{v_{i,m}^t - v_{i,m}^{t-\Delta t}}{\Delta t} - R(i, m, t) \quad (6.19)$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada denklem doğrusal olmadığı için kapalı formda sonlu fark yönteminde yapılan kabul ile denklem ayrıklaştırılmıştır. (6.19) denklemini düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned} & \frac{K}{2} \left( A_{1,i} \times v_{1,m}^t + A_{2,i} \times v_{2,m}^t + \dots + A_{n_x-1,i} \times v_{n_x-1,m}^t + A_{n_x,i} \times v_{n_x,m}^t \right) + \\ & \frac{K}{2} \left( B_{1,m} \times v_{i,1}^t + B_{2,m} \times v_{i,2}^t + \dots + B_{n_y-1,m} \times v_{i,n_y-1}^t + B_{n_y,m} \times v_{i,n_y}^t \right) = \frac{S}{2\sqrt{v^{t-\Delta t}}} \times \\ & \frac{v_{i,m}^t - v_{i,m}^{t-\Delta t}}{\Delta t} - R(i, m, t) \end{aligned} \quad (6.20)$$

halini almaktadır.

(6.20) denklemini bilinenler ve bilinmeyenler olarak gruplandırılır ve (6.9) denkleminin çözümüne benzer olarak çözüme ulaştırılır.



## BÖLÜM YEDİ UYGULAMALAR

Bu bölümde analitik çözümü bilinen 2 boyutlu hipotetik bir problem ile basınçlı ve serbest yüzeyli yeraltı suyu akımlarına ait örnekler Sonlu farklar ve Kollokasyon yöntemleri ile çözülmüş ve elde edilen sonuçlar verilmiştir. Yeraltı suyu akımlarına ait örneklerde karşılaştırma amacıyla Theis yöntemi ile de çözüm yapılmıştır.

### 7.1 Örnek 1

İlk örnekte analitik çözümü bilinen

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7.1)$$

denklemini kullanılmıştır.  $t=0$  anında

$$h(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y) \quad (7.2)$$

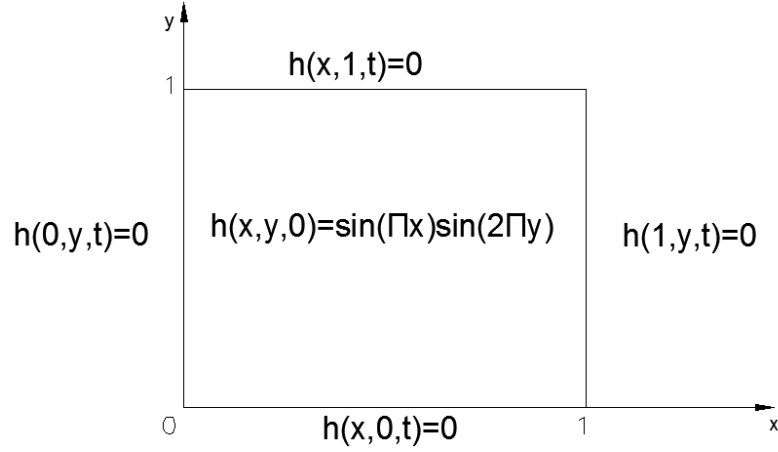
ve sınır koşulları

$$\left. \begin{aligned} h(0, y, t) = 0, h(1, y, t) = 0 \\ h(x, 0, t) = 0, h(x, 1, t) = 0 \end{aligned} \right\} \text{Dirichlet sınır şartı} \quad (7.3)$$

olmak üzere (7.1) denkleminin analitik çözümü

$$h(x, y, t) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y) e^{-5\pi^2 t} \quad (7.4)$$

şeklinde verilmektedir (Akman, 2003).



Şekil 7.1 (7.1) denkleminin çözümü için başlangıç ve sınır koşulları

Sonlu farklar yöntemi ile yapılan çözüm açık ve kapalı şemalar kullanılarak 2 farklı yaklaşımla yapılmıştır. (4.1) denkleminin açık şema ile yazılması durumunda denklem

$$h_{i,j}^{n+1} = \Delta t \left( \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) + h_{i,j}^n \quad (7.5)$$

şeklini almakta, kapalı şema kullanılarak yazılması durumunda ise

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} \right) h_{i+1,j}^{n+1} + \left( \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) h_{i,j+1}^{n+1} - \left( \frac{2}{(\Delta x)^2} + \frac{2}{(\Delta y)^2} + \frac{S}{T\Delta t} \right) h_{i,j}^{n+1} + \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} \right) h_{i-1,j}^{n+1} + \\ & \left( \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) h_{i,j-1}^{n+1} = \frac{h_{i,j}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (7.6)$$

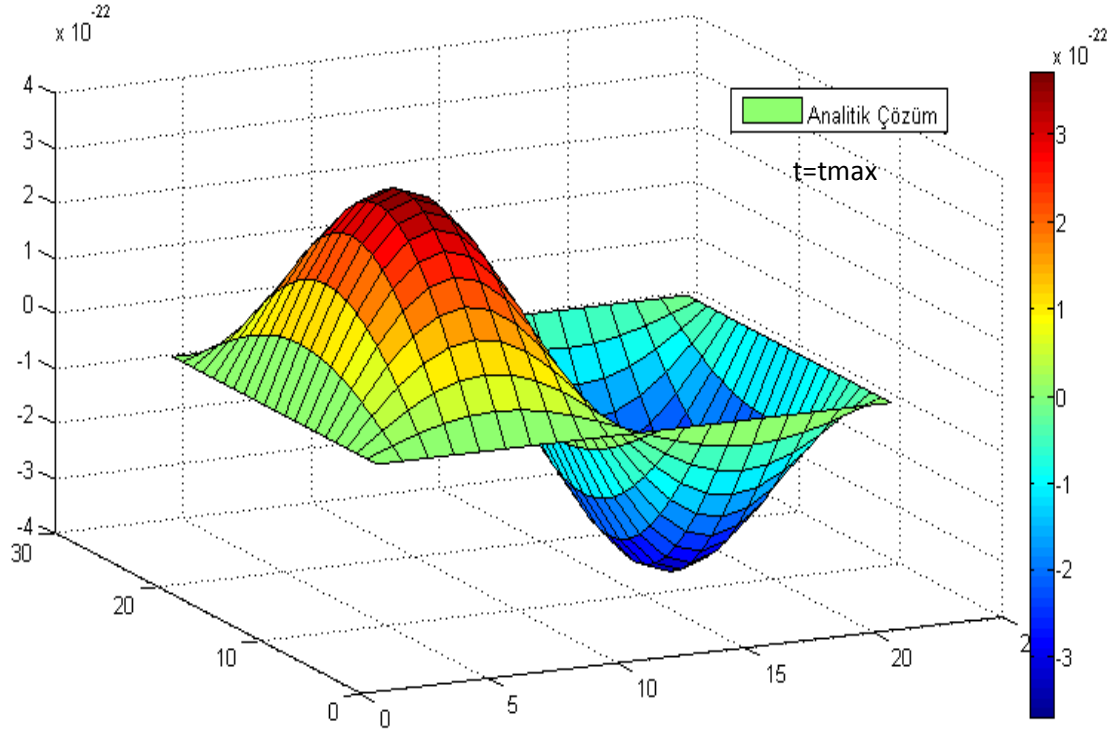
olmaktadır. Kollokasyon yönteminde ise açık şema kullanılmıştır. (4.1) denklemi Kollokasyon yöntemi ile açık şema kullanılarak,

$$\begin{aligned} & -\frac{h_{i,m}^t}{dt} + \sum_{j=2}^{Nx-1} A_{j,i} h_{j,m}^t + \sum_{n=2}^{Ny-1} B_{n,m} h_{i,n}^t \\ & = -\left( \frac{h_{i,m}^{t-\Delta t}}{dt} + A_{1,i} \times h_{1,m}^t + A_{Nx,i} \times h_{Nx,m}^t + B_{1,m} \times h_{i,1}^t + B_{Ny,m} \times h_{i,Ny}^t \right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

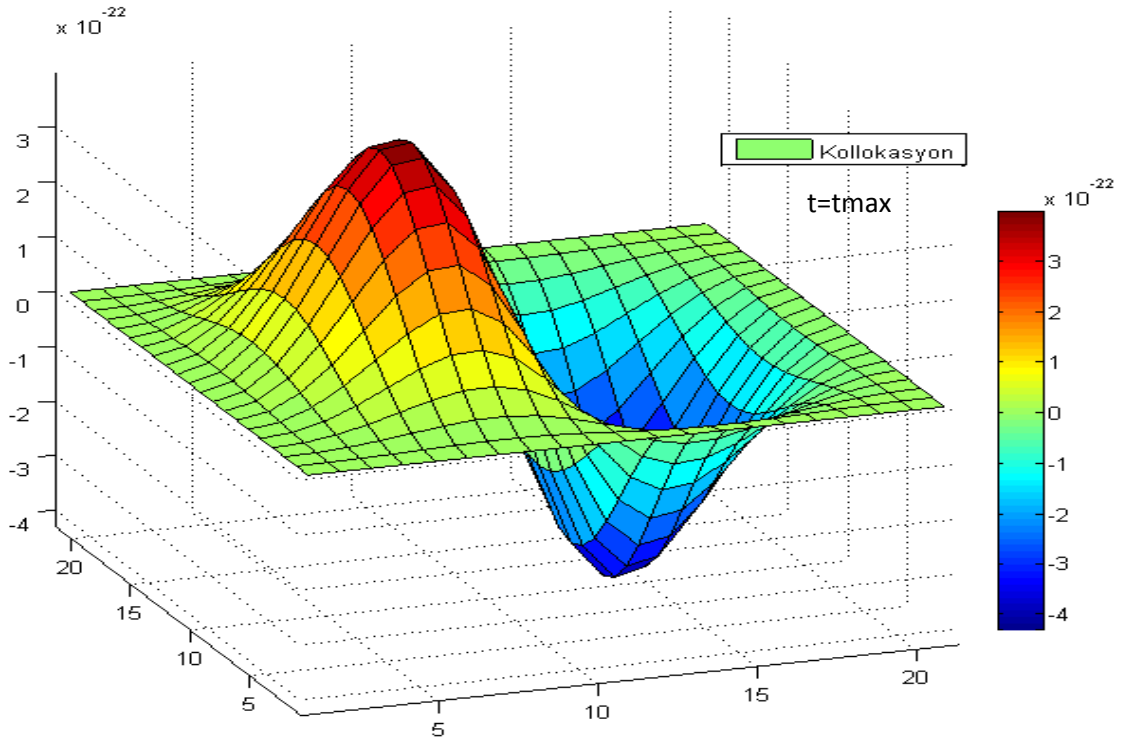
şeklinde yazılabilmektedir.

Sayısal çözümde  $t_{max} = 10$ , ve hesaplarda zaman aralığı  $\Delta t = (0.0001, 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01, 0.05)$  olmak üzere 6 farklı değer; ayrıklaştırmada ise x ve y eksenlerindeki hesap noktası sayıları  $N_x$  ve  $N_y$  için 9, 13, 17 ve 21 olmak üzere 4 farklı değer kullanılmıştır.

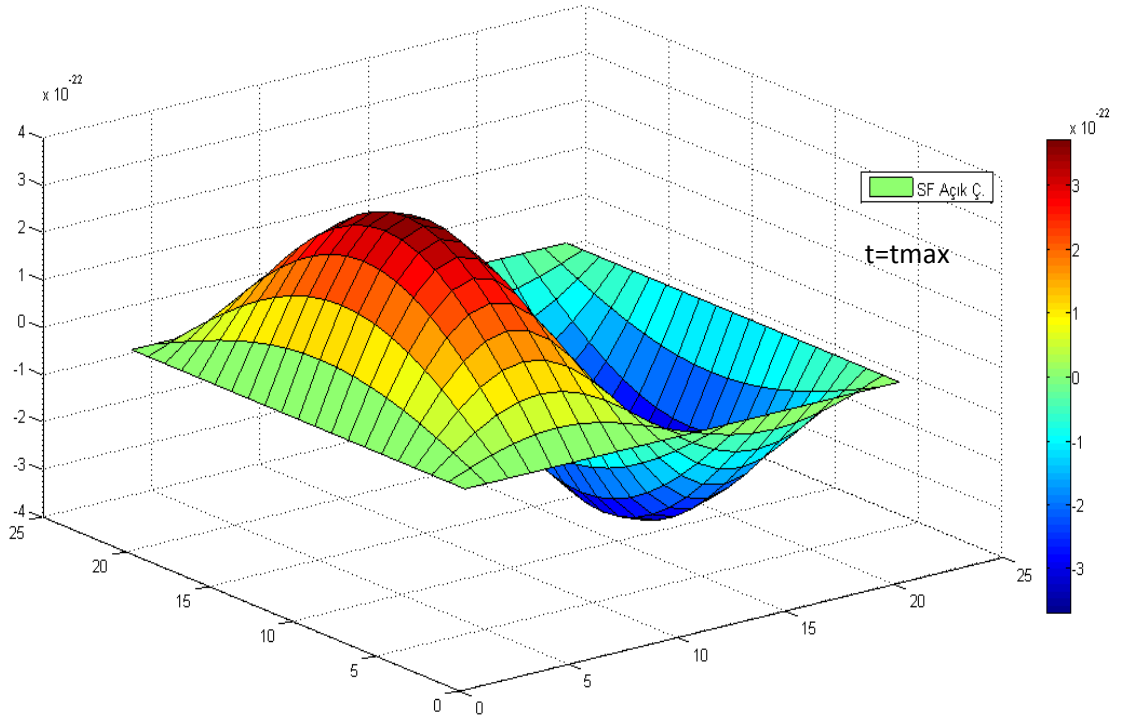
$N_x = N_y = 21$  ve  $\Delta t = 0,0001$  olmak üzere, analitik çözüm, açık ve kapalı sonlu fark çözümleri ve kollokasyon yöntemi çözümleri ile elde edilen sonuçlar Şekil 7.2-7.5'de verilmiştir.



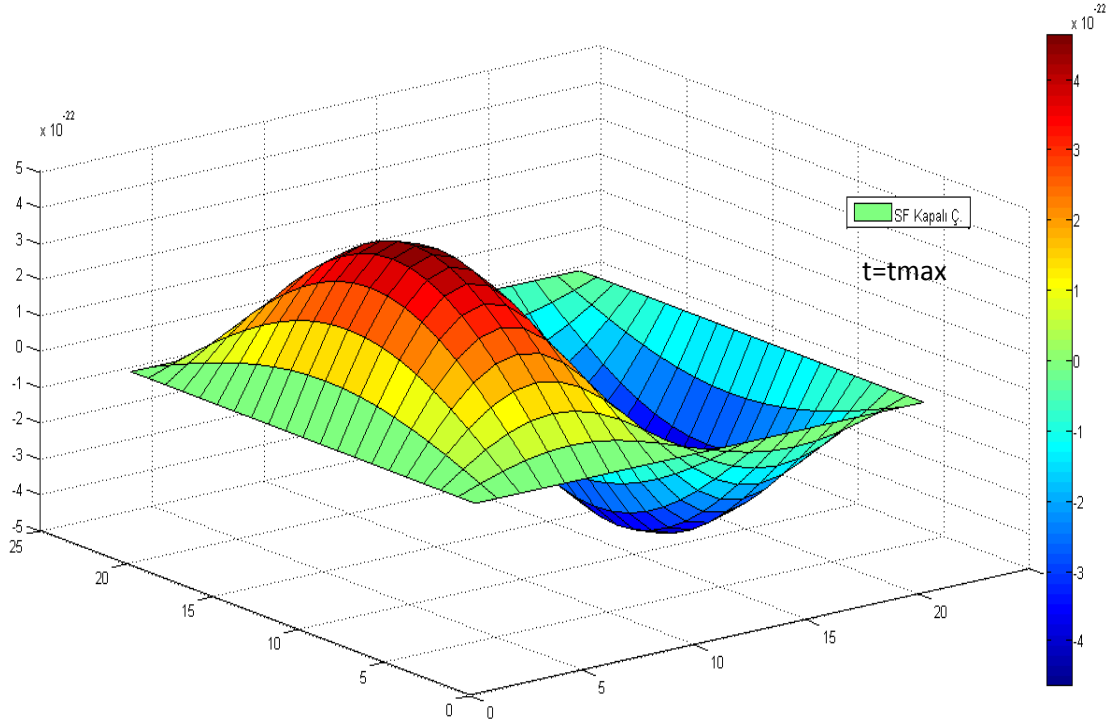
Şekil 7.2 Örnek 1 analitik çözüm  $\Delta t = 0,0001$



Şekil 7.3 Örnek 1 Kollokasyon metodu  $\Delta t = 0,0001$



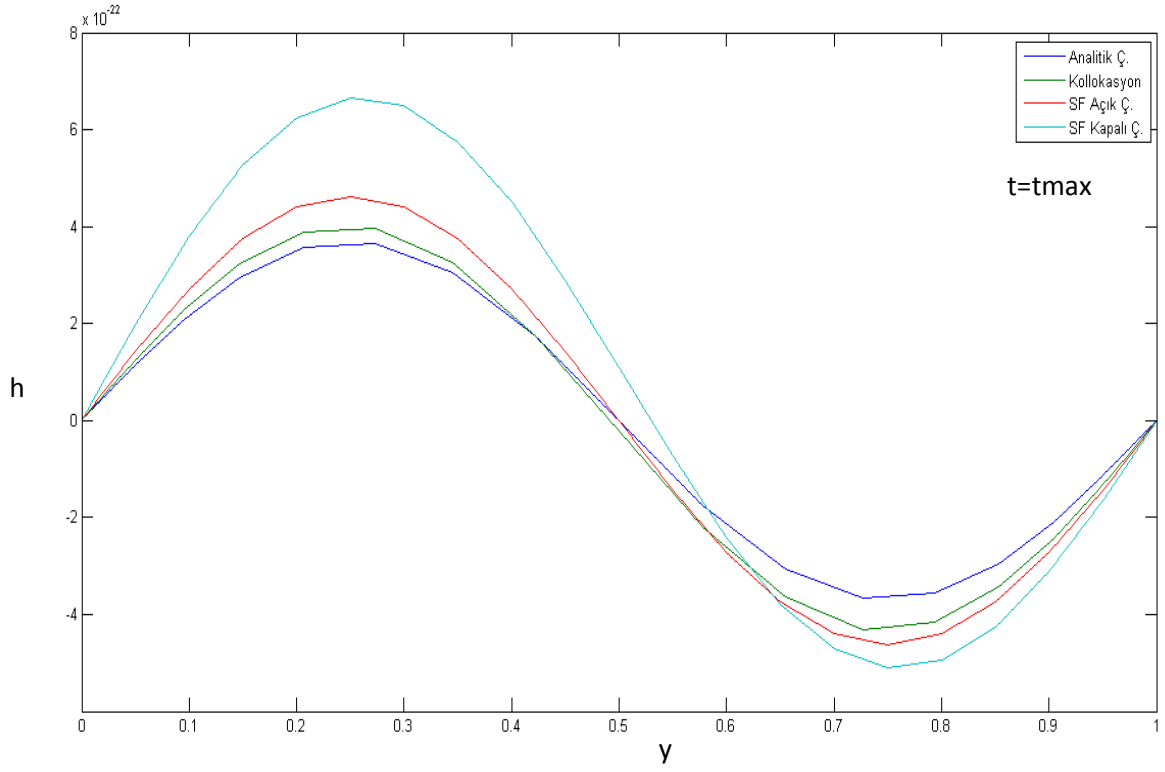
Şekil 7.4 Örnek 1 Açık sonlu farklar yöntemi çözümü  $\Delta t = 0,0001$



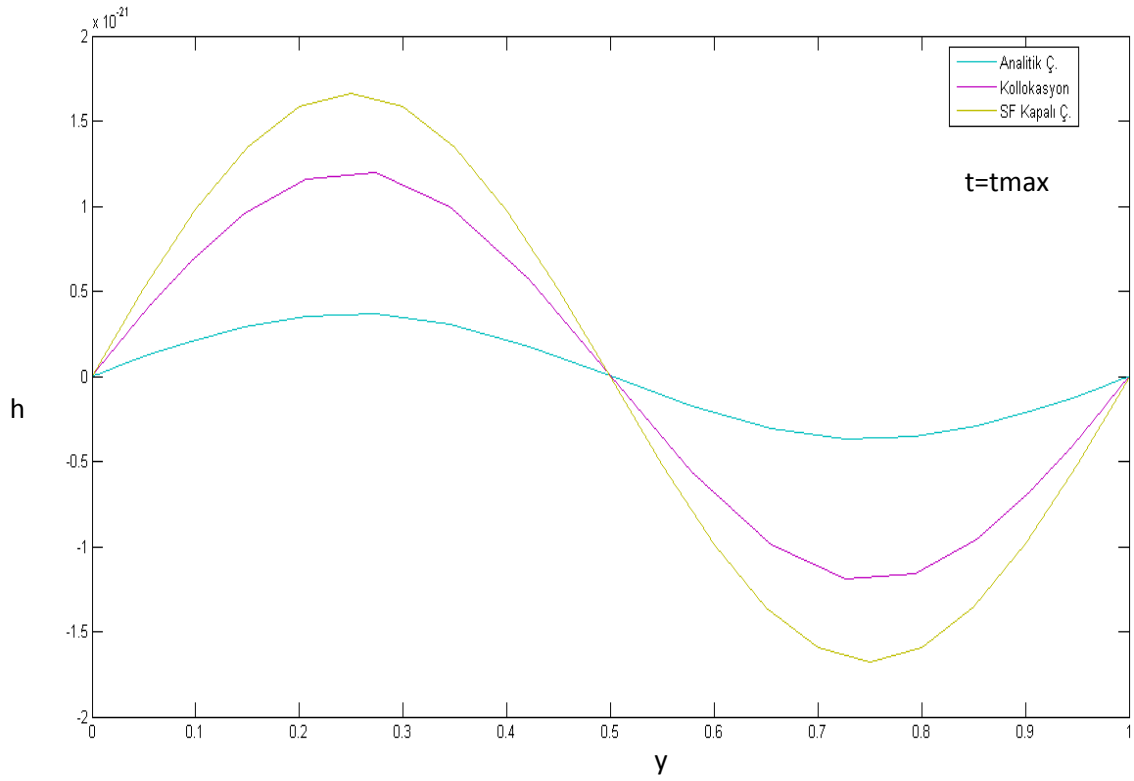
Şekil 7.5 Örnek 1 Kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü  $\Delta t = 0,0001$

$N_x = N_y = (21,9)$  ve  $\Delta t = (0.0001, 0.001, 0.01)$  için,  $x=0,5$ 'de y eksenini boyunca analitik çözüm, açık ve kapalı sonlu fark çözümleri ile kollokasyon yöntemi sonuçları Şekil 7.6 – 7.11'de verilmiştir.

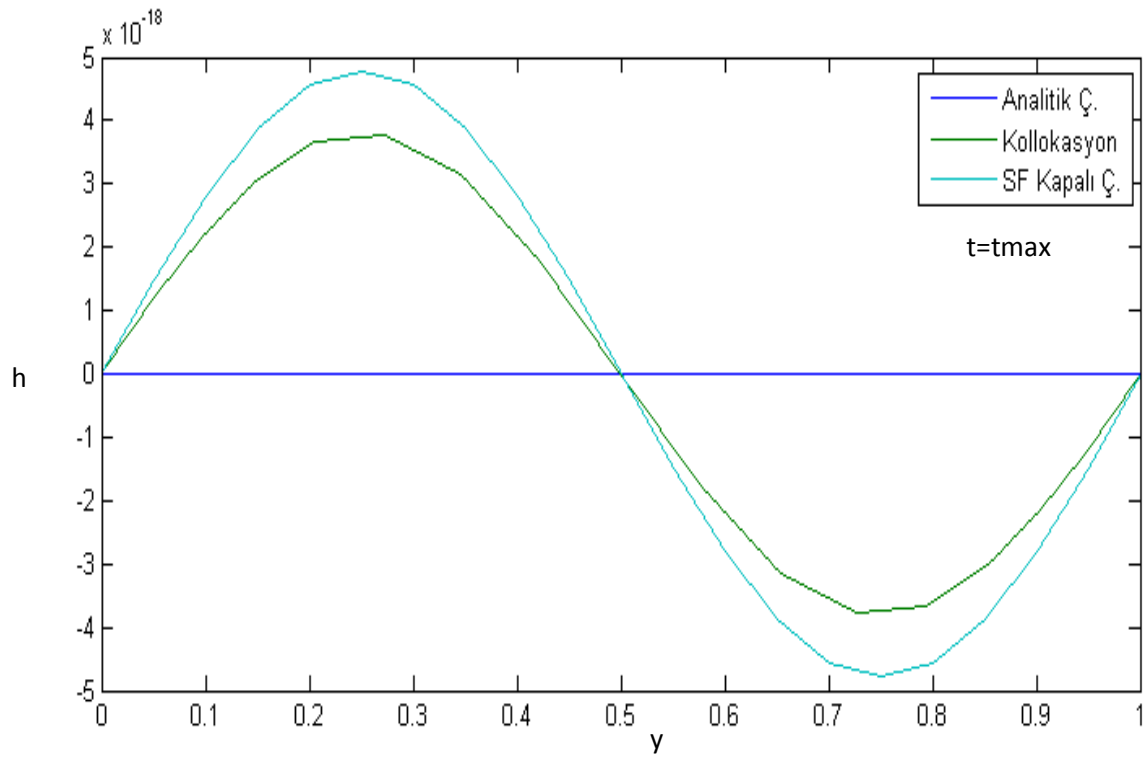
$N_x = N_y = 21$  için elde edilen sonuçları içeren Şekil 7.6-7.8 incelendiğinde Kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların analitik çözüme daha yakın olduğu, açık sonlu fark çözümünün her durumda kararlı çözüm vermediği görülmektedir.  $N_x = N_y = 9$  için elde edilen sonuçları içeren Şekil 7.9-7.11 incelendiğinde de benzer sonuçlar görülmektedir.  $N_x = N_y = 9$  için elde edilen sonuçların analitik çözüme göre farkları incelendiğinde  $N_x = N_y = 21$  için elde edilen sonuçlara göre yaklaşık 3 kat daha büyük olduğu görülmektedir.



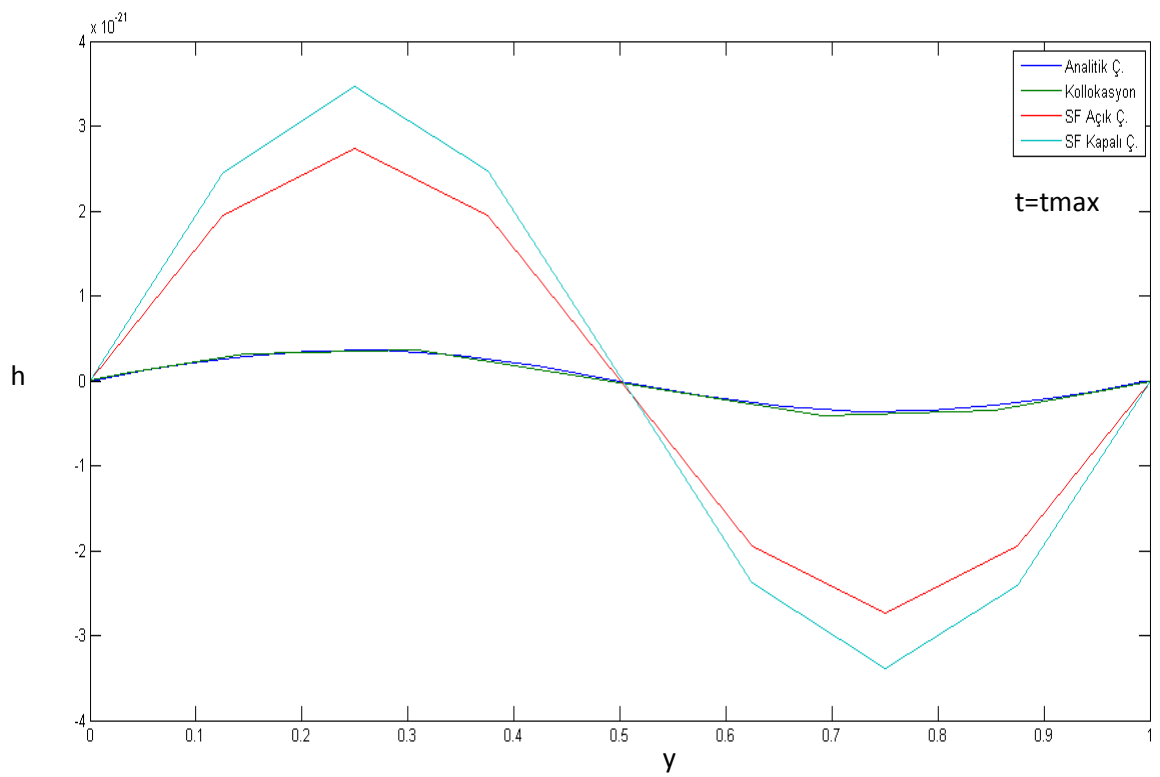
Şekil 7.6 Örnek 1  $N_x = N_y = 21, \Delta t = 0,0001$  için  $x=0.5$ 'de  $y$  boyunca  $h$  değerleri



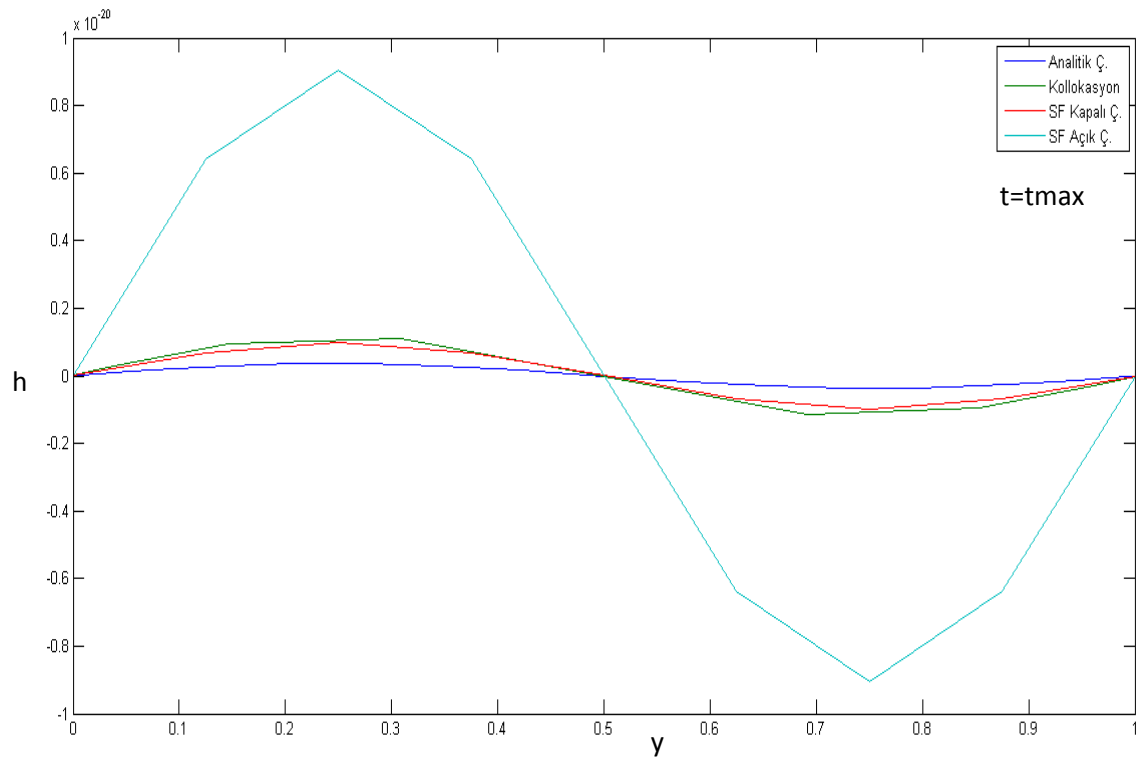
Şekil 7.7 Örnek 1  $N_x = N_y = 21, \Delta t = 0,001$  için  $x=0.5$ 'de  $y$  boyunca  $h$  değerleri



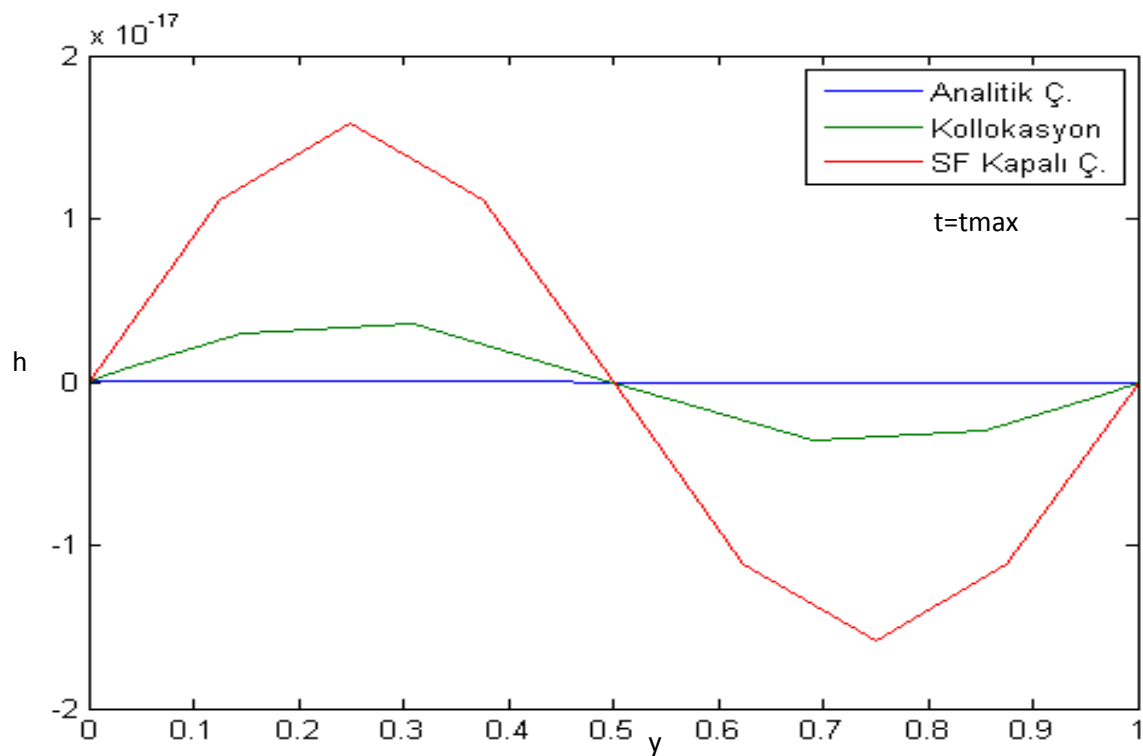
Şekil 7.8 Örnek 1  $N_x = N_y = 21, \Delta t = 0,01$  için  $x=0.5$ 'de y boyunca h değerleri



Şekil 7.9 Örnek 1  $N_x = N_y = 9, \Delta t = 0,0001$  için  $x=0.5$ 'de y boyunca h değerleri



Şekil 7.10 Örnek 1  $N_x = N_y = 9, \Delta t = 0,001$  için  $x=0.5$ 'de  $y$  boyunca  $h$  değerleri



Şekil 7.11 Örnek 1  $N_x = N_y = 9, \Delta t = 0,01$  için  $x=0.5$ 'de  $y$  boyunca  $h$  değerleri



Yöntemlerin analitik sonuçlar ile olan farkları en iyi çözüm yönteminin tayini için kullanılabilir. Farkları boyutsuz hale getirmek için analitik çözüm sonucunun en büyük değeri kullanılarak, boyutsuz fark değerleri

$$\Delta h_{yöntem} = \frac{|maks(h_{yöntem} - h_{analitik})|}{maks(h_{analitik})}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 7.1’de görülmektedir.

Tablo 7.1  $\Delta h$  Boyutsuz farklar tablosu

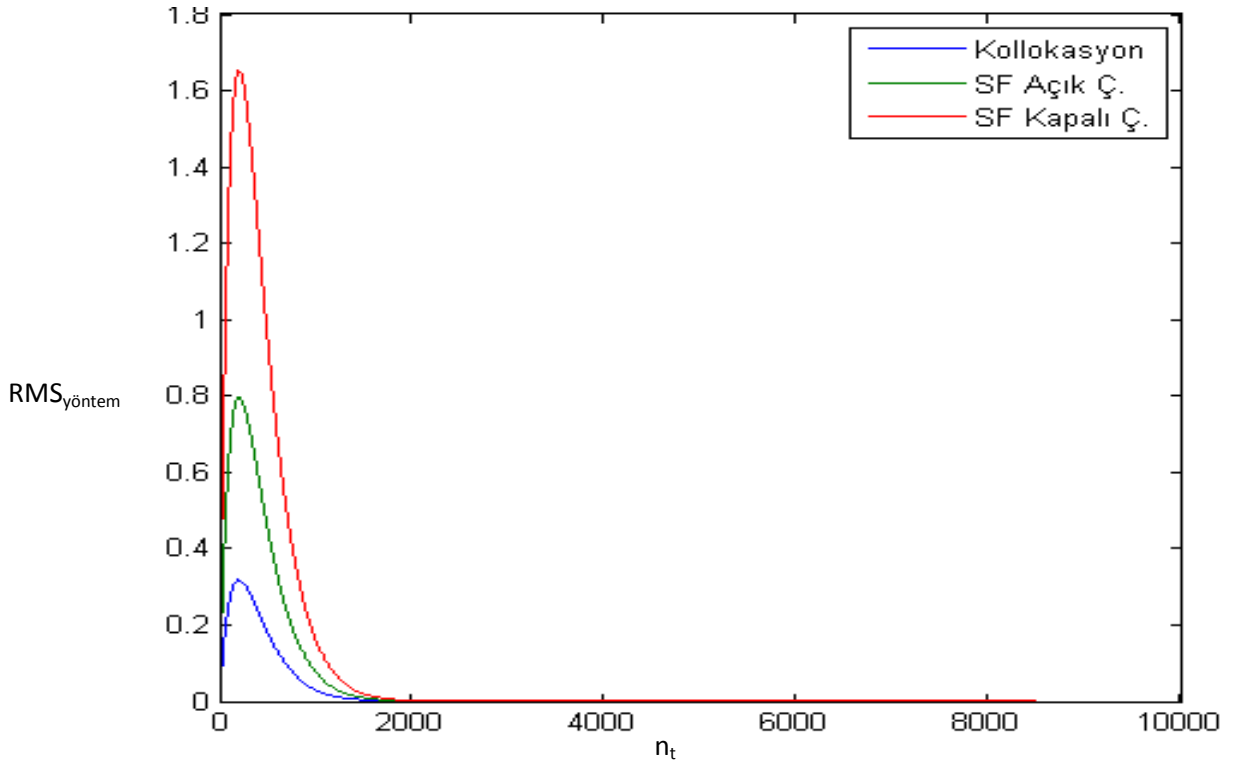
		Kollokasyon	Sonlu Farklar	
		Kapalı	Açık	Kapalı
N=21	$\Delta t=0.0001$	0,11	0,25	0,80
	$\Delta t=0.0005$	0,79	0,23	1,56
	$\Delta t=0.001$	2,26	-	3,50
	$\Delta t=0.005$	188	-	248
	$\Delta t=0.01$	10270	-	12933
N=17	$\Delta t=0.0001$	0,11	0,52	1,13
	$\Delta t=0.0005$	0,82	0,07	2,09
	$\Delta t=0.001$	2,26	-	4,42
	$\Delta t=0.005$	188	-	290
	$\Delta t=0.01$	10270	-	14718
N=13	$\Delta t=0.0001$	0,29	1,30	2,01
	$\Delta t=0.0005$	0,84	0,43	3,58
	$\Delta t=0.001$	2,27	0,23	7,04
	$\Delta t=0.005$	188	-	404,46
	$\Delta t=0.01$	10270	-	19442
N=9	$\Delta t=0.0001$	0,11	6,41	8,36
	$\Delta t=0.0005$	0,85	3,70	13,35
	$\Delta t=0.001$	2,22	1,62	23,43
	$\Delta t=0.005$	188	-	1037
	$\Delta t=0.01$	10257	-	42739

Tablodan da görüleceği gibi Kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların sonlu farklar yöntemi sonuçlarına göre daha iyi olduğu görülmektedir. Açık şema kullanılarak yapılan sonlu fark çözümlerinde sadece bir durumda kollokasyon yöntemine göre daha iyi sonuç elde edilmiştir. Ancak açık şema kullanılarak yapılan sonlu farklar çözümü stabilite nedeniyle her zaman sonuç vermemektedir.

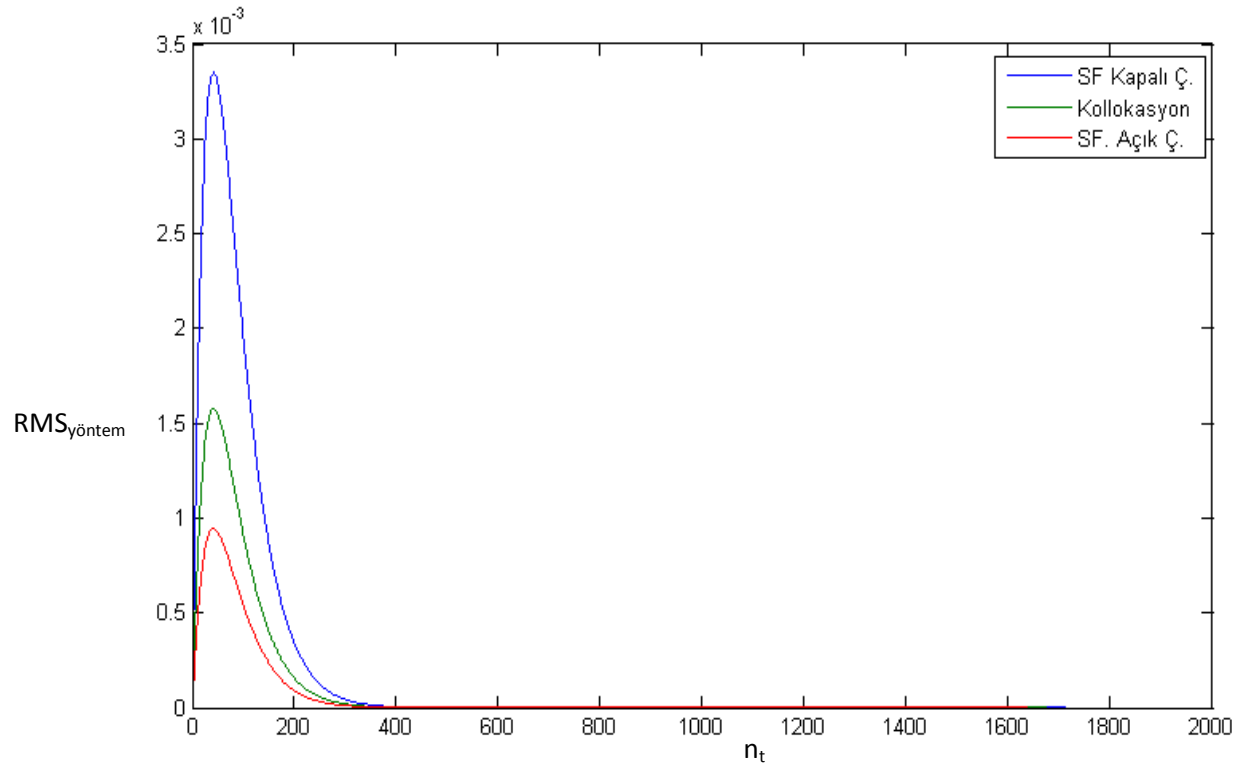
Hataların karşılaştırılması amacıyla ayrıca hataların karesel ortalaması (RMS) değerleri

$$RMS_{yöntem} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_x N_y} (h_{yöntem} - h_{analitik})^2}{N_x N_y}} \text{ olmak üzere;}$$

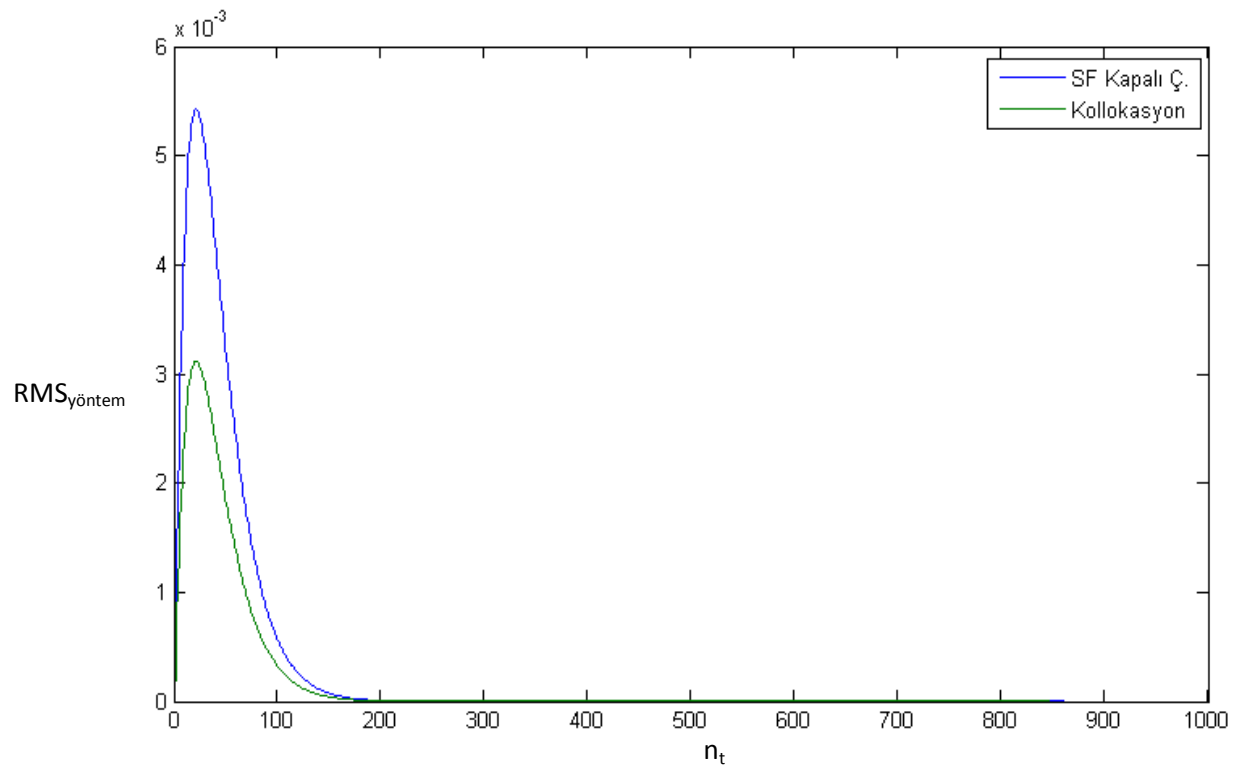
bağıntısından hesaplanmış ve  $N_x = N_y = 21$  nokta sayısı ve tüm zaman aralıkları için elde edilen sonuçlar Şekil 7.12-7.16' da verilmiştir. Şekil incelendiğinde, Kollokasyon yönteminin RMS değerlerinin sonlu farklar yöntemi değerlerinden daha küçük olduğu görülmektedir.



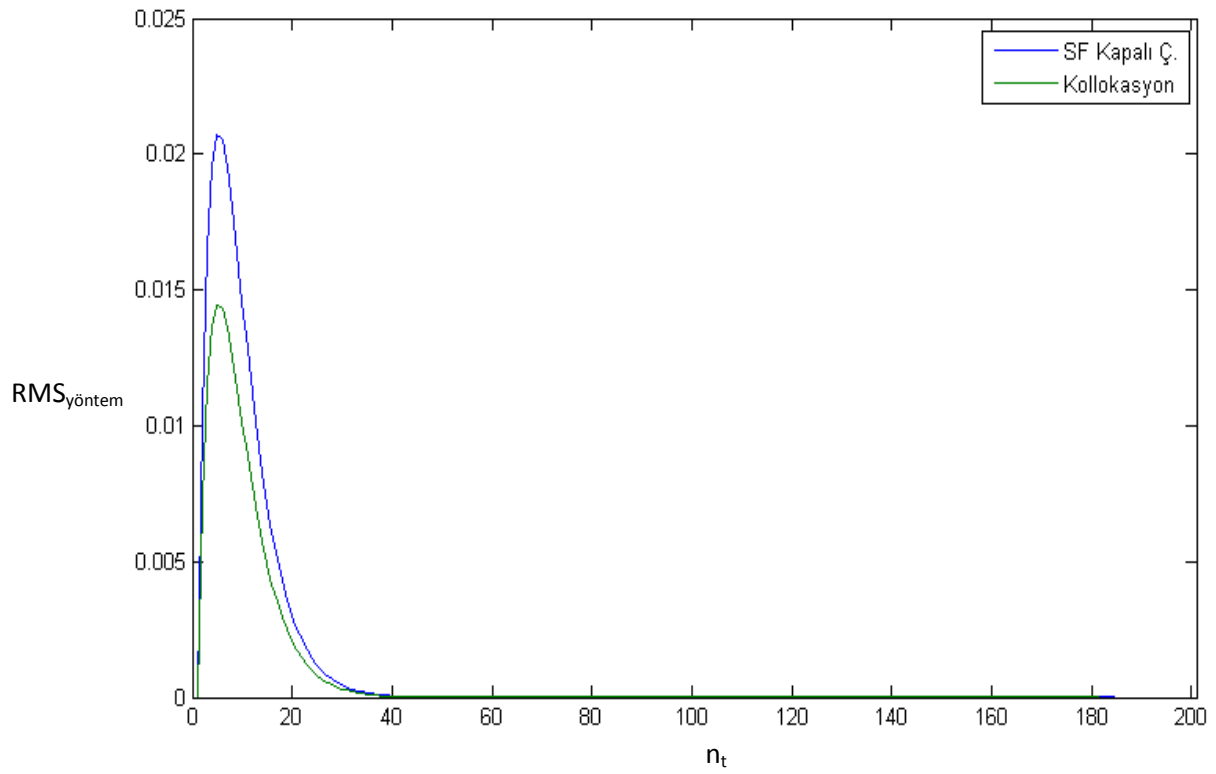
Şekil 7.12 Örnek 1  $\Delta t=0,0001$  için RMS hata değerleri



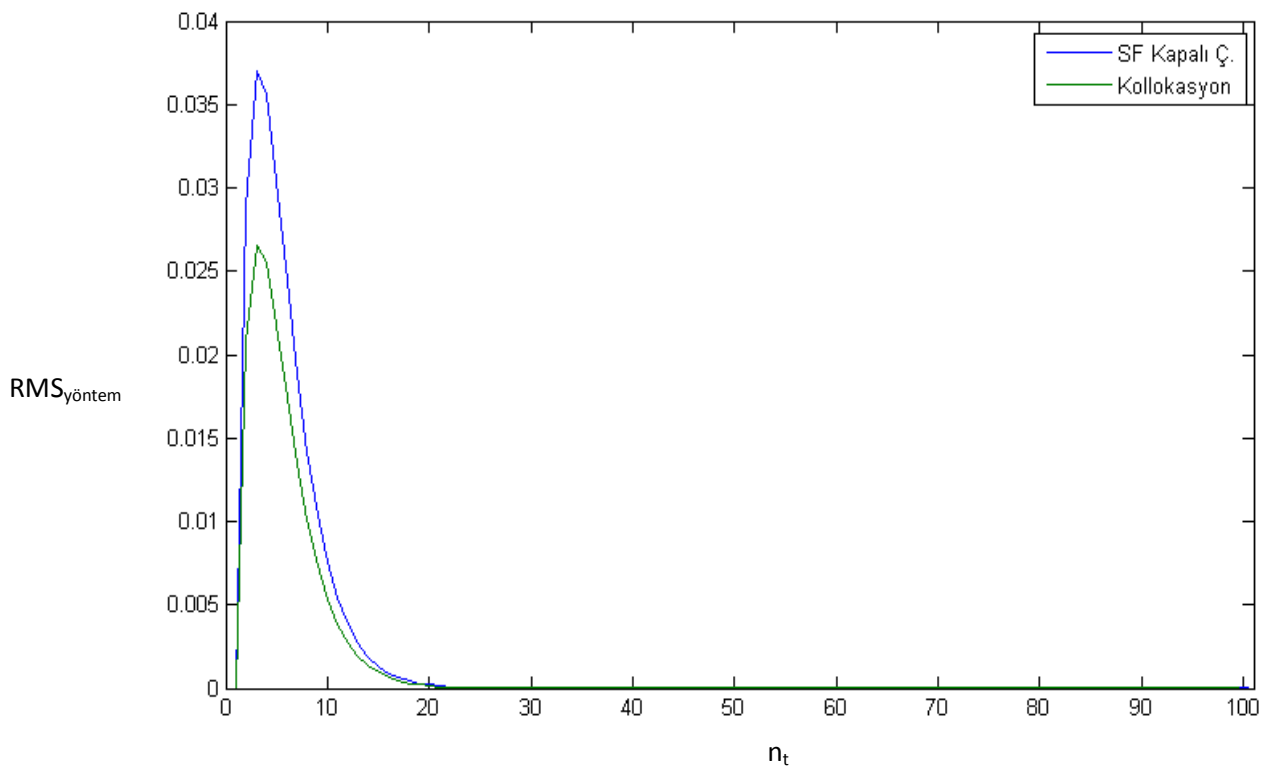
Şekil 7.13 Örnek 1  $\Delta t=0,0005$  için RMS hata değerleri



Şekil 7.14 Örnek 1  $\Delta t=0,001$  için RMS hata değerleri



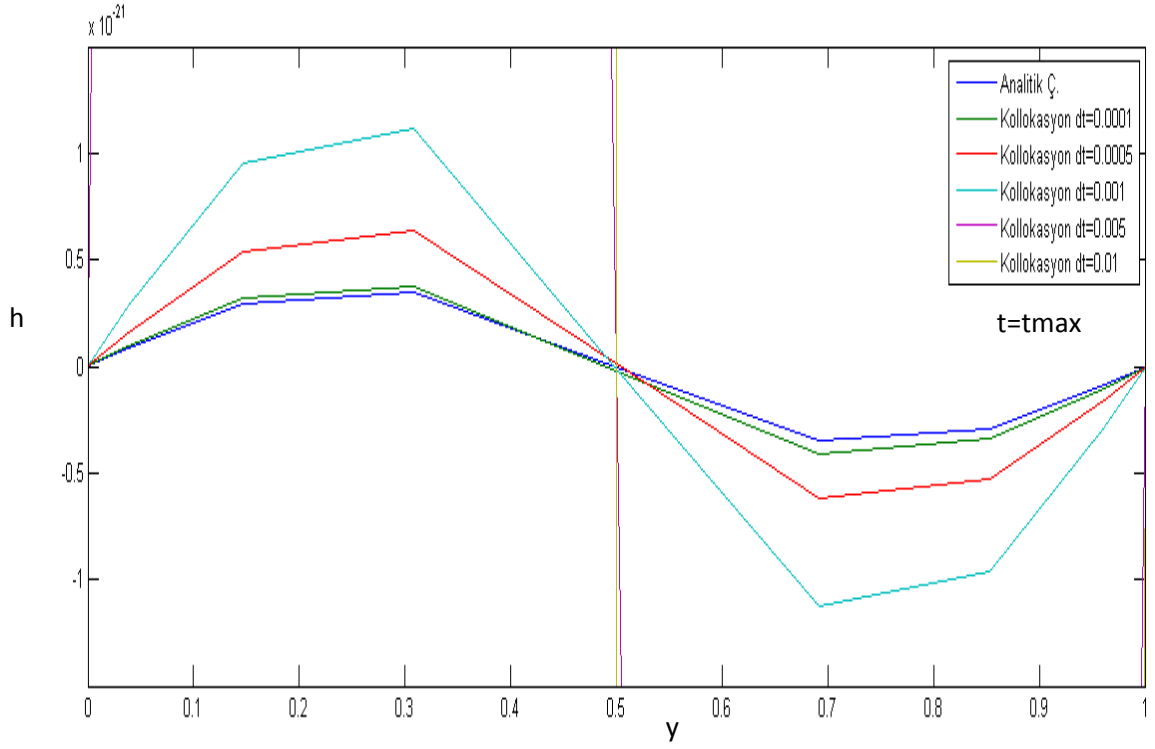
Şekil 7.15 Örnek 1  $\Delta t=0,005$  için RMS hata değerleri



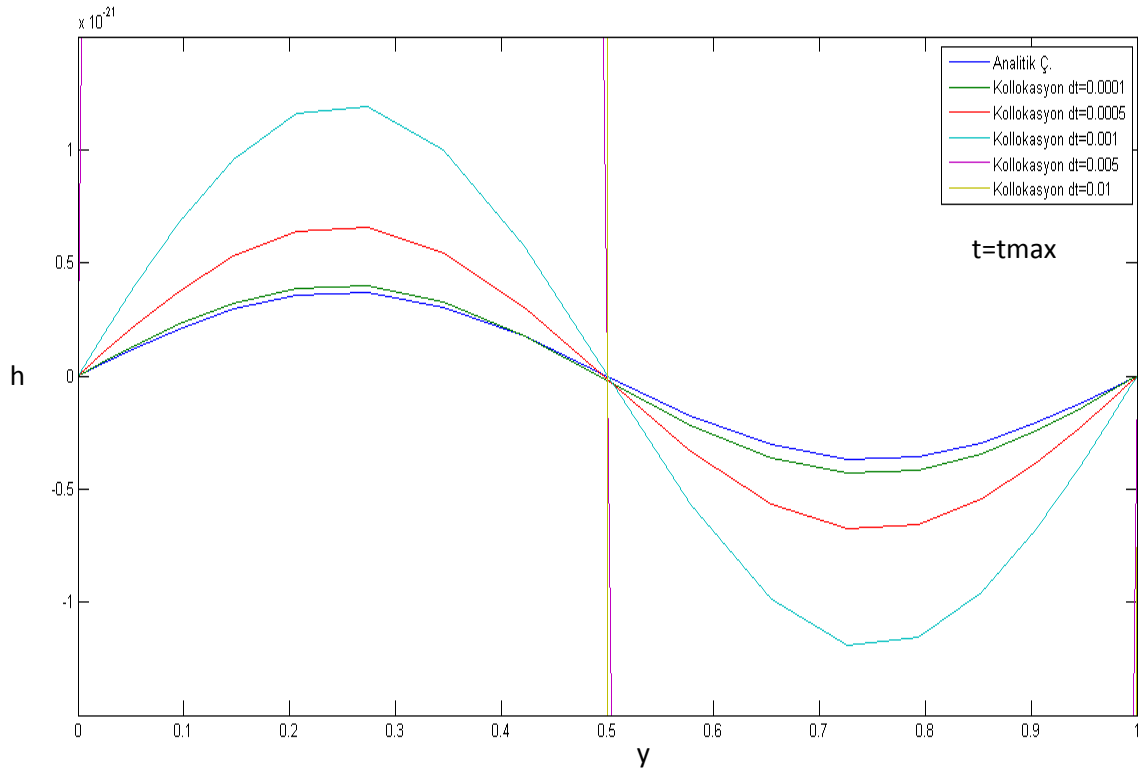
Şekil 7.16 Örnek 1  $\Delta t=0,01$  için RMS hata değerleri

Zaman aralığının çözüm üzerindeki etkilerini görmek için, Şekil 7.17-7.22’de yöntemlerin farklı zaman adımları için  $y$  eksenı boyunca elde edilen sonuçları bir arada verilmiştir. Burada karşılaştırma düzlemi olarak  $x$  eksenindeki orta nokta ( $x=0.5$ ) alınmıştır.

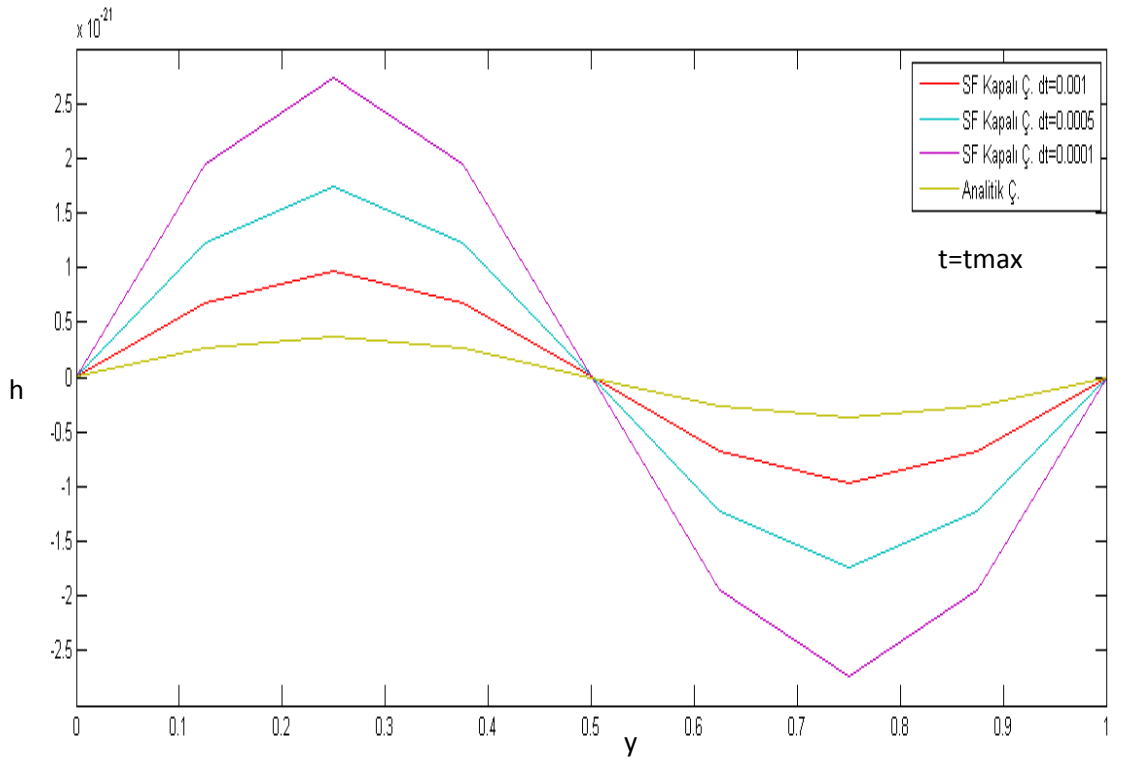
Hesap noktası sayısının çözüm üzerindeki etkilerini görmek için, Şekil 7.23-7.30’da yöntemlerin farklı hesap noktası sayısı kullanılarak  $y$  eksenı boyunca elde edilen sonuçları bir arada verilmiştir. Burada karşılaştırma düzlemi olarak  $x$  eksenindeki orta nokta ( $x=0.5$ ) alınmıştır.



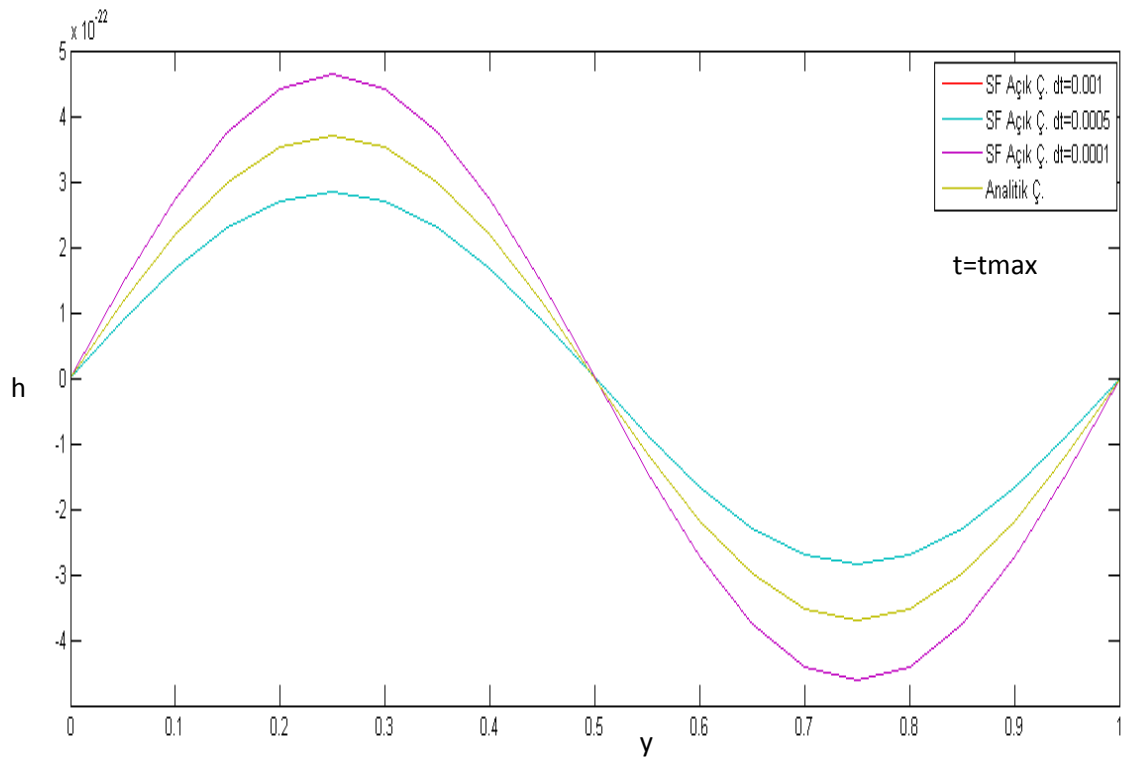
Şekil 7. 17 Örnek 1 Kollokasyon metodu  $N_x = N_y = 9$



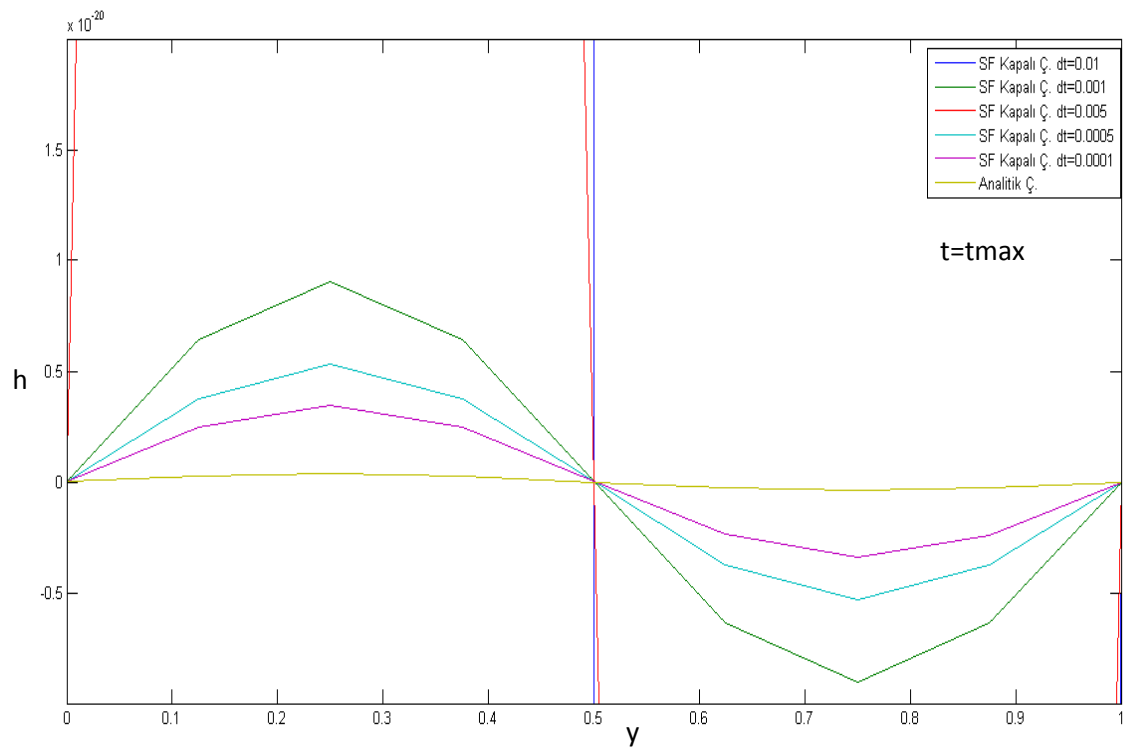
Şekil 7.18 Örnek 1 Kollokasyon metodu  $N_x = N_y = 21$



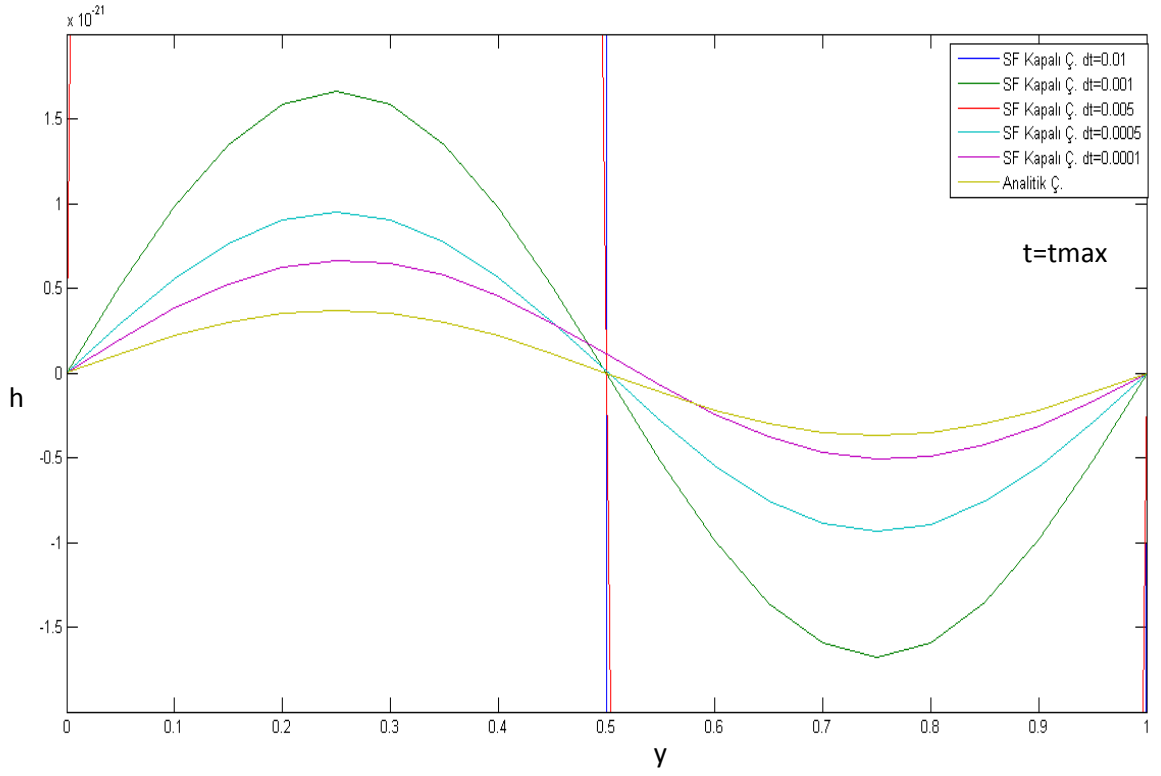
Şekil 7.19 Örnek 1 Açık sonlu farklar yöntemi çözümü  $N_x = N_y = 9$



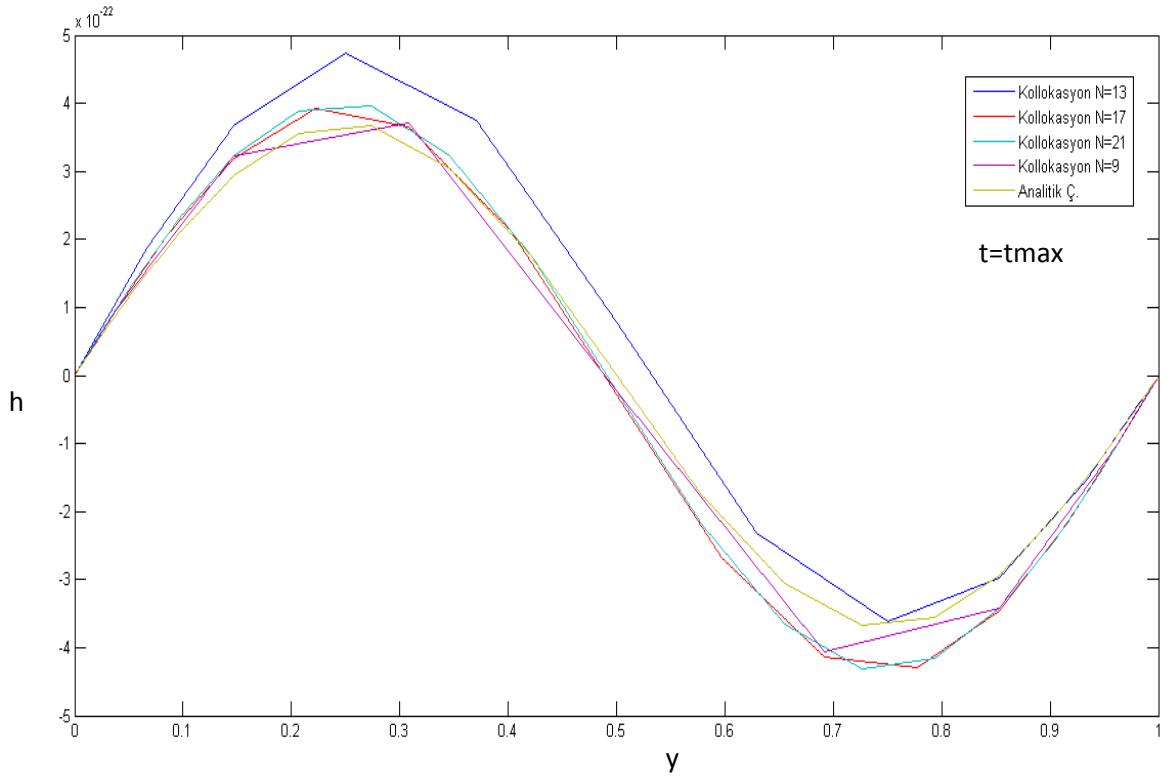
Şekil 7.20 Örnek 1 Açık sonlu farklar yöntemi çözümü  $N_x = N_y = 21$



Şekil 7.21 Örnek 1 Kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü  $N_x = N_y = 9$

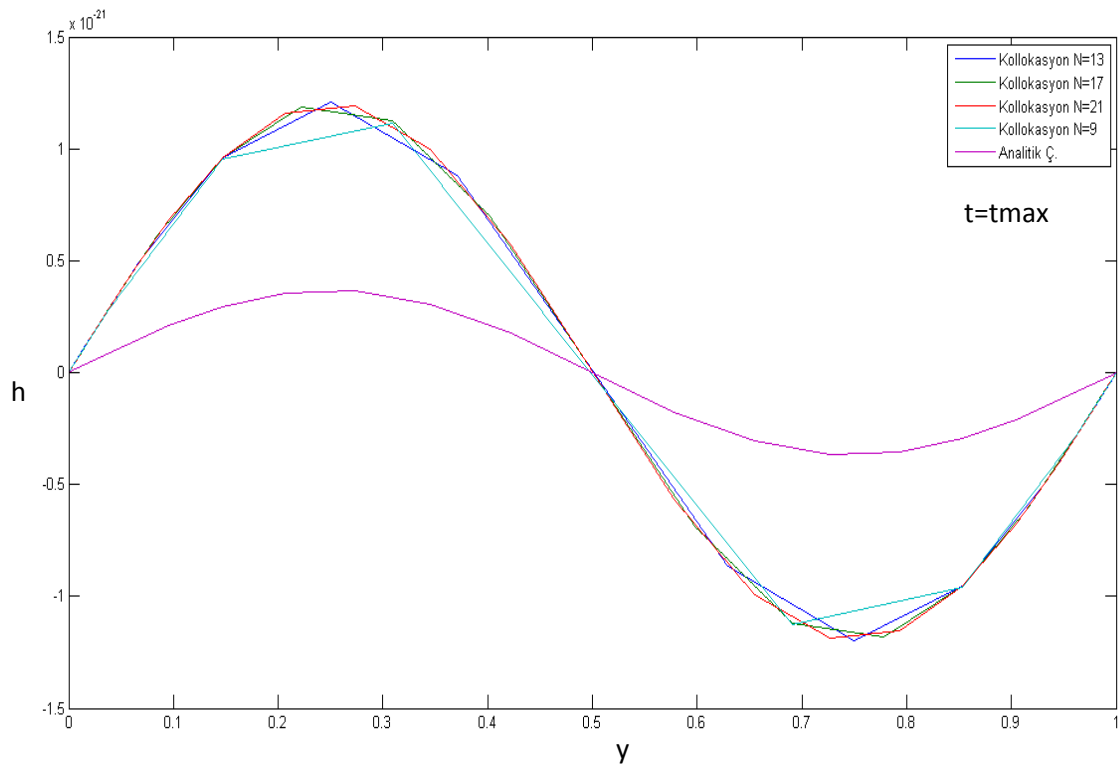


Şekil 7.22 Örnek 1 Kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü  $N_x = N_y = 21$

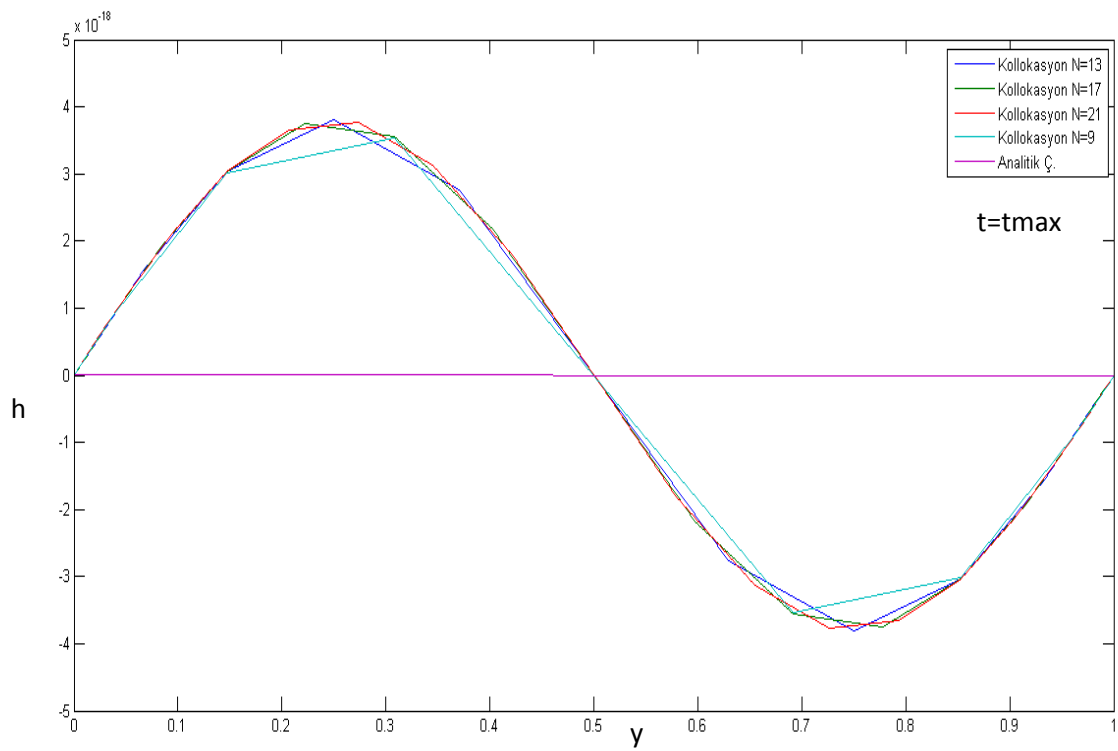


Şekil 7.23 Örnek 1 Kollokasyon metodu  $\Delta t = 0,0001$

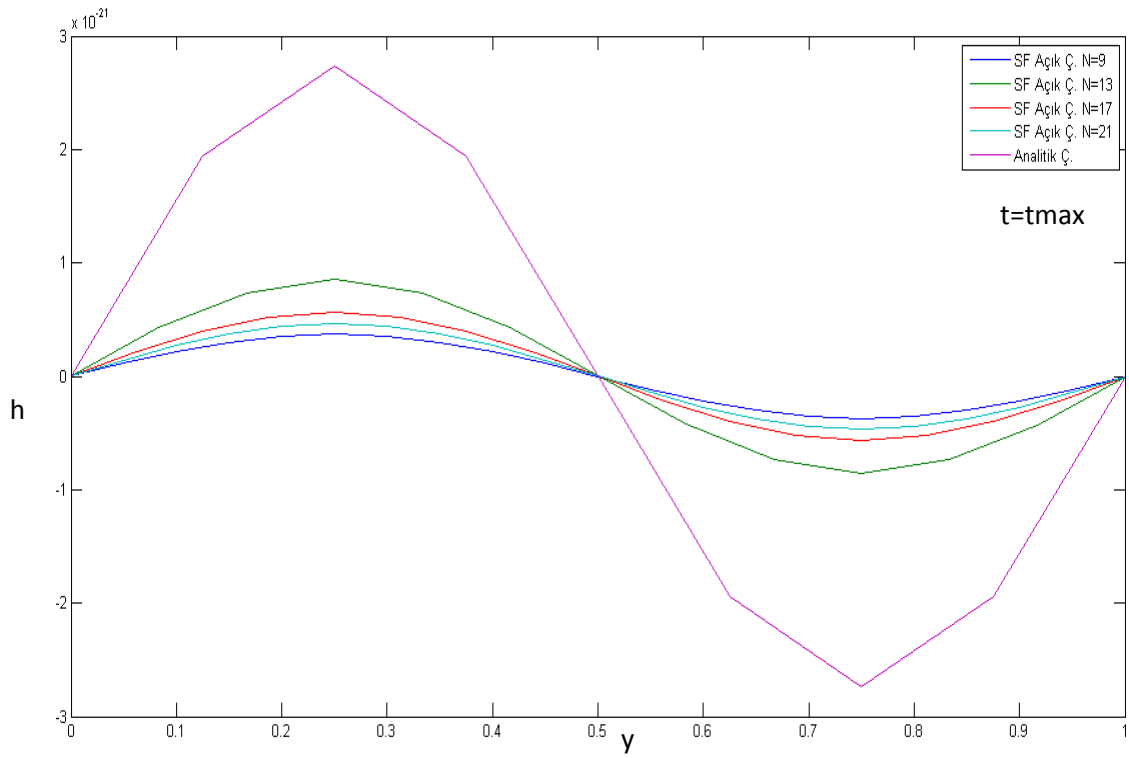




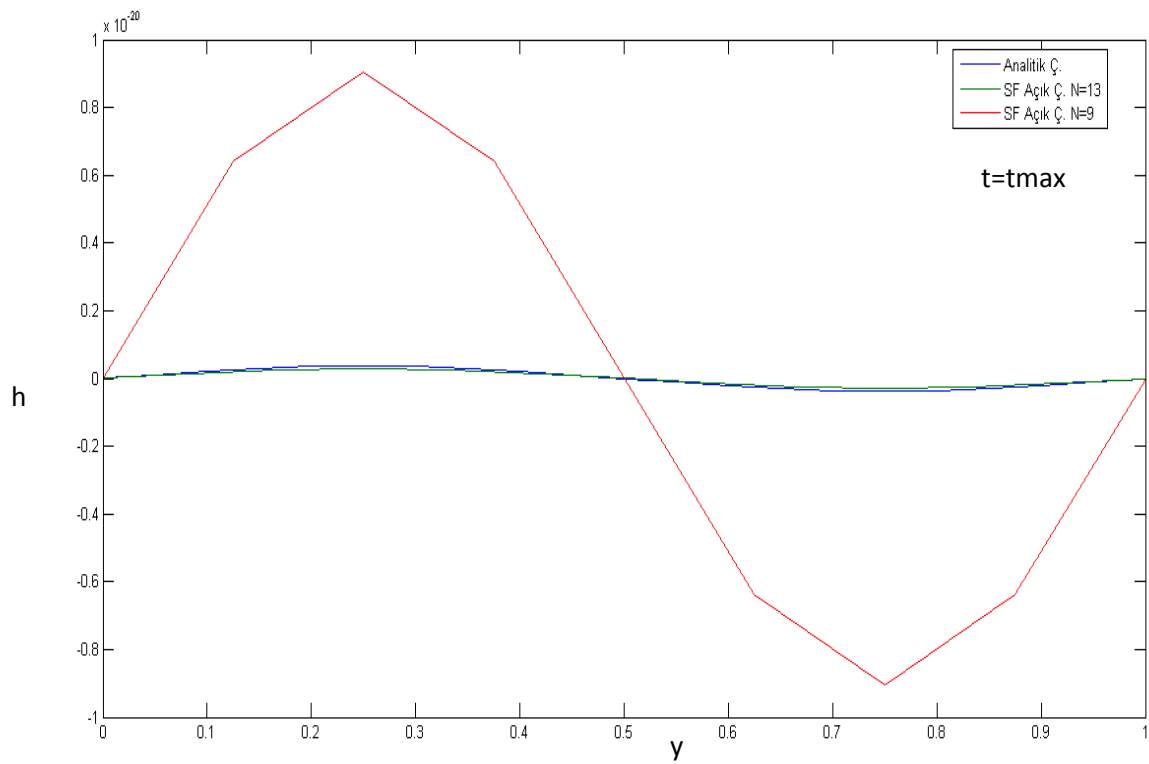
Şekil 7.24 Örnek 1 Kollokasyon metodu  $\Delta t = 0,001$



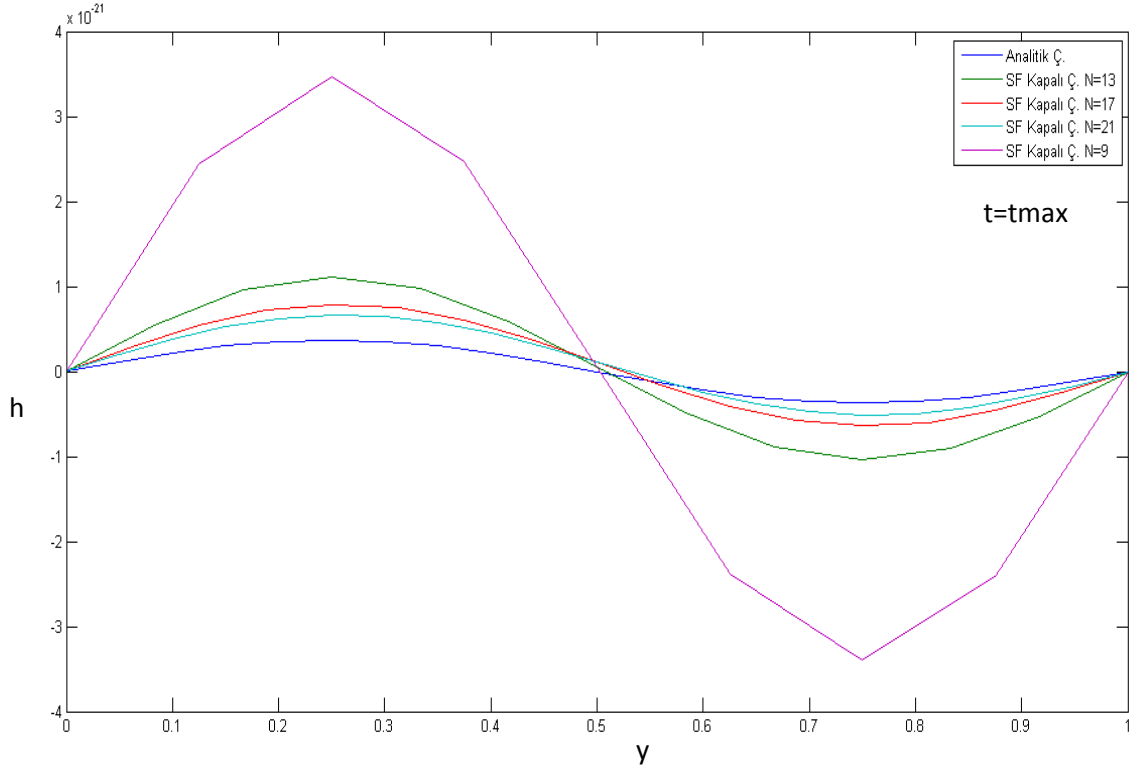
Şekil 7.25 Örnek 1 Kollokasyon metodu  $\Delta t = 0,01$



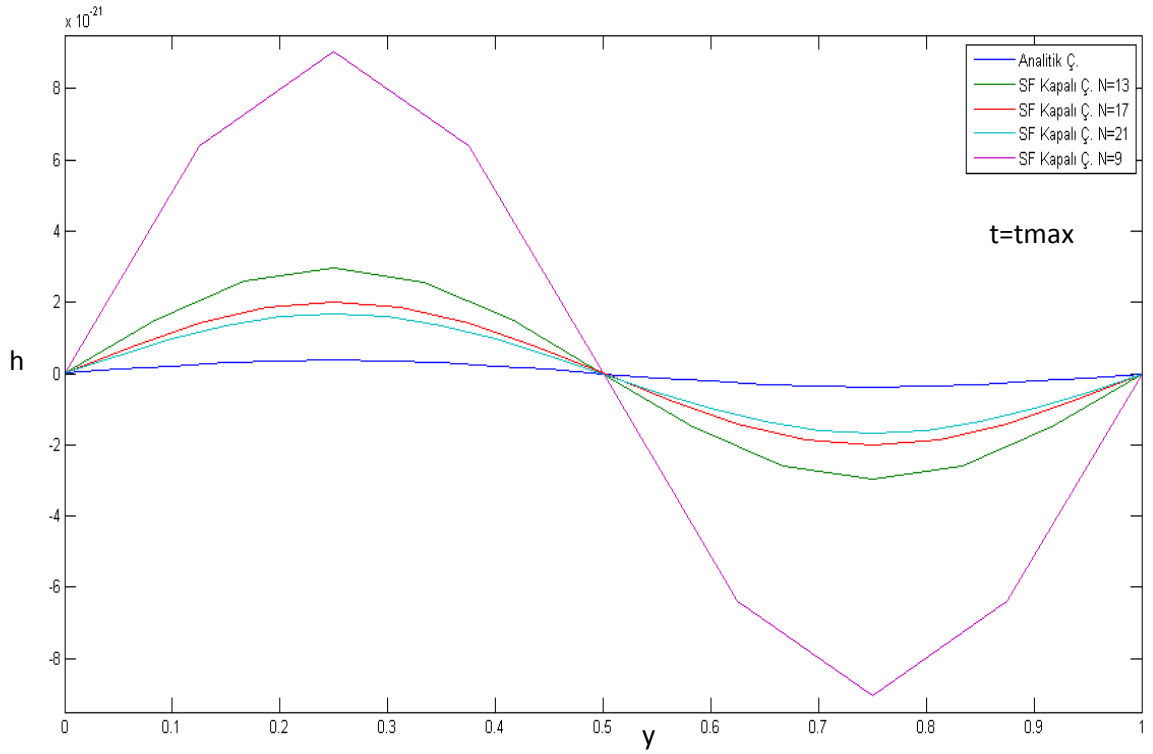
Şekil 7.26 Örnek 1 Açık sonlu farklar yöntemi çözümü  $\Delta t=0,0001$



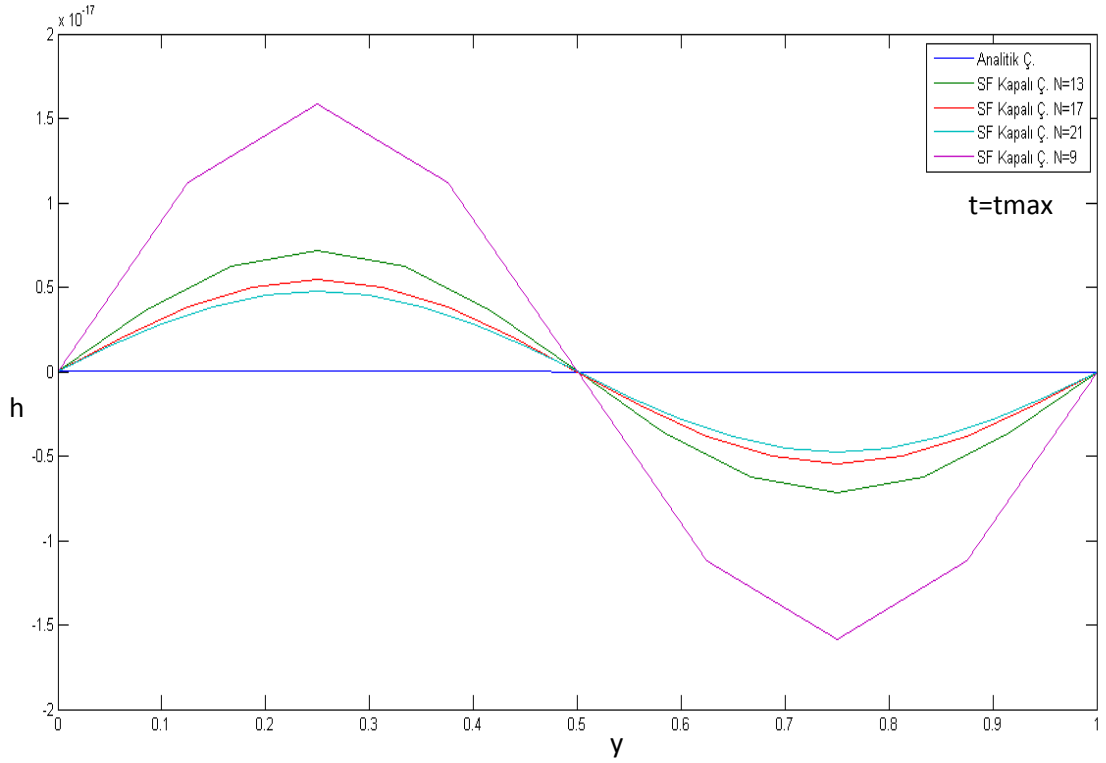
Şekil 7.27 Örnek 1 Açık sonlu farklar yöntemi çözümü  $\Delta t=0,001$



Şekil 7.28 Örnek 1 Kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü  $\Delta t=0,0001$



Şekil 7.29 Örnek 1 Kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü  $\Delta t=0,001$



Şekil 7.30 Örnek 1 Kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü  $\Delta t=0,01$

Elde edilen sonuçlar incelendiğinde hesap alanındaki hesap noktası sayısını arttırmak yani  $\Delta x$  ve  $\Delta y$  mesafelerini azaltmanın, Kollokasyon yönteminde sayısal çözüm sonuçlarında çok az değişikliğe yol açtığı  $\Delta t$ 'yi azaltmanın ise analitik çözüme yakınsamayı hızlandırdığı görülmektedir.

## 7.2 Örnek 2

Bu uygulamada ise sınır şartları ve başlangıç şartları belirli olan basınçlı bir akiferdeki yeraltı suyu akım problemi Sonlu farklar ve Kollokasyon yöntemleri ile çözülmüştür. Ele alınan bu sistemde belirli bir noktadan sabit bir debi ile çekim yapılmaktadır. Söz edilen bu sistemdeki yeraltı suyu akımı 3. Bölümde verilmiş olan (3.7) denklemi ile ifade edilebilmektedir.

$$\frac{d^2h}{dx^2} + \frac{d^2h}{dy^2} = \frac{S}{T} \frac{dh}{dt} - \frac{R(x,y,t)}{T} \quad (3.7)$$

Söz konusu problemde  $t = 0$  anında bütün hesap noktaları için piyezometre kotu sabit olup

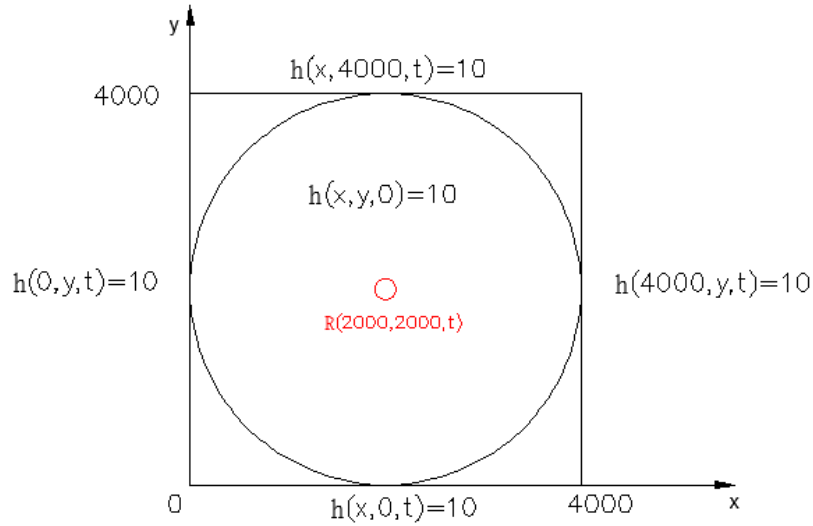
$$h(x, y, 0) = 10 \quad (7.10)$$

olarak verilmiştir.  $m_{i,j}^{kuyu}$ , hesap noktasının çekim noktasına olan uzaklığı olmak üzere, her  $t$  hesap anı için ;

$$m_{i,j}^{kuyu} \geq 2000 \longrightarrow h(x, y, t) = 10 \quad (7.11)$$

olarak verilmiştir.

$x=2000$ ,  $y=2000$  koordinatlarında sabit bir debiyle çekim yapan kuyu bulunmaktadır (Şekil 7.31).



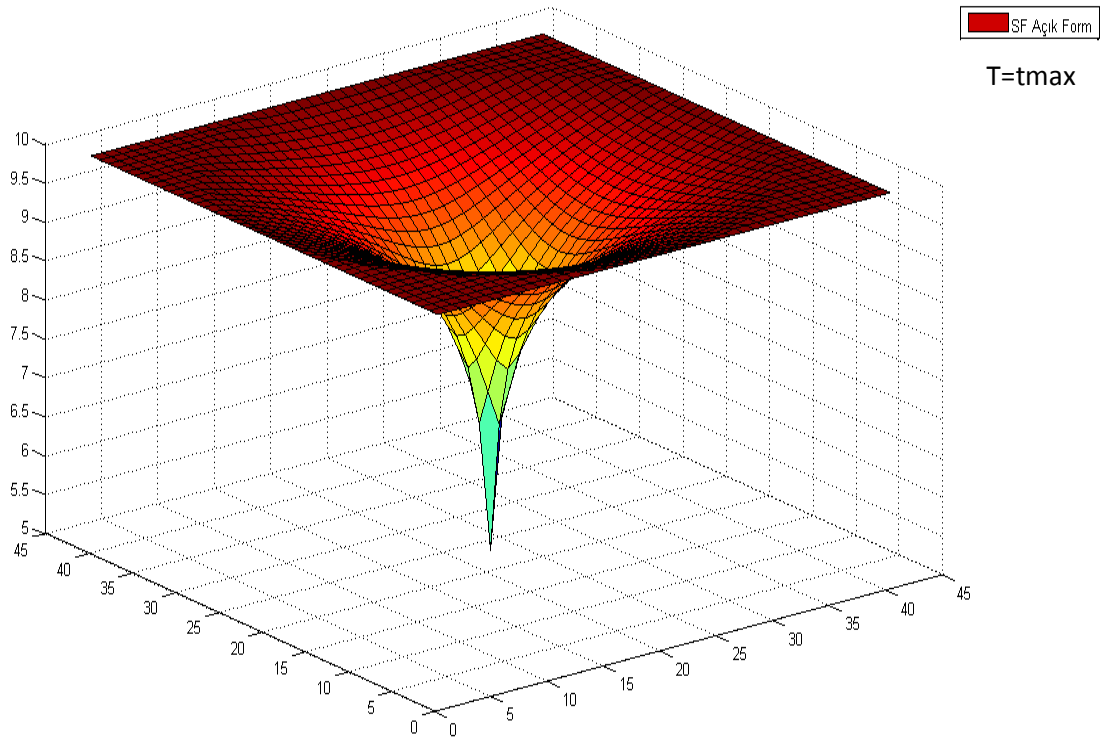
Şekil 7.31 Örnek 2 Basınçlı akifer problemi

Problemdeki kuyudan çekilecek olan sabit debi  $Q = 2000 \text{ m}^3/\text{gün}$ , depolama katsayısı  $S = 0,002$ , iletimlilik katsayısı  $T = 300 \text{ m}^2/\text{gün}$  olarak verilmiştir (Wang ve Anderson, 1981).

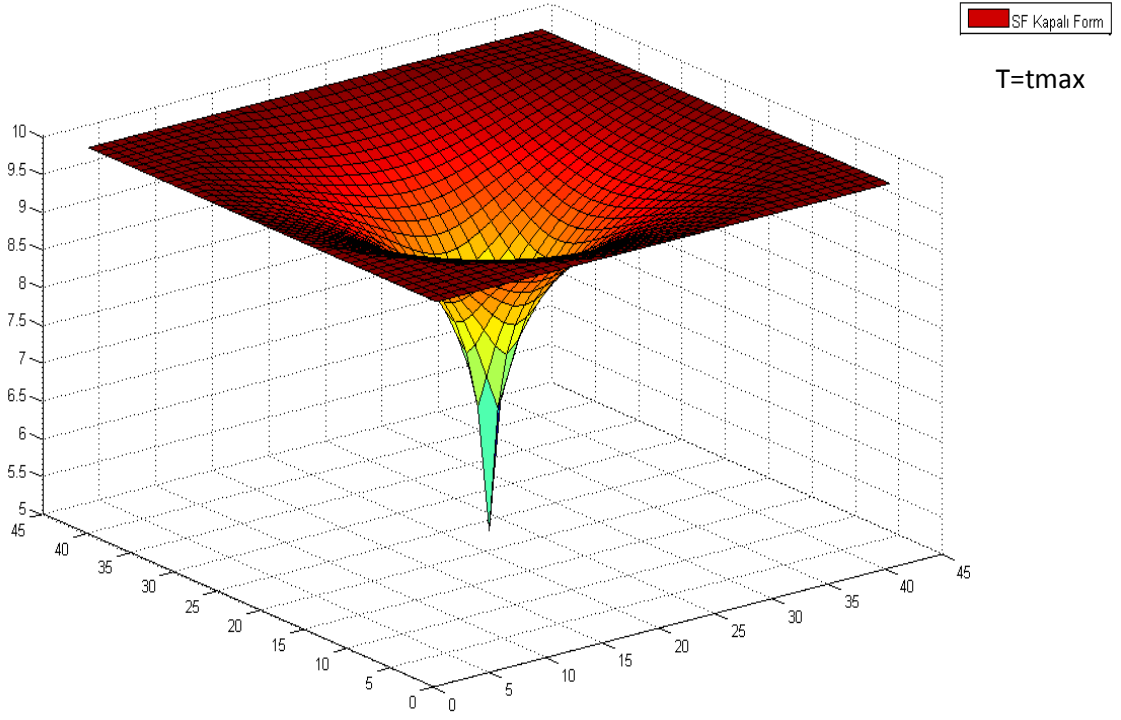
Basınçlı akiferden kuyu çekimi olması durumunu ifade eden problemde  $t_{max} = 13 \text{ gün}$ ,  $\Delta t = (0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 1)$  olmak üzere;  $N_x = N_y = (11, 21, 31, 41)$  nokta sayısı için kolokasyon yöntemi ve açık ve kapalı sonlu fark

yöntemleri ile çözümler yapılmıştır.  $\Delta t = 0,001$  ve  $N_x = N_y = 41$  nokta sayısı için  $t_{\max}$  anındaki piyezometre değerleri 3 boyutlu olarak Şekil 7.32 – 7.34 'te verilmiştir.

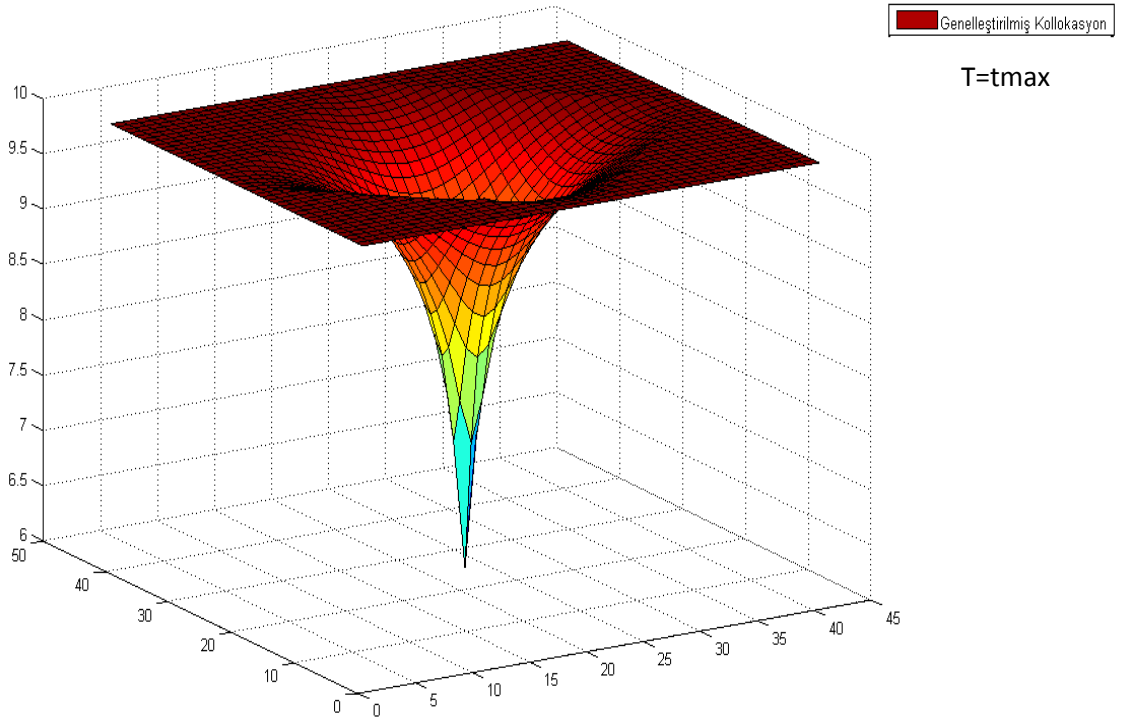
$x=2000$ 'de  $y$  eksenini boyunca  $h$  değerleri,  $N_x = N_y = (41 \text{ ve } 11)$  için ve  $\Delta t = 0.001$ , olmak üzere şekil 7.35 ve 7.36' da verilmiştir.



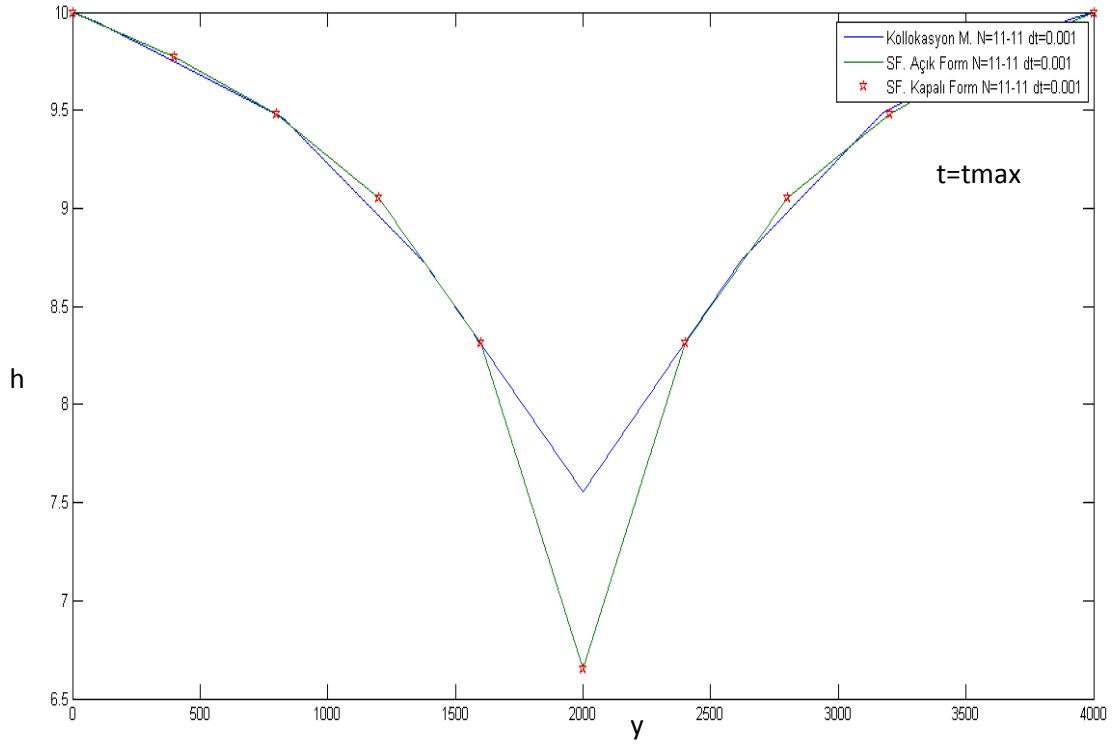
Şekil 7.32 Örnek 2 Basıncılı akiferde açık sonlu fark yöntemi ile elde edilen  $h$  değerleri  $\Delta t = 0.001$



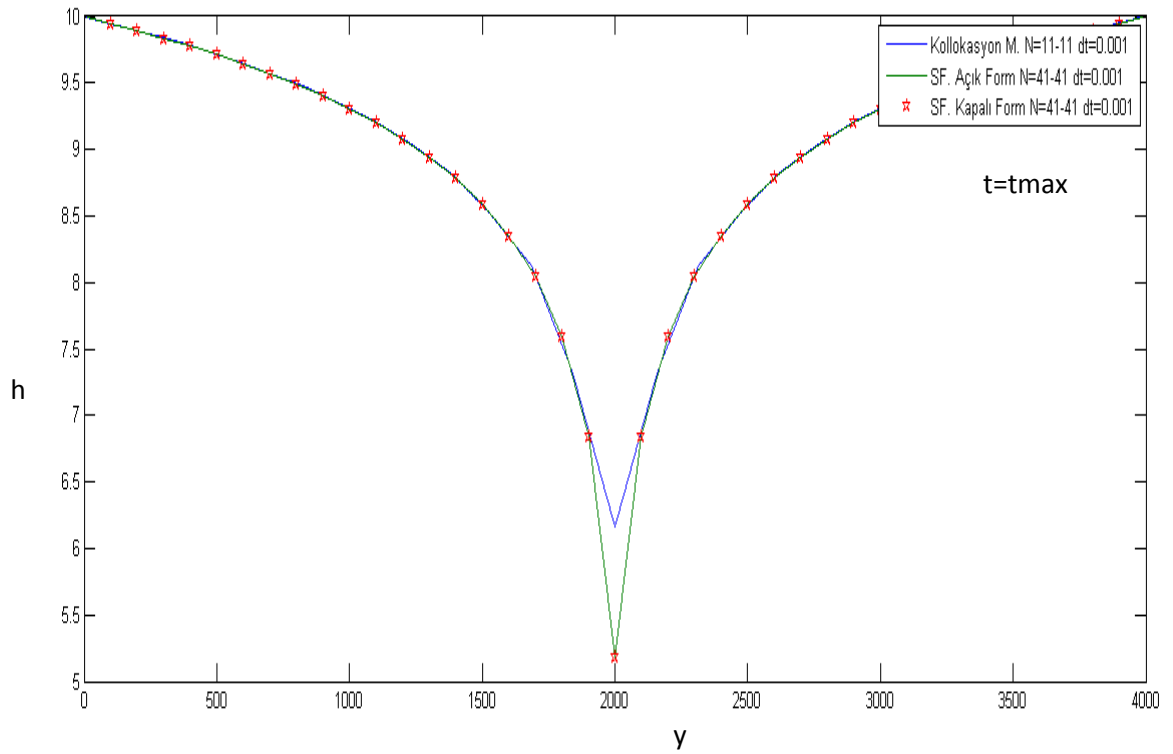
Şekil 7.33 Örnek 2 Basınçlı akiferde kapalı sonlu fark yöntemi ile elde edilen  $h$  değerleri  
 $\Delta t = 0.001$



Şekil 7.34 Örnek 2 Basınçlı akiferde kollokasyon yöntemi ile elde edilen  $h$  değerleri  $\Delta t = 0.001$



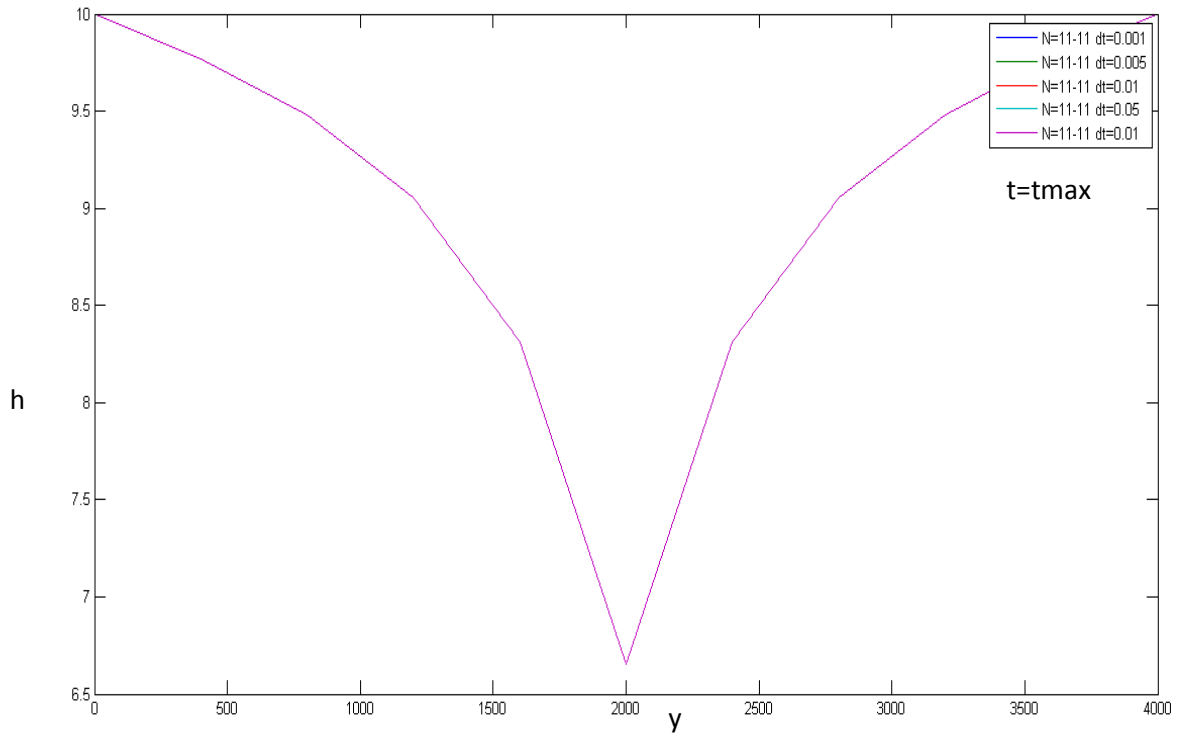
Şekil 7.35 Örnek 2  $N_x = N_y = 11$ ,  $\Delta t = 0,001$  için  $x=2000$ 'de  $y$  boyunca  $h$  değerleri



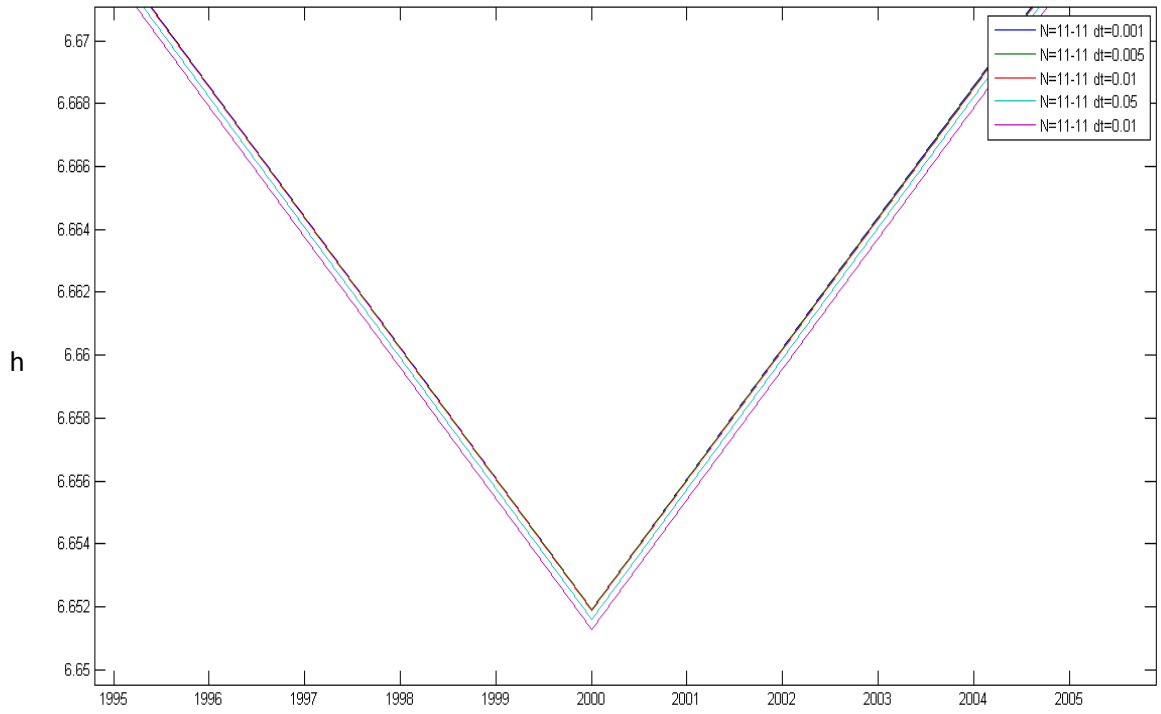
Şekil 7.36 Örnek 2  $N_x = N_y = 41$ ,  $\Delta t = 0,001$  için  $x=2000$ 'de  $y$  boyunca  $h$  değerleri



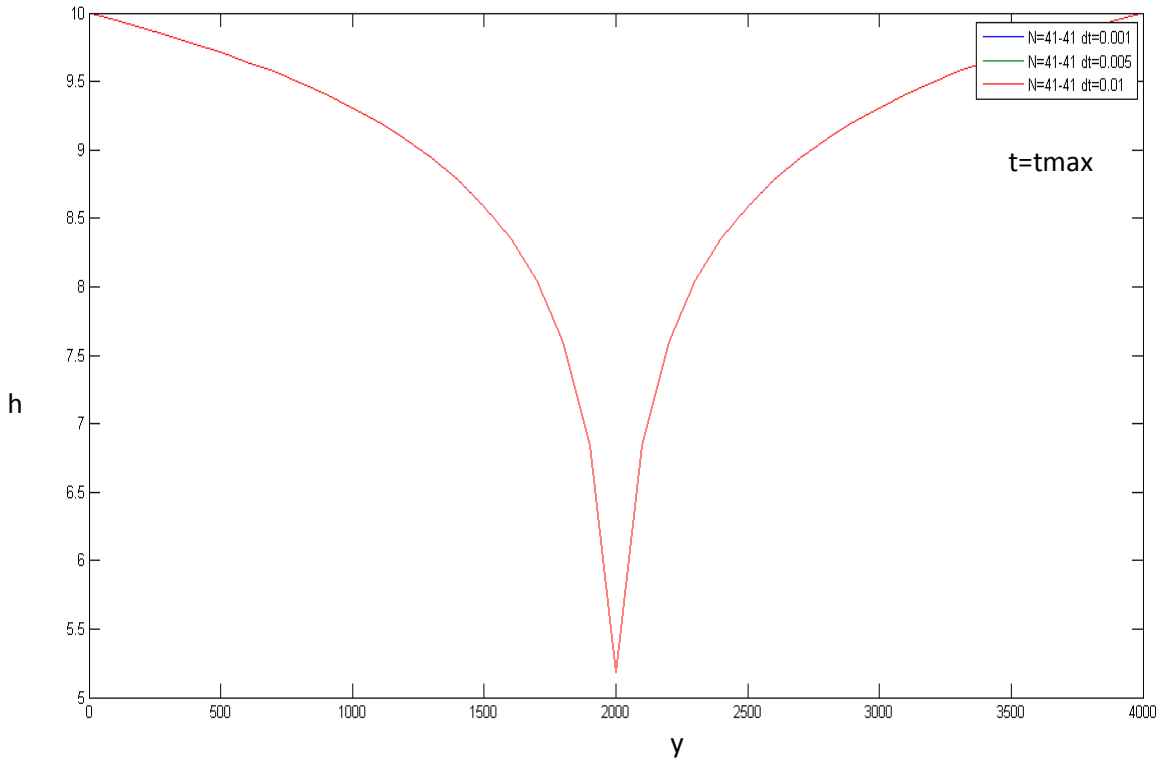
Zaman aralığının çözüm üzerindeki etkilerini görmek için yöntemlerden  $N_x = N_y = (11, 41)$  nokta sayıları ve  $\Delta t = (0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 1)$  zaman aralıkları için elde edilen sonuçlar  $x=2000$ 'de  $y$  eksenini boyunca Şekil 7.37-7.48'de gösterilmiştir.



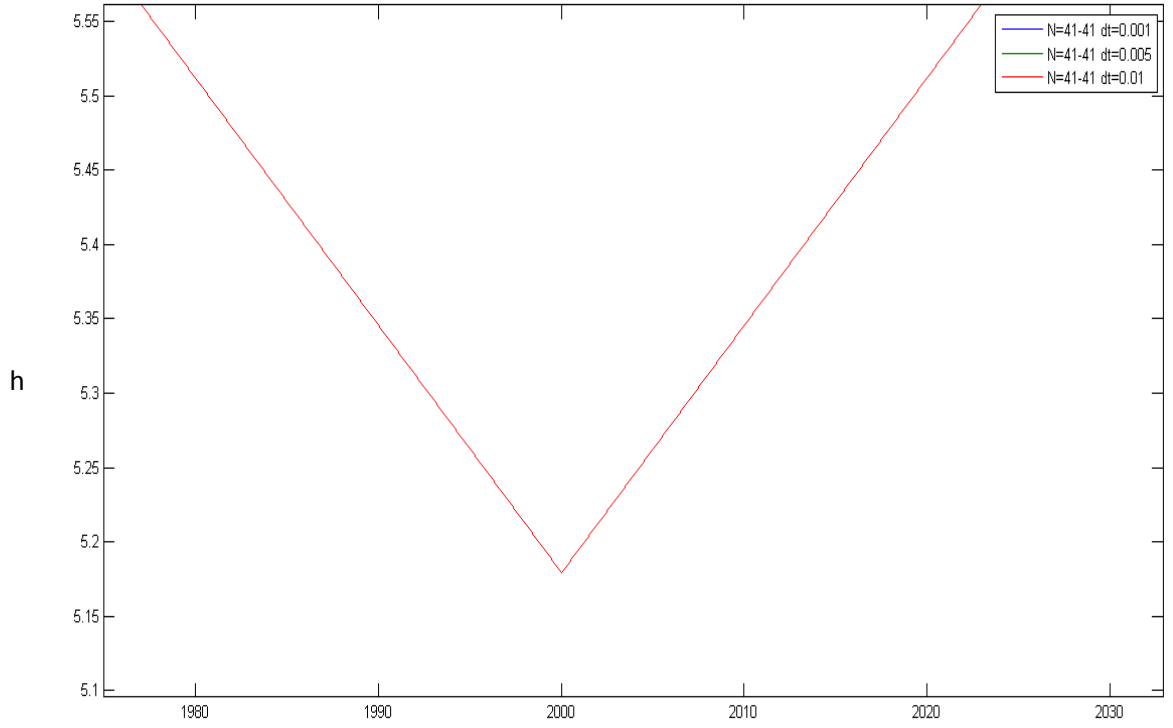
Şekil 7.37 Örnek 2 Açık sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 11$



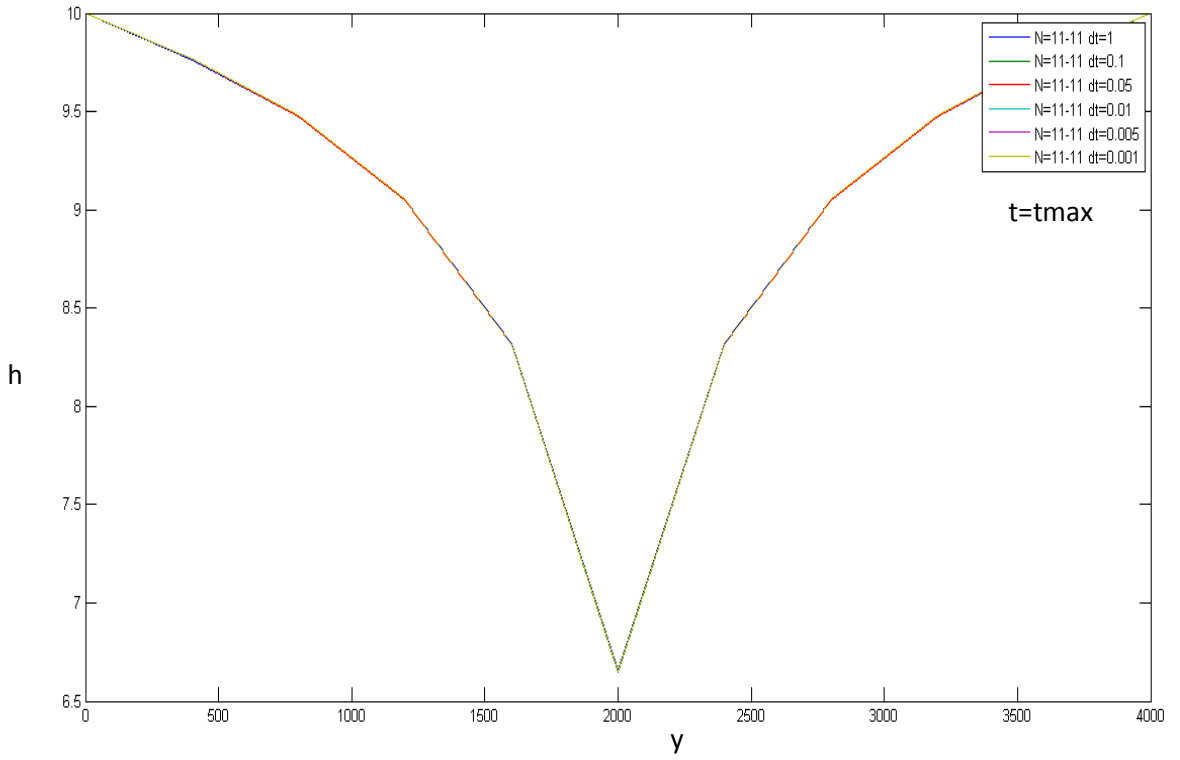
Şekil 7.38 Örnek 2 Kuyu ekseninde Açık sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 11$ , için elde edilen sonuçlar



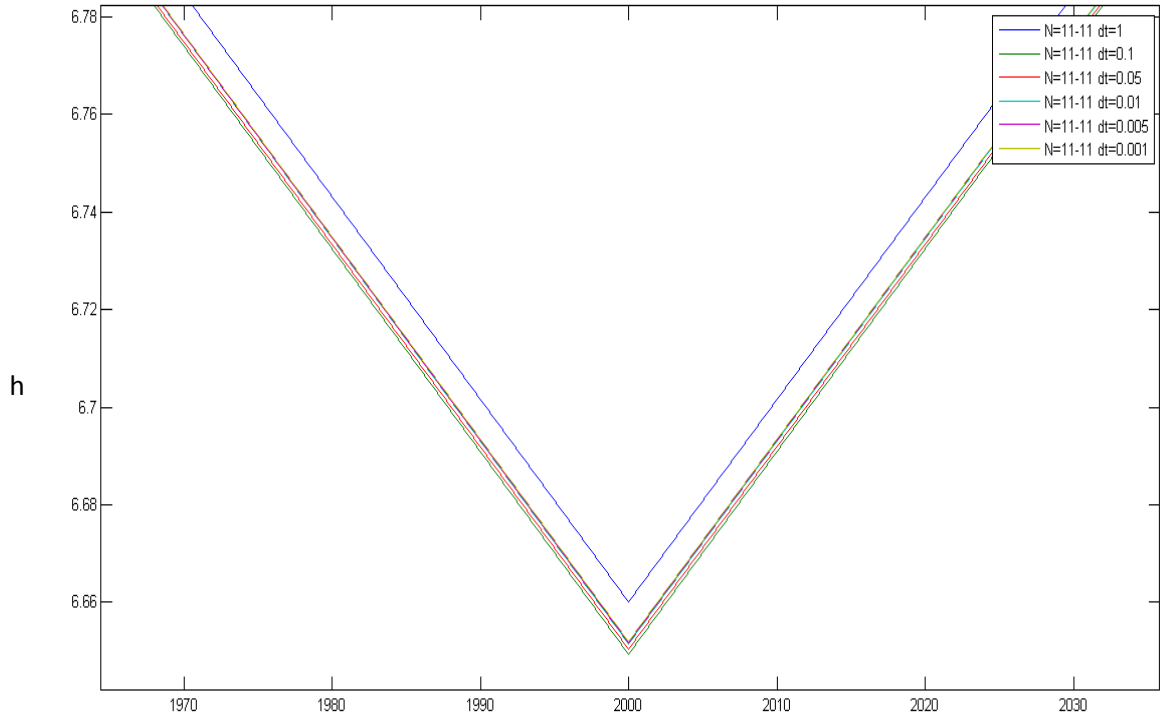
Şekil 7.39 Örnek 2 Açık sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 41$



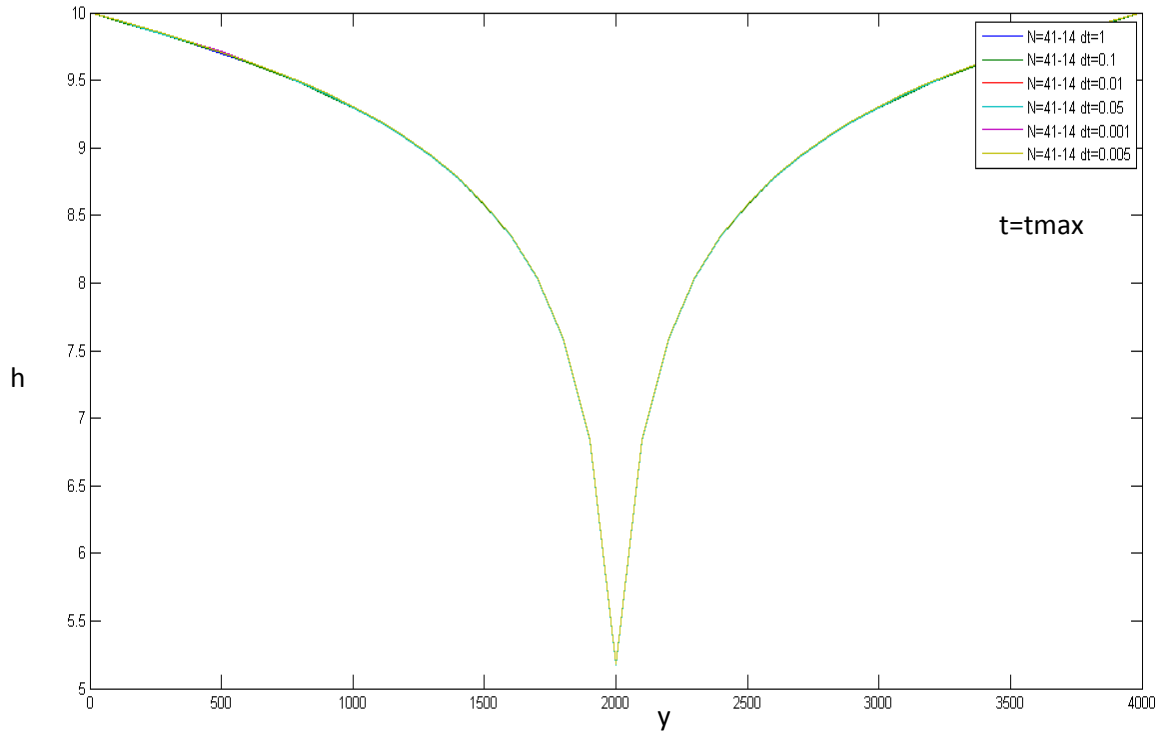
Şekil 7.40 Örnek 2 Kuyu ekseninde Açık sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 41$ , için elde edilen sonuçlar



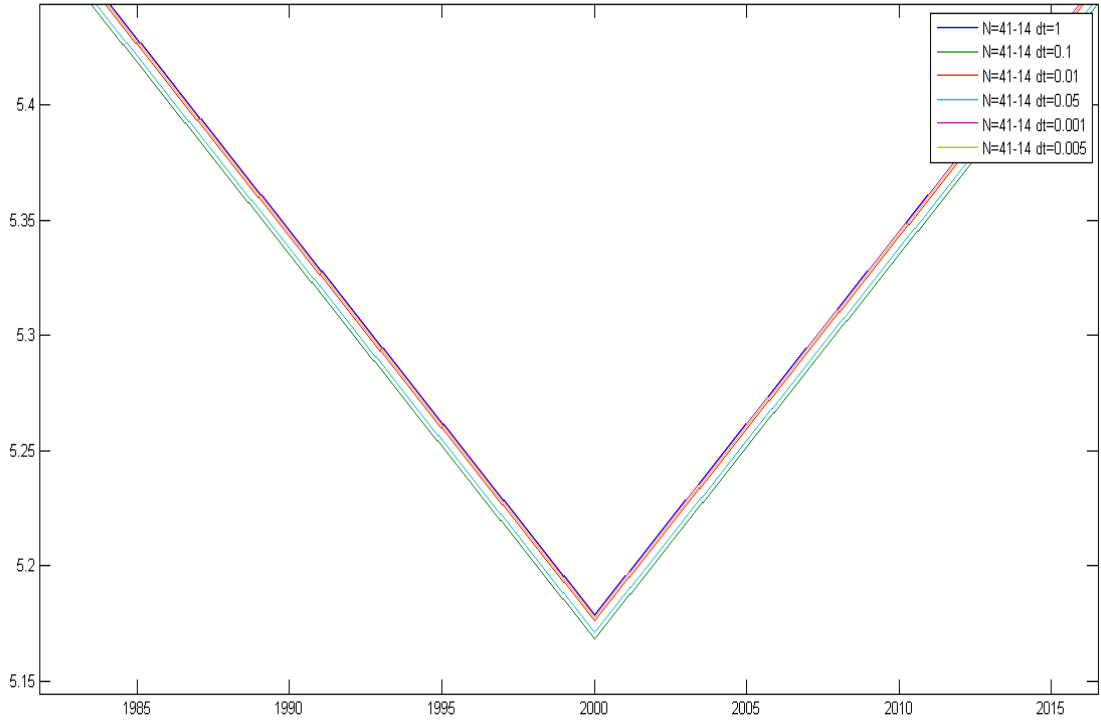
Şekil 7.41 Örnek 2 Kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 11$



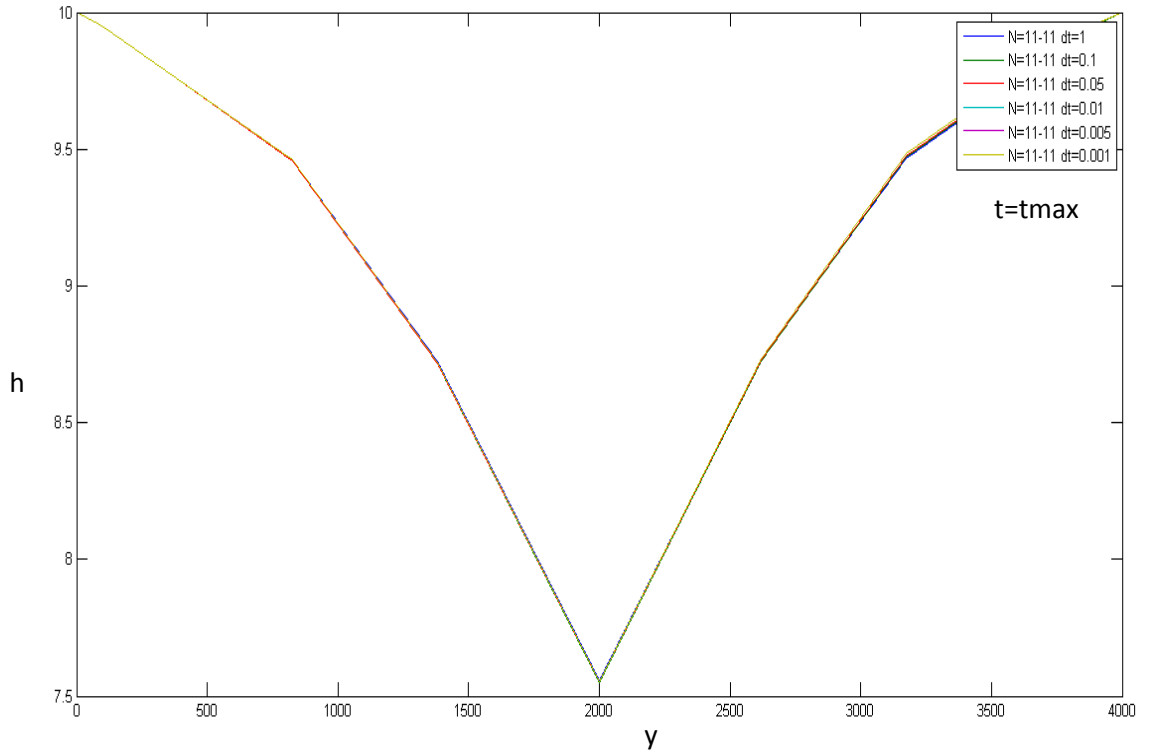
Şekil 7.42 Örnek 2 Kuyu ekseninde kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 11$ , için elde edilen sonuçlar



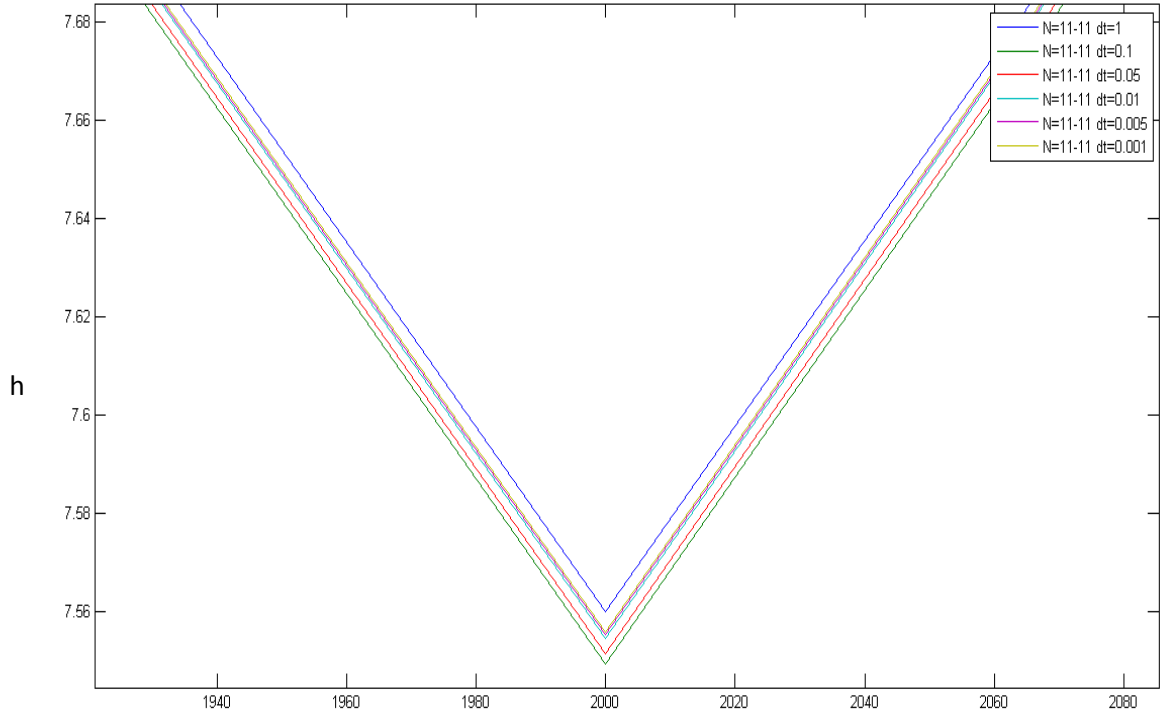
Şekil 7.43 Örnek 2 Kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 41$



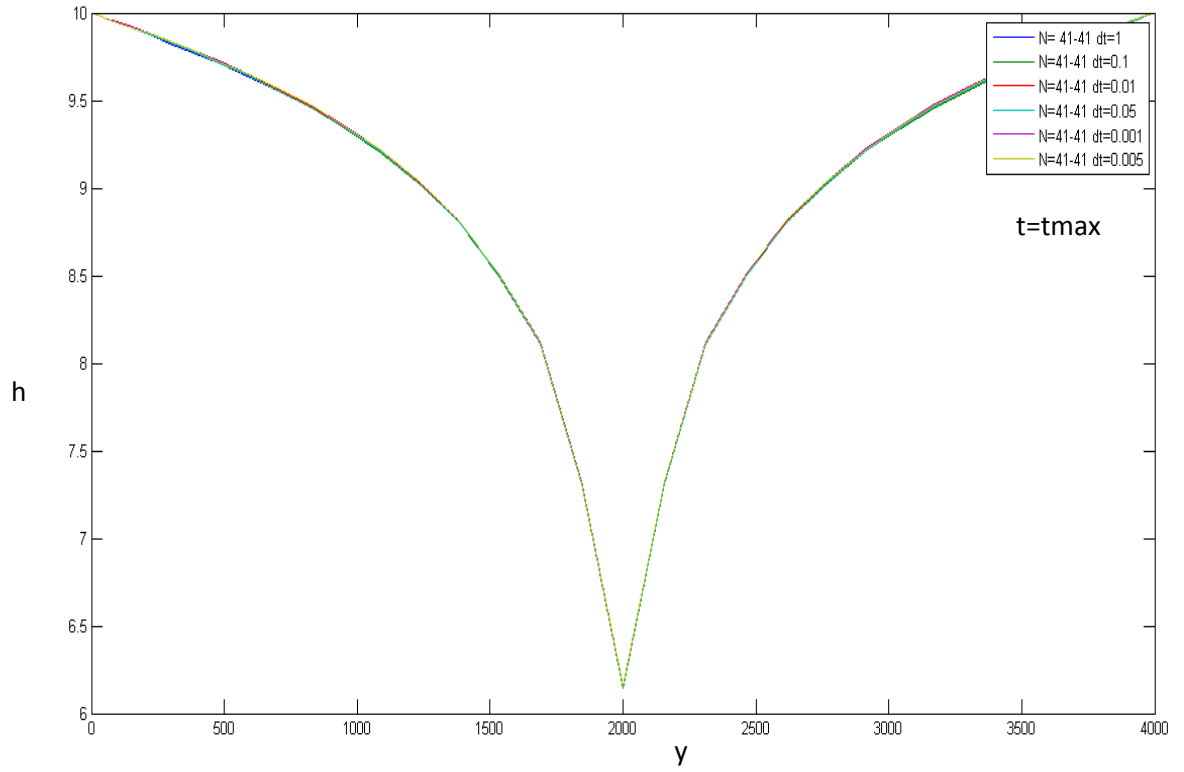
Şekil 7.44 Örnek 2 Kuyu ekseninde kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 41$ , için elde edilen sonuçlar



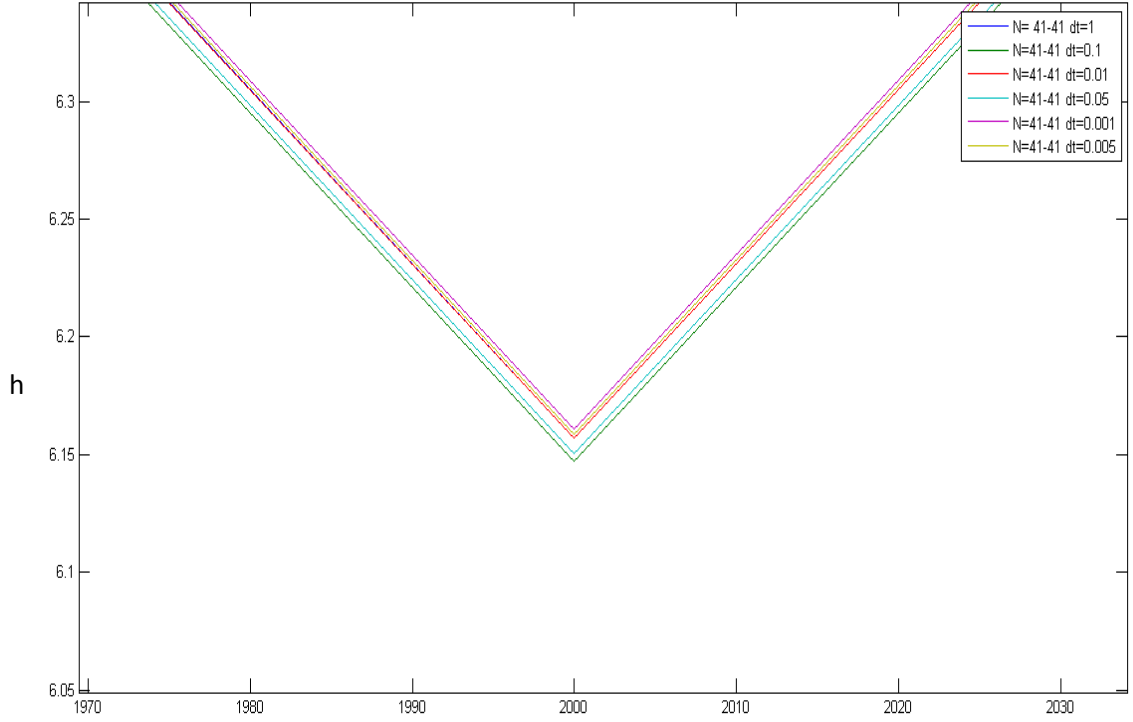
Şekil 7.45 Örnek 2 Kollokasyon metodu  $N_x = N_y = 11$



Şekil 7.46 Örnek 2 Kuyu ekseninde Kollokasyon metodu  $N_x = N_y = 11$ , için elde edilen sonuçlar

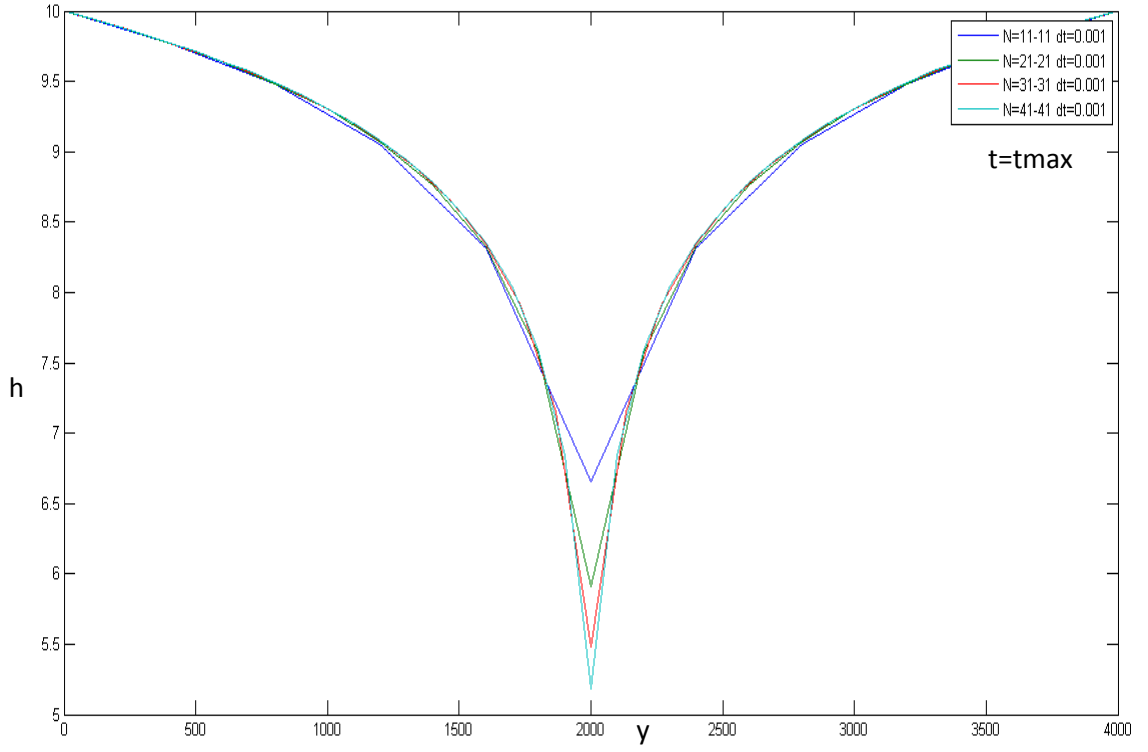


Şekil 7.47 Örnek 2 Kollokasyon metodu  $N_x = N_y = 41$

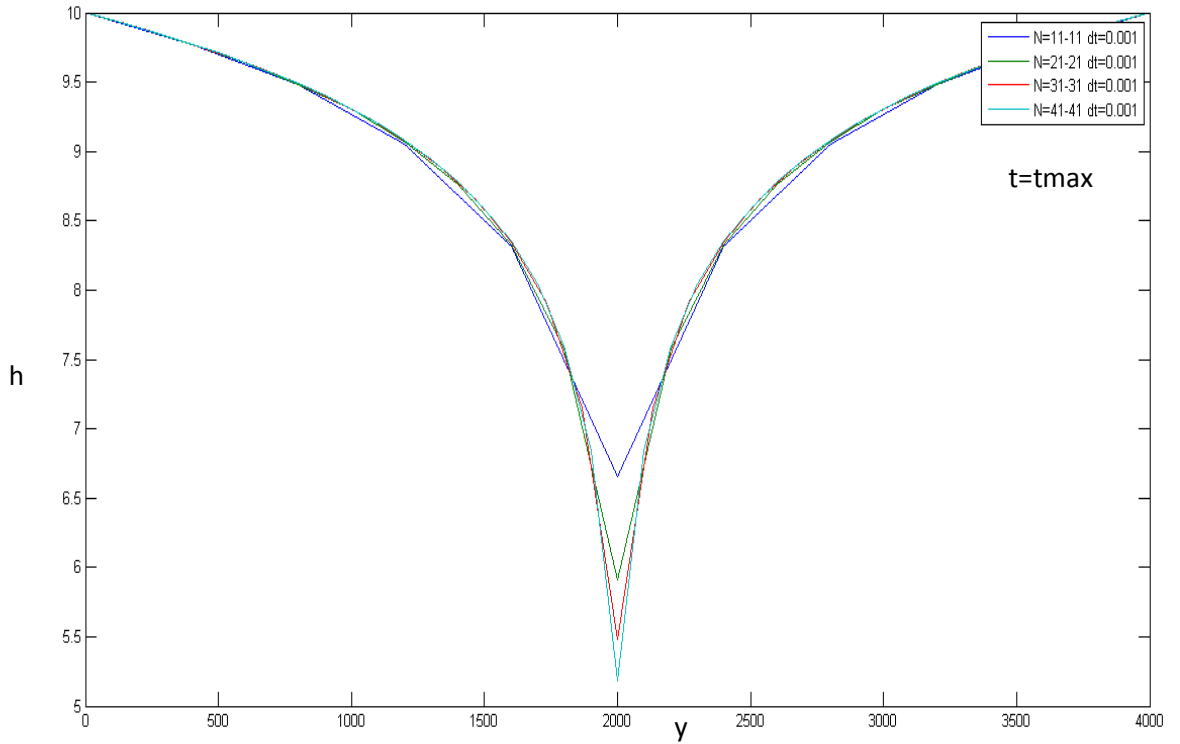


Şekil 7.48 Örnek 2 Kuyu ekseninde kollokasyon metodu  $N_x = N_y = 41$ , için elde edilen sonuçlar

Nokta sayısının sonuçlar üzerindeki etkisini incelemek amacıyla da farklı nokta sayısı değerleri için elde edilen sonuçlar bir arada  $\Delta t = 0.001$  zaman aralığı değeri için Şekil 7.49-7.51’de verilmiştir. Her üç yöntemde de sonuçların belirli bir değere yakınsadığı görülmektedir.  $N_x=N_y=41$  için açık ve kapalı sonlu fark yöntemlerinde  $h$  değeri 5.18m kollokasyon yönteminde ise 6.15m olarak elde edilmiştir.

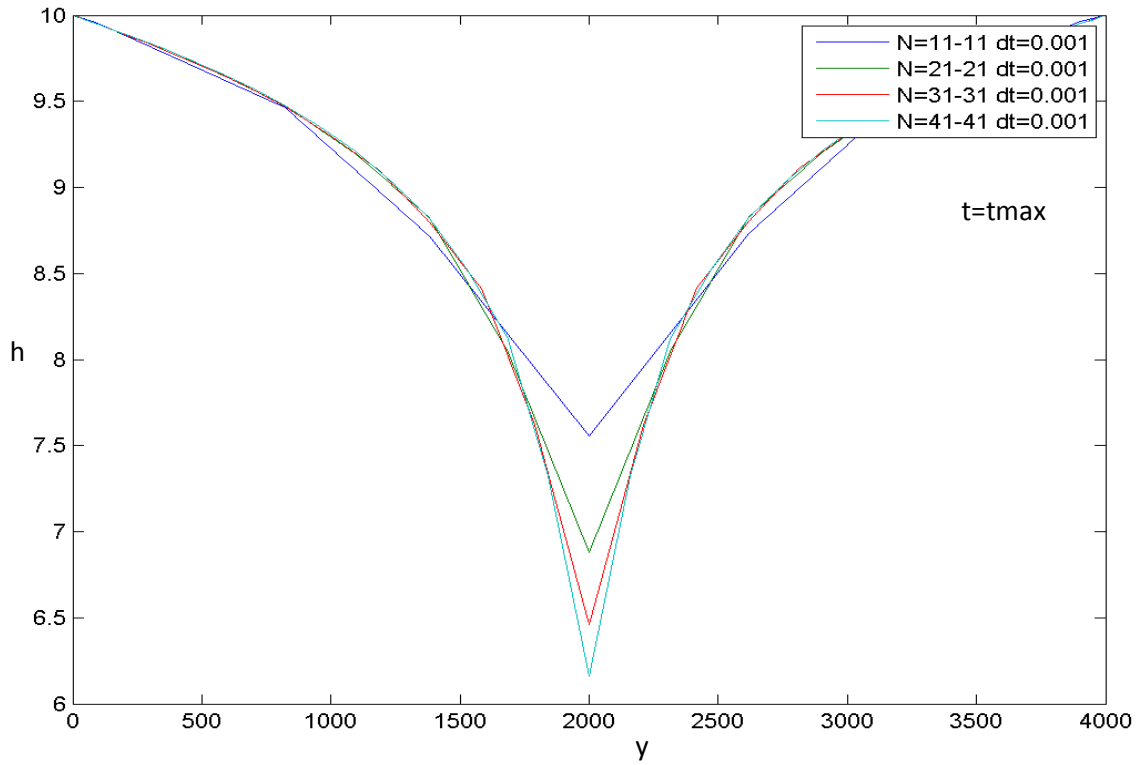


Şekil 7. 49 Örnek 2 Açık sonlu farklar yöntemi çözümü,  $\Delta t=0,001$



Şekil 7.50 Örnek 2 Kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü,  $\Delta t=0,001$





Şekil 7.51 Örnek 2 Kollokasyon metodu,  $\Delta t=0,001$

Kuyu çekimlerinde piyezometrik seviyenin yaklaşık olarak belirlenmesinde pratikte kullanılan Theis denklemi ile de seviyeler hesaplanmış ve Kollokasyon yöntemi ile Sonlu fark yöntemleri sonuçlarının Theis yöntemi sonuçlarına göre RMS hata değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 7.2 'de verilmiştir.

Tablo 7.2 Theis yöntemine göre elde edilen RMS hata değerleri

Yöntem	Zaman (Gün)			
	1	3	7	13
Kollokasyon	0,010785	0,012452	0,059679	0,159567
SF. Açık Çözüm	0,008664	0,016361	0,05283	0,155928
SF. Kapalı Çözüm	0,00856	0,016335	0,052793	0,155712

Tablodaki değerlerden Theis yöntemi sonuçlarına, Açık ve Kapalı Sonlu Farklar yöntemlerinin; Kollokasyon yöntemine göre daha çok yakınsadığı görülmektedir.

### 7.3 Örnek 3

Son uygulamada, başlangıç ve sınır şartları verilmiş olan serbest yüzeyle bir akiferdeki yer altı suyu akışı incelenmiştir. 2. Örnekteki benzer olarak belirli bir noktadaki kuyudan su çekilmektedir.

Söz konusu sistem

$$\frac{K}{2} \left( \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} - R(x, y, t) \quad (3.13)$$

denklemleri ile ifade edilmektedir.

$x=1050$ ,  $y=1050$  koordinatlarında sabit bir debiyle çekim yapan kuyu bulunmaktadır.  $t=0$  anında (başlangıç şartı),

$$h(x, y, 0) = 60 \quad (7.12)$$

ve sınır şartları,

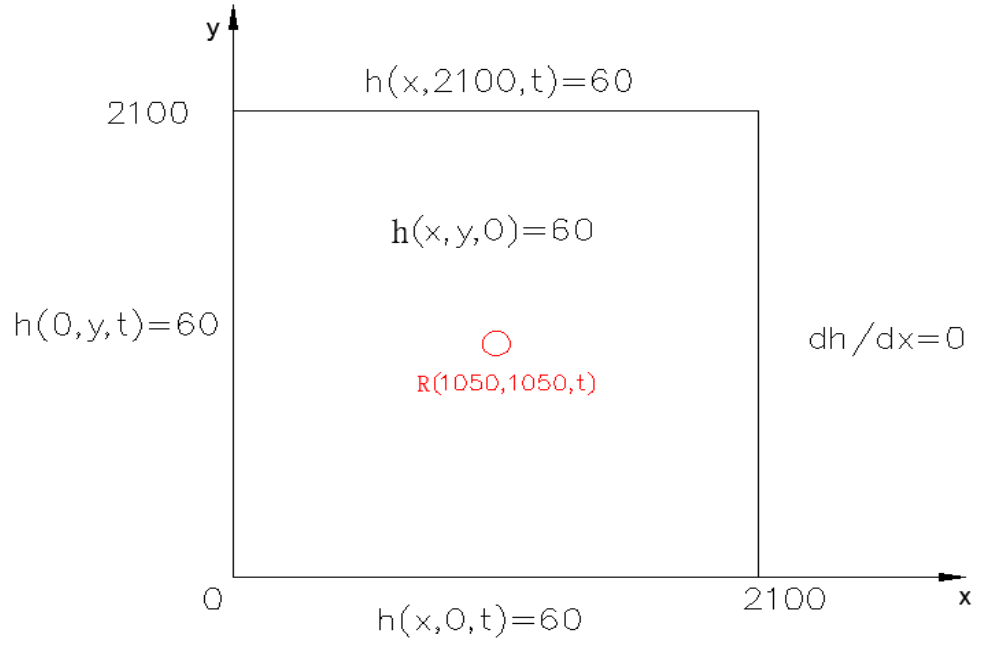
$$h(x, 2100, t) = 60 \quad (7.13)$$

$$h(x, 0, t) = 60 \quad (7.14)$$

$$h(0, y, t) = 60 \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 2100 \text{ ve } 0 \leq y \leq 2100 \quad (7.16)$$

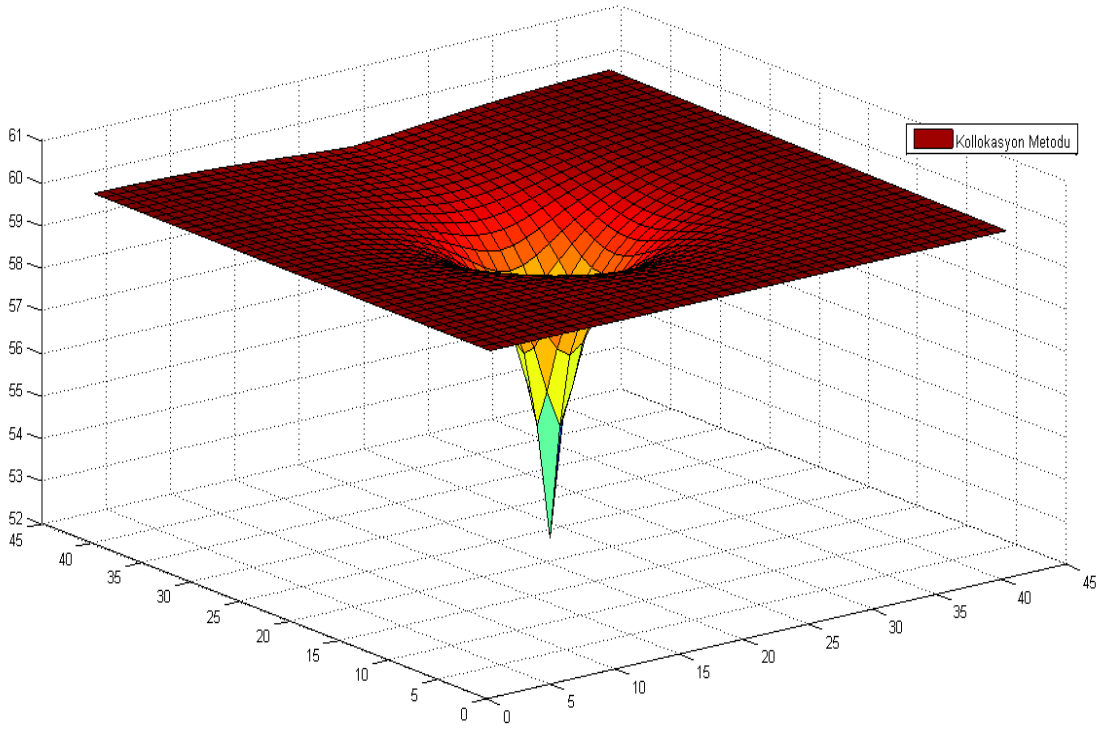
olarak alınmıştır.



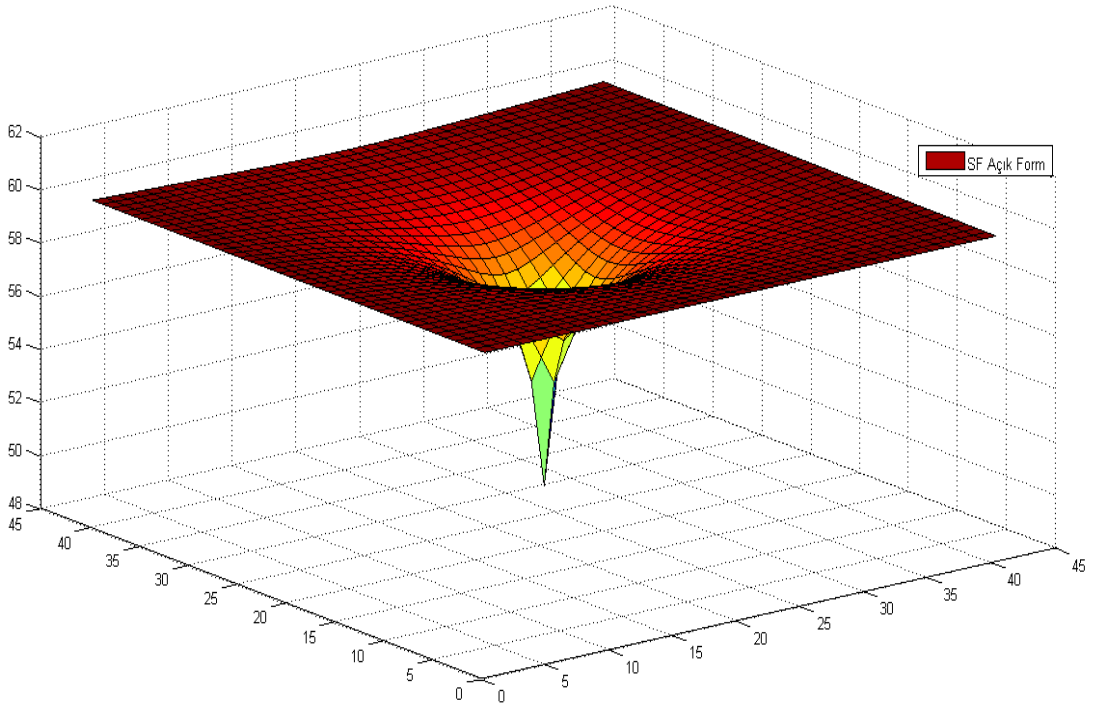
Şekil 7.52 (6.11) denkleminin çözümü için başlangıç ve sınır koşulları

Problemdeki kuyudan çekilecek olan sabit debi  $Q = 42000 \text{ m}^3/\text{gün}$ , depolama katsayısı  $S = 0,2$ , iletkenlik katsayısı  $K = 50 \text{ m} / \text{gün}$  olarak kabul edilmiştir.

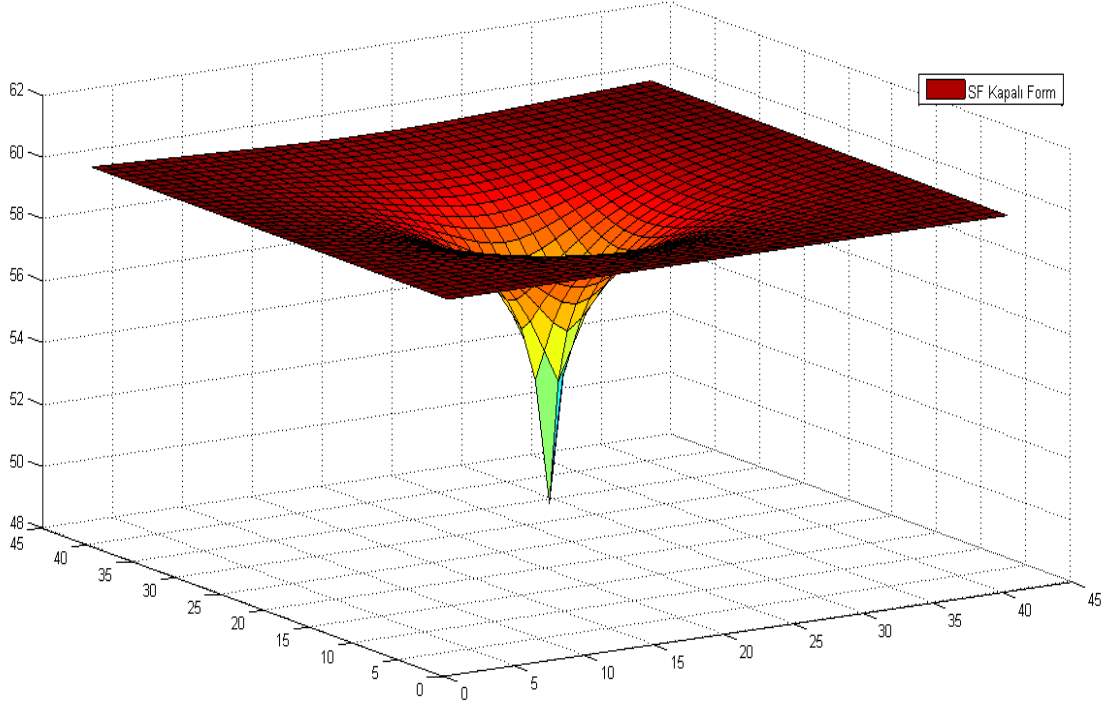
$N_x = N_y = 41$  ve  $\Delta t = 0,001$  olmak üzere açık ve kapalı sonlu fark çözümleri ve kollokasyon yöntemi çözümleri ile elde edilen sonuçlar Şekil 7.53-7.55'de verilmiştir.



Şekil 7.53 Örnek 3 Serbest yüzeyli akiferde kollokasyon metodu ile elde edilen  $h$  değerleri



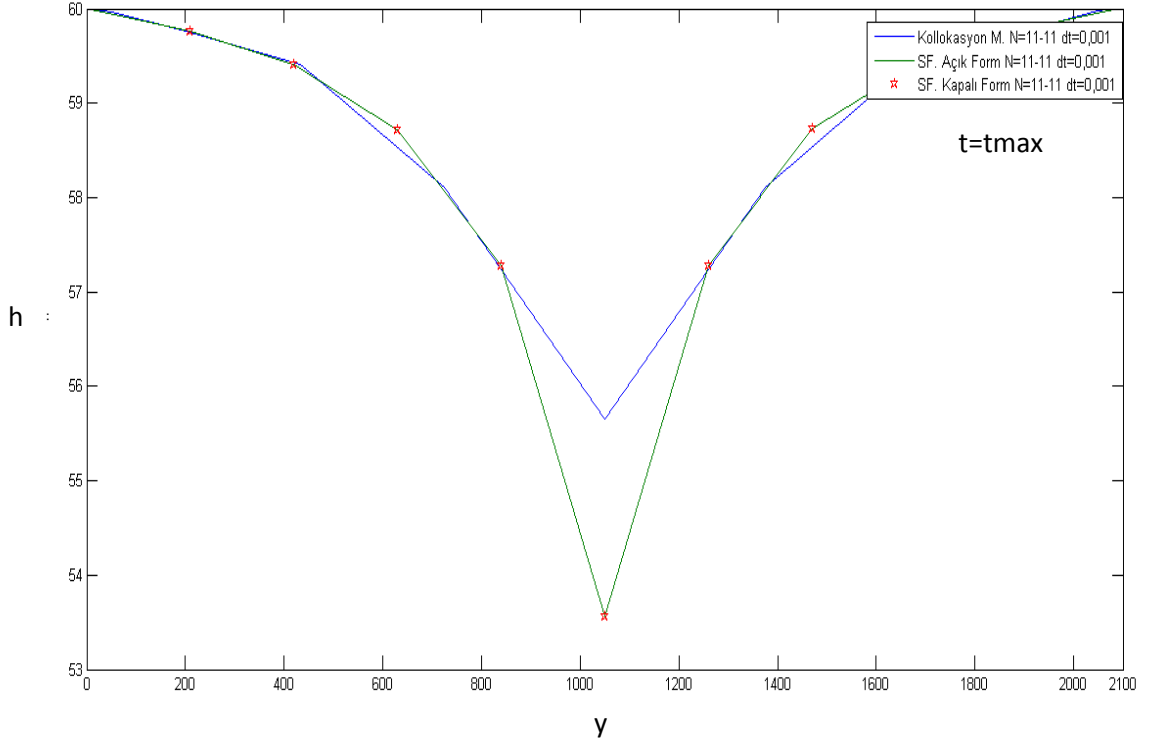
Şekil 7.54 Örnek 3 Serbest yüzeyli akiferde açık sonlu fark yöntemi ile elde edilen  $h$  değerleri



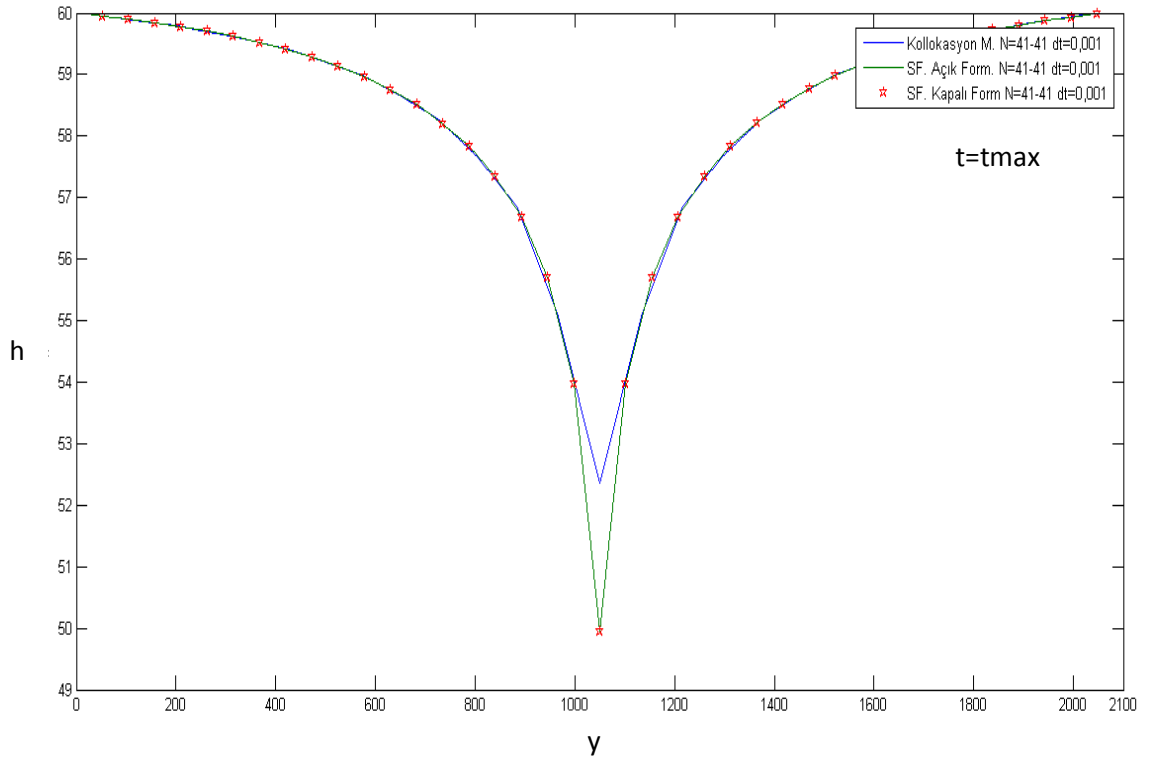
Şekil 7.55 Örnek 3 Serbest yüzeyli akiferde kapalı sonlu fark yöntemi ile elde edilen h değerleri

$N_x = N_y = (41 \text{ ve } 11)$  ve  $\Delta t = 0.001$ , olmak üzere,  $x=1050\text{m}$ 'de y eksenini boyunca açık ve kapalı sonlu fark yöntemleri ve kollokasyon yöntemi ile elde edilen h değerleri Şekil 7.56-7.57'de verilmiştir.

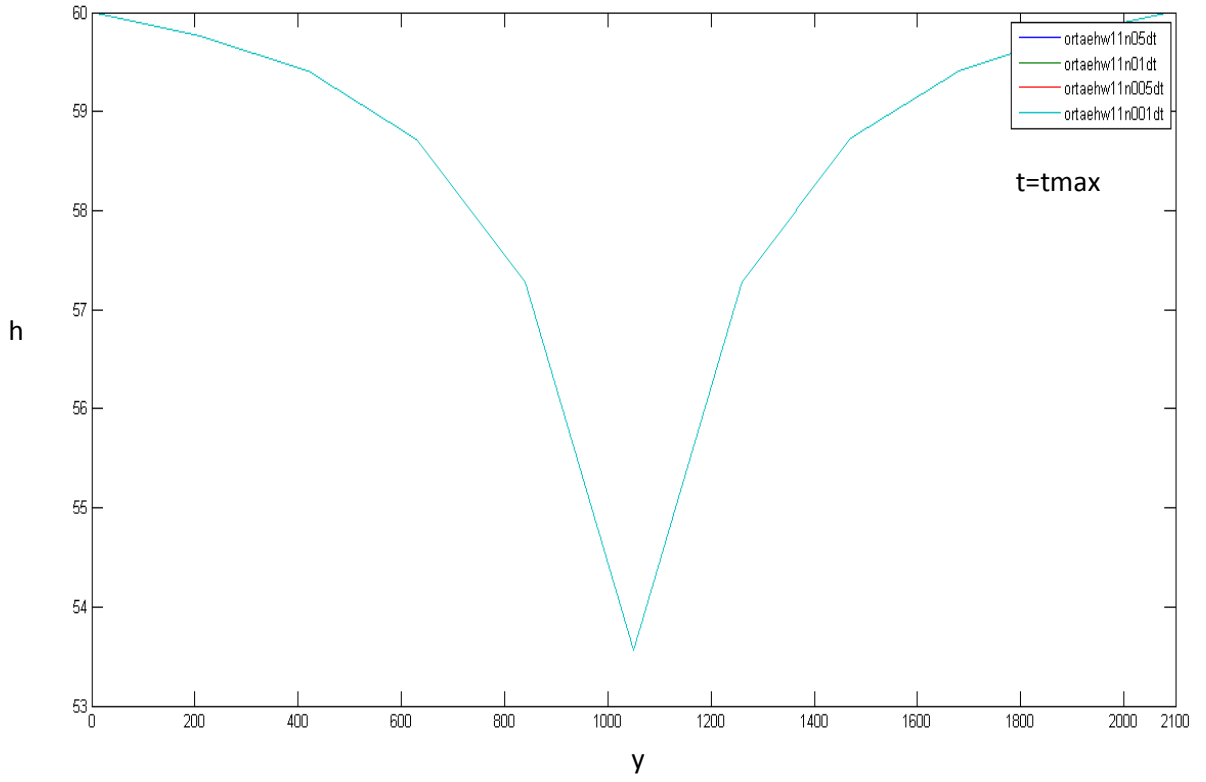
Çözümde kullanılan yöntemlerin zaman adımına bağlı olarak değişen sonuçları  $N_x = N_y = (11 \text{ ve } 41)$  ve  $\Delta t = (0.001, 0.005, 0.01, 0.05,)$  için  $x=1050\text{m}$  ve y eksenini boyunca Şekil 7.58-7.69'da görülmektedir.



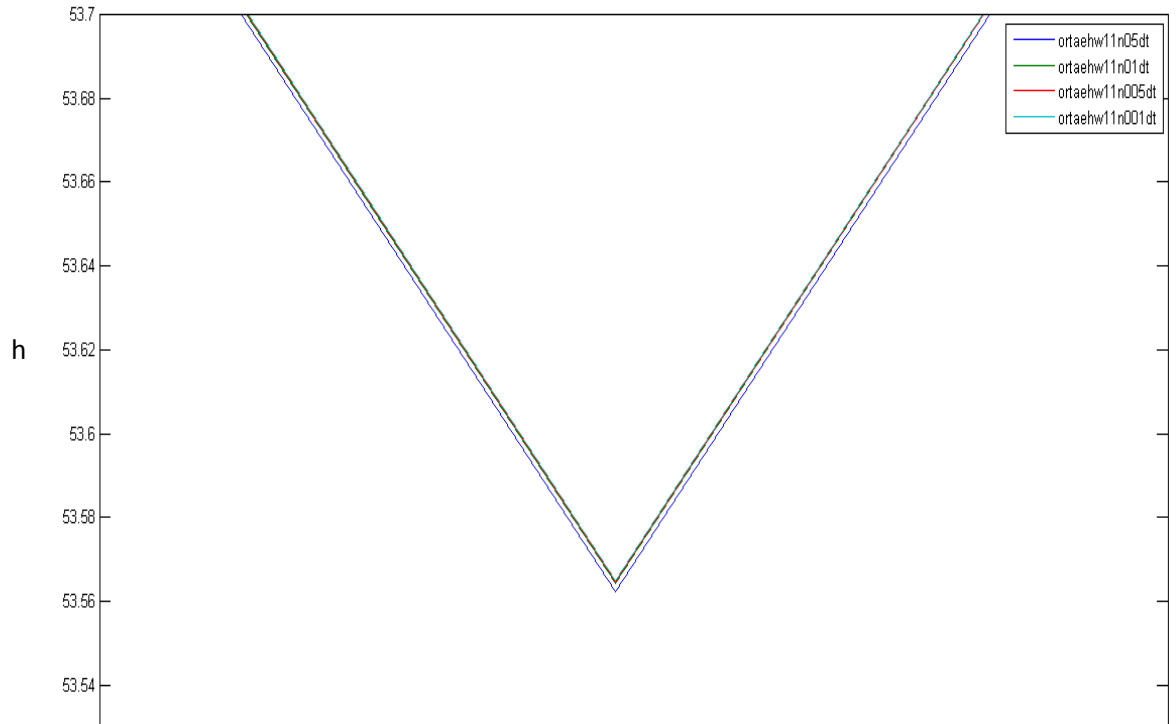
Şekil 7.56 Örnek 3  $N_x = N_y = 11, \Delta t = 0,001$  için  $x=1050$ 'de  $y$  boyunca  $h$  değerleri



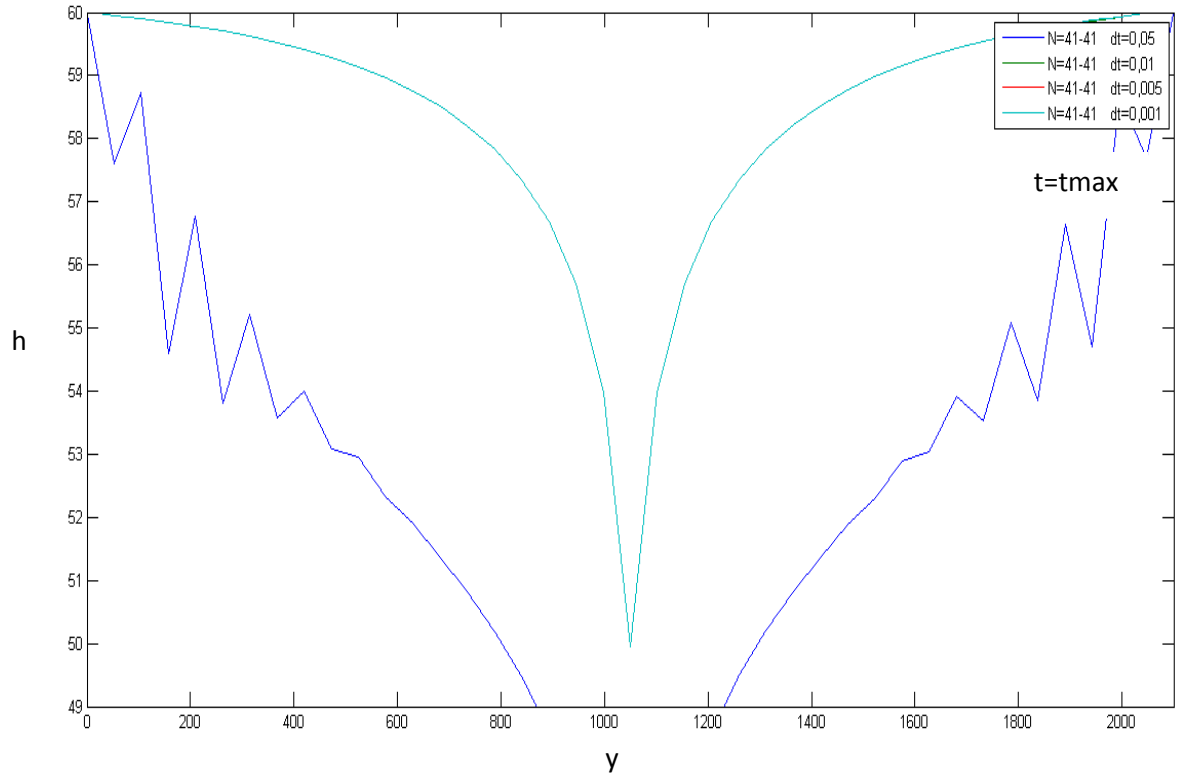
Şekil 7.57 Örnek 3  $N_x = N_y = 41, \Delta t = 0,001$  için  $x=1050$ 'de  $y$  boyunca  $h$  değerleri



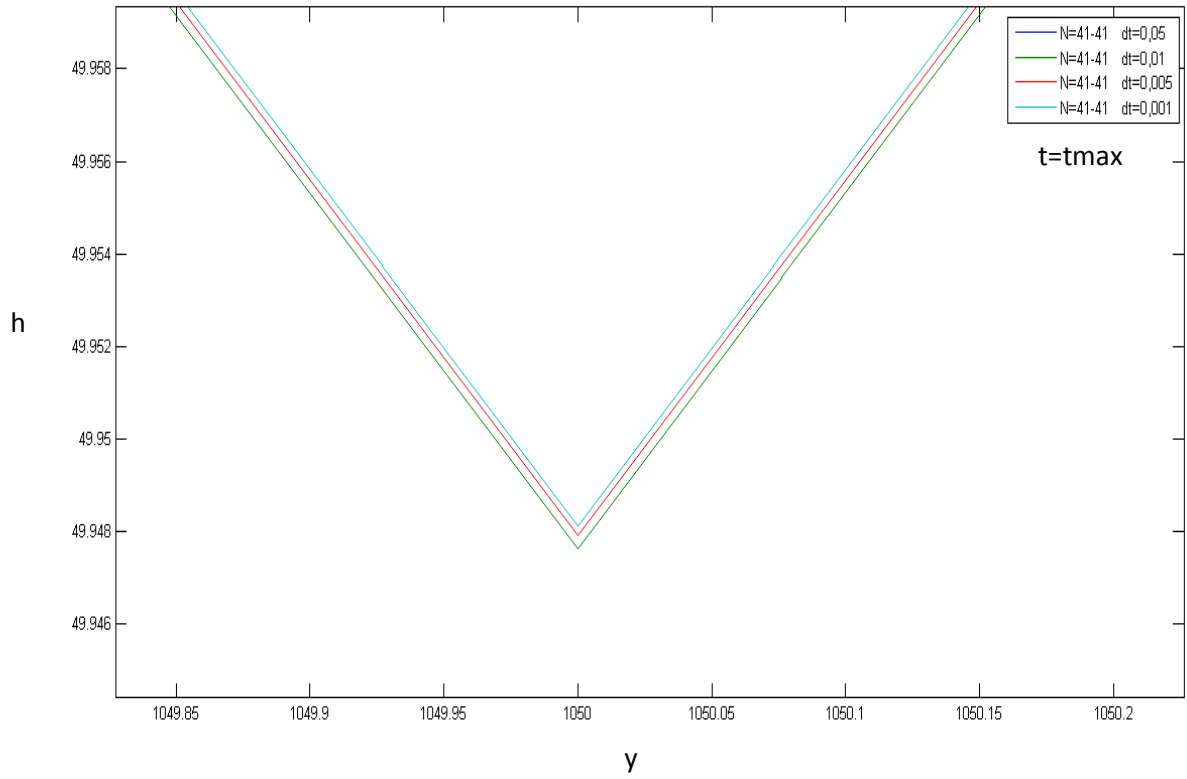
Şekil 7.58 Örnek 3 Açık sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 11$



Şekil 7.59 Örnek 3 Kuyu ekseninde açık sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 11$ , detay

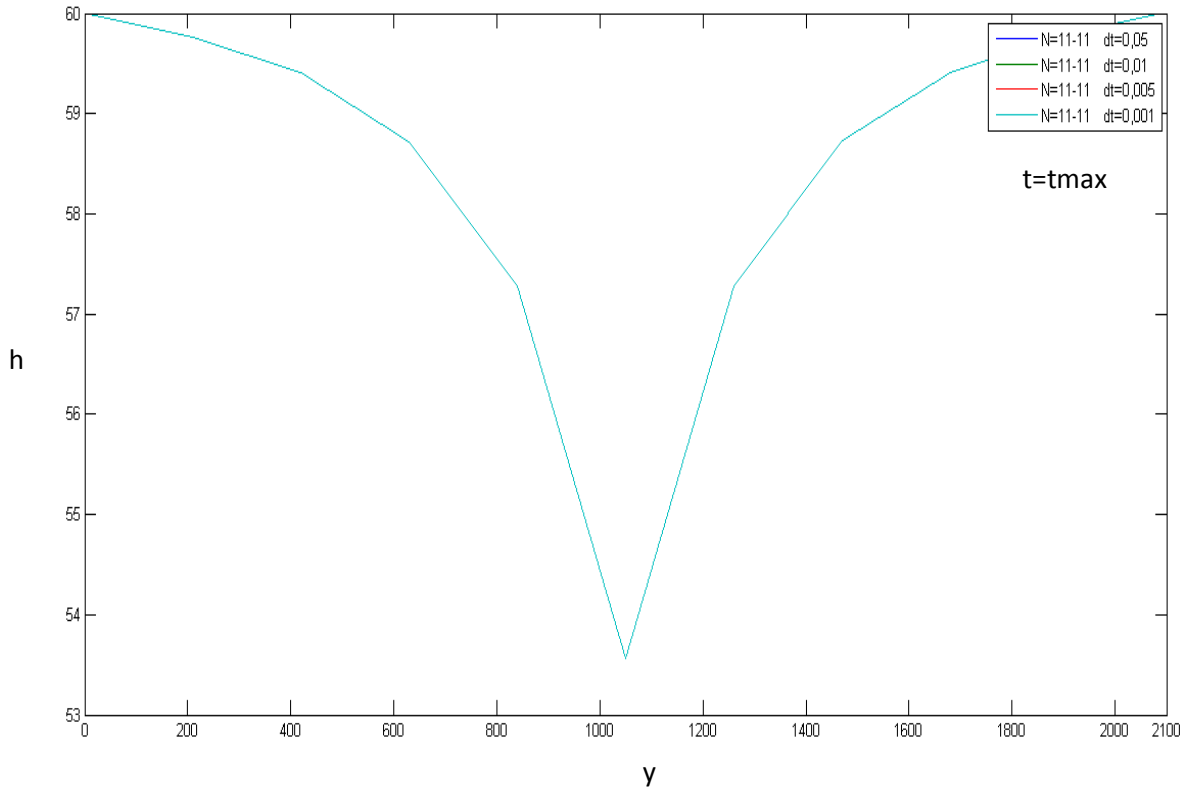


Şekil 7.60 Örnek 3 Açık sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 41$

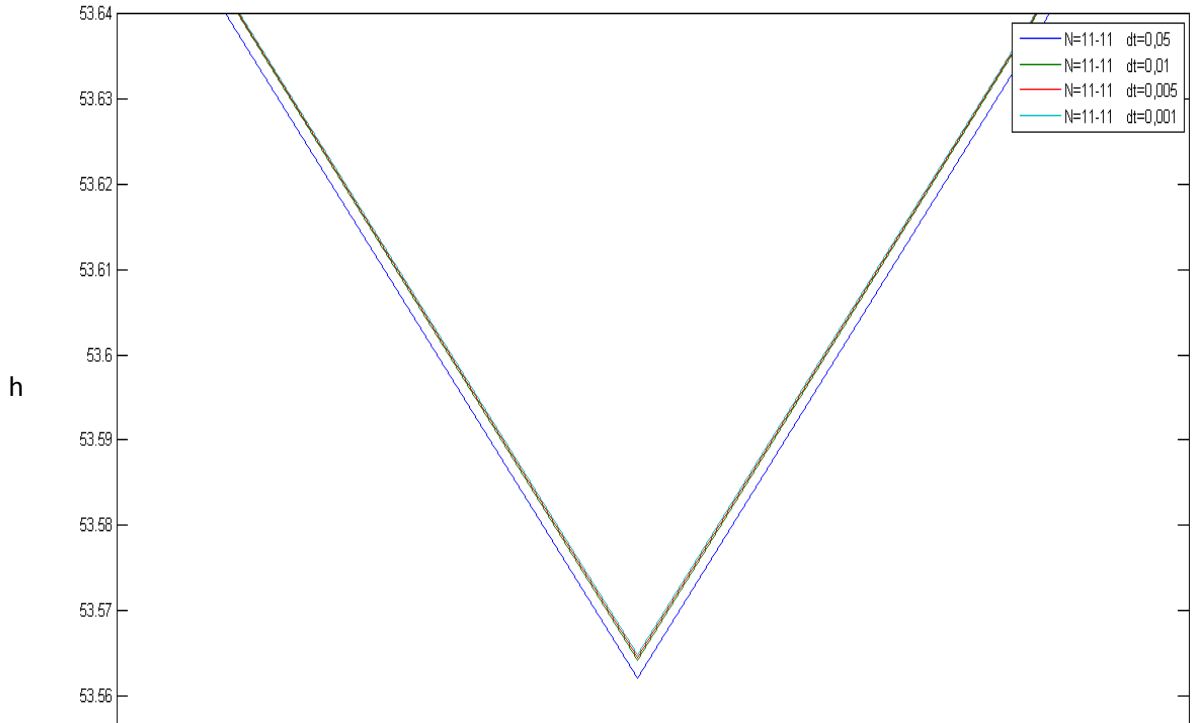


Şekil 7.61 Örnek 3 Kuyu ekseninde açık sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 41$ ,detay

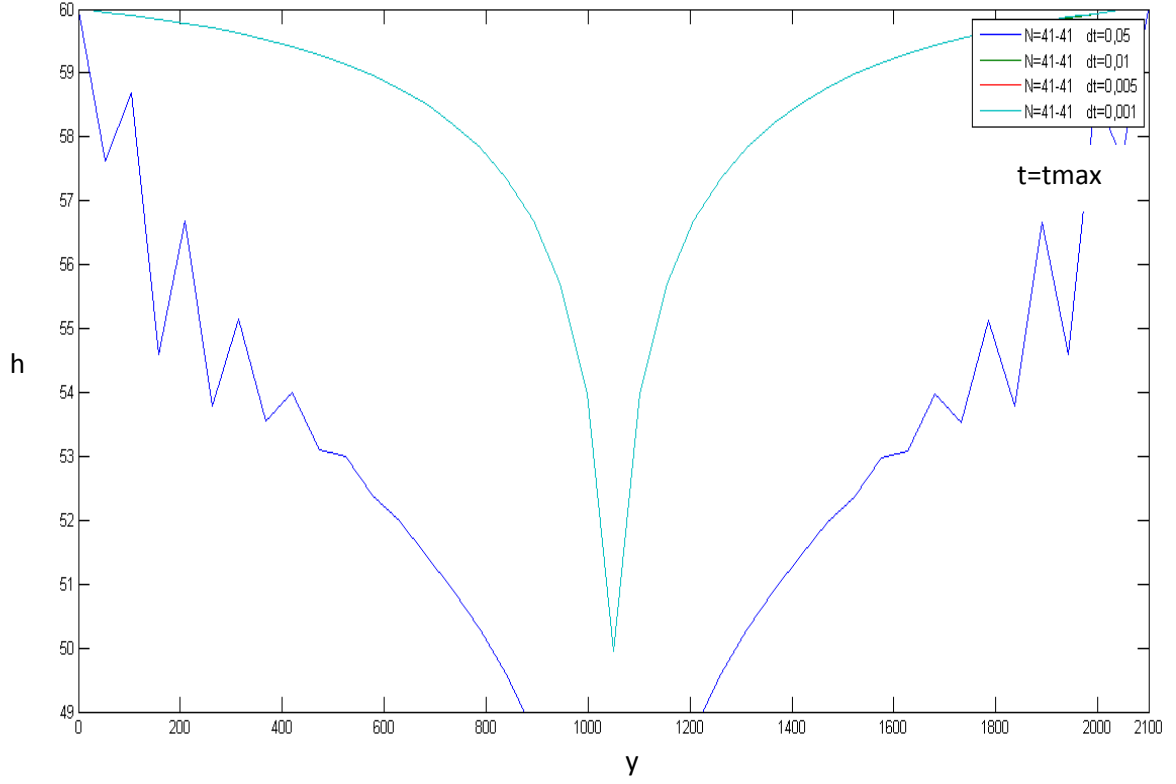




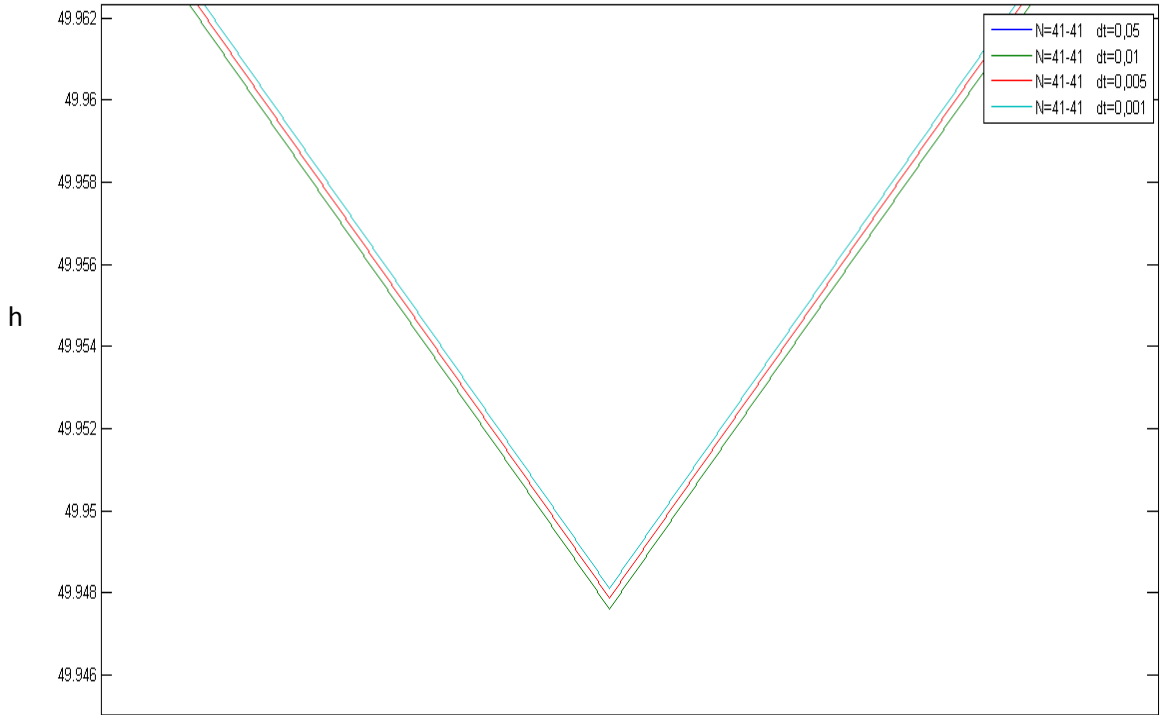
Şekil 7.62 Örnek 3 Kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 11$



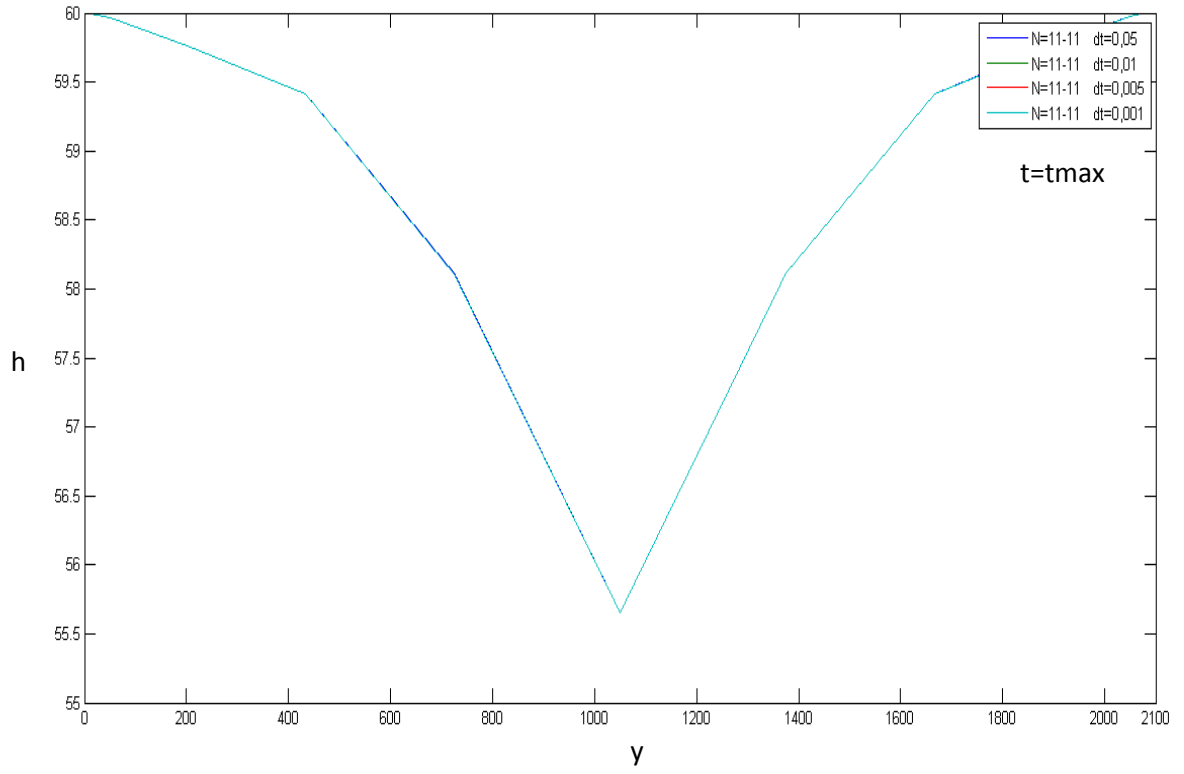
Şekil 7.63 Örnek 3 Kuyu ekseninde kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 11$ , detay



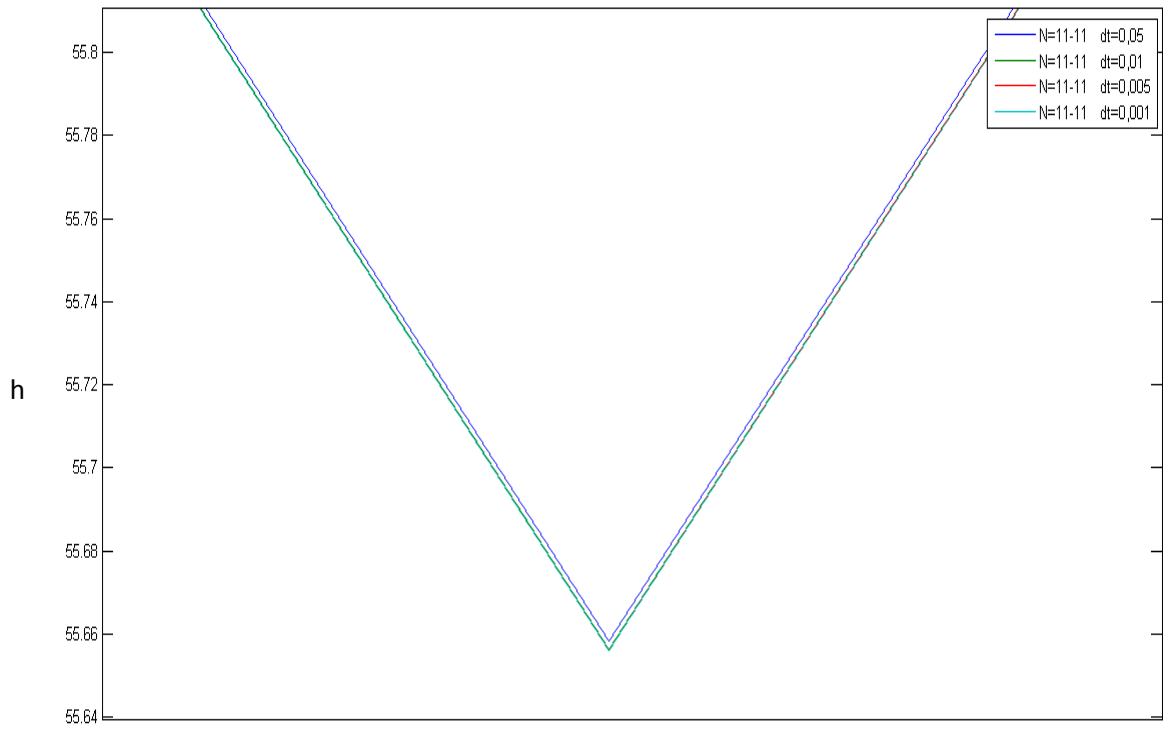
Şekil 7.64 Örnek 3 Kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 41$



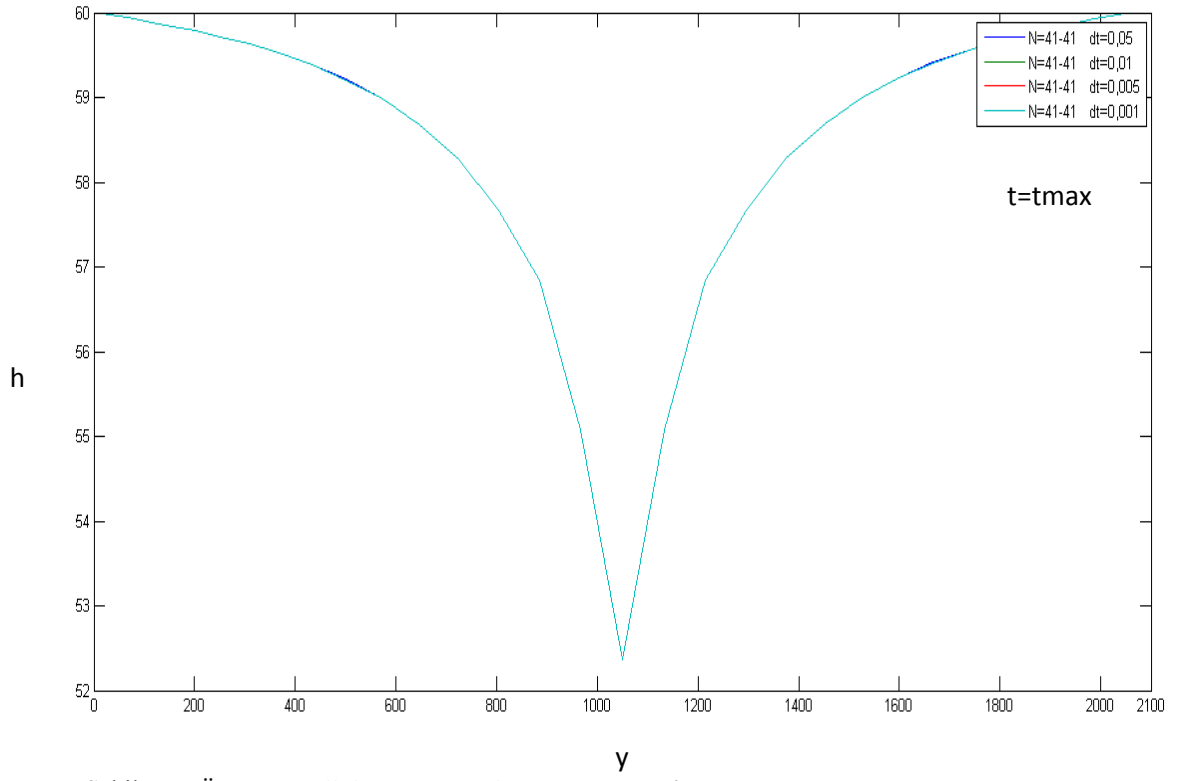
Şekil 7.65 Örnek 3 Kuyu ekseninde kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü,  $N_x = N_y = 41$ , detay



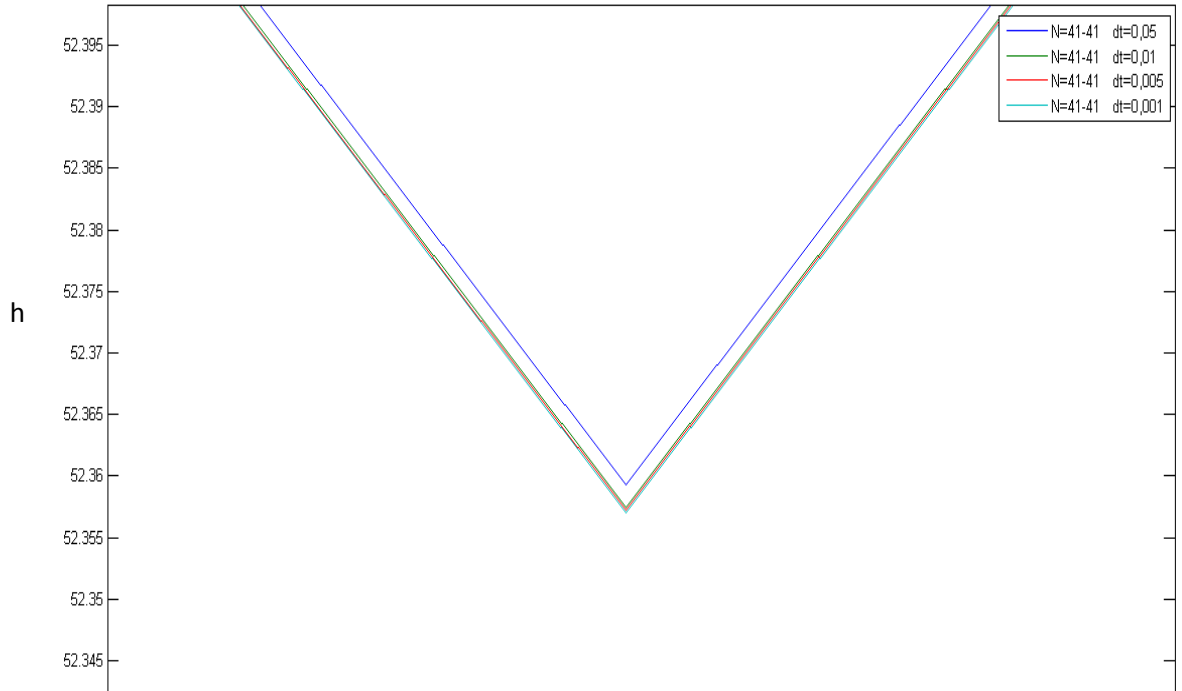
Şekil 7.66 Örnek 3 Kollokasyon metodu  $N_x = N_y = 11$



Şekil 7.67 Örnek 3 Kuyu ekseninde kollokasyon metodu  $N_x = N_y = 11$ , detay

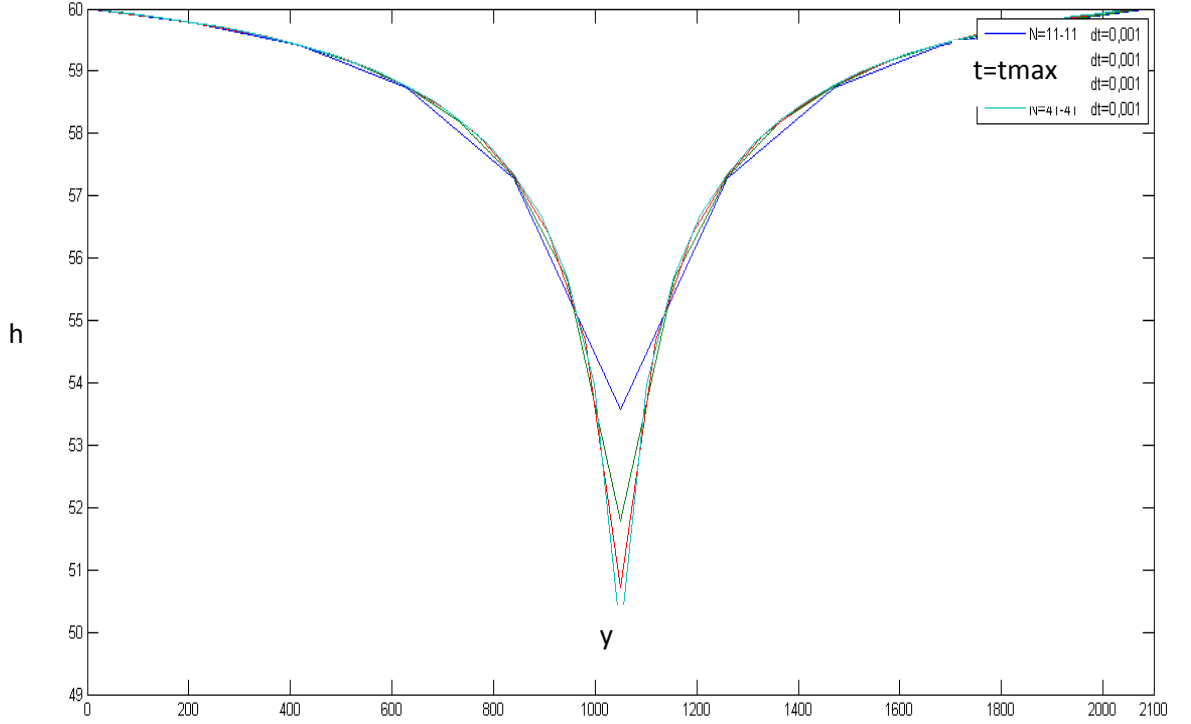


Şekil 7.68 Örnek 3 Kollokasyon metodu  $N_x = N_y = 41$

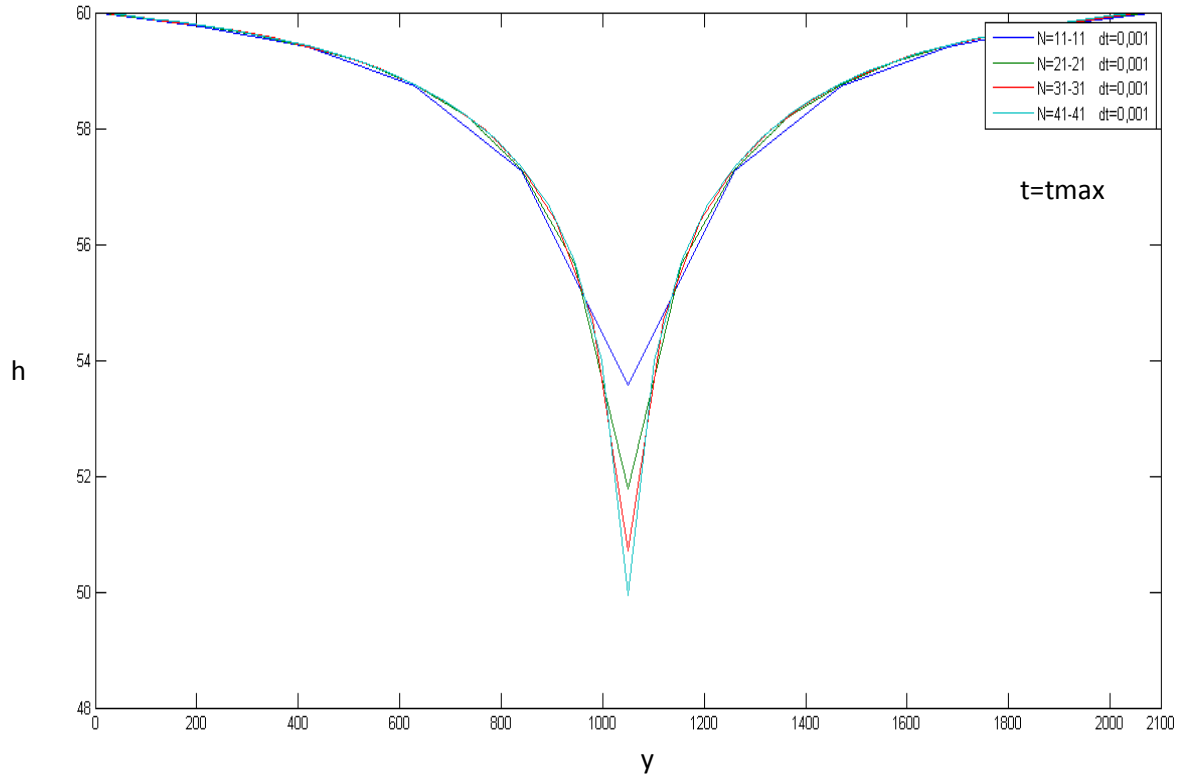


Şekil 7.69 Örnek 3 Kuyu ekseninde kollokasyon metodu  $N_x = N_y = 41$ , detay

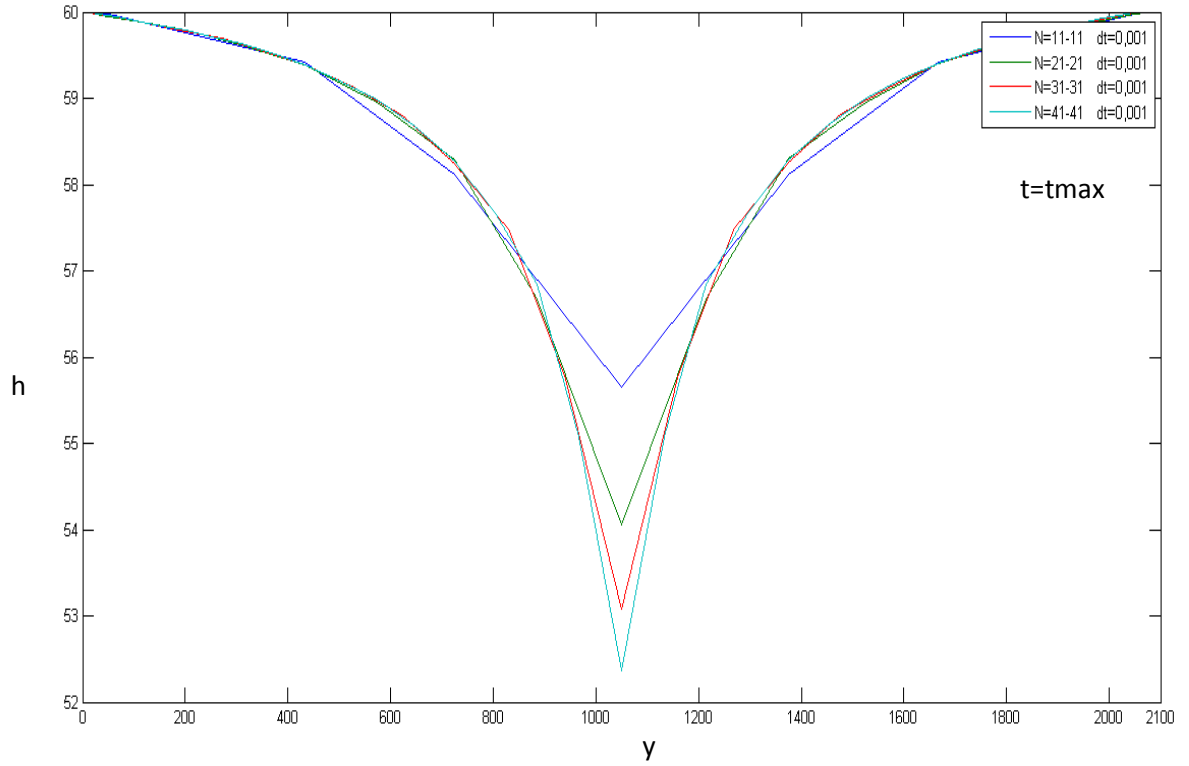
Hesap noktası sayısının sonuçlar üzerindeki etkisi  $x=1050\text{m}$  ve  $y$  eksenini boyunca  $\Delta t=0,001\text{gün}$  zaman aralığı için Şekil 7.70-7.72' den görülebilmektedir.



Şekil 7.70 Örnek 3 Açık sonlu farklar yöntemi çözümü,  $\Delta t=0,001$



Şekil 7.71 Örnek 3 Kapalı sonlu farklar yöntemi çözümü,  $\Delta t=0,001$



Şekil 7.72 Örnek 3 Kollokasyon metodu,  $\Delta t=0,001$

Her üç yöntemin için Theis denkleminin sonuçlarına göre 1, 3, 7 ve 13. günlerde RMS hata değerleri hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 7.3 'de verilmiştir. Tablodaki değerlerden açık ve kapalı sonlu fark çözümlerine göre Kollokasyon yöntemi sonuçlarının Theis denklemi sonuçlarına daha fazla yakınsadığı görülmektedir.

Tablo 7.3 Theis yöntemine göre elde edilen RMS hata değerleri

Yöntem	Zaman (Gün)			
	1	3	7	13
Kollokasyon	0,024252	0,035315	0,044379	0,089994
SF. Açık Çözüm	0,02944	0,043512	0,080108	0,111607
SF. Kapalı Çözüm	0,02944	0,043512	0,080108	0,111607

## BÖLÜM SEKİZ

### SONUÇ

Bu tez kapsamında iki boyutlu yeraltı suyu akımı probleminin kollokasyon yöntemi ile çözümü gerçekleştirilmiştir. Karşılaştırma amacıyla, çözümlerde açık ve kapalı formda sonlu farklar yöntemi ve Theis denklemi ile de çözümler yapılmıştır. Kollokasyon yönteminin kullanılması durumunda elde edilen sonuçların sonlu fark yöntemine göre avantajlarını ortaya koyabilmek için ilk olarak analitik çözümü bilinen bir örnek seçilmiştir. Yöntemlerin analitik çözüme göre boyutsuz hata değerleri ve RMS hata değerleri incelendiğinde kollokasyon yönteminin  $\Delta t$  zaman aralığı,  $\Delta x$  ve  $\Delta y$  mesafeleri için herhangi bir kısıt olmaksızın kesin çözüme yakınsayan sonuçlar elde edilmiştir. Açık formda ki sonlu farklar yöntemi ile de iyi sonuçlar elde edilmesine rağmen Courant şartından dolayı her  $\Delta t$  zaman aralığında sonuca varılamamıştır. Nokta sayısının artırılması sonlu fark yönteminde analitik çözüm sonuçlarına yakınsamayı sağlamış ancak kollokasyon yönteminde sonuçları dikkate geçecek kadar değiştirmemiştir. Zaman aralığının küçültülmesi ise hem kollokasyon yönteminde hem de sonlu fark çözümünde analitik çözüme yakınsamayı sağlamıştır. Kollokasyon yönteminde  $N_x=N_y=9$  için analitik çözüme göre hesaplanan hata değerleri, sonlu fark yönteminde  $N_x=N_y=21$  değeri için hesaplanan hata değerlerinden daha küçük çıkmıştır. Dolayısıyla kollokasyon yönteminde az sayıda hesap noktası kullanarak, sonlu fark yöntemine göre daha doğru sonuçlar elde edilmiştir.

Örnek 2'de ise basınçlı bir akiferden yapılan çekim iki boyutlu olarak incelenmiştir. Hesaplamalar sonucunda kuyuda Kollokasyon yöntemine göre, 6,15 m. civarında olması beklenen piyezometre kotu sonlu farklar yönteminin her iki formunda da yaklaşık olarak 5,18 m.civarında beklenmektedir. Örnek 1'den elde edilen veriler doğrultusunda söz konusu problem için kuyudaki gerçek su seviyesinin kollokasyon yöntemine yakın olması beklenir. Ancak Theis yöntemi sonuçlarına bakıldığında, sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçlar Theis yöntemine daha yakın çıkmıştır. Bu durum Theis yönteminin de kesin çözüm olmayıp yaklaşık çözüm olmasından kaynaklanabilir.



Örnek 3’de ise serbest yüzeyli akiferden yapılan çekim iki boyutlu olarak incelenmiştir. Hesaplamalar sonucunda kuyuda Kollokasyon yöntemine göre; 52,3 m civarında olması beklenen piyezometre kotu sonlu farklar yönteminin her iki formunda da yaklaşık olarak 49,8 m. civarında beklenmektedir. Theis yöntemi sonuçlarına göre yapılan karşılaştırmada Kollokasyon yöntemi sonuçları Theis yöntemi sonuçlarına daha yakın olarak elde edilmiştir.

Sonuç olarak, Kollokasyon yönteminin yeraltı suyu akımlarını modellenmesinde Sonlu fark yöntemlerine iyi bir alternatif olabileceği görülmektedir. Ancak yöntemin özellikle problem alanının sınırlarının düzgün bir geometriye sahip olmadığı durumlarda da test edilmesinde yarar vardır. Her ne kadar farklı mühendislik problemleri için düzgün geometriye sahip olmayan problemlerde yöntemin kullanımına ilişkin uygulamalar literatürde mevcut olsa da yeraltı suyu problemlerin de yöntemin uygulanmasının çok yeni olması bu alanda da benzer çalışmaların yapılmasını gerektirmektedir.

## KAYNAKLAR

- Abay, O. (2006). *Heterojen zeminlerde geçiş bölgesindeki akım karakteristiklerinininsayısal olarak incelenmesi*, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.
- Akın, M., Akın G.(2007). Suyun önemi, Türkiye’de su potansiyeli, su havzaları ve su kirliliği, *Ankara Üniversitesi Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi Dergisi*, 1(47), 105-118
- Akman, M. (2003). *Differential quadrature method for time-dependent diffusion equation*, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi
- Anderson, M. P. and Woessner, W. W. (1992) Applied groundwater modeling: simulation of flow and advective transport, *Advances in Water Resources*, 15(3), 167-173
- Bayazıt, M. (1995). *Hidroloji* (6.baskı) İstanbul, İTÜ yayınları
- Bert, C. W., & Malik M. (1996). The differential quadrature method for irregular domains and application to plate vibration. *Int. J. Mech. Sci.*,38(6), 589-606.
- Bredehoeft, J. D. & Pinder, G. F. (1968). Application of the digital computer for aquifer evaluation. *Water Resources Research*, 4(5).
- Bredehoeft, J. D. (1969). Finite difference approximation to the equations of groundwater flow. *Water Resources Research*. 5(2).

- Bredehoeft, J. D. & Pinder, G. F. (1970). Digital analysis of arial flow in multiaquifer groundwater systems: a quasi three dimensional model. *Water Resources Research*, 6(3), 883-888.
- Civalek, Ö. (2003). *Çok serbestlik dereceli sistemlerin harmonik diferansiyel quadrature (HDQ) metodu ile lineer ve lineer olmayan dinamik analizi*, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü ,Doktora Tezi
- Erguvanlı, K. ve Yüzer, E. (1984). *Yeraltı suları hidrojeolojisi* (2.baskı), İstanbul, İTÜ yayınları
- Fetter, C. W. (2004). *Uygulamalı hidrojeoloji* (4.baskı).(M.Afşin ve K.Kayabalı, Çev.). Ankara:Gazi kitabevi,(1988, 1980)
- Dirik, K. (b.t). *Fiziksel jeoloji ders notları*, 17 Mayıs 2011, [http://yunus.hacettepe.edu.tr/~tyurur/Fiziksel\\_jeoloji\\_ders/fiziksel\\_04\\_notlar.htm](http://yunus.hacettepe.edu.tr/~tyurur/Fiziksel_jeoloji_ders/fiziksel_04_notlar.htm)
- Freeze, R. A. & Witherspoon, P. A. (1966). Theoretical analysis of regional groundwater flow, 1: Analytical and numerical solutions to the mathematical model. *Water Resources Research*, Vol. 2(4), 641-656.
- Freeze, R. A. & Witherspoon, P. A. (1967). Theoretical analysis of regional groundwater flow, 2: effect of water-table configuration and subsurface permeability variation. *Water Resources Research*, 3(2), 623-634.
- Freeze R. A. & Cherry R. A. , (2003). *Yeraltı suyu* (4. Baskı).(K.Kayabalı, Çev.). Ankara:Gazi kitabevi,(1988, 1980)

- Gutiérrez, R. E. M. & Linares, C. G. (2008). *Application mathematical modeling in groundwater flow in tailings*, 27.05.2011, [http://www.feflow.info/fileadmin/FEFLOW/content\\_tagung/TagungsCD/papers/42.pdf](http://www.feflow.info/fileadmin/FEFLOW/content_tagung/TagungsCD/papers/42.pdf)
- Gürarlan, G. (2004). *Düzensiz sonlu fark hesapl şeması kullanılarak iki boyutlu yeraltı suyu akımının modellenmesi*, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.
- Hashemi, M. R. , Abedini, M. J. , Malekzadeh, P. (2006). Numerical modelling long waves in shallow water using incremental differential quadrature method, *Ocean Engineering*, 33(13), 1749-1764
- Hashemi M. R. , Abedini M. J. & Malekzadeh P. (2007). A differential quadrature analysis of unsteady open channel flow, *Applied Mathematical Modelling*, 31(8), 1594-1608.
- Igboekwe, M. U. & Achi, N. J. (2011). *Finite difference method of modelling groundwater flow*, 17.04.2011, [http://www.scirp.org/fileOperation/download.aspx?path=JWARP20110300006\\_67853211.pdf&type=journal](http://www.scirp.org/fileOperation/download.aspx?path=JWARP20110300006_67853211.pdf&type=journal).
- İrfanoğlu, B. (1994). *Yeraltı suyunda kirliliğin nümerik simülasyonu*, Orta Dogu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.
- Kamkar-Rouhani, A. (2008). *A Finite difference groundwater modelling and comparison of the results with those obtained using finite element modelling approach*, 21.04.2011, <http://www.imwa.info/imwa-meetings/imwa-congresses/150-proceedings-2008.html>.
- Kaya, B. (2010). Solution of advection diffusion equation using the differential quadrature method, *KSCE Journal of Civil Engineering*, 14(1), 69-75

- Kaya, B. & Arisoy, A. (2010). Differential quadrature solution for one dimensional aquifer flow, *Mathematical and Computational Applications*, 16(2), 524-534.
- Kaya, B. (2011). Investigation of gradually varied flows using differential quadrature method, *Scientific Research and Essays*, 6(13)
- Kaya, B. , Ülke, A. & Kazezyılmaz-Alhan, C. M. (2011). Differential quadrature method in open channel flows: Aksu river, Turkey, *Journal of Hydrologic Engineering*, doi:10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0000509
- Kinzelbach, K. (1986). Groundwater modeling: an introduction with sample programs in BASIC, *Elsevier*, New York, 333 .
- Larson, S. P. & Trescott, P. C. (1977). Solution of water-table and anisotropic flow problems by using the strongly implicit procedure, *Journal Research of U. S. Geological Survey*, 5(6), 815-821.
- McWhroter, D. B. & Sunada, D. K. (1977). *Ground water hydrology and hydraulics*. Colorado. Water Resources Publications.
- Pricket, T. A. & Lonquist, G. (1971). Selected digital computer techniques for groundwater resource evaluation, *Illinois State Water Survey Bulletin*, 55, 62 .
- Robati, A. & Barani, G.A. (2009). Modeling of water surface profile in subterranean channel by differential quadrature method (DQM), *Applied Mathematical Modelling*, 33(13), 1295-1305 .
- Shu, C. , & Richards, B. E. (1992). Application of generalized differential quadrature to solve two- dimensional incompressible navier -stokes equations, *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 5(1), 791-798.

Su döngüsü, (b.t). 04.09.2011, <http://ga.water.usgs.gov/edu/watercycleturkish.html#gwstorage>

Taylor, G. S. & Luthin, J. N. (1969). Computer methods for transient analysis of water-table aquifers. *Water Resources Research*, 5(1) ,144-152.

Wang, H. F. & Anderson, M. P. (1981). *Introduction to groundwater modelling finite difference and finite element methods*, San Francisco, W.H. Freeman and Co.

Yükselen, M. A. (2011). *Uygulamalı sayısal yöntemler ders notları*, 17 Mayıs 2011, <http://web.itu.edu.tr/~yükselen/HM504/04%20Adi%20diferansiyel%20denklemler.pdf>