T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE ÖĞRETMEN ADAYLARININ KULLANDIKLARI STRATEJİLERİN VE GÖSTERİM ŞEKİLLERİNİN ANALİZİ

F. Cemre PEHLİVAN

İzmir
2011

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE ÖĞRETMEN ADAYLARININ KULLANDIKLARI STRATEJİLERİN VE GÖSTERİM ŞEKİLLERİNİN ANALİZİ

F. Cemre PEHLİVAN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL

İzmir
2011

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Matematik Problemlerinin Çözümünde Öğretmen Adaylarının Kullandıkları Stratejilerin ve Gösterim Şekillerinin Analizi" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurulmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin Kaynak Dizini'nde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

28/06/2011

F. Cemre PEHLİVAN

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma, jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Başkanlığı Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Programında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Esra BUKOVA-GÜZEL

Üye : Prof. Dr. Şuur NİZAMOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sibel YEŞİLDERE İMRE

Onay
Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

28/06/2011

Prof. Dr. h. c. İbrahim ATALAY
Enstitü Müdürü

T.C
YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
ULUSAL TEZ MERKEZİ

TEZ VERİ GİRİŞİ VE YAYIMLAMA İZİN FORMU

Referans No	**405534**
Yazar Adı / Soyadı	Fatma Cemre PEHLİVAN
Uyruğu / T.C.Kimlik No	T.C. 39019648910
Telefon / Cep Telefonu	02362319603 05058524380
e-Posta	deucemre@yahoo.com.tr
Tezin Dili	Türkçe
Tezin Özgün Adı	Matematik Problemlerinin Çözümünde Öğretmen Adaylarının Kullandıkları Stratejilerin ve Gösterim Şekillerinin Analizi
Tezin Tercümesi	Analyzing Pre-service Teachers' Strategies and Representations Regarding Their Solutions to Mathematical Problems
Konu Başlıkları	Matematik Eğitim ve Öğretim
Üniversite	Dokuz Eylül Üniversitesi
Enstitü / Hastane	Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Bölüm	
Anabilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı
Bilim Dalı / Bölüm	Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı
Tez Türü	Yüksek Lisans
Yılı	2011
Sayfa	174
Tez Danışmanları	Yrd. Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL
Dizin Terimleri	
Önerilen Dizin Terimleri	Problem Çözme=Problem Solving Problem Çözme Stratejileri=Problem Solving Strategies Gösterim Şekli= Representation Çözüm Uzayı=Solution Space Matematik Öğretmen Adayı= Mathematics Student Teacher
Yayımlama İzni	☐ Tezimin yayımlanmasına izin veriyorum ☑ Ertelenmesini istiyorum **[1 Yıl]**

b. Tezimin Yükseköğretim Kurulu Tez Merkezi tarafından çoğaltılması veya yayımının **04.07.2012** tarihine kadar ertelenmesini talep ediyorum. Bu tarihten sonra tezimin, internet dahil olmak üzere her türlü ortamda çoğaltılması, ödünç verilmesi, dağıtımı ve yayımı için, tezimle ilgili fikri mülkiyet haklarım saklı kalmak üzere hiçbir ücret (royalty) talep etmeksizin izin verdiğimi beyan ederim.
NOT: (Erteleme süresi formun imzalandığı tarihten itibaren en fazla 3 (üç) yıldır.)

06.07.2011

İmza:............

Yazdır

TEŞEKKÜR

Ulaşmak istediğim her hedefe ışık tutarak kendi doğrularımı bulmamı sağlayan sevgili annem ve babam Hatice ve Hüseyin ÇAMLIYER'e beni bu günlere getirdikleri için sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Tüm hayatım boyunca her türlü konuda yol gösteren, uzakta da olsa beni hiç yalnız bırakmayan, varlığıyla bana güç veren canımın diğer yarısı biricik ablam Ecem PEHLİVANOĞLU'na ve kardeşim Atakan PEHLİVANOĞLU'na tez çalışmamdaki yardımlarından ötürü çok teşekkür ediyorum.

Hayatımı birleştirdiğim ilk günlerde yaşadığım yoğun ve stresli günlerimde gösterdiği anlayış ile her türlü konuda bana yardımcı olarak tez yazma sürecimi hızlandırdığı için canım eşim Alper PEHLİVAN'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca bana emeği geçmiş tüm öğretmenlerime saygılarımı sunuyorum. Ayrıca yüksek lisans eğitimimin başladığı ilk günden bu yana her türlü şeyden fedakarlık edip çalışmalarım konusunda bana zaman ayıran, tüm düşüncelerimi dikkate alıp değerli fikirleri ile bana yol gösteren, yoğun akademik çalışmaları ile yüksek motivasyonla çalışmamı sağlayan çok değerli danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL'e teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak dünyaya gelişiyle hayatıma renk katan, adına adadığım bu tezi yazma sürecimde varlığıyla beni duygusal yönden güçlendiren en kıymetlim, biricik yeğenim Ege PEHLİVANOĞLU'na çok teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

ŞEKİL LİSTESİ

ÖZET

Matematik Problemlerinin Çözümünde Öğretmen Adaylarının Kullandıkları Stratejilerin ve Gösterim Şekillerinin Analizi

F. Cemre PEHLİVAN

Öğretimde problem çözme yönteminin kapsamlı bir şekilde ele alınması ve öğrencilerin problemleri farklı yollardan çözebileceği ve problem çözme ile ilgili düşüncelerini akran ve öğretmenleriyle rahatlıkla paylaşabileceği sınıf ortamları oluşturulması gerektiği vurgulanmaktadır. Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmen adaylarının problemlere ürettikleri farklı çözüm yollarını, bu çözümlerden oluşturulan kolektif çözüm uzaylarını, çözüm uzaylarında ortaya çıkan bilgi türlerini, kullandıkları stratejileri ve gösterim şekillerini ayrıntılı bir biçimde incelemektir.

Bu araştırma doküman incelemesi yardımıyla elde edilen verilerin nitel analizinin gerçekleştirildiği nitel bir araştırma olup araştırmada özel durum çalışması deseninden yararlanılmıştır. Araştırmanın katılımcıları, bir devlet üniversitesi ortaöğretim matematik öğretmeliğine kayıtlı elli son sınıf matematik öğretmen adayıdır. Araştırmada veriler dokümanlar yardımıyla derlenmiştir. Bu dokümanlar öğretmen adaylarının kendilerine sunulan beş matematik problemine verdikleri yazılı çözümlerden elde edilmiştir. Söz konusu problemler "Dik Üçgen Problemi", "El Sıkışma Problemi", "Harita Problemi", Masa Problemi" ve "Kare Problemi" olarak adlandırılmıştır. Her bir problem katılımcılara farklı zamanlarda uygulanmış ve öğretmen adaylarının problemlere ilişkin çözümleri kendilerinden yazılı olarak alınmıştır. Araştırma kapsamında öğretmen adayların her probleme ilişkin çözümleri haftalık olarak incelenmiş ve incelemeler sonucunda çelişki yaşanan durumlarda (anlaşılmayan çözümler, okunamayan yazılar vb) sonuca bağlanmak üzere araştırmacı tarafından söz konusu katılımcılarla informal görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Söz konusu informal görüşmelerde araştırmacı, öğretmen adaylarının anlaşılmayan çözümlerinin sözlü olarak anlatmasını isteyerek onların düşüncelerini daha iyi anlamanın yollarını aramıştır. Ancak söz konusu görüşmeler

kayıt altına alınmamış ve bu görüşmelere tez çalışması kapsamında yer verilmemiştir. Öğretmen adaylarına problemlere ürettikleri çözümlerde ortaya çıkan çözüm uzayları, söz konusu çözüm uzaylarında yer alan bilgi türleri, problem çözme stratejileri ve gösterim şekilleri kuramsal çerçeveye dayalı olarak kodlanmıştır. Verilerin analizinde tematik kodlama ve içerik analizinin yapılması uygun görülmüştür. Araştırmada bulgular sunulurken öğretmen adaylarının gerçek isimleri gizli tutulmuş ve öğretmen adaylarına verilen $ÖA_1$, $ÖA_2$ vb. kodlamalarından yararlanılmıştır.

Verilerin analizinden öğretmen adaylarının problemlere ürettikleri çözümlerden oluşturulan kolektif çözüm uzaylarında ortaya çıkan bilgi türlerinin özellikle dik üçgen ve el sıkışma problemleri için oldukça kapsamlı olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının verilen geometri problemlerini cebirle ilişkilendirip çözebilmekte sıkıntı yaşadığı görülmüştür. Diğer dört problemin aksine masa problemi için tek bir öğretmen adayı tarafından ortaya konan farklı çözüm yolu sayısının çok olmamasına rağmen öğretmen adaylarının büyük bir yüzdesi farklı bilgi türlerini kullanabilmiştir. Öğretmen adaylarının problemlere verdikleri yanıtlar problem çözme stratejileri bağlamında incelendiğinde dik üçgen problemi için şekil çizme ve ek çizim yapma, el sıkışma problemi için formül kullanma ve diyagram çizme, masa problemi için şekil çizme, harita problemi için formül kullanma ve kare problemi için örüntü arama stratejilerinin en sık kullanıldığı görülmüştür. Aynı zamanda literatürde yer almayan probleme özgü stratejilerin de ortaya çıktığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının problemlere ürettikleri çözümler gösterim şekilleri açısından incelendiğinde ise genel olarak tüm problemler için en sık kullanılan tekli gösterim şeklinin sembolik gösterim şekli olduğu görülmüştür. Ayrıca çözümlerde gösterim şekilleri arasındaki ikili dönüşümlerinde ağırlıklı olarak şekil-sözel ve şekil-sembolik gösterim ikililerinin kullanıldığı belirlenmiştir.

Araştırmada elde edilen sonuçlara bağlı olarak matematik öğretmen adaylarının yetiştirilmesi sürecinde problemlere farklı çözüm yolu üretme yönünde eğitim görmeleri ve problem çözmede kendi bilgilerine yönelik farkındalıklarını arttırmak sağlanmalıdır. Ek olarak, öğretmen adaylarına farklı çözüm yaklaşımlarını kullanma, sahip oldukları bilgiler arasında ilişkiler kurarak problem çözme, problem çözme stratejilerini bilme ve kullanma, farklı gösterim şekillerini kullanarak düşüncelerini açığa çıkarma yönünde de bir eğitim verilmesi uygun olacaktır.

ABSTRACT

Analyzing Pre-service Teachers' Strategies and Representations Regarding Their Solutions to Mathematical Problems

F. Cemre PEHLİVAN

In mathematics education, it is emphasized that problem solving needs to be extensively considered and class environments where the students share their different problem solving strategies and processes with their peers and teachers need to be created. The purpose of this study is to investigate different solutions, knowledge categories used in collective solution spaces, problem solving strategies and representations used by prospective mathematics teachers during problem solving.

This study is a qualitative research where qualitatively analysed data is collected through document analysis. In this research, case study research design is used. Participants of this research consist of fifty senior prospective secondary mathematics teachers in a public university. Research data is collected from written documents. These documents contain participants' solutions to five different mathematical problems. The so-called problems are "Right Triangle Problem", "Handshake Problem", "Map Problem", "Table Problem" and "Square Problem".

Each problem is given to participants in different sessions and solutions to these problems are collected in writing. Within the scope of this research the solutions of prospective teachers for each problem are weekly analyzed and in the case of contradiction (incoherent solutions, unreadable writing etc.) the so called participants are interviewed informally by the researcher in order to clarify the solutions. In these informal interviews in order to solve the contradiction, the so called participants are asked to explain their solutions verbally. However these interviews are not recorded and not included within the scope of this resecarh.

The solution spaces generated by collecting participants' solutions to these problems, knowledge categories, problem solving strategies and representations are coded in theoritical framework. Data analysis is performed by using thematic coding and content analysis. In the findings of this research, participants identities are protected by assigning nicknames to the participants such as $ÖA_1$, $ÖA_2$ etc.

The data analysis reveals that especially for right triangle and handshake problems, knowledge categories in the collective solution spaces created by using participants' solutions are quite comprehensive. The results of this study indicates that prospective teachers have difficulty in solving geometry problems by using algebra.

Contrary to the rest four problems, for the table problem, although each prospective teacher produced a limited variety of solutions, within these solutions a large percentage of participants are able to use large variety of knowledge categories.

This study reveals that when solving problems most frequently used strategies for right triangle problem, handshake problem, table problem, map problem and square problem are as follows in consecutive order; make a drawing and make a supplemental drawing, using formula, make a drawing, using formula and look for a pattern. Besides, special problem solving strategies which have not been seen in problem solving literature are revealed for some problems.

When the representations are examined, symbolic representation is found to be the most frequently used single representation in prospective teachers' solutions for all problems in general. Besides, pictorial-verbal and pictorial-symbolic representation pairs are found to be the most commonly used representation pair among representation pair translations.

According to the research findings, in mathematics teacher education process it is suggested for math teachers to be trained in producing different solutions and their consciousness towards their own knowledge base to be expanded. In addition to this, it is suggested for mathematics teachers to be trained in using different solutions approaches, solving problems by relating to different knowledge categories, knowing and using problem solving strategies, and expressing their opinions by using different representations.

BÖLÜM I

GİRİŞ

Teknolojinin hızla geliştiği günümüz dünyasına paralel olarak insanların sahip olması beklenen nitelikler de hızla değişim göstermektedir. Teknolojiyle gelen pek çok yenilik, beraberinde birtakım problem durumlarını ortaya çıkarabilmektedir. Örneğin, kullanılan elektronik cihazlar farklı arızalara yol açmakta ve kullanıcıları sorunun kaynağına yöneltecek çözüm arayışı içine sokmaktadır. İnsanlar bu gibi problem durumlarının üstesinden gelebilmek için geçmiş yaşantılarından edindikleri deneyimleri göz önüne alarak var olan bilgilerini kullanma yoluna gitmekte ve düşüncelerini harekete geçirmektedirler.

Hangi konuda ya da düzeyde olursa olsun, düşünme en belirgin biçimiyle bir sorun ya da problem çözme etkinliğidir (Yıldırım, 2004). Görüldüğü gibi problem çözme; matematiksel düşünme ile günlük ve bilimsel düşünme türlerinin ortak paydasıdır. Bununla birlikte matematiksel düşünmenin, sağduyuya dayalı günlük düşünmeden temelde farklı olmadığı da (Yıldırım, 2004) ifade edilmektedir. O halde matematiksel düşünme becerisine sahip bireyler karşılaştıkları problem ne olursa olsun bu durumları hipotezler oluşturarak açıklamaya çalışacak ve sorunu giderecek çözüm bulma yollarını deneme-yanılma yaklaşımıyla test edecekleri bir düşünme sürecinden geçeceklerdir. Ancak bu düşünsel etkinliğin hayatımızda istenilen düzeyde kullanılıp kişide alışkanlık haline gelmesi, okul ortamında yeterli deneyimin edinilmesi ile mümkündür. Bu yönüyle bakıldığında yeni matematik dersi öğretim programının kavramsal yapısının temellerinden birinin neden "problem çözme" olduğu daha net anlaşılmaktadır. Türkiye'de olduğu gibi problem çözme farklı ülkelerde de öğretim programlarının temelinde yer almaktadır (NCTM, 1988; Ontario, 2006; Cai ve Nie, 2007; Pehkonen 2007; National Board of Education in Finland [NBE], 1994). Örneğin NCTM'e (1989) göre matematik öğretiminin temel amacı problem çözme olmalıdır. Problemler üzerine çalışmak, öğrencilerin matematiksel kavramları öğrenmelerini, kavramları ve önemli matematiksel düşünceleri daha iyi anlamalarını sağlar (NCTM, 1989; NCTM, 2000). Çin'de ise 1998 yılında yayınlanan matematik dersi öğretim programında öğrencilerin sadece doğru bir şekilde hesaplama yapmalarının yeterli olmadığı aynı zamanda matematiksel işlemlerin ilkelerini anlamaları ve problemleri çözerken uygun olan stratejileri seçebilmeleri gerektiği vurgulanmaktadır. Türkiye'de öğretim programı ile önceleri öğretimde neredeyse tümüyle bilgiyi ön planda tutan ve düşünme alışkanlığını edinme etkinliklerinden uzak olan yapı ortadan kaldırılmaya çalışılmış ve yapılan reform hareketleriyle problem çözme becerisi matematik derslerinde kazandırılması hedeflenen temel beceriler arasında sayılmaya başlanmıştır. Bu bağlamda probleme olan bakış öğretimin etkililiğini de değiştirecebilecektir.

En genel haliyle problem, kişinin karşılaştığı zaman çözme ihtiyacı duyacağı ve çözüm yolunu hemen kestiremediği bir durum olarak tanımlanmaktadır (Posamentier ve Krulik, 1998). Gerçek bir problem ilgi çekici olmalı, yoruma açık ve çözümü belli olmayan ancak merak uyandıran bir yapıda olmalıdır. Bu tür problemlerin çözümünde birden çok çözüm yolu mevcut olup bunların aritmetik hesaplamalar yapma, geometrik çizimlerden yararlanma, cebirsel eşitlikleri kullanma şeklinde olabileceği belirtilmektedir (NCTM, 2000).

Literatürde, problemin ve problem çözmenin ne olduğuna dair yapılan çeşitli tanımlar mevcuttur. Bu tanımlara ilerleyen bölümlerde ayrıntılı bir şekilde yer verilecektir. Tanımların tümü problem çözmenin bir süreç olduğunu göstermektedir. Yapılan araştırmalarda sürece ait ortaya çıkan problem çözme basamakları ve bu basamaklarda ihtiyaç duyulan bilgilere rastlamak mümkündür. Örneğin, Garofola (1986) problem çözme başarısının işlemsel bilginin yanında problemle ilgili kavramsal bilgiye, problemin şematik bilgisine, heuristik ve stratejik bilgisine ve matematiksel düşünme becerisine bağlı olduğunu vurgulamaktadır (Garofola, 1986'dan aktaran Karataş, 2008).

Problem çözmedeki bu başarı beraberinde problemleri farklı yollarla çözmeyi de getirebilecektir. Nitekim problemleri farklı yollara çözebilmenin sahip olunan matematik bilgisi, strateji bilgisi ve gösterim şekillerinden yararlanma ile ilişkili olduğu söylenebilir. Problemleri farklı yollarla çözmenin farklı stratejilerin kullanılmasını gerektirdiği, farklı çözümlerin ifade edilmesinin ise farklı gösterim şekillerinden yararlanmayı öne çıkardığı düşünülmektedir. Araştırmalarda öğretmenlerin, birbirinden farklı bilgilerin aktarıldığı çözüm yollarında farklı gösterim şekillerini kullanmalarının ve verilen matematik problemlerine uygun olan gösterim şekillerini seçmelerinin önemli olduğu vurgulanmaktadır (Yerushalmy ve Schwartz 1993; Moschkovich, Schoenfeld ve Arcavi 1993'den aktaran NCTM, 2000). Lesh (1981) ve Lesh, Landau ve Hamilton (1983) de problemlerin çözümlerini analiz ederken konuşmada kullanılan semboller sistemini, yazılı sembolleri, şekiller ya da resimleri, manipulatif modelleri, gerçek yaşam örneklerini içeren gösterim şekillerini kullanmışlardır. Farklı gösterim şekillerinin kullanımının literatürde çoklu gösterim şekli kavramı ile ifade edildiği ve çoklu gösterim şeklinin bir kavramın çeşitli gösterim biçimlerini kapsayarak bu gösterim şekillerinin birbiriyle bağlantısını dikkate aldığı ifade edilmektedir (Owens & Clements'den (1998) aktaran Akkuş-Çıkla, 2004).

Çalışmayı ortaya çıkaran düşüncenin temeli; matematik dersi öğretim programının uygulayıcısı olacak matematik öğretmen adaylarının mevcut problem çözme durumlarının ayrıntılı olarak incelenmek istenmesidir. Sözü geçen problem çözme durumları; probleme farklı çözüm yolları ile yaklaşabilme, çözüm yollarında kullanılan bilgi türleri, problem çözme stratejileri ve gösterim şekilleri (temsil biçimi) olarak ele alınmıştır.

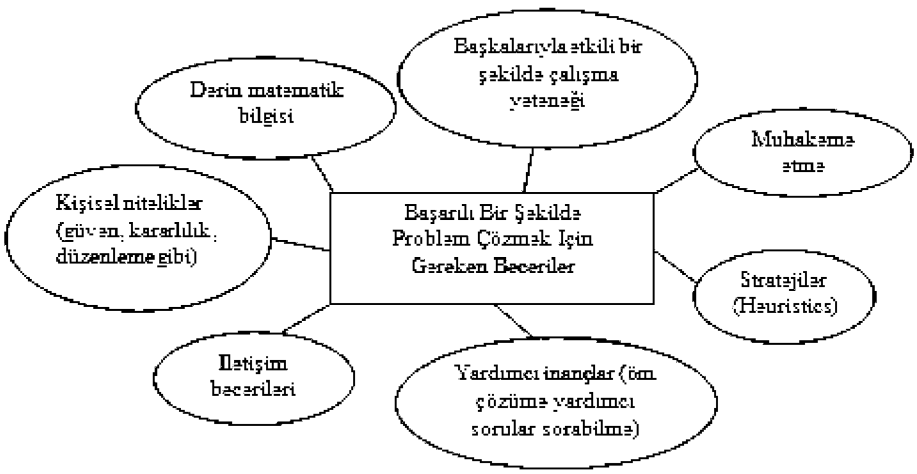
Problem Durumu

Saundry ve Nicol (2006) matematik problemlerini çözmenin; problemi tanımlama, çözüm için ne yapılabileceğini yorumlama, uygun bir problem çözme stratejisini seçme, uygulama ve çözümün uygun olup olmadığını kontrol etme gibi bir dizi karmaşık süreci içerdiğini ileri sürmektedir. Buna paralel olarak Stacey (2005) de problem çözmeyi; analiz yapma, yorumlama, sorgulama, tahminde bulunma, değerlendirme ve düşündüğünü ifade etme gibi bir dizi süreci içeren önemli bir yaşam becerisi olarak tanımlanmaktadır (akt. Anderson, 2009). Problem çözme pek çok ülkenin matematik öğretim müfredatının gerek kapsayıcı bir amacı gerekse temel bir bileşenidir. Bununla birlikte, başarılı problem çözen birey yetiştirmek bir dizi beceri ve yetenek gerektiren karmaşık bir görevdir (Stacey, 2005'den aktaran Anderson, 2009). Başarılı problem çözmeye etki eden faktörler Şekil 1'de verilmektedir. Şekil 1'de yer alan heuristik stratejiler tüm problem türlerinde uygulabilen problem çözme sürecinin her aşamasında kişinin problemi anlamak ve karşılaşılan problemi çözmek için kendi kendine sorduğu genel sorular kümesi ve bu sorulara zihinden verilen cevaplar olarak tanımlanmaktadır (Krulik & Rudnick, 1989; Van De Walle, 2004).

Şekil 1

Problem Çözmede Başarıya Etki Eden Faktörler

(Stacey, 2005'den akt. Anderson, 2009)



Tayland'da Nuangchalerm, Pimta (2009) altıncı sınıf öğrencilerinin problem çözme yeteneklerini hangi faktörlerin etkilediğini araştırmıştır. Yapılan çalışmada öğretmen davranışlarının, öğrencilerin öz yeterliklerinin ve tutumlarının öğrencilerin problem çözme yetenekleri üzerinde önemli etkiye sahip olduğu gözlemlenmiştir. Bu araştırma, öğrencilerin problem çözme başarılarının çoğunlukla kendilerinin ve hatta öğretmenlerinin problem çözmeye yönelik tutumlarına bağlı olduğunu ortaya koymaktadır.

Hong Kong'ta öğretmenler matematik öğretiminde problem çözme yaklaşımlarının farkında olmalarına rağmen uygulamalarına bu farkındalıklarını yansıtamamakta ve öğrencilerini tartışma, matematiksel sorgulama ve problem çözme ortamlarına katmaya çalışsalar da onların matematiksel düşünceleri keşfetme ve araştırmada farklı yaklaşımları sergilemelerini desteklemek yerine önceden belirlenmiş çözüm yollarını kullanmaya yönlendirmektedirler (Mok, Cai ve Fung, 2005'ten aktaran Anderson, 2009).

Ülkemizde de öğrenciler ilköğretim yıllarından itibaren verilen matematik problemlerinin farklı çözüm yollarını aramaktan ziyade en kısa zamanda tek bir çözüm yolu bulmaya yönlendirilmektedirler. Öğrencilerin ortaöğretim ve yükseköğretim kurumlarına SBS, YGS ve LYS gibi sınavlarla seçilip yerleştirilmesi sebebiyle çoktan seçmeli testler önem kazanmaktadır. Problemlerin farklı stratejiler kullanarak çözümünün aksine çoktan seçmeli sınavlarda çoğunlukla "deneme-yanılma" stratejisi ön plana çıkmaktadır. İlköğretim matematik dersi öğretim programında (MEB, 2006a) öğrencilerin problem çözerken farklı stratejileri kullanması gerektiğine vurgu yapılıyor olmasına rağmen sınav sisteminin çoktan seçmeli sorular içermesi ve tek doğru cevabın bulunması istendiğinden öğrenciler tarafından kullanılan ve dolayısıyla öğrenilen stratejilerin sınırlı sayıda kaldığı düşünülmektedir. Bu noktada programın gereklerini yerine getirmek ve öğrencilerin kendi çözüm yollarını oluşturmalarını sağlamak için uygun ortamı düzenleyecek ve farklı strateji kullanımının öneminin kavranmasına rehberlik edecek olan öğretmenlerdir.

Matematik öğretmenlerinin problem çözmeye yönelik tutumlarının ilköğretim yıllarından itibaren oluşmaya başladığı düşünülebilir. Özkaya'ya (2002) göre matematik öğretmenleri kendileri nasıl öğrendiyse öğrencilerine genellikle o şekilde öğretim yapmaktadırlar. Dolayısıyla öğretmenlerin problem çözme yaklaşımlarının kendi öğrencilik yıllarından itibaren şekillenmekte olduğu varsayılabilir. Matematik öğretmen adaylarının da okul matematiğine ilişkin deneyimleri onların kendi öğrencilik yıllarındaki matematiksel deneyimleri ile sınırlı olup genelde çeşitli kuralları ezberleme, bir şeyin ne olduğunu çözmek için yapılan yönlendirmelerle ve nadir olarak da problem kurmakla sınırlıdır (Cooney ve Wiegel'den (2003) aktaran Karp, 2010). Sözü geçen sınırlılığı en aza indirmek, üniversitede aldıkları eğitim sürecinde uygulanacak bazı yöntemlerle mümkün hale getirilebilir. Örneğin, matematik öğretmen adaylarının öğrenim hayatları boyunca farklı stratejilerle karşılaşmaları, problemleri farklı yollardan çözmeye çalışmaları ve bu çözüm yollarında farklı gösterim şekillerinden yararlanmaları matematiğe ilişkin deneyimlerini arttırabilir. Böylece öğretmen adayları problem çözme sürecinde sadece cevaba odaklanmaktan ziyade, probleme hangi açılardan yaklaşılabileceği, hangi matematik konularıyla bağlantı kurulabileceği ve bu bağlantıları kurarken problemi en uygun şekliyle nasıl temsil edebileceği üzerine yoğunlaşabilecektir. Problem çözümlerini temsil etmek için farklı öğrenme stillerine hitap edebilecek gösterim şekillerini kullanmaya çalışarak öğretmen adaylarının, meslek hayatlarında öğrencilere daha uygun öğrenme ortamları sağlayabilecekleri düşünülmektedir.

Problem çözmeye uygun öğrenme ortamı tasarımında önemli olan bir diğer etmenin problemleri farklı yollar kullanarak birden fazla çözüm yolu üretmenin önemi vurgulanmaktadır. Leikin'e (2006) göre farklı çözüm yollarına açık olan problemlerin uygulanmasının önemi vurgulanmasına rağmen öğretmenler nadiren hem kendi çözümlerinde hem de sınıflarında problemleri farklı yollarla çözmektedirler. Benzer şekilde Amerika'daki okullarda öğretmenlerin nadiren farklı çözüm yollarını gerektiren problemleri sınıflarında sundukları ifade edilmektedir (Stigler ve Hiebert, 1999; Ma, 1999).

Sınıflarda gösterim şekillerinden yararlanma artan şekilde önerilirken öğretmenler gösterim şekillerini kullanmada gerekli şekilde desteklenmemekte ve bunun yanında öğretmen yetiştirme programları ve mesleki gelişim programları da öğretmen adaylarına gösterim şekillerini kullanmaları ve öğretimlerinde bunlardan başarılı bir şekilde yararlanmaları yönündeki talepleri karşılayamamaktadır (Ball, 1997; Ball ve Cohen, 1999; Lampert ve Ball, 1998; Putnam ve Borko, 1997; Stein vd.'den (2008) aktaran Stylianou,2010).

Uygulamadaki bu aksaklık öğretmenlerin strateji ve gösterim şekillerinin kullanımı ile ilgili yeterli bilgi donanımına sahip olmadığı yönündeki düşünceleri desteklemekte ve araştırmanın problem durumunu oluşturmaktadır.

Amaç ve Önem

Yapılan literatür taraması sonucunda pek çok ülkenin matematik öğretim programında problem çözmenin önemine vurgu yapıldığı görülmüştür (NCTM, 2000; OME, 2006; Cai ve Nie, 2007). Örneğin NCTM (2000), matematik öğretim sürecinde yer alması gereken beş süreç standardını; problem çözme, muhakeme ve ispat, iletişim, bağlantılar ve gösterim şekilleri olarak tanımlamıştır. Bu standartlar, öğrencilerin matematik bilgilerini edinip onları kullandığı bir sürece karşılık gelmektedir. Kanada'da matematik dersi öğretim programında da problem çözmeye önemli bir yer ayrılmaktadır ve özel olarak problem çözme stratejilerinin önemi de şu şekilde ifade edilmektedir:

> Günlük yaşamlarında öğrenciler arkadaşlarıyla bir şeyi paylaşırken ya da ellerindeki materyallerle bir yapı oluşturuken sezgisel olarak problem çözmektedirler. Derslerinde ağırlıklı olarak problem çözmeye yer veren öğretmenler, öğrencilerin sezgisel olarak stratejiler geliştirmelerinde ve kullandıkları stratejileri arttırmalarında yardımcı olmakta ve bu yolla öğrencilerin problem çözerken uygulayabilecekleri stratejiler ve problem çözme basamakları hakkındaki bilgilerini geliştirmektedirler (Ontario, 2006, s.4).

Ülkemizdeki matematik dersi öğretim programlarında da problem çözme ele alınmakta (MEB, 2006b), ancak problem çözme, problem türleri, stratejileri ve problem çözmede kullanılan gösterim şekillerinden yararlanma gibi başlıkları da içerecek şekilde daha kapsamlı bir şekilde ele alınmalıdır. Programdaki kapsamlı ele alınışın yanı sıra sınıf ortamında da problem çözme etkinliklerine daha fazla yer ayrılması gerekmektedir. Nitekim matematik dersi öğretim programında problem çözmenin, kapsamlı ve zengin bir şekilde ele alınması ve bu yolla öğrencilerin problem çözme ile ilgili düşüncelerini akranlarıyla ve öğretmenleriyle rahatlıkla değişik şekillerde ifade edebileceği ve problemleri farklı yollardan çözebileceği sınıf atmosferinin oluşturulması gerektiği ifade edilmektedir. Ayrıca öğrenciler, sınıflarında problem çözme sürecine ve farklı çözüm yollarına değer vermeyi de öğrenmelidirler (MEB, 2006).

Öğrencilerin matematiksel bilgi ve becerilere sahip olması için gerekli öğrenme ortamının düzenlenmesi öğretmenler tarafından sağlanabilir. Ancak öğretmenlerin bu ortamı düzenlemeleri öncelikle onların bilgi, beceri ve farkındalıkları ile sağlanabilir. Problem çözmeyi farklı boyutlarıyla ele alan araştırmalar incelendiğinde, öğretmenlerin problem çözmedeki bilgi, beceri ve farkındalıklarına yönelik yapılan çalışmaların yeterli olmadığı şu şekilde ifade edilmektedir:

> Son yirmibeş yılda matematik problemlerinin çözümü üzerine yapılmış araştırmaların çoğu öğrencilerin problem çözme başarısı üzerine odaklanmış ve öğretmenlerin bu süreçteki rolüne çok az önem verilmiştir. Yapılan güncel araştırmalarda, araştırmacılar öğretmenlerin sınıf ortamındaki uygulamalarının öğrencilerin öğrenme düzeylerini etkileyebileceğini ileri sürmekte ve sınıf içi problem çözme uygulamalarının incelenmesi gerektiğini düşünmektedirler (English, 2002; Smith, 2001).

Sınıf içinde problem çözme etkinliklerine yer verilmesi sürecinde oluşan iletişim ortamının, öğrencilerin probleme farklı bir açıdan bakmasını sağlayacağı ve böylece çözüme ulaşmaları için çok sayıda stratejinin ortaya çıkmasına zemin hazırlayacağı düşünülmektedir. Son yıllarda ülkemizde de problem çözme ile ilgili çalışmaların özellikle problem çözme stratejilerine yönelik yapıldığı görülmüştür ve bu çalışmalarda genellikle öğretilen stratejilerin problemleri çözerken nasıl uygulandığı incelenmiştir (Yazgan, 2007; Arslan ve Altun, 2007). Öğretmenlerin problem çözme stratejilerini sınıf ortamına taşıyabilmeleri problemleri çözerken onları kullanabilmelerine bağlıdır. Ancak English vd.'ne göre (2002) son yirmibeş yılda matematik problemlerinin çözümü üzerine yapılmış araştırmaların çoğu öğrencilerin başarısı üzerine odaklanmış ve öğretmenlerin rolüne çok az önem vermiştir ve dolayısıyla öğrencilerin önemli matematik düşüncelerini anlamasına olanak sağlayabilecek öğretmen yetiştirme ve mesleki gelişim alanlarında yürütülecek daha fazla araştırmaya ihtiyaç vardır. Bu doğrultuda öğretmenlerin ve dolayısıyla öğretmen adaylarının farklı problem çözme stratejilerini farkında olarak ya da olmayarak kullanıp kullanmadıkları araştırılmalıdır.

Problemleri sınıf içinde çözerken oluşacak iletişim ortamını anlamlı kılan en önemli bileşenlerden biri öğrencilerin ve öğretmenin düşüncelerini ifade ediş şeklidir. Kişi problem çözme sürecinde düşündüklerini ifade ederken resim, grafik, tablo, diagram, sayı, harf, sembol gibi bazı gösterim şekillerine başvurabilir. NCTM (2000) ve Sedig ve Liang'a (2006) göre matematiksel düşünmenin ve öğrenme süreçlerinin daha iyi anlaşılması ve problem çözmede kullanılması için gösterim şekillerinden yararlanılmalıdır.

Öğrencilerin problem çözme becerisi kazanmalarında öğretmenlere önemli görevler düşmektedir. Öğretmenlerin karşılaştıkları problemlerin çözüm aşamasında seçtiği çözüm yollarının, stratejilerin ve gösterim şekillerinin öğrencilerine de model olacağı düşünülmektedir. Bu görevlerin yerine getirilebilmesi için öğretmenlerin sahip olması gereken yeterlik alanları söz konusudur. Ülkemizde 2008 yılında yayınlanan 'Matematik Öğretmeni Özel Alan Yeterlilikleri'nde yeterlik alanları açık bir şekilde ortaya konmuştur (MEB, 2008). Örneğin öğretmenlerden öğrencilerin farklı problem çözme stratejileri geliştirmelerine ve kullanmalarına rehberlik etmesi beklenmektedir. Bu bağlamda öğretmenlerin ve geleceğin öğretmenleri öğretmen adaylarının problem çözmede istenen yeterlik düzeyinde olup olmadıkları araştırılmalıdır. Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmen adaylarının problem çözerken seçtikleri çözüm yollarını ve bu çözüm yollarında kullandıkları bilgi, strateji ve gösterim şekillerini ayrıntılı bir biçimde incelemektir.

Problem Cümlesi

"Matematik öğretmen adaylarının problem çözerken seçtikleri çözüm yolları ve bu çözüm yollarında kullandıkları bilgi, strateji ve gösterim şekilleri nasıldır?"

Alt Problemler

1) Matematik öğretmen adaylarının problem çözümlerinde kullandığı bilgilere dayalı olarak ortaya çıkan çözüm uzayları nasıl farklılık göstermektedir?

2) Matematik öğretmen adaylarının problemlerdeki farklı çözüm yaklaşımlarında kullandıkları bilgi türleri nasıl değişim göstermektedir?
3) Matematik öğretmen adaylarının problem çözmede kullandıkları stratejiler nasıl değişim göstermektedir?
4) Matematik öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde gösterim şekillerinden yaralanma ve gösterim şekilleri arasında dönüşüm yapma durumları nasıldır?

Sayıltılar

1) Araştırma sürecinde öğretmen adaylarından elde edilen veriler, öğretmen adaylarının gerçek durumlarını yansıtmaktadır.
2) Araştırmanın farklı evrelerinde görüşlerine başvurulan uzmanların değerlendirmeleri yeterlidir.
3) Araştırmacılar tarafından seçilen veri toplama araçları araştırma problemine yanıt aramak için yeterince uygundur.

Sınırlılıklar

Bu araştırma;

1) 2009-2010 öğretim yılındaki uygulama çalışmalarıyla,
2) Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği programında kayıtlı elli öğretmen adayı ile,
3) Matematik öğretmen adaylarına uygulanan veri toplama araçları ile sınırlıdır.

Tanımlar

Bu bölümde araştırma verilerinin ve sonuçlarının okuyucu tarafından daha iyi anlaşılmasını sağlamak için, sıklıkla kullanılan bazı önemli terimlerin tanımlarına kısaca yer verilecektir.

Problem: Posementier ve Krulik'e göre (1998) matematiksel problem, sorgulama ve karar vermeyi gerektiren bir durumdur. Lester (1983) ise problemi, bir kişi ya da bir grup insanın çözüm bulmayı istediği ya da bulmak için ihtiyaç duyduğu ve çözümü nasıl yapacağını tam olarak bilmediği ve kolayca ulaşamayacağı bir durum olarak tanımlamaktadır.

Problem Çözme: Krulik ve Rudnick'e (1989) göre problem çözme bireyin alışılmadık bir durumda duyacağı ihtiyacı karşılamak için önceden kazanılan bilgi ve beceriyi kullandığı bir süreçtir. NCTM (2000) tarafından problem çözme, çözüm yönteminin açık olmadığı bir durumla uğraşmak olarak tanımlanmaktadır.

Problem Çözme Stratejileri: Krulik ve Rudnick'e (1987) göre problem çözme stratejileri, geriye doğru çalışma, örüntü arama, problemi basitleştirme, uç noktaları düşünme, şekil çizme, olası tüm durumları düşünme, mantıksal sorgulama, sistematik liste yapma gibi problem çözme sürecinde kullanılan bazı stratejilere karşılık gelir.

Dış Gösterim Şekli: Goldin ve Kaput'a (1996) göre dış gösterim şekilleri, fiziksel olarak somutlaştırmaya ve kelimeler, grafikler, şekiller, denklemler gibi gözlemlenebilen şekillere karşılık gelmektedir. Dışsal gösterim şekilleri Goldin ve Janvier (1998) tarafından "matematiksel düşünceleri somutlaştırırken görülebilen yapılandırılmış fiziksel durumlar" olarak tanımlanmaktadır.

Çözüm Uzayı: Leikin ve Levav-Waynberg'e göre (2008) çözüm uzayı bir probleme ilişkin kişi, grup ya da uzmanlar tarafından verilen çözümlerin tamamını göstermektedir.

Kısaltmalar

$\ddot{O}A_X$: x. öğretmen adayı

Sö: Sözel gösterim şekli

Smb: Sembolik gösterim şekli

Şe: Şekilsel gösterim şekli

İkili gösterim şekli: İki gösterim şekli arasında yapılan dönüşümler

Şe, Sö: Şekilsel ve sözel gösterim şekilleri arasındaki dönüşümler

Şe, Smb: Şekilsel ve sembolik gösterim şekilleri arasındaki dönüşümler

Smb, Sö: Sembolik ve sözel gösterim şekilleri arasındaki dönüşümler

Üçlü gösterim şekli: Üç gösterim şekli arasında yapılan dönüşümler

Smb, Şe, Sö: Sembolik, şekilsel ve sözel gösterim şekilleri arasındaki dönüşümler

BÖLÜM II

İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde tez çalışmasının alt problemlerine dayalı olarak yapılan araştırmalara yer verilmektedir. İlgili yayın ve araştırmalar bölümü alt problemlere bağlı olarak "Farklı Çözüm Yolu ve Çözüm Uzayı Kavramlarının Tanıtımı", "Problemlere Farklı Çözüm Yolu Üretme İle İlgili Yapılan Araştırmalar", Problem Çözme Stratejilerine İlişkin Yapılan Araştırmalar" ve "Gösterim Şekline İlişkin Yapılan Araştırmalar" alt başlıklar altında sunulmaktadır. Her alt başlıkta önce alt problemi ortaya çıkaran ana düşüncenin literatüre dayalı olarak tanımlanması yapılmakta devamında ise ilgili yayın ve araştırmalar verilmektedir.

Farklı Çözüm Yolu ve Çözüm Uzayı Kavramlarının Tanıtımı

Kişinin matematiksel bilgilerinin birbiriyle baglantılı olarak geliştirilmesinin en iyi yollarından birinin problemlerin birden fazla yolla çözülmesi olduğu ifade edilmektedir (House&Coxford,1995; NCTM, 2000'den aktaran Levav-Waynberg ve Leikin, 2006). Problemlerin birden fazla yolla çözülmesine Silver vd. (2005) de değinmiş ve bunu aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

> Öğrencilere problemleri birden fazla yolla çözme deneyimi yaşatarak, onların ileride karşılaşacakları problemlerde kullanabilecekleri bir dizi gösterim şekli ve çözüm stratejisi sağlanmış olur. Farklı çözüm yolları ile, öğrencilerin alışık oldukları farklı bilgi yapıları ile verilen problem arasında bağlantı kurulmasına olanak sağlanır ve böylece ilişkili düşünce ağları kuvvetlenir.

Problem çözmede kullanılacak bilgiler arasında bağlantı kurmanın bir yolu da hem farklı çözümü hem de farklı matematiksel bilgilerin kullanılmasını sağlayan çoklu çözüm bağlantılı problemlerin kullanılmasıdır. "Birden fazla çözüm yoluna açık bağlantılı problem" terimi ilk defa Levav-Waynberg ve Leikin (2006) tarafından kullanılmıştır. Bu tür problemler;

a) Matematiksel bir kavramın farklı tanımları ya da gösterim şekilleri

b) Genel bir matematiksel düşüncenin özel bir durumunun araştırılması

c) Özel bir matematik konusundaki farklı matematiksel araç ve teoremler

d) Matematiğin farklı dallarında yer alan farklı matematiksel araç ve teoremler

kullanılarak farklı yollarla çözülebilirler.

Birden fazla çözüm yoluna açık bağlantılı problemlerin çözümlerini içerecek şekilde Leikin (2007) ve tarafından "çözüm uzayı" kavramı tanımlanmakta ve üç farklı çözüm uzayından bahsedilmektedir. Bu çözüm uzayları;

Uzman Çözüm Uzayı (Expert Solution Space): Uzman matematikçilerin bir problem için oluşturdukları çözümlerin tamamını kapsayan uzaylardır. Bu çözüm uzayı farklı deneyimler yoluyla oluşturulabilir ya da daha önceden bulunmamış ek çözümlerle genişletilebilir. Leikin, geleneksel ve geleneksel olmayan olmak üzere iki uzman çözüm uzayı tanımlamaktadır. Geleneksel çözüm uzayı genellikle ders kitaplarında gösterilen ve öğretmenlerin kendi öğrencilerinden bekledikleri çözümleri içermektedir. Geleneksel olmayan çözüm uzayları ise genellikle okul matematiğinde belirtilmeyen ya da program temelli yaklaşımlardan ortaya çıkan ama alışılmamış durumlara uygulanan çözümleri içeren çözüm uzaylarıdır.

Kişisel Çözüm Uzayları (Personal Solution Spaces): Söz konusu çözüm uzayları ikiye ayrılmaktadır:

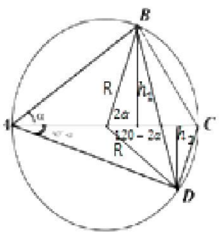
(a) Mevcut kişisel çözüm uzayları (available personal solution spaces): Kişilerin, herhangi bir yardım almaksızın ortaya koyabileceği tüm çözümleri içermektedir.
(b) Potansiyel kişisel çözüm uzayları (potential personal solution spaces): Kişilerin başkalarının yardımıyla ürettiği çözümleri içermektedir ve Vygotsky'ın yaklaşık öğrenme eşiği gelişimi içerisinde çözümler sunmaktadır.

Kolektif Çözüm Uzayları (Collective Solution Spaces): Gruptaki kişilerce üretilen tüm çözümleri içermektedir.

Levav-Waynberg ve Leikin’in (2006) araştırmalarında kullandıkları birden fazla çözüm yoluna açık bağlantılı problem ve bu problemin çözüm uzayına ilişkin bir örneği Şekil 2’de verilmektedir.

Şekil 2
Birden Fazla Çözüm Yoluna Açık Bağlantılı Problem Örneği (Levav-Waynberg&Leikin, 2006)

Şekildeki çemberin içine ABCD kirişler dörtgeni çizilmiştir. Dörtgenin $[AC]$ köşegeni çemberin çapını oluşturmaktadır. m($\hat{A}$)=60° ve m($\widehat{BAC}$)=α°'dir. α'nın hangi değerleri için ABCD dörtgeninin alanı maksimum olur?



Çözüm 1: Calculus tabanlı çözüm

$(h_1 + h_2) = R\sqrt{3}.\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{3}; (h_1 + h_2)' = 0 \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

Çözüm 2 : Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri

$\cos(60^\circ - 2\alpha) = 1$ fonksiyonun en büyük değerini verir $\alpha = 30^\circ$ dir.

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = R.(h_1 - h_2)$

Çözüm 3: Geometrik Çözüm (Çemberin Özellikleri)

BD uzunluğu α **'nın** her değeri için sabittir. BD kirişi 120° dir. Bu yüzden dörtgenin iki köşegeni sabit uzunluktadır. Böyle bir dörtgenin alanı köşegenler birbirine dik olduğu zaman maksimum değer alır. Böylece $\alpha = 30^\circ$ dir.

Çözüm 4: Simetri

$|BD|$ uzunluğu sabitir. Simetri durumunda, BD kirişi çap olan AC'ye diktir ve bu durumda dörtgenin alanı çarpımına eşittir. Simetri durumu ele alınmadığında $h_1 + h_2$ toplamı azalacak ve böylece dörtgenin alanı küçülecektir. Böylece $\alpha = 30^\circ$ dir.

Problemlere Farklı Çözüm Yolu Üretme İle İlgili Yapılan Araştırmalar

Leikin ve Levav-Waynberg (2008) yaptıkları araştırmada birden fazla çözüm yoluna açık bağlantılı problemlere ilişkin çözüm uzaylarının öğretmenlerin öğrenirken (systematic mode-through learning) ve öğretirken (craft mode-through teaching) nasıl değişim gösterdiğini incelemeyi amaçlamaktadır. Amaç doğrultusunda yapılan çalışmada, birden fazla çözüm yoluna açık bağlantılı problemler, görüşmeler ve gözlemler veri toplama araçları olarak kullanılmıştır. Araştırmacılar, öğretmenlerin bir problem için ortaya çıkan tüm çözüm yaklaşımlarını içeren “çözüm uzayı” kavramını ortaya koymuştur. Üç yıllık bir süreci kapsayan araştırmanın birinci yılında, gönüllü on iki öğretmen birden fazla çözüm yoluna açık bağlantılı problemlerin çözümüne yönelik elli altı saat süren bir mesleki gelişim kursuna katılmıştır. Bu kursun öncesinde ve sonrasında öğretmenlerle görüşmeler yapılmıştır. Araştırmanın ikinci yılında ise öğretmenlerden öğretim sürecinde birden fazla çözüm yoluna açık bağlantılı problemleri kullandıklarında çözüm uzaylarındaki gelişim belirlenmek istenmiştir. Öğretmenlerin çözüm uzayları genişledikçe derslerinde kullandıkları farklı türdeki problem ya da alıştırmaların çözümünde de bu çözüm uzaylarından faydalandıkları görülmüştür. Araştırmada ayrıca kursa katılan öğretmenlerin öğretimlerinden sonra deneyimlerini paylaşmaları için dört toplantı gerçekleştirilmiştir. Bu araştırmanın sonucunda birden fazla çözüme açık bağlantılı problemleri çözme performanslarının öğrenmeyi anlamlı düzeyde geliştirdiği ortaya çıkmıştır. Problem çözme performansının artması sadece kurs süresince ortaya konan çözümlerden değil aynı zamanda kursa katılan öğretmenlerin problem çözümlerini birbiriyle paylaşmasından kaynaklanmıştır. Öğretmenlerin öğretim yaparken öğrencilerine problemleri birden fazla yolla çözme imkanı tanımaları ortaya çıkan öğrenci çözümlerinin kendi çözüm uzaylarını da genişletmesine katkı sağlamıştır.

Leikin (2007) çalışmasında farklı araştırmaların sonuçlarından da yararlanarak problemleri birden fazla yolla çözmenin matematiksel düşünmeyi ve yaratıcılığı geliştirmede ve keşfetmede etkili bir araç olup olmadığını ele almıştır. Çalışmada verilen bir matematik problemine çözüm üretmede simetri ve süreklilik kavramların önemi ortaya konmuş ve bu kavramlar ileri matematiksel düşünce bağlamında matematiğin doğasının bir parçası olan önemli düşünceler olarak sunulmuştur. Çalışmada zihnin doğası gereği yaptığı bir diğer davranışın; problemleri, farklı gösterim şekillerini, tanım ve teoremlerin farklı özelliklerini, matematik dışı alanlardan olan kavramları ve matematiksel araçları kullanmayı içeren farklı yollarla çözme olduğu belirtilmiştir. Araştırmanın sonucunda problemleri farklı yollarla çözmenin ileri düzey matematiksel düşünme için etkili bir araç olduğu savunulmuştur.

Levav-Waynberg ve Leikin (2009) araştırmalarını geometri problemlerini birden fazla yolla çözme performansının değerlendirilmesi için bir araç tanımlamak amacıyla gerçekleştirmişlerdir. Bu araç, geometri alan bilgisinin ve yaratıcılığın problem çözümüne yansımasını var olduğu şekli ile değerlendirmek için tasarlanmıştır. Yapılan çalışmanın verileri veri toplama süreci devam eden problemleri birden fazla yolla çözmenin etkililiğini araştırmayı hedefleyen daha geniş ölçekli bir çalışmanın bir bölümünden alınmıştır. Çalışmada onuncu sınıf öğrencilerinin matematik bilgilerini ve yaratıcıklarını incelemek için çözüm uzayları bir araç olarak kullanılmıştır. Bireysel çözüm uzayları ile kolektif ve uzman çözüm uzaylarının karşılaştırılması ile öğrencilerin matematik bilgileri ve yaratıcılıkları değerlendirilmiştir. Birden fazla çözüm yoluna açık bağlantılı problemlerin var olan matematiksel düşünceleri birbirine bağlamayı ve problemi çözmek için yardımcı olabilecek kavram ve yöntemleri ilişkilendirmeyi gerektirdiği ifade edilmiştir. Elli iki onuncu sınıf öğrenciye geometri derslerinin başında, ortasında ve sonunda olmak üzere altmışar dakikalık herbiri iki problem içeren üç test uygulanmıştır. Bu çalışmadaki bulgular ise sadece üç öğrencinin problem çözme performansları üzerine odaklanılarak verilmiştir. Öğrencilerden problemlere olabildiğince çok sayıda çözüm üretmeleri istenmiştir. Verilerin analizi öğrencilerin problemlere ürettikleri çözüm uzayları üzerinden yapılmıştır. Bu çözüm uzayları; doğru olmasına göre, bağlantılılık, akıcılık, esneklik ve orijinalliği içeren yaratıcılığın bileşenlerine göre analiz edilmiştir. Bir kişinin çözüm uzayında yer alan tüm uygun çözümler o kişinin akıcılığını gösterirken, esneklik kişinin çözüm uzayındaki kabul edilen çözümler arasındaki farklar aracılığıyla ölçülmüştür.

GroBe ve Alexandar (2006) tarafından yüz yetmiş öğretmen adayı ile gerçekleştirilen çalışmada çözümü verilen örnekler (Worked-out example) aracılığıyla birden fazla çözüm yolu sunmanın etkililiği araştırılmıştır. Amaç doğrultusunda öğretmen adaylarına iki uygulama yapılmıştır. Birinci uygulamada kombinasyon problemleri için sadece bir yol sunmaya karşı farklı çözüm yolları sunmanın ne ölçüde öğrenme ürünlerini arttıracağı test edilmiştir. İkinci uygulamada ise birden fazla çözüm yolunun öğrenilmesi esnasındaki öğrenme sürecinin detaylı bir şekilde analizi yapılmıştır. Farklı çözüm yollarıyla farklı gösterim şekillerinin etkilerini ayırt edebilmek için olasılık konusunun bir alt öğrenme alanı seçilmiştir. Sonuçta problemleri birden fazla yolla çözmenin öğrenmeyi teşvik ettiği bulunmuştur. Problem çözümlerindeki gösterim şekilleri çeşitliliği etkisinin incelendiği ikinci uygulama sonucunda çoklu çözümlerin öğrenme üzerine etkisi olmadığı bulunmuştur.

Miltner (2007) farklı yollarla çözülen problemler aracılığıyla matematik öğretmen adaylarının matematiksel bilgi ve matematik öğretimi bilgisini incelemek amacıyla gerçekleştirdiği doktora çalışmasında yirmi öğretmen adayıyla nitel bir araştırma gerçekleştirmiştir. Katılımcılara olası öğrenci çözümlerinin yer aldığı beş farklı problem senaryosu sunulmuş ve onların bu senaryolarda yer alan çözümlere ilişkin görüşleri alınarak matematik bilgileri, öğrencilere ilişkin bilgileri ve öğretim bilgileri hakkında incelemeler yapılmıştır. Her senaryoda bazen doğru bazen öğrencilerin aklını karıştıran yanlış çözüm yaklaşımlarına yer verilmiştir. Veriler, yarı yapılandırılmış görüşme, yazılı dokümanlar ve video kayıtlarından oluşturulmuştur. Veriler analiz edilirken, öğretmen adaylarının kendi sınıflarında bu tür senaryolarla nasıl başa çıkacaklarına dair verdikleri yanıtlara odaklanılmıştır. Özel olarak cevaplar öğretmen adaylarının matematik alan bilgileri, öğrenci düşüncelerine dair bilgileri ve öğretim bilgileri karşılaştırılarak analiz edilmiştir. Bulgular, öğretmen adaylarının genel olarak farklı çözüm yolları ile çözüme dikkat ettiklerini ancak bazı öğretmen adaylarının öğretim senaryolarında oluşturulan farklı çözüm yaklaşımları arasındaki farkı vurgulamadıklarını göstermiştir. Bu çalışmada söz konusu senaryoların, öğrencilerin yanıldığı noktaları tanımlamak ve gerçek ya da gerçek dışı çözüm yaklaşımları arasındaki farkı anlamaya yardımcı bir öğretim aracı olarak öğretmen adayları tarafından kullanılmasının uygun olacağı ifade edilmiştir.

Jiang ve Mcclintock'un (2000) yaptıkları çalışmada, öğrencilerin problem çözme süreçlerini ele almakta ve çoklu çözüm yolu sunmada teknolojinin sağladığı avantajları nasıl kullandıklarını incelemektedir. Grafiksel yaklaşım, cebirsel yaklaşım ve analitik yaklaşım baz alınarak öğrencilerin problem çözme yaklaşımları değerlendirilmiş ve bu yaklaşımların matematik problemlerinin çözümünde birlikte kullanılmasının sistematik araştırmalar için önemli olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Problem Çözme Stratejilerinin Tanıtımı

Matematikteki problem çözme stratejileri (heuristikler) Polya ile başlamıştır (Schoenfeld, 1992). Heuristikler, nihai ya da kesin olmayan, geçici ve mantıklı olan, ele alınan problemin çözümünü bulmayı amaçlayan mantık yürütme biçimi olarak tanımlanmaktadır (Polya, 1945). Polya "How to Solve It" kitabında analoji, genelleme, özelleştirme, ayrıştırma ve yeniden birleştirme gibi heuristik stratejilere değinmiştir (Polya, 1945). Heuristikler yunancada keşfetmek anlamına gelen "heuriskein" kelimesinden ortaya çıkmıştır. Heuristiklerin amacı keşfetme ve yaratmanın yöntemlerini ve kurallarını incelemektir (Tubb, 1974). Heuristiklerin daha ayrıntılı bir tanımı Goldin (2010) tarafından yapılmış ve şu şekilde ifade edilmiştir:

> Matematiksel problemleri çözerken planlama, gözlem ve yönetimsel kontrolü etkili bir sistem içinde yapmak kolay bir şekilde öğretilemez. Bu durum öğrenende yoğun problem çözme deneyimleri yoluyla önemli bir zaman süresince gelişmektedir. Bu gelişen sistemi incelemede yararlı bir öğe heuristik süreci olarak kabul edilmektedir. Heuristik süreçleri, "deneme-yanılma", "diyagram çizme", "daha basit bir problemi düşünme" gibi basit isimler verilen karmaşık, kısmen tanımlanmış sorgulama yollarına karşılık gelmektedir (Goldin, 2010).

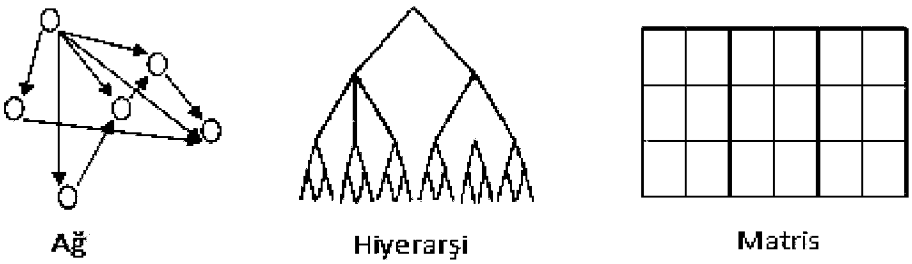
Goldin (2010)'da ifade edilen heuristik süreçlerin farklı araştırmacılar tarafından problem çözme stratejileri olarak kullanıldığı görülmektedir. Örneğin Krulik ve Rudnick (1989) problem çözme stratejisi adlandırmasından yararlanmakta ve farklı kişilerin problemlere farklı yollarla yaklaşabileceğini aynı zamanda bir çözümü ortaya çıkarmada farklı stratejilerin birlikte kullanılabileceğini ifade etmektedir. Problemlere üretilen çözümler içinde bazen bir strateji çözümü ortaya çıkarmada yeterli olurken bazen seçilen strateji beraberinde bir diğer stratejinin birlikte kullanımını gerekli kılabilir. Ek olarak bazen özel bir strateji seçimi çözümü daha da kolaylaştrıabilir. Nitekim Krulik ve Rudnick (1989) hiç bir stratejinin bir diğerinden daha üstün olmadığını ancak bazı stratejilerin diğerlerinden daha kısa ve orjinal çözümler sunabildiğini ortaya atmaktadır.

Fan ve Zhu (2007) çalışmalarında Çin'deki matematik dersine ait standartlarda yer alan on yedi stratejiyi ele almakta ve bu stratejiler;

- Canlandırmak (Act it out),
- Bakış açısını değiştirmek (Change your Point Of View),
- Diyagram çizme (Draw a diagram),
- Tahmin ve kontrol (Guess and check),
- Mantıksal sorgulama (Logical reasoning),
- Örüntü arama (Look for a pattern),
- Sistematik liste yapmak (Make a systematic list),
- Tablo yapma (Make a table),
- Varsayımda bulunmak (Make suppositions),
- Problemi yeniden ifade etmek (Restate the problem),
- Problemi basitleştirmek (Simplify the problem),
- Problemin bir kısmını çözmek (Solve part of the problem),
- Benzer bir problemi düşünmek (Think of a related problem),
- Model oluşturmak (Use a model),
- Denklem yazmak (Use an equation),
- İlk ve son kavramları kullanma (Use before–after concept) ve
- Sondan başlamak (Work backwards) olarak adlandırılmaktadır.

Novick ve Hurley (2006) iyi tanımlanmış üç diyagram türünü ilk kez ortaya koymuş ve bunları ağ, hiyerarşi ve matris diyagramı olarak sınıflandırmıştır (akt. Pantziara, Gagatsis & Elia, 2009). Söz konusu diyagramlardan ağ diyagramı (Network Diagram), sunulan öğeler arasında kurulan ilişkiyi aralarındaki bağlantıları da göstererek; hiyerarşi diyagramı (hierarchy diagram), öğeler arasındaki ilişkileri hiyerarşik bir şekilde ve matris diyagramı ise (matrix diagram) farklı iki kümenin elemanları arasında görülen ilişki hakkındaki bilgileri örneklemektedir.

Şekil 3
Diyagram Türleri (Novick &Hurley, 2006)



Bu stratejilere ek olarak literatürde problem çözme stratejilerinden formül kullanma, sistematik liste yapma stratejisi ile eşdeğer görülen olası tüm durumları göz önüne alma, eleme stratejisi, akış şeması yapma (Arslan, 2002; Altun, 2002'den aktaran Şahin, 2007), uç durumları düşünme, geleneksel metod, bilgiyi kullanma (Emre, 2008) vb. stratejilerinde yer aldığı görülmektedir.

Problem Çözme Stratejilerine İlişkin Yapılan Araştırmalar

Fan ve Zhu (2007), Çin, Singapur ve Amerika'dan seçilmiş ortaöğretim okul matematik kitaplarının problem çözme yaklaşımını nasıl ele aldıklarını incelemiştir. Bu incelemlerde analiz, genel stratejiler ve özel stratejiler (canlandırma, örüntü arama, geriye doğru çalışma gibi 17 problem çözme stratejilerinden oluşan) baz alınarak yapılmıştır. Ülkelerin matematik kitaplarındaki problem çözme yaklaşımlarındaki farklılıklar ve benzerlikler ortaya konarak karşılaştırılmış ve bunların olası sebepleri araştırılmıştır. Çalışmada sadece okul kitaplarındaki farklı tip problemleri gösterme şekilleri/yolları değil aynı zamanda problem çözme yaklaşımlarının ortaya konma şekillerinin de öğretme, öğrenme ve öğrencilerin problem çözme yetenekleri üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğu belirtilmiştir. Sonuç olarak Çindeki okul matematik kitaplarının problem çözme sürecine daha çok yer verdiği, Singapur ve Amerika okul kitaplarında ise problemlerin cevaplarına odaklanıldığı belirtilmiştir. Çin ve Amerika kitaplarında problem çözme basamakları tanıtılarak daha açık bir şekilde yer alırken, Singapur kitaplarında "kontrol" başlığı altında tek bir basamak verilmiştir. Bunun yanısıra üç ülkenin tüm kitaplarında yer alan problem çözümlerinde problem çözme stratejilerine yer verilmiş ve uygulamaları gösterilmiştir. Singapur okul kitaplarında diğer konulardan bağımsız olarak problem çözme stratejilerine yer verilmiştir. Bu çalışmanın yazarlarına göre ise problem çözme, ayrı bir başlık olarak öğretilmek yerine matematik öğretimi ve öğrenimi içerisine düzenli bir şekilde bütünleştirilerek verilmelidir.

Goldin (2000) kişinin problem çözerken içinde bulunduğu duygu durumlarının bu sürece etkisini araştırmıştır. Söz konusu çalışmada klinik incelemler yerine informal ders gözlemleri ve öğrencilerin problem çözerken gerçekleştirdikleri eylemler üzerine aldığı hatırlatma yazılarının sentezi gerçekleştirilmiştir. Bu sentezleme sonucunda söz konusu duygu durumlarının problem çözme sürecinde ortaya çıkarabileceği olası stratejileri anlatan bir model oluşturulmuştur. Örneğin, bu modele göre merak duygusu; problemde neler olduğunu araştırmaya ve problemin çözümü için gerekli heuristikleri kullanma ihtiyacını hissettirmeye ya da bir problemle karşılaşıldığında duyulan şaşkınlık duygusunun problemi anlamak için özel durumları düşünmeye, problemi basitleştirmeye ya da şekil çizmeye sebep olmaktadır.

Yazgan (2007) onsekiz ders saati süren deneysel araştırmasında, öğrencilere rutin olmayan problem çözme stratejilerinden tahmin ve kontrol, şekil çizme, bağıntı bulma, problemi basitleştirme, sistematik liste yapma ve geriye doğru çalışma stratejileri ile çözülebilen kırkbir soru sorarak öğrencilerden topladığı yazılı çalışmaları ve sözlü açıklamaları analiz etmiştir. Öğrencilerin rutin olmayan problemler için geliştirdikleri bazı stratejilerin problemler için özgün olduğu görülmüştür. Araştırmanın souçlarında öğrencilerin bir problemi çözmek için farklı stratejilerin kullanılabileceğini farklı çözümlerin tartışılması sırasında keşfettikleri belirtilmiştir. Ayrıca araştırmacı tarafından farklı strateji kullanan öğrencilerden yaptıklarını sınıfa aktarmaları istenerek tartışma ortamının zenginleştirlmesi sağlanmıştır. Bulgular, öğrencilerin problem çözmeye karşı olumlu tutum geliştirebildiklerini göstermiştir. Çalışmada tahmin ve konrol ile geriye doğru çalışma stratejisinin, rutin olan problemlerle uğraşma sırasında basit düzeyde kullanılmış olmasına rağmen, öğrenciler tarafından yeterli ölçüde benimsenmediği belirtilmiştir. Buna karşılık, şekil çizme ve sistematik liste yapma stratejilerinin öğrenciler tarafından rahatlıkla kullanılabildiği vurgulanmıştır.

Arslan ve Altun (2007) yaptıkları çalışmalarında öğrencilerin rutin olmayan matematik problemlerini çözmek için hangi stratejileri öğrenebildikleri ve bunları problem çözerken hangi ölçüde kullanabildiklerini ortaya koymaya çalışmışlardır. Yedinci ve sekizinci sınıf öğrencileriyle gerçekleştirilen çalışmada sınıf düzeyine göre altı problem çözme stratejisi üzerinde çalışılmıştır. Çalışmanın başında öğrencilerin problem çözerken kullandıkları stratejileri belirlemek amacıyla on soruluk problem çözme testi kullanılmıştır. Ardından araştırmanın ilk yazarı tarafından öğrencilere stratejilere yönelik bir eğitim verilmiş ve bu eğitimde öğrenciler iki veya üçer kişilik gruplar halinde çalıştırılmışlardır. Çalışmanın verileri uygulanan testlerden ve araştırmacının çalışma sırasında tuttuğu gözlem notlarından oluşturulmuştur. Çalışma sonunda ise öğrencilerden ilk teste benzerlik gösteren bir problem çözme başarı testini yanıtlamaları istenmiştir. Test sonuçlarına göre öğrenme ortamının problem çözme stratejilerinin öğrenilmesi üzerine olumlu bir etkiye sahip olduğu sonucu çıkmıştır. Yapılan analiz sonucu problemi basitleştirme, şekil çizme ve sistematik liste yapma stratejilerinin öğrenilme düzeyleri yüksekken geriye doğru çalışma, tahmin ve kontrol ve örüntü arama stratejilerinin daha düşük olduğu ortaya çıkmıştır.

Altun ve Sezgin-Memnun (2008) çalışmalarında matematik öğretmen adaylarının rutin olmayan matematik problemlerini çözme becerileri ve bu tür problemler ile bunları çözmede kullanılan stratejilere ilişkin düşüncelerini incelemeyi amaçlamıştır. Çalışma altmışbir matematik öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarına yedi hafta süren problem çözme öğretimi dersleri verilmiştir. Öğretmen adaylarına öntest, son test ve kalıcılık testi yapılmıştır. Öğretmen adaylarının problem çözme konusundaki düşüncelerinin tespiti için ise likert tipinde bir ölçek uygulanmıştır. Yapılan analizler sonucunda öğretmen adayları tarafından kullanımı en çok değişen stratejiler sırasıyla; problemi basitleştirme, örüntü arama, muhakeme etme, diyagram çizme, sistematik liste yapma, tahmin ve kontrol ve geriye doğru çalışma stratejileri olarak belirlenmiştir. Araştırmanın bir sonucu olarak öğretmen adayları rutin olmayan problem çözme stratejilerine yönelik aldıkları eğitimin yeni bakış açısı kazanma, özel bir çözüme odaklanmak yerine problemlerin birden fazla yolla çözülebileceğini düşünme, problem çözme stratejilerini kullanıp problemleri nasıl çözebileceklerini öğrenme ve çözümleri daha detaylı bir şekilde analiz etmeyi sağlama gibi olumlu katkıları olduğunu belirtmişlerdir.

Şahin (2007) çalışmasında, farklı öğretim yöntemlerinin ilköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin problem çözme stratejilerini belirlemede ne gibi bir etki yaptığını belirlemeye çalışmıştır. Ön-test, son-test deneysel desenden yararlanılan araştırmada; olasılık konusu ve problem çözme stratejileri, kontrol grubunda geleneksel öğretim yöntemiyle işlenirken, deney grubunda ise işbirlikli öğrenme yöntemi kullanılarak işlenmiştir. Konu bitiminde iki gruba da, onbeş ayrı problem çözme stratejisini içeren, klasik ve günlük hayat problemlerinden oluşan otuz soruluk test uygulanmıştır. Elde edilen bulgulara göre problem çözme stratejilerinin öğretiminde işbirlikli öğrenme yönteminin, geleneksel öğretim yöntemine göre daha etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

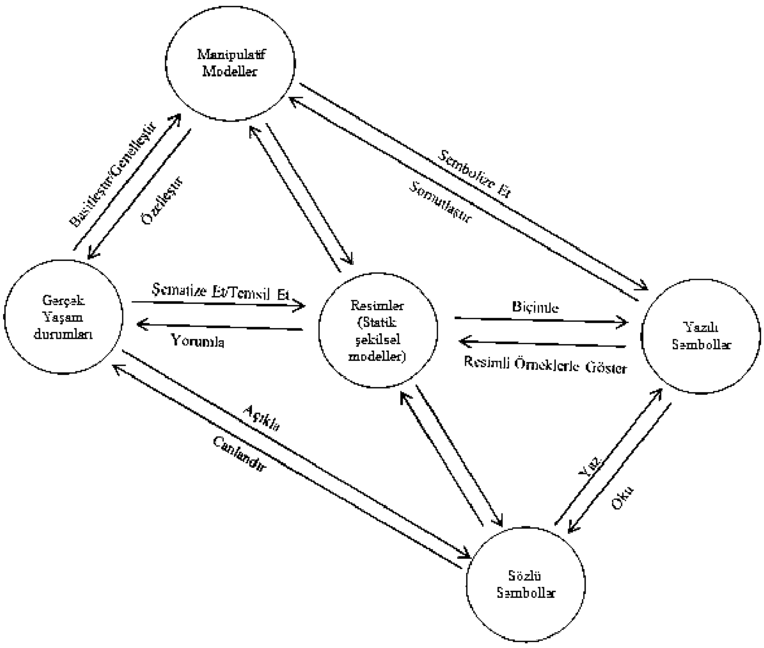
Star ve Rittle-Johnson (2008) yaptıkları araştırmada, problem çözerken birden fazla stratejinin kullanımını keşfetmeye yardımcı olmanın ve çoklu stratejiler üzerine verilen eğitimin kişinin bilgisini esnek bir şekilde kullanabilmesini nasıl etkilediğini incelemişlerdir. Araştırmada problemleri çözmek için birden fazla yaklaşım ortaya koyabilen kişiler esnek problem çözen kişiler (flexible problem solvers) olarak adlandırılmış ve aynı zamanda söz konusu kişilerin problem çözerken hangi stratejilerin diğerlerinden daha etkili olduğunu bildikleri ifade edilmiştir. Araştırmanın katılımcıları olan altıncı sınıfı henüz bitirmiş yüz otuz iki öğrenci, ilk yazar tarafından stratejiler konusunda kısaca bilgilendirilmiştir. Ancak bilgilendirme esnasında araştırmacı çözdüğü eşitliklerde hangi stratejiyi neden kullandığına dair bir bilgi vermemiştir. Uygulama, beş gün boyunca günde birer saatlik oturumlar şeklinde planlanmıştır. İlk oturumda öğrencilere ön test uygulanmış ve lineer denklemleri çözmek için kullanılan dört temel dönüşüm tanıtılmıştır. Sonraki üç bölümde öğrenciler bağımsız olarak kendilerine verilen kitapçıktaki otuz bir lineer denklemi içeren problemleri çözmüştür. Bu araştırmada problem çözme esnekliği, denklem çözerken kullanılan çoklu stratejiler ve uygun stratejileri kullanma durumları baz alınarak değerlendirilmiştir. Bulgular, tüm öğrencilerin üç saat süren problem çözme deneyimlerinden sonra denklem çözme konusunda yeteneklerini geliştirdiklerini ve çoklu strateji kullanımının keşfedilmesine yönelik yapılan teşviklerin ve bunun üzerine verilen eğitimin farklı yollar bulmadaki esnekliği arttırdığını ortaya koymuştur.

Koedinger ve Tabachneck (1994) tarafından yapılan çalışmada problem çözmede formal (okul matematiğinde öğrenilen) ve informal (gerçek yaşamdaki matematiğin kullanımını gerektiren problemler, sezgisel olarak ortaya çıkan) stratejilerin birlikte kullanılmasının tek bir strateji kullanımına göre etkisi araştırılmaya çalışılmıştır. Çalışmaya katılan oniki üniversite öğrencisinden verilen problemleri çözmeleri istenmiştir. Bu çözümlerde sesli düşünme protokolu (think-aloud protocol) uygulanmış olup yapılan görüşmelerin video kaydı alınmıştır. Katılımcılara sunulan problemler iki bölümden oluşmakta ve dört işlem gerektiren cebir problemlerini içermektedir. Araştırmacılar, katılımcıların problem çözerken kullandıkları stratejilerin dört farklı tipte olduğunu berlitmişlerdir. Yanıtlar “cebir, model-heuristik, sözel-matematik ve diyagram olmak üzere dört başlık altında kodlanmıştır. Örneğin diyagram başlığı altında kodlanan strateji, verilen sözel bir problemin şemaya dönüştürülmesini içermektedir. Araştırmanın bulguları sonucunda problem çözmede birden fazla stratejinin kullanıldığı durumların tek bir stratejiye bağlı kalınanlara göre daha etkili olduğunu görülmüştür.

Gösterim Şekli (Temsil Biçimi) Kavramının Tanıtımı

Bir düşünceyi anlamlı kılmak için çeşitli yollar bulunmaktadır. Shield ve Galbraith (1998) öğrencilerin matematiksel bir stratejiyi ya da çözümü açıklarken sembol, sözlü ifade, diyagram, grafik ya da veri tablosu gibi çeşitli yolları kullandıklarını ifade ederken Lesh, Landau, ve Hamilton (1983) bir düşünceyi anlamlı kılan bir diğer yolun matematiksel düşüncelerin içine gömüldüğü farklı alanlar arasında geçiş yapmak olduğunu ifade etmektedirler. Örneğin Lesh, Landau, ve Hamilton’a (1983) göre bir öğrencinin matematiksel bir kavramı anladığının göstergesi Şekil 4’te tanımlanan süreçleri kullanabildiğidir. Şekil 4’teki geçiş süreci öğrencilerin gerçek hayat problemlerini çözmek için basit geometri, cebir ve sayı ile ilgili kavramları kullanırken ihtiyaç duyacağı en önemli süreçleri göstermektedir. Bu süreçler uygun notasyonları tanıtmayı, benzer bir problem düşünmeyi ya da problemi yeniden ifade etmeyi içermektedir.

Şekil 4
Gösterim Şekilleri Arasındaki Geçiş Süreci



Şekil 4, farklı gösterim şekillerinin birbirine dönüşüm sürecini ve bu süreçte kullanılan yazılı semboller, şekiller ve konuşma sembolleri gibi gösterim şekilleri arasındaki dönüşümün hangi eylemi gerektirdiğini açıklamaktadır. Burada ifade edilen gösterim şekilleri farklı araştırmacılar tarafından ele alınmış ve tanımlanmaya çalışılmıştır. Bir kısım araştırmacıya göre gösterim şekli, bir özelliği, görüntüyü, somut nesneleri belirten, sembolize edebilen ya da diğer taraftan başka bir şeyi gösterebilen herhangi bir yapıdır (Palmer, 1978; Kaput, 1985; Goldin, 1987, 1998’den aktaran DeWindt-King ve Goldin, 2003). Gösterim şekilleri farklı amaçlarla kullanılabilirken Tversky (2001) diyagramların ve görsel araçların; dikkat çekmek, bilgileri kaydetmek ve hafızayı desteklemek, iletişim kurmak, model oluşturmak ve çıkarımda bulunmaya ve keşfetmeye yardımcı olmak için kullanılabileceğini belirtmektedir.

Literatüre bakıldığında gösterim şekillerinin dış ve iç olmak üzere iki kategoriye ayrıldığı görülmektedir. Goldin'e (1998) göre dış gösterim şekilleri, matematiksel düşüncelerin betimlenmesi olarak görülen yapılandırılmış fiziksel durumlar olarak tanımlanmakta iken iç gösterim şekilleri, kişinin zihninde canlandırdıklarına karşılık gelmektedir. Dış gösterim şekillerinin problem çözmede kullanılması, problemi çözenin problemde tanımlanan durumun zihinsel bir modelini kurmasına yardımcı olmaktadır (Schwartz&Black, 1996'dan aktaran Corter ve Zahrer, 2007). Lesh (1981) ve Lesh, Landau ve Hamilton (1983) da problem çözme sürecinde gösterim şekillerinin kullanımına değinmiştir. Araştırmada uygulanan matematik problemlerinin çözümlerinin analizinde ele alınan gösterim şekilleri sistemi (representational systems- representational modes) konuşma sembollerini, yazılı sembolleri, biçimsel modelleri ya da resimleri, elle hareket ettirmeye özgü modelleri ve gerçek yaşam durumlarını içermektedir. Lesh (1981) ve Lesh, Landau ve Hamilton (1983) tarafından kullanılan bu gösterim şekilleri sistemini Goldin (1998) çalışmasında "dış gösterim şekilleri" olarak ele almıştır.

Dufoour-Janvier vd.'ne (1987) göre matematikte probleme bağlı olarak uygun gösterim şekillerinin seçilmesi beklenmekte, örneğin bir cebir probleminin çözümünde, denklem kullanımıyla elde edilen bilgi ile grafik kullanılarak elde edilen bilginin farklı olabileceği ve bu nedenle uygun gösterim şekillerinin seçiminin önemi vurgulanmaktadır (akt. Akkuş-Çıkla, 2004). Aynı zamanda kullanılan gösterim şekli ile çözüm süreci de değişim gösterebilir. Problem çözme sürecinde farklı gösterim şekillerinin kullanılabilmesine yönelik beklentileri karşılamak için, çeşitli gösterim şekillerini içerecek ve bu gösterimler arasında dönüşüm yapma esnekliğini sağlayacak öğretim stratejilerinin geliştirilmesi önerilmektedir (Dufoour-Janvier ve ark.'dan aktaran Akkuş-Çıkla, 2004). Gösterim şekillerinin ve aralarındaki dönüşümlerin problem çözme sürecine katkı sağlayacağı ifade edilmektedir (Gagatsis ve Shiakalli, 2004; Brenner vd. (1997) 'den aktaran Neria ve Amit, 2004). Dönüştürmenin, kaynak (başlangıç gösterimi) ve hedef (son gösterim) olarak iki gösterim şeklini içerdiği ve bu dönüşümün grafikten denkleme ve denklemden grafiğe şeklinde bir dönüşüm olarak örneklenebileceği ifade edilmektedir (Janvier, 1987'den aktaran Gagatsis ve Shiakalli, 2010). Gagatsis ve Shiakalli (2004) bir gösterim şeklini diğerine dönüştürme yeteneğinin problem çözme başarısı ile bağlantılı olduğunu belirtmiş ve üniversite öğrencilerinin fonksiyon kavramına ait sözel, grafiksel ve cebirsel gösterim şekilleri arasında dönüşüm yapmasını incelediği araştırmasında, dönüştürme yeteneğinin problem çözmede önemli bir etmen olarak düşünülmesi gerektiğini ifade etmiştir. Brenner vd. (1997), başarılı problem çözme sürecinin; kelimeler, grafikler, tablo ve denklemler gibi gösterim şekilleri oluşturmayı ve oluşturulan şekilleri kullanmayı, çözüm yapmayı ve sembolleri kullanmayı içeren problemi temsil etme becerilerine bağlı olduğunu ifade etmektedirler.

Gösterim Şekillerine İlişkin Yapılan Araştırmalar

Lesh, Landau ve Hamilton (1983) dördüncü ve sekizinci sınıf arasında değişen sınıf düzeyindeki öğrencilere uyguladıkları matematik problemleri aracılığıyla kuramsal bir çerçeve ve kavramsal bir model tanımlamaya çalışmışlardır. Öğrencilerle yapılan görüşmelerde on bir problem kullanılmış ve bu problemlerden bazıları öğrencilere sözel olarak sunulurken bazılarının sunumunda çeşitli materyaller kullanılmıştır. Bu problemlerin çözüm sürecinde öğrencilerin çeşitli gösterim şekilleri arasında dönüşüm yaptıkları görülmüştür. Yapılan görüşmelerin haricinde öğrencilere yazılı olmak üzere üç farklı test uygulanmış ve testlerden birinde (CA Instrument) yer alan problemlere verilen cevaplar kullanılan gösterim şekilleri açısından incelenmiştir. Çalışmada gösterim şekilleri arasındaki dönüşümler bir tablo aracılığıyla açıklanmış ve sembolikten sözele (Symbol to Written), şekilden şekile (Picture to Picture), yazılı ifadeden semboliğe (Written to Symbol), yazılı ifadeden şekile (Written to Picture), şekilden yazılı ifadeye (Picture to Written) ve şekilden semboliğe (Picture to Symbol) olmak üzere yedi farklı gösterim şekli dönüşümünü kodlamıştır.

Çıkla-Akkuş (2004) çalışmasında, çoklu temsil temelli öğretimin, geleneksel öğretim yöntemiyle karşılaştırıldığında yedinci sınıf öğrencilerin cebir performanslarına, matematiğe karşı tutumlarına ve temsil tercihlerine olan etkisini araştırmayı amaçlamıştır. Veri toplama aracı olarak cebir başarı testi, temsil biçimleri arasında dönüştürme beceri testi ve Chelsea cebir tanı testi kullanılmıştır. Ayrıca deney ve kontrol grubundaki öğrencilerle görüşmeler yapılmıştır. Sonuçta yapılan testlerden alınan puanlara göre deney grubu lehine istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunmuş ancak matematiğe karşı tutuma göre deney grubu ile kontrol grubu arasında anlamlı bir fark bulunmamıştır. Yapılan deneysel çalışma, öğrencilerin temsil tercihlerini anlamlı olarak değiştirmiştir. Görüşmelerin sonucunda deney grubu öğrencilerinin verilen cebir problemleri için farklı temsil biçimlerini kullanabildikleri ve bunlardan duruma en uygun olanını seçebildikleri ortaya çıkmıştır.

Cai (1995) yaptığı araştırmada özel okulda ve devlet okullarında okuyan iki yüz elli Amerikalı ve dörtyüz yirmibeş Çinli altıncı sınıf öğrencinlerinin, hesaplama ve basit problemleri çözme becerisini ölçen çoktan seçmeli problemler ve kompleks problem çözme becerisini değerlendiren açık uçlu problemlerle matematik performanslarını incelemiştir. Öğrencilere yöneltilen açık uçlu problemlerde öğrencilerden sadece doğru cevabı ya da cevapları işaretlemeleri değil aynı zamanda düşünme süreçlerini yazarak açıklamaları istenmiştir. Bu sayede yapılan çözümlerde kullanılan gösterim şekilleri ve stratejiler incelenmiştir. Çoktan seçmeli olan ilk iki test "doğru" "yanlış" olarak kodlanırken açık uçlu soruları içeren ölçme aracına ait yanıtlar iki farklı analiz şemasına göre analiz edilmiştir. Öğrenci cevaplarının nitel analizi, problem çözme starejileri, matematiksel hata türleri, matematiksel doğrulamalar ve gösterim şekilleri açısından yapılmıştır. Temel işlem becerisi gerektiren test sonuçları açısından Amerikalı ve Çinli öğrencilerin performansları arasında önemli farklılıkların olduğu görülmüştür. Çinli öğrenciler, temel işlem becerisi gerektiren testte Amerikalı öğrencilere göre daha başarılı olmuşlardır. Açık uçlu problemleri içeren test puanları, Amerikalı ve Çinli öğrenciler için hemen hemen aynı düzeyde çıkmıştır. Yapılan çalışmada gösterim şekilleri; sadece sözel, sözel ve sembolik, sözel ve görsel olmak üzere üç kategori altında kodlanmıştır. Sonuç olarak problem çözme sürecinde açıklama yapan her öğrenci sözel gösterim şekli kullanmıştır. Amerikalı öğrencilerin Çinli öğrencilere oranla daha büyük yüzdeyle açıklamalarında görsel bir gösterim şeklini kullandığı ortaya çıkmıştır.

"Sayı Teorisi" probleminde görsel gösterim şekli kullanan Amerikalı öğrencilerin sembolik gösterim şekli kullananlara göre temel işlem becerisi gerektiren, konular arası bağlantı kuran ve açık uçlu problemlerde daha yüksek ortalamaya sahip olduğu ancak bunun istatistiksel olarak anlamlı bir fark yaratmadığı belirtilmiştir. "Ortalama Problemi" için görsel gösterim şekli kullanan öğrencilerin cebirsel, sembolik ve cebirsel-sembolik gösterim şeklini kullananlara oranla tüm problemlerde daha düşük ortalamaya sahip olduğu ve farkların çoğunun istatistiksel olarak anlamlı olduğunu ortaya koymuştur. Araştırmanın sonucunda, görsel gösterim şekli kullanan öğrencilerle diğer gösterim şeklini kullanan öğrencilerin problem çözmedeki sonuçlarının nasıl değişim gösterdiğini incelemek için ilerleyen araştırmaların yapılması önerilmiştir.

Ryken (2009) yaptığı çalışmada, öğretmen adaylarınca verilen bir hikaye için oluşturulan matematiksel gösterim şekillerini incelemiş ve öğretmen adaylarının öğrencilerin problemlere verdikleri yanıtları nasıl değerlendirdiklerini ele almıştır. Araştırma verileri öğretmen adaylarının verilen bir hikayeyi matematiksel olarak görselleştirmelerine ilişkin yanıtlar ve ilköğretim öğrencilerinin sorulara verdiği yanıtların ve kullandıkları gösterim şekillerinin iki öğretmen adayı tarafından değerlendirilmesi sonucu ortaya çıkan yazılı dokümanlar aracılığıyla toplanmıştır. Yapılan analiz, öğretmen adaylarının öncelikli eğilimlerinin resimle anlatım olduğunu ortaya çıkarmıştır. Öğrenci çalışmalarını değerlendirirken öğretmen adaylarının kurallara dayalı ve doğru-yanlış çerçevesinin ötesine geçmeyen değerlendirmeler yaptıkları görülmüştür. Araştırmanın bulgularına dayanarak gösterim şekillerini analiz etmenin, öğretmen adaylarına ve eğitimcilere, birden fazla anlamı yorumlamaya ve öğrencilerin ne düşündüklerine yönelik sorular sormaya odaklı bir öğretim gerçekleştirmelerinde yardımcı olacağını ileri sürmektedir.

Corter ve Zahrer (2007) yaptıkları araştırmada, olasılık problemlerini çözerken görsel gösterim şekillerinin kullanımını araştırmayı amaçlamıştır. Katılımcılara tanıtım amacıyla olasılık ve istatistik kursu verilmiştir. Yirmi altı katılımcının tümü farklı matematik alt yapısına sahip olup eğitim ve psikoloji fakültesinde lisansüstü öğrenim gören kişilerdir. Araştırmanın amacına uygun olarak hazırlanmış sekiz olasılık sorusu görüşmeler ile katılımlcılara sorulmuştur. Kullanılan görsel gösterim şekilleri: resimler, özgün şema gösterimleri, ağaç ve ven diyagramı, çıktı listesi, olasılık tablolarıdır. Farklı gösterim şekillerinin kullanım sıklığı çözülen olasılık problemlerinin şekline göre değişmektedir. Bulgulara göre öğrenciler problem yapısına uygun gösterim şekillerini seçebilmiştir. Araştırmada probleme özgü gösterim şekilleri ortaya çıkmış ve literatürden farklı olarak olasılık problemine özgü iki gösterim şeklinin araştırmacılar tarafından adlandırılmıştır.

Anderson ve Hoffmeister (2007) tarafından yapılan çalışma, ilköğretim ikinci kademe matematik öğretmenlerinin alan bilgisini geliştirmeyi hedefleyen profesyonel bir gelişim kursunu tanıtmaktadır. Üç yıl süren bu kurs hem içerik bilgisi hem de eğitim bilgisi amacıyla tasarlanmıştır. Gelişim kursunun bir bölümünü kapsayan 2005 yılında düzenlenen yaz kursu öncelikli olarak üç etkinlik çerçevesinde ele alınmıştır. Yaz kursu süresince katılımcılar vakitlerinin çoğunu sınıflarda küçük gruplarla problem çözerek ve farklı çözüm yollarını tüm sınıfla paylaşarak geçirmişlerdir. Araştırmacılar, tüm öğretmenlerin stratejileri tartışmaları esnasında, stratejiler arasında kurulan bağlantılara ve diğer kavramlarla kurulan ilişkilere verdikleri öneme odaklanmıştır. Problem çözme etkinlikleri ve öğrencilerle yapılan görüşmeler haricinde öğretmenlerden matematik öğretimi ve öğrenimine ilişkin makaleler okuması ve tartışması istenmiştir. Özellikle Liping Ma'nın (1999) Knowing and Teaching Elementary Mathematics kitabına odaklanılmıştır. Kursa katılan öğretmenlerin çoğu kitaptaki Amerikalı ve Çinli öğretmenlerin problem çözümlerinden etkilendikleri ve Çinli öğretmenler tarafından kullanılan çoklu startejilerden cesaret aldıkları görülmüştür. Kurs bitiminde, öğretmenlere görüşlerini almak için uygulanan açık uçlu anket sonucunda bazı öğretmenler kavramların anlaşılmasında en etkili olabilecek yolun el araçları kullanmak ve birden fazla çözüm yolu aramak olduğunu ifade etmişlerdir.

Pantziara, Gagatsis ve Elia (2009) tarafından yapılan çalışmada, öğrencilerin rutin olmayan problemlerin çözümünde diyagram kullanımlarının etkisi araştırılmıştır. Bunun için öğrencilerin rutin olmayan problemleri diyagram kullanarak ya da kullanmayarak çözme yeteneklerine bakılmıştır. Araştırmanın örneklemini yüz doksan dört Kıbrıslı altıncı sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Öğrencilere birer hafta arayla iki test uygulanmış ve birinci testte öğrencilerden problemleri istedikleri gibi çözmeleri, ikinci testte ise problemde verilen farklı tiplerdeki diyagramları kullanarak çözmeleri istenmiştir. Yapılan t testi analizine göre birinci ve ikinci test puanları arasında anlamlı bir fark bulunamamıştır. Ancak ikinci testte yer alan diyagramlarla, problemlerin bazılarının öğrenciler için daha kolay hale geldiği görülmüştür. Ağaç diyagramı yada matris kullanarak problem çözen öğrenciler testin diğer problemlerinde de aynı diyagramlarını kullanarak başarılı olma eğilimi göstermişlerdir. Pek çok öğrenci ikinci testte verilen diyagramları etkili bir şekilde kullanabilmişken, bazıları verilen diyagramı kullanışlı bulmayıp kendi şeklini çizmeyi tercih etmiştir. Diyagram verilen problemlerde öğrenciler bu diyagramı yorumlama ihtiyacı duymuşken diyagram verilmeyen problemlerde öğrenciler kendi çizimlerini oluşturmak gibi bir problem çözme stratejisi aramaya yönlenmişlerdir. Sonuçlar, öğrencilerin diyagramları kullanmada zorluk yaşadığını göstermektedir. Diyagramların bazı öğrenciler için problemi basitleştirdiği görülürken bazıları için çok daha zor hale getirdiği ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin birinci testte şekil ya da diyagram çizme, deneme-yanılma, geriye doğru çalışma, denklem yazma, mantıksal sorgulama yapma gibi stratejileri kullandığı görülürken, ikinci testte diyagramların varlığı, problem çözerken öğrencilerin seçebilecekleri stratejileri kısıtlamıştır.

Warner, Schorr ve Davis (2009) tarafından yapılan özel durum çalışması, sınıf ortamında problem çözerken öğrencilerin kullandıkları gösterim şekillerinin hangi amaçlarla kullanıldığını incelemektedir. Aynı zamanda çalışmada, sınıf ortamında öğrencilerin matematiksel gösterim şekilleri kullanımındaki esneklikte meydana gelen gelişim de ele alınmıştır. Söz konusu esneklik ile gösterim şekilleri ve farklı stratejiler arasında kolaylıkla geçiş yapabilme ifade edilmektedir. Çalışma bir devlet okulunda okuyan otuz iki sekizinci sınıf öğrenci ile yürütülmüş ve üç öğrencinin gösterim şekli kullanımı incelenmiştir. esnekliği ele alınmıştır. Öğrencilere "el sıkışma" problemi uygulanmış ve bir hafta sonrasında aynı problemin genişletilmiş iki farklı versiyonu sorulmuştur. Böylelikle öğrencilere benzer durumları içeren daha farklı problemlerin genelleştirilebilmesi için fırsat tanınmıştır. İlk problemin uygulanmasından altı ay sonra öğrencilere el sıkışma problemine paralel farklı bir problem uygulanmıştır. Uygulamalar video kameraya kaydedilmiştir ve her görüşme sonrası araştırmacı tarafından alan notları tutulmuştur. Araştırmanın ikinci kısmında uygulanan problemin genişletilmesi işleminde öğrenciden alınan yanıtlar sonucunda, problem durumu ile ilgili bildiklerini ifade etmek için öğrencinin kullandığı gösterim şeklinin problem üzerine düşünmek için bir araç haline geldiği ortaya konmuştur. Araştırmanın sonucunda, problem çözerken kullandıklan bir stratejiyi açıklarken öğrencilerin tercih ettikleri bir gösterim şeklini, problem genelleştirildiğinde değiştirebildikleri ve hatta çözüm stratejisini başka birine (öğretmen yada arkadaşlara) açıklarken daha farklı gösterim şekilleri kullandıkları yani ihtiyaç durumuna göre gösterim şekillerini esnek bir şekilde kullanabildikleri belirtilmiştir.

Stylinou (2010) tarafından yapılan çalışmanın amacı, öğretmenlerin matematik yaparken bir süreç olarak gösterim şekilleri hakkındaki görüşlerini ve ilköğretim ikinci kademede matematik öğretirken ve öğrenirken kullanılan gösterim şekillerinin rolü üzerine bakış açılarını incelemektir. On sekiz ilköğretim ikinci kademe öğretmeni katılımcı olarak seçilmiş ve veri toplama aracı olarak yarı yapılandırılmış görüşme kayıtları ve bu görüşmelerde sorulan ortaokul düzeyindeki dört problem kullanılmıştır. Yapılan görüşmeler öğretmenlerin kendi matematik çalışmalarında çeşitli şekillerde gösterim şekillerini kullandıklarını göstermektedir. Elde edilen veriler gösterim şekillerinin genel bir süreç olarak görülmesinden ziyede bir çalışma konusu olduğu ve yüksek performanslı öğrencilerin öğrenmeleri için bir amaç olarak göründüğünü ortaya koymuştur. Stylianou çalışmasında öğrencilerin gösterim şekillerini iyi düzeyde kullanmaları ve öğretmenlerin sınıf ortamında öğrencilerin matematiksel kavramları nasıl kullanacaklarını ve problem çözmeye nasıl uygulayacaklarını öğrenmelerinde çeşitli matematiksel gösterim şekillerinden yararlanmaları konusunda sunulan önerilerden bahsetmiştir.

Sert (2007) yaptığı tez çalışmasında, sekizinci sınıf öğrencilerinin cebir kavramlarının çoklu temsil biçimleri (grafik, tablo, denklem, sözlü anlatım) arasında dönüşüm yapma becerilerini incelemiştir. Yedi yüz beş öğrenci ile yaptığı bu çalışmada dönüşüm becerilerini ölçmek için kendi hazırladığı "Cebirsel Kavramların Farklı Temsil Biçimleri Arasında Dönüşüm Yapma" testini kullanmıştır. Araştırmanın sonucunda ilköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin dört farklı temsil biçimi arasında dönüşüm yapma konusunda yetersiz oldukları ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin diğer temsil biçimlerini sözlü anlatıma dönüştürmekte sıkıntı yaşadığı görülürken , tabloya rahatlıkla dönüştürebildikleri ifade edilmiştir. Denklem, tablo ve grafikten sözlü anlatıma dönüşüm yaparken en sık yapılan hata öğrencilerin doğru ancak yetersiz bilgi vermesi olmuştur. Ayrıca öğrencilerin en çok tablodan sözel ifadeye dönüşüm gerektiren soru tiplerinde zorlandıkları görülmüştür.

KURAMSAL ÇERÇEVE

Tez çalışmasında öğretmen adaylarının problemlere ilişkin kolektif çözüm uzayları ve bu çözüm uzaylarında yer alan bilgi türleri incelenirken Leikin ve Levav-Waynberg'in (2008) çözüm uzayı kavramı temel alınmıştır. Kolektif çözüm uzayları tüm öğretmen adaylarının farklı bilgi türlerinden yararlanarak probleme ürettikleri farklı çözüm yaklaşımlarını temsil etmektedir. Bu bağlamda problemlere ilişkin kolektif çözüm uzayları tüm öğretmen adaylarının problemlere ürettikleri farklı çözümlerin birleşimidir.

Öğretmen adaylarının farklı çözüm yollarında kullandıkları stratejiler ise ana çerçeve olarak Fan&Zhu'nun (2007) ve ek olarak formül kullanma stratejisi LaRusso'nun (2010) çalışmalarında kullandıkları tanımlardan yararlanılarak ele alınmıştır. Ancak öğretmen adaylarının kullandıkları analitik düzleme taşıma, teoremlerden yararlanma, ek çizim yapma, toplama yoluyla sayma, bilinen bir örüntüden yararlanma stratejileri problemlere özgü olarak ortaya çıkmış ve bu stratejiler araştırmacı tarafından adlandırılmıştır. Araştırmada kullanılan stratejiler ve bu stratejilerin ne anlam taşıdığı aşağıda verilmiştir:

- ***Diyagram Çizme (Draw a diagram):*** Problemi görsel olarak ifade etmek için uygun verilere dayanan diyagram çizme.
- ***Mantıksal Sorgulama (Logical reasoning):*** Bir ifade doğru olarak kabul edildiği zaman ona bağlı diğer ifadelerin de doğru olabileceğini gösterme.

- ***Örüntü Arama (Look for a pattern):*** Problemlerdeki sayıların, şekillerin gözlenen genel özellikleri,değişimleri yada farklarına dayanan verilerdeki örüntüleri tanıma.
- ***Sistematik Liste Yapma (Make a systematic list):*** Verilen durumlarla ilgili tüm olasılıkları içeren düzenlenmiş listeleri oluşturarak cevabı bulma.
- ***Tablo Yapma (Make a table):*** Verileri bir tablo içinde düzenlemek daha sonra tablodaki verileri problemi çözmek için kullanma.
- ***Problemi Basitleştirme (Simplify the problem):*** Problemdeki karmaşık sayıları ya da durumları problemi matematiksel olarak değiştirmeden daha basit olanlarıyla değiştirme.
- ***Benzer Bir Problemi Düşünme (Think of a related problem):*** Benzer bir problemin yöntemlerini/ sonuçlarını kullanmak, benzer bir problemi hatırlamak ya da daha önceden çözülmüş benzer bir problemi düşünme.
- ***Model Oluşturma (Use a model):*** Problemdeki çokluklar, ilişkiler ya da değişikliklerdeki bilgileri modellemek için görsel gösterim şekilleri oluşturma (Noktalar, Doğrular yada diğer kolay anlaşılır semboller kullanmak).
- ***Denklem Yazma (Use an equation):*** Bir problemdeki bilinmeyen çoklukları sunmak için harfleri değişken olarak kullanmak ve cevabı bulmak için denklemleri ya da eşitsizlikleri kurup çözme.
- ***Formül Kullanma (Using Formula):*** Matematik problemlerine çözüm arama sürecinde formüllerden yararlanma.
- ***Bilinen Bir Örüntüden Yararlanma:*** Problemi çözerken çokluklar arasındaki ilişkiyi bilinen bir örüntü kullanarak ortaya çıkarma.
- ***Toplama Yoluyla Sayma:*** Problemi çözümü için farklı yolları toplayarak sonuca ulaşma.
- ***Ek Çizim Yapma:*** Problemlerin çözümü için, verilen geometrik şekiller üzerinde çözüme yardımcı olacak şekilde paralel ya da dik doğrular gibi ek çizimler yapma.
- ***Teoremlerden Yararlanma:*** Matematik problemlerine çözüm arama sürecinde teoremlerden yararlanma.
- ***Analitik Düzleme Taşıma:*** Verilen problemdeki ilgili şekli analitik düzleme taşıyıp çözümü için analitik düzlemin özelliklerinden yararlanma.

Tez çalışması kapsamında, problem çözme sürecinin daha ayrıntılı ele alınması için öğretmen adaylarının problem çözümlerinde yaygın olarak kullandığı dış gösterim şekilleri temel alınmış ve bu gösterim şekilerinin kategorileştirilmesinde Shield ve Galbraith (1998) oluşturduğu kuramsal çerçeve baz alınmıştır. Ancak söz konusu çalışmada sembolik ve sözel gösterim şekillerinin yanı sıra ele alınan diyagram, tablo ve grafik gibi gösterim şekilleri, tez çalışmasında birleştirilmiş ve şekilsel gösterim şekli olarak tek bir başlık altında kodlanmıştır. Öğretmen adaylarının yaptıkları açıklamalar ve doğrulamalar gösterim şekillerine göre çeşitlilik göstermiş ve bunlar için aşağıdaki kodlamalar temel alınmıştır:

Sembolik (Symbolic): Problem çözme sürecinde yapılan doğrulamaların ve açıklamaların bir eşitlik ya da bir fonksiyon aracılığıyla ya da hesaplamayı ve uygulamayı içeren aritmetiksel yollarla temsil edilmesi.

Sözel İfade (Verbal): Problem çözme sürecinde yapılan doğrulamaların ve açıklamaların kelimeler yardımıyla yazılı olarak ifade edilmesi.

Şekilsel (Pictorial): Problem çözme sürecinde yapılan doğrulamaların ve açıklamaların diyagramlar, grafikler ya da görsel şekiller aracılığıyla yapılması.

Öğretmen adaylarının problem çözümlerini açıklarken bazen tek bir gösterim şekli kullanmadıkları ve bu süreçte birkaç gösterim şekli arasında dönüşüm yaptıkları görülmüştür. Tez çalışması kapsamında öğretmen adaylarının problem çözerken kullandıkları gösterim şekilleri arasında yaptıkları dönüşümleri ifade etmek için ise Lesh, Landau ve Hamilton'un (1983) yukarıda açıklanan çalışmalarında ortaya attığı gösterim şekilleri arasındaki dönüşümler göz önüne alınmış ancak bundan farklı olarak bir çözümü ayrıntılarıyla açıklamak için ikili dönüşümlerin yanı sıra üçlü dönüşümlere de yer verilmiştir.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırma modeli, araştırma için belirlenen örneklem (çalışma grubu), araştırmada kullanılan veri toplama araçları ve veri analizlerinde kullanılan yöntem ve teknikler açıklanmaktadır.

Araştırmanın Yöntemi ve Deseni

Bu araştırma doküman incelemesi yardımıyla elde edilen verilerin nitel analizinin gerçekleştirildiği nitel bir araştırmadır. Nitel araştırmanın herkes tarafından kabul edilen bir tanımını yapmak güç olsa da, "nitel araştırma", gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Nitel araştırmalar, geleneksel araştırma yöntemleriyle ifade edilmesi zor olan sorulara cevap bulmak için gereklidir (Frankel ve Devers (2000)'dan aktaran Büyüköztürk ve ark., 2008, s.200). Niteliksel araştırmaların amacı anlamak, araştırma faaliyetinin sonucu gerçekliği olduğu gibi tanımlamak olduğundan, niçin sorusundan çok bu tip araştırmalar, ne ve nasıl sorularına odaklanmaktadır (Kümbetoğlu, 2008).

Araştırmada matematik öğretmen adaylarının problemlere ürettikleri farklı çözümler, bu çözümlerin oluşturduğu çözüm uzayları ve çözüm uzaylarında ortaya çıkan bilgi türleri, farklı çözümlerde kullandıkları stratejileri ve gösterim şekillerinin ayrıntılı olarak incelendiği için özel durum çalışması deseninden yararlanılmıştır. Araştırma, var olan bir durum var olduğu şekliyle betimlenmeye ve araştırmaya konu olan öğretmen adayları kendi koşulları içerisinde kendilerini ortaya koyuş biçimleriyle tanımlanmaya çalışılmıştır.

Özel durum çalışması, felsefesi yorumlayıcı paradigmaya dayanan, araştırmacı ya bir bağlam içerisinde bir grubu, olayları veya ilişkileri derinlemesine inceleme ve yorumlama olanağı sağlayan, elde edilen bulgularla benzer durumlar üzerinde gerçekçi tahminlerden ziyade analitik genellemeler yapma fırsatı veren nitel araştırma yöntemlerinden biridir (Cohen, Manion ve Morrison, 2000'den akt. Kertil, 2008). Özel durum çalışması, mimaride yapılan ayrıntılı bir planlama gibi, bilgi toplama, toplanan bilgileri organize etme, yorumlama ve araştırma bulgularına ulaşma gibi basamakları içeren sistematik desen türlerinden biri olarak tanımlanmaktadır (Merriam, 1988 akt. Vural ve Cenkseven, 2005). McMillan (2000), özel durum çalışmalarını bir ya da daha fazla olayın, ortamın, programın, sosyal grubun ya da diğer birbirine bağlı sistemlerin derinlemesine incelendiği yöntem olarak tanımlamaktadır (Büyüköztürk ve ark., 2009, s.248). Özel durum çalışmalarının temel amacının bir durum hakkında detaylı betimlemeler yapmak ve o durumu var olduğu şekliyle anlamak olduğu ifade edilmektedir (Büyüköztürk ve ark., 2009, s.271). Creswell (1998) de durum çalışmasının bir ya da birkaç özel durumu derinlemesine inceleyerek analiz etmek amacıyla kullanıldığını ifade etmektedir (Canbazoğlu, 2008). Bir başka deyim ile, bir duruma ilişkin etkenler (ortam, bireyler, olaylar, süreçler, vb.) bütüncül bir yaklaşımla araştırılır ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerine odaklanır (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 77). Bogdan ve Biklen'e (1998) göre özel durum çalışması bir durumu veya belli bir olayı detaylı incelemektir. Kanaoka'ya (1999) göre ise, mevcut bir problemi analiz etmek için var olan bir durumun kullanılması anlamına gelmektedir. Burada sözü edilen durum bir program, bir olay, bir aktivite veya belli bir zaman ve belli bir yerle sınırlı bir grup birey olabilmektedir (McMillan ve Schumacher, 2001). Özel durum çalışmasında bir duruma ilişkin etkenler (ortam, bireyler, olaylar, süreçler, vb.) bütüncül bir yaklaşımla araştırılmakta ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerine odaklanılmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Eğitim araştırmalarında özel durum çalışmalarının tercih edilme nedenlerinden bir kaçı şu şekilde sıralanmaktadır (Cohen ve Manion, 1994'den akt. Vural ve Cenkseven, 2005):

- Özel durum çalışmaları ile elde edilen veriler, "gerçeklik bağlamında çok güçlüdür" fakat organize edilmesi güçtür. Karşıt olarak, diğer araştırma verileri gerçeklik açısından zayıflık gösterirler, fakat kolayca organize edilebilmektedirler.
- Özel durum çalışmaları bir olaya ya da bir olaydan bir kategoriye genellemeye olanak tanımaktadır.
- Özel durum çalışmaları, ürün olarak da düşünülebilir. Arşiv belgeleri ya da betimleyici materyaller, sonradan ortaya çıkan yeniden yorumlamaların yapılabilmesine olanak tanır. Bu materyaller, özellikle eğitim araştırmaları için araştırmacının temel amacı dışında da birtakım yeni amaçları ve yeni araştırma konularını ortaya çıkarabilir.

Gerçek hakkında derinlemesine bilgi vermek ve uygulamada pratik yararlar sağlamak amacıyla kullanılan özel durum çalışmaları "betimleyici", "yorumlayıcı" ve "değerlendirici" olarak üçe ayrılmaktadır (Vural ve Cenkseven, 2005). Bu araştırma betimleyici bir özel durum çalışmasıdır. Betimleyici özel durum çalışması, incelenen olgu hakkında ayrıntılı bilgi edinmek açısından katkı sağlamakta ve genellikle, daha sonra yapılacak karşılaştırmalı çalışmalar için veri tabanı oluşturmaktadır (Vural ve Cenkseven, 2005). Tez çalışması kapsamında özel durum çalışması belirlenen alt problemlerdeki olay ve olguları betimlemek amacıyla kullanılmıştır.

Katılımcılar

Özel durum çalışmalarında katılımcıların seçimi büyük önem taşımaktadır. Bu seçimdeki en önemli ölçüt ise araştırmanın amacına en uygun durum ya da durumların seçilmesidir. Tez çalışması, Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik öğretmeliğine kayıtlı elli son sınıf matematik öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Söz konusu çalışma grubunun belirlenmesinde öğretmen adaylarının son sınıfta olmaları nedeniyle lisans derslerinin hemen hemen tümünü almış olmaları, staj uygulamaları nedeniyle ortaöğretim matematik dersi öğretimin programı ve sınıf uygulamaları hakkında daha geniş bilgiye sahip olmaları göz önüne alınmıştır. Çalışma öncesinde araştırmanın akışını değiştirmemek ve öğretmen adaylarının var olan durumlarını ortaya çıkarabilmek için öğretmen adaylarıyla çözüm uzayı, problem çözme stratejileri ve gösterim şekilleri ile ilgili bir ön bilgi verilmemiş ve ön çalışma yapılmamıştır.

Araştırmada, araştırılmak istenen durumun derinlemesine çalışılmasına olanak verdiği için amaçlı örnekleme yöntemi kullanılması uygun görülmüştür. Yıldırım ve Şimşek'e (2005) göre maksimum çeşitliliğe dayalı bir örneklem oluşturmada amaç, genelleme yapmak için bu çeşitliliği sağlamak değildir, tam tersine çeşitlilik gösteren durumlar arasında herhangi ortak ya da paylaşılan olguların olup olmadığını bulmaya çalışmak ve bu çeşitliliğe göre problemin farklı boyutlarını ortaya koymaya çalışmaktır. Bu araştırmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan maksimum durum çeşitlemesinin kullanılması uygun görülmüştür. Araştırmacıların maksimum çeşitlilik örneklemesini seçmesindeki amaç, göreli olarak küçük bir örneklem oluşturmak ve örneklem grubuna uygulanacak problemlere taraf olabilecek bireylerin çeşitliliğini maksimum derecede yansıtmaktır. Araştırmada öğretmen adaylarının gerçek isimleri gizli tutulmuş ve verilerin analizinde öğretmen adaylarına verilen $ÖA_1$, $ÖA_2$ vb. kodlamalardan yararlanılmıştır.

Veri Toplama Araçları

Dokümanlar, nitel araştırmalarda etkili bir şekilde kullanılması gereken önemli bilgi kaynaklarıdır (Yıldırım ve Şimşek, 1999). Dokümanların kayıtlar, fotoğraflar veya metinler gibi materyalleri içermesinden dolayı araştırmacı tarafından yorumlanması gerekmekte; bu bağlamda araştırmacı dokümanları sadece analiz etmekle kalmamakta ayrıca onları yorumlayarak yeniden yaratmaktadır (Akturan, 2008). Dokuman incelemesi, araştırılması hedeflenen olgu ya da olgular hakkında bilgi içeren materyallerin analizini kapsamaktadır. Bu tur araştırmalarda, araştırmacı, ihtiyacı olan veriyi, gözlem veya görüşme yapmaya gerek kalmadan elde edebilmekte ve tek başlarına bir araştırmanın tüm veri setini oluşturabilmektedirler (Yıldırım ve Şimşek, 1999'dan akt. Yavuz ve Baştürk, 2011). Benzer şekilde Punch (2005), bu tür veri kaynaklarının, sosyal araştırmalarda çeşitli şekillerde kullanıldığına ve bazı araştırmaların tümüyle dokümanlar şeklindeki verilere dayandığına dikkat çekmektedir. Çepni (2007), doküman incelemesini, yapılacak olan çalışma ile ilgili mevcut kayıt ve belgeleri toplayıp belirli norm veya sisteme göre kodlayıp inceleme işlemi olarak tanımlamaktadır. Ayrıca doküman incelemesi, araştırmacıya, zaman ve para tasarrufu anlamında katkıda bulunmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu araştırmada amaç, öğretmen adaylarının problem çözerken seçtikleri çözüm yollarını, problem çözümlerine ilişkin çözüm uzaylarını ve söz konusu çözümlerde kullandıkları stratejileri ve gösterim şekillerini ayrıntılı bir biçimde incelemek olduğundan veriler, öğretmen adaylarından yazılı dokümanlar halinde toplanmıştır. Bu bağlamda öğretmen adaylarına beş farklı problem uygulanmış ve öğretmen adaylarının çözümlerini yazılı olarak ayrıntılı bir şekilde yazmaları istenmiştir. Böylelikle öğretmen adaylarının belirli bir zaman dilimi içerisinde ürettikleri çözümler, araştırma problemi doğrultusunda geniş bir zaman dilimine dayalı olarak analiz edilebilmiştir.

Araştırmada öğretmen adaylarına uygulanmak üzere dokuz problem belirlenmiştir. Problemleri belirlemek için literatür taraması yapılmış ve araştırma problemine yanıt aramak için seçilen problemlerin farklı öğrenme alanlarına ait matematiksel bilgiler kullanılarak çözülebilmesi hedeflenmiştir. Literatür taraması sonucunda seçilen problemlerin öğretmen adaylarından istenecek farklı çözüm yollarına ve araştırmanın alt problemlerini ortaya çıkarmak için uygun olup olmadığının ve problemlerin sunuş biçiminin, problemde yer alan ifadelerin uygunluğunun kontrol edilmesi için iki matematik eğitimcisinin görüşüne başvurulmuştur. Bu görüşler doğrultusunda problemlerde birtakım değişikliklere gidilmiştir. Belirlenen dokuz problem için bir pilot uygulama gerçekleştirilmiştir. Söz konusu pilot uygulama çalışma grubuna eş öğretmen adayı grubu ile yapılmıştır. Pilot uygulama yapılmasında gözetilen bu amaçlar;

- Problemlerin anlaşılabilirliğinin test edilmesi,
- Problemlerin uygulanması için ideal sürenin belirlenmesi,

- Problemlerin farklı çözüm yollarının öğretmen adaylarınca bulunmasının mümkün olup olmadığı, (Problemlerin istenen amaçlara uygun olup olmadığının tespiti)
- Her bir problem için ortaya çıkabilecek farklı çözüm yollarını içeren çözüm uzaylarının oluşturulması şeklindedir.

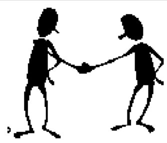
Uygulanan her bir problemde araştırmanın amacına yönelik veri toplayabilmek için ‘‘farklı gösterim şekillerini (grafik, şekil, tablo, sözel, sembolik ...) veya bir gösterim şeklini farklı çözüm yollarında kullanarak sunulan probleme mümkün oldukça çok sayıda çözüm üretmeye çalışınız.” ifadesi yer almıştır. Pilot uygulamada uygulanan dokuz problemden elde edilen veriler araştırmacılar tarafından incelenmiş ve sonucunda örneklem grubuna uygulanmak üzere beş problemin uygun olduğuna karar verilmiştir. Pilot uygulama sonucunda ana çalışmada kullanılmak üzere belirlenen problemler Şekil 5, Şekil 6, Şekil 7, Şekil 8, Şekil 9’da verilmiştir. El sıkışma problemi ve harita problemi Posamentier ve Krulik’in (1998) kitabından masa problemi Krulik ve Rudnick’in (1989) kitabından seçilmiştir. Ana çalışmada her problem öğretmen adaylarına farklı haftalarda sınav formatında uygulanmıştır. Katılımcılara problemlere ilişkin akıllarına gelen tüm çözümleri yansıtmalarının desteklenmesi ve uygulamanın ciddiyetle gerçekleştirilmesi için söz konusu beş sınavdaki yaklaşımlarına ilişkin değerlendirmelerin onların ders başarı notu olarak kullanılacağı ifade edilmiştir.

Şekil 5
Dik Üçgen Problemi

PROBLEM 1: Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğunun hipotenüsün yarısına eşit olduğunu gösteriniz.

Şekil 6
El Sıkışma Problemi

PROBLEM 2: Bir toplantıda 10 kişi bulunmaktadır. Herkes birbiriyle 1 kez el sıkışırsa toplantı salonunda toplam kaç el sıkışması olur?



Şekil 7

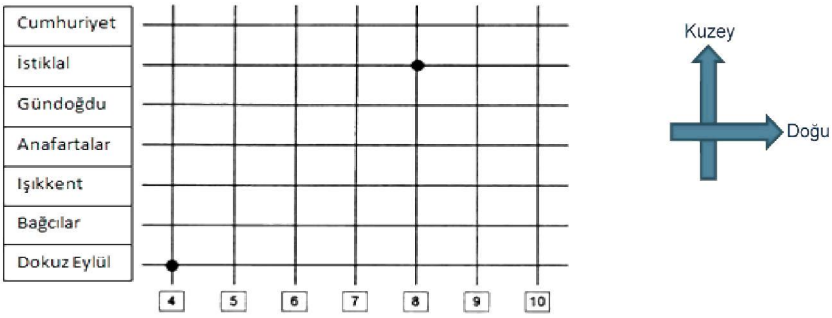
Masa Problemi

PROBLEM 3: On iki çift bir partiye davet edilir. Çiftlerin ardı ardına konmuş dört kişilik kare masalarda ağırlanması düşünülmektedir (Bu kare masaların her bir kenarına bir kişi oturabilmektedir). Ancak daha sonra organizasyon şirketi kare masaları uzunlamasına ardı ardına birleştirerek büyük dikdörtgen şeklinde bir masa oluşturmaya karar vermiştir. Bu on iki çiftin oturması için kaç küçük kare masaya ihtiyaç olduğunu bulunuz.

Şekil 8

Harita Problemi

PROBLEM 4: Aşağıdaki şekilde bir semtin haritası görülmektedir. Doğa 4. Cadde ile Dokuz Eylül Bulvarının kesişimi üzerindeki bir apartmanda yaşamaktadır. Alp ise 8. Cadde ile İstiklal Bulvarının kesişiminde, köşedeki apartmanda yaşamaktadır. Doğa, hergün başka bir yoldan ve caddeleri sadece kuzey ve doğu yönünde gitmek koşuluyla Alp'in evini ziyaret etmeye karar verir. Buna göre Doğa'nın Alp'in evine kaç farklı şekilde gidebileceğini bulunuz?



Şekil 9

Kare Problemi

PROBLEM 5:

Yukarıdaki şekilleri inceleyiniz. Buna göre, 10. şekilde kaç tane siyah kare bulunacağını açıklayınız.

Foster (2005)'e göre doküman incelemesi belli başlı beş aşamada yapılabilir:

1) Dokümanlara ulaşma,
2) Orijinalliğini kontrol etme,
3) Dokümanları anlama,
4) Veriyi analiz etme,
5) Veriyi kullanma (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Bu aşamalar göz önüne alındığında

Araştırmanın geçerliğini ve güvenirliğini arttırmak için aşağıdaki yaklaşımlar sergilenmiştir:

- Gerekli yerlerde öğretmen adaylarının çözümlerinden alıntı yapılarak ve bu alıntıların ekleme yapılmadan olduğu gibi verilmesi sağlanarak araştırmanın güvenirliği arttırılmaya çalışılacaktır.
- Güvenirliği arttırmak için, araştırmacı takip ettiği süreçleri açık bir biçimde tanımlayarak ve ilgili dokümanlarla destekleyerek, araştırmasını belirli bir sistem içinde aşama aşama geliştirmiş ve sunumları ile araştırmasına ilişkin gerektiğinde başka araştırmacıların da kullanabileceği bir veri tabanı oluşturmuştur.
- Öğretmen adaylarının kağıtları incelendikten sonra açık bir şekilde anlaşılmayan çözümlerde yorum yapmaktan kaçınılmış ve öğretmen adaylarının teyit etmesine başvurularak araştırmanın iç geçerliğini arttırmaya çalışılmıştır.
- Araştırma konusu hakkında genel bilgiye sahip uzman kişilerden, yapılan araştırmayı çeşitli boyutlarıyla incelemesinin istenmesi iç geçerliği arttıracak bir diğer etmendir. Araştırma konusunda derin bilgiye sahip uzmanlardan araştırmanın çeşitli boyutlarının incelenmesi istenmiş, uzman ile araştırmacılar değerlendirme toplantıları yapmış, uzmandan görüşler alınmıştır.

Veri Çözümleme Teknikleri

Yıldırım ve Şimşek (2003) betimsel veri analizinde elde edilen verilerin, belirlenen temalara göre özetlendiğini ve yorumlandığını ayrıca görüşülen ya da gözlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara sık sık yer verildiğine değinmektedirler.

Bogdan ve Biklen (1982) elde edilen nitel verilerin organizasyonu ve analizini şu sözleriyle özetlemektedirler:

> Binlerce oyuncağın saçıldığı büyük bir spor salonu hayal edin. Belli bir amaçla, geliştirdiğiniz bir temaya göre, bu oyuncakları sınıflamanız gerekiyor. Bütün salonu dolaşarak oyuncaklara bakıp, toplayıp analiz edebilirsiniz. Yığın halinde bulunan bu oyuncakları sınıflamanın birçok yolu vardır, büyüklüklerine göre, renklerine göre, yapım yerlerine göre, yapım tarihine göre, yapımcısına göre, yapı malzemelerinin geliş yerine göre vs.(Vural ve Cenkseven, 2005).

Görüldüğü gibi eldeki verileri düzenlemenin pek çok yolu bulunmaktadır. Ancak burada göz önünde bulundurulması gereken nokta hangi amaçla verilerin organize edileceğidir. Nitel araştırmalarda, verileri organize etmek için kodlama ve ardından kategori oluşturma gerçekleştirilmektedir. Holsti, (1969'den akt: Merriam, 1988'den akt. Vural ve Cenkseven, 2005) kategori geliştirme amacıyla rehberlik edebilecek beş ana hat sunmaktadır.

- Kategoriler, araştırmanın hedeflerini ve amaçlarını yansıtmalıdır.
- Her bir veri ilişkili olduğu maddelerle gruplanıp kategoriler oluşturmalıdır. Her bir veri bir kategori içinde yer almalıdır.
- Kategoriler karşılıklı kapalılık ilkesine uymalıdır. Her bir madde yalnızca bir kategori altında yer almalıdır.
- Bir kategori altındaki verinin değerlendirilmesinin, bir başka verinin sınıflanmasını ve değerlendirilmesini etkilememesi için kategoriler birbirinden bağımsız olmalıdır.
- Her kategori tek bir sınıflama ilkesiyle ayrılmalıdır.

Bu araştırmanın amacı doğrultusunda verilerin analizinde tematik kodlama ve içerik analizinin yapılması uygun görülmüştür. İçerik analizinde temelde yapılan işlem, birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayabileceği bir biçimde düzenleyerek yorumlamaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Öğretmen adaylarına uygulanan problemlere üretilen çözümlerde ortaya çıkan çözüm uzayı, çözüm uzaylarında yer alan bilgi türleri, problem çözme stratejileri ve gösterim şekilleri kuramsal çerçeveye dayalı olarak kodlanmıştır. Bu bağlamda öncelikle araştırmacı tüm katılımcılardan elde edilen problem çözme kağıtlarını aşinalığını ve anlayışını arttırmak üzere hiçbir çözümleme yapmadan bir ön inceleme gerçekleştirmiştir. Ön inceleme sürecinde araştırmacı aynı zamanda gerekli gördüğü öğretmen adaylarıyla informal görüşmeler gerçekleştirmiştir. Bu ilk incelemenin ardından tekrar tüm kağıtlar incelenerek kolektif çözüm uzayları belirlenmiştir. Bu incelemede ayrıca tüm öğretmen adaylarının problemlere kaç çözüm ürettiği, bu çözümlerde hangi bilgi türlerini kullandıkları, stratejilerden ve gösterim şekillerinden nasıl yararlandıkları belirlenmiş ve kodlamalara başlanmıştır. Yapılan kodlamalar ile ilgili bir matematik eğitimcisinin görüşü alınmıştır. Uzman görüşü doğrultusunda tüm yanıt kağıtları tekrar incelenmiş ve düzenlemeler gidilmiştir. Benzer şekilde uzman görüşü alınmış ve kuramsal çerçeveye dayalı olarak kodlar ve kategoriler oluşturulmuştur. Ardından ise dördüncü kez katılımcıların problemlere verdikleri tüm yanıtlar incelerek verilerin tablolaştırılması gerçekleştirilmiştir. Problemlerin uygulanması ile elde edilen veriler analiz edilirken ortaya çıkan bazı durumlarda (probleme özgü çıkan stratejilerin adlandırılması, iki farklı bilgi türünün kullanıldığı çözümlerin sunulması vb.) karar verilmesi aşamasında iki matematik eğitimcisinin görüşlerine başvurulmuştur.

Araştırmada yapılan tüm veri analizleri sonucunda elde edilen bulgular tablolar halinde sunulmuştur. Tablolarda ilgili alt problem için hangi öğretmen adayının hangi kategoride yer aldığı, kaç öğretmen adayının söz konusu kategoride bulunduğu, öğretmen adaylarınca hangi sıklıkla kullanıldığı yer almaktadır. Tablolardan sonra ise öğretmen adaylarının kağıtlarından doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

Tablo 1 Analiz Süreci

İç Geçerliliğin Sağlanması

- Toplanan dokümanların ön incelenmesi
- İnformal görüşmelerin yapılması

I. ve II. Alt Probleme İlişkin Veri Analizi

- Farklı çözümlerde ortaya çıkan bilgi türlerinin kategorileştirilmesi
- Kollektif çözüm uzaylarının belirlenmesi
- Problemler için ortaya konulan farklı çözüm yollarının bilgi kategorileri bağlamında belirlenmesi

III. Alt Probleme İlişkin Veri Analizi

- Çözüm yaklaşımlarında kullanılan stratejilerin belirlenmesi
- Kuramsal çerçeveye dayalı olarak strateji kullanımına ilişkin kodlamaların yapılması

IV. Alt Probleme İlişkin Veri Analizi

- Çözüm yaklaşımlarında kullanılan gösterim şekillerinin belirlenmesi
- Kuramsal çerçeveye dayalı olarak gösterim şekillerinin kullanımına ilişkin kodlamaların yapılması

Bulguların Tablolaştırılması

- Veri analizleri sonucunda elde edilen bulguların tablolaştırılması

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde kuramsal çerçeveye dayalı olarak gerçekleştirilen tematik kodlama ve içerik analizi ile elde edilen bulgular ve yorumlanması alt problemler bağlamında ele alınmıştır.

I. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar

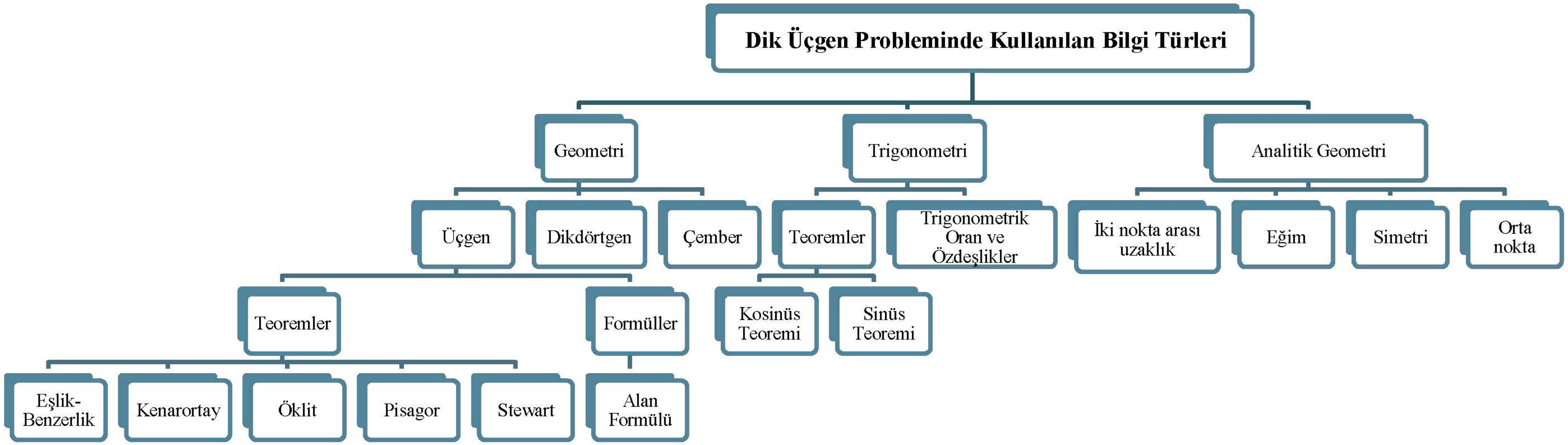
Birinci alt problem, matematik öğretmen adaylarının problem çözümlerinde kullandığı bilgilere dayalı olarak araştırmacı tarafından öğretmen adaylarının problemlere ürettikleri farklı çözüm yolları kullanılarak ortaya çıkarılan kolektif çözüm uzaylarının incelenmesini içermektedir. Bu alt probleme ait bulgular; Levav-Waynberg ve Leikin'in (2008) çalışmalarında ifade ettikleri kolektif çözüm uzayı kavramından yararlanılarak oluşturulmuştur. Söz konusu alt probleme ilişkin bulgular öğretmen adaylarının her problem için ortaya koydukları farklı çözüm yaklaşımlarının incelenip bu çözümlerde kullanılan bilgiler bağlamında ele alınarak ilgili çözüm uzayları oluşturulmuştur. Her bir problemin çözümünde kullanılan bilgi türlerine ait kategoriler, araştırmacı tarafından uzman görüşleri de dikkate alınarak belirlenmiştir. Birinci alt probleme yönelik bulgular ve yorumlar sunulurken her problem için elde edilen çözüm uzayları ayrı alt başlıklar altında verilmektedir.

Dik Üçgen Problemi Kolektif Çözüm Uzayının Bilgi Türleri Bağlamında Oluşturulmasına İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Dik üçgen problemi için öğretmen adaylarının toplamda 20 farklı çözüm ürettikleri görülmüştür. Bu çözümlerde kullanılan bilgi türü kategorileri geometri (dikdörtgen, üçgen (teoremler, alan), çember), trigonometri (teorem ve özdeşlik, trigonometrik oran) ve analitik geometri (uzaklık-eğim, orta nokta, simetri) bilgisidir. Aynı zamanda bilgi türleri kendi içinde alt kategorileri içermektedir (bkz. Şekil 10).

Şekil 10

Dik Üçgen Problemine Ait Çözüm Uzayında Yer Alan Bilgi Türleri

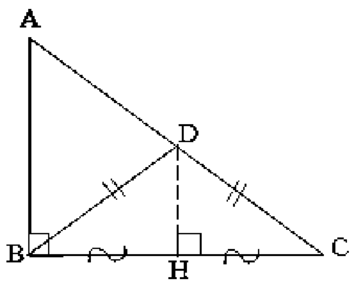


Şekil 10'da görüldüğü gibi öğretmen adayları dik üçgen problemi için farklı matematik ve geometri bilgilerinden yararlanmışlardır. Bazen bilgi türleri birlikte kullanılarak çözüme ulaşılmış bazen ise tek başına bir bilgi türü çözüme ulaşmayı sağlamıştır. Tablo 2'de dik üçgen problemi için ortaya çıkan tüm çözümler, bilgi türleri kategorileri bağlamında ele alınmıştır. Örneğin bu çözümler içerisinde yer alan Çözüm 11'de sadece çember bilgisinden yararlanılarak çözüme ulaşılırken, Çözüm 13'de ise hem sinüs teoremi hem de trigonometrik oran ve özdeşlik bilgisinden yararlanarak çözüm yapılmıştır.

Tablo 2
Dik Üçgen Problemine Ait Kolektif Çözüm Uzayı

Üçgen Bilgisi:

Çözüm1:



$[DH]\perp[BC]$ $olduğundan$ $[DH]$,

olur.

BDC üçgeninde |BC| kenarına ait yükseklik kenarı iki eş parçaya böldüğünden BDC üçgeni ikizkenar üçgenidir ve

$|BH| = |HC|$ olur.

O halde $|BD| = |DC| = \frac{|AC|}{2}$ bulunur.

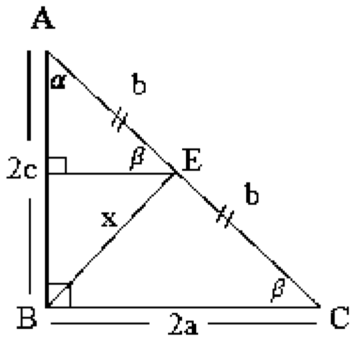
Çözüm 2:

ADE≅ ABC

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AB|}$$

$$\frac{b}{2b} = \frac{|DE|}{2a} = \frac{|AD|}{2c}$$

$|DE| = a$ ve $|AD| = c$ bulunur.



ABC üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa;

$(2b)^2 = (2c)^2 + (2a)^2$

$4b^2 = 4c^2 + 4a^2$ olur….(1)

DEC üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa;

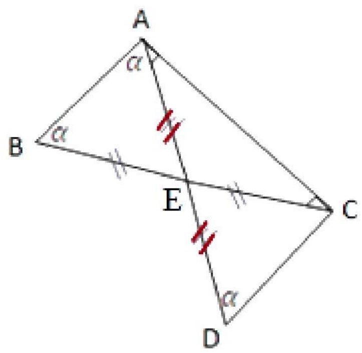
$x^2 = a^2 + c^2$ ….(2)

(1), (2)'de yerine konursa;

$x^2 = b^2$ ve $x = \pm b$ bulunur.

b>0, x>0 olduğundan x = b sonucuna ulaşılır.

<u>Çözüm 3</u> :



$|AE| = |ED|$ ve doğrusal olacak şekilde $[AD]$ çizilirse;

$[AB] // [CD]$ olur.

$|BE| = |EC| = a$…(1)

$|AE| = |ED| = b$… (2)

ABE $ve\ CDE$ eş üçgenlerdir ve;

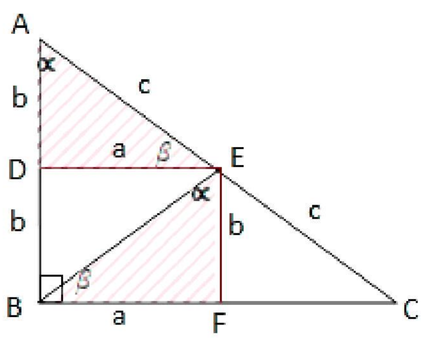
$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|BE|}{|DE|}$ … (3)

(1) ve (2), (3)'te yerine konursa;

$a^2 = b^2$ ve dolayısıyla a=b bulunur.

<u>Çözüm 4</u> :

ADE ile EFB eş üçgenlerdir.



$$\frac{|AD|}{|EF|} = \frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|DE|}{|FB|}$$

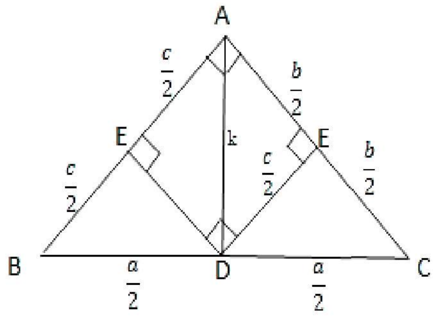
$$\frac{b}{b} = \frac{|AE|}{|EB|}$$

$|AE| = |EB|\ bulunur.$

$|BE| = \frac{|AC|}{2}$ olur.

Çözüm 5 :

ADE üçgeninde Pisagor Teoreminden;



$k^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$

$k^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} = \frac{b^2 + c^2}{4}$

$k = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$ .....(1)

ABC üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa;

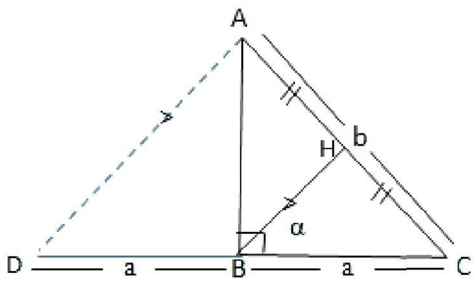
$a^2 = b^2 + c^2$ ....(2)

(1), (2)'de yerine konulduğunda; $k = \frac{a}{2}$ bulunur.

Çözüm 6 :

$[BH]//[AD]$ ve dolayısıyla

$\overset{\Delta}{CHB} \cong \overset{\Delta}{CAD}$



Bu benzerlikten;

$\frac{|CH|}{|CA|} = \frac{|BH|}{|AD|}$ bulunur.

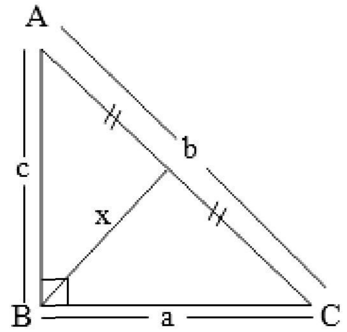
$\frac{a}{2a} = \frac{|BH|}{|AD|} = \frac{1}{2}$. Aynı zamanda

$[AB]\perp[DC]$ ve $|DB| = |BC|$ olduğundan ADC üçgeni ikizkenardır ve $|AD| = |AC| = b$ olduğu görülür. Benzerlik oranından;

$|BH| = \frac{b}{2}$ olduğu bulunur.

Çözüm 7 :

ABD üçgeninde kosinüs teoremi kullanılırsa;



$x^2 = c^2 + k^2 - 2.c.k.\cos\alpha \ldots(1)$

ABC üçgeninde; $\cos\alpha = \frac{c}{2k}$

Bulunan değer (1)'de yerine yazılırsa

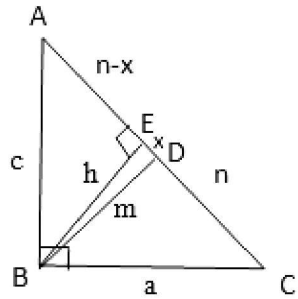
$x^2 = c^2 + k^2 - 2.c.k.\frac{c}{2k}$

$x^2 = k^2$ ve $x = \pm k$ bulunur.

$x > 0$ ve $k > 0$ olduğundan;

$\boxed{x = k}$ bulunur.

Çözüm 8 :



ABC üçgeninde |BD| kenarortaydır.

[BE]⊥ [AC]

Öklit teoreminden;

$h^2 = (n - x).(n + x)$

$= n^2 - x^2 \ldots\ldots(1)$

BED üçgeninde Pisagor Teoreminden;

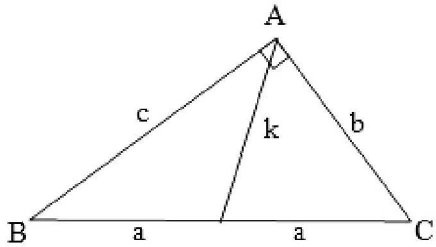
$h^2 = m^2 - x^2 \ldots\ldots\ldots(2)$

(1) ve (2)'nin eşitliğinden

$h^2 = n^2 - x^2 = m^2 - x^2$

$n > 0$ ve $m > 0$ olduğundan

$\boxed{n = m}$ bulunur.



Çözüm 9 :

ABC üçgeninde Stewart Teoremi kullanılırsa;

$k^2 = \frac{b^2a + c^2a}{2a} - a^2$.....(1)

ABC üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa;

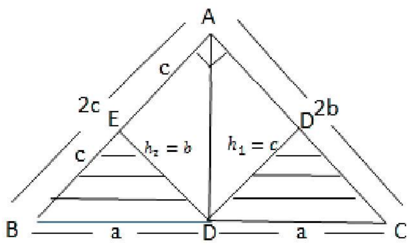
$c^2 = 4a^2 - b^2$ ....(2) bulunur. (2), (1)'de yerine konursa;

$$k^2 = \frac{b^2a + 4a^3 - b^2a}{2a} - a^2$$

$k^2 = a^2$ ve $k = \pm a$ bulunur.

$k > 0$ ve $a > 0$ olduğundan; $\boxed{k = a}$ bulunur.

Çözüm 10:



$A(ABC) = \frac{2c\,.2b}{2} = 2.b.c$

$A(ADC) = \frac{A(ABC)}{2}$

olduğundan

$b.c = b.h_1$

$c = h_1$

$A(ABD) = \frac{A(ABC)}{2}$ olduğundan $b.c = c.h_2$ ve $b = h_2$

bulunur.

ABC üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa;

$(2a)^2 = (2b)^2 + (2c)^2$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ bağıntısı bulunur....(1)

AED üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa;

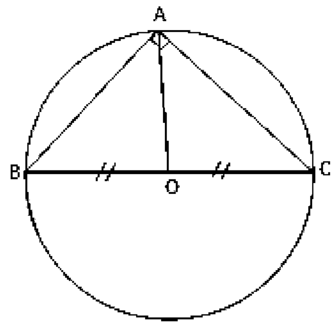
$|AD|^2 = b^2 + c^2$

(1)'den $|AD|^2 = a^2$ ve $|AD| = a$ 'dir. Buradan;

$|AD| = \frac{|BC|}{2} = a$ bulunur.

Çember Bilgisi:

Çözüm11 :



Çapı gören çevre açı 90°'dir. O halde "O" merkezdir.

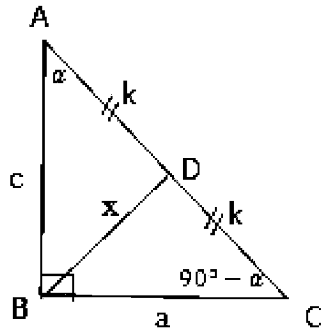
$|OB| = |OC| = |AO| = r$

olduğundan $|AO| = \frac{|BC|}{2}$

bulunmuş olur.

Trigonometri Bilgisi:

Çözüm 12: ABD üçgeninde kosinüs teoremi kullanılırsa;



$x^2 = c^2 + k^2 - 2.c.k.\cos\alpha$ ...(1)

ABC üçgeninde; $\cos\alpha = \frac{c}{2k}$

Bulunan değer (1)'de yerine yazılırsa

$$x^2 = c^2 + k^2 - 2.c.k.\frac{c}{2k}$$

$x^2 = k^2$ ve $x = \pm k$ bulunur.

$x > 0$ ve $k > 0$ olduğundan;

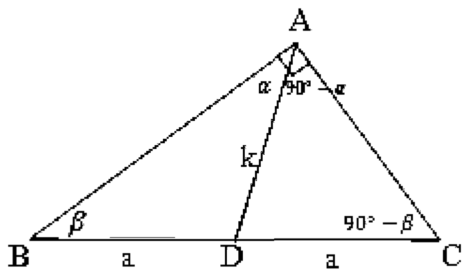
$\boxed{x = k}$ bulunur.

Çözüm 13 :

ABD üçgeninde sinüs teoremi kullanılırsa;

$2R = \frac{a}{sin\alpha} = \frac{k}{sin\beta}$

ADC üçgeninde sinüs teoremi kullanılırsa;



$2R = \frac{a}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{k}{\sin(90° - \beta)}$

$\sin(90° - \alpha) = cos\alpha$ ve $\sin(90° - \beta) = cos\beta$ 'dir.

$\frac{a^2}{sin\alpha^2} = \frac{k^2}{sin\beta^2} = (2R)^2$ .... (1)

$\frac{a^2}{cos\alpha^2} = \frac{k^2}{cos\beta^2} = (2R)^2$ .... (2)

(1) ve (2) 'den

$$\frac{2a^2}{sin\alpha^2 + cos\alpha^2} = \frac{2k^2}{sin\beta^2 + cos\beta^2} = (2R)^2$$

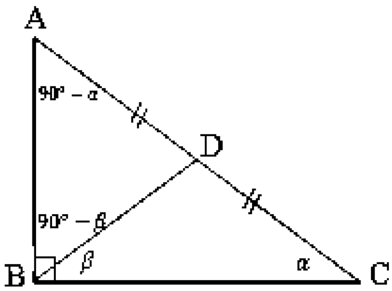
$sin\alpha^2 + cos\alpha^2 = 1$ ve $sin\beta^2 + cos\beta^2 = 1$ olduğundan;

$2a^2 = 2\mathrm{k}^2$ ve $k = \pm a$ bulunur.

$\mathrm{k} > 0$ ve $\mathrm{a} > 0$ olduğundan;

$\boxed{\mathrm{k} = \mathrm{a}}$ bulunur.

Çözüm 14 :



BDC üçgeninde sinüs teoremi kullanılırsa;

$\frac{|DC|}{sin\beta} = \frac{|BD|}{sin\alpha} = 2R$ ….(1)

ABD üçgeninde sinüs teoremi kullanılırsa;

$\frac{|AD|}{\sin(90°-\beta)} = \frac{|BD|}{\sin(90°-\alpha)} = 2\mathrm{R}$ …(2)

$|AD| = |DC|$ verildiğinden (1) ve (2)'den

$\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{\sin(90°-\alpha)}{\sin(90°-\beta)}$ bulunur.

$\sin(90° - \alpha) = cos\alpha$ ve $\sin(90° - \beta) = cos\beta$ olduğundan

$\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{cos\alpha}{cos\beta}$ bulunur.

$sin\alpha.cos\beta - sin\beta.cos\alpha = 0$ ….(3)

Toplam-Fark Formüllerinden;

$sin\alpha.cos\beta - sin\beta.cos\alpha = \sin(\alpha - \beta)$ olduğu görülür.

$\sin(\alpha - \beta) = 0$ denkleminin çözüm kümesi;

$Ç.K = \{\alpha - \beta = 0 + 2k\pi \wedge \alpha - \beta = \pi + 2k\pi, (k \in Z^+)\}$

$k = 0$ $için$ $\alpha - \beta = 0$

$\alpha = \beta$ bulunur. O halde;

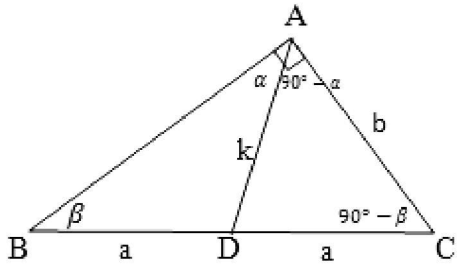
$|BD| = |DC| = |AD|$ bulunur.

Çözüm 15 :

ABC üçgeninde sinüs teoremi kullanılırsa;

$2R = \frac{2a}{sin90^\circ} = \frac{b}{sin\beta}$ ve

$sin\beta = \frac{b}{2a}$ bulunur.



ADC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa;

$k^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(90^\circ - \beta)$ ...(1)

$\cos(90^\circ - \beta) = \sin\beta$ .....(2)

(2), (1)'de yerine konursa;

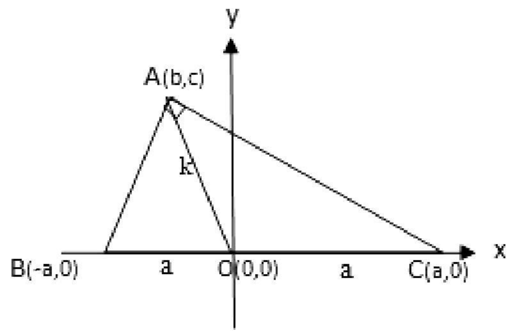
$k^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\frac{b}{2a}$

$k^2 = a^2$ ve $k = \pm a$ bulunur.

$k > 0$ ve $a > 0$ olduğundan; $\boxed{k = a}$ bulunur.

Analitik Geometri Bilgisi:

Çözüm 16 :



[AC]⊥ [AB] olduğundan;

$m_{[AC]}.m_{[AB]} = -1$ olur.

$m_{[AC]} = \frac{c}{b-a}$ ve

$m_{[AB]} = \frac{c}{b+a}$

O halde;

$m_{[AC]}.m_{[AB]} = \frac{c}{b-a} \cdot \frac{c}{b+a} = -1$ eşitliğinden,

$c^2 = a^2 - b^2$ bulunur. ...(1)

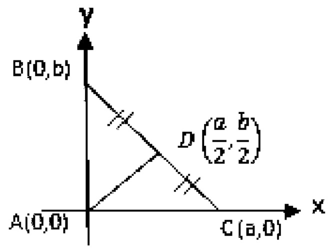
$|AO|$ uzunluğu iki nokta arasındaki uzaklık formülünden;

$|AO| = k = \sqrt{(b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$ ….(2)

(1) ve (2)'den $\boxed{k = a}$ bulunur.

Çözüm 17 :

D noktası $[BC]'nin$ orta noktası olduğundan;



$$D\left(\frac{a+0}{2},\frac{0+b}{2}\right) = D\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$$

$|BC| = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ … (1)

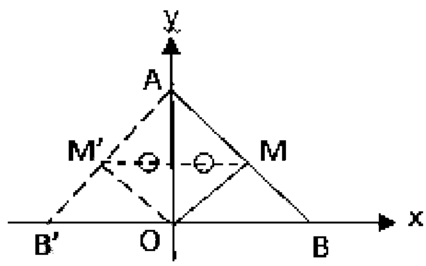
$$|AD| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$$

$$|AD| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \text{...(2)}$$

(1) ve (2)'den $|BC| = 2|AD|$ bulunur.

Çözüm 18 :

AOB üçgeninin y eksenine göre simetriği AOB' olacaktır. (AOB ≅ AOB')



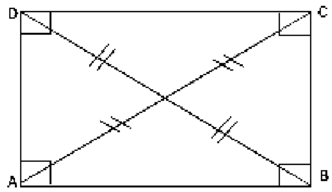
$AMM' \cong OMM' olduğundan$

$|AM| = |OM|\ \ bulunur.$

Dikdörtgen Bilgisi:

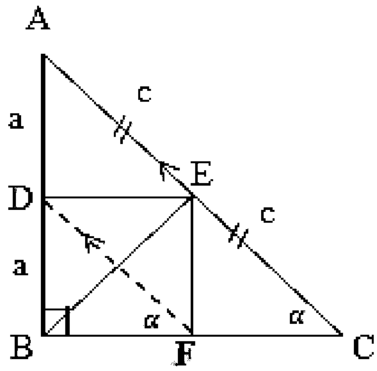
Çözüm 19 :

Dikdörtgenin köşegenleri birbirini ortalar. Dikdörtgenin iki dik üçgenin uygun birleşimiyle oluşturulduğu göz önüne alınırsa ispat gerçekleşmiş olur.



Çözüm 20 :

$|DE|\ /\!/|BC|\ ve\ |EF|/\!/|AB|$ olduğundan BDEF bir dikdörtgendir.



$BDF \cong BAC$ ve $k = \frac{1}{2}$ dir.

O halde;

$$|DF| = \frac{|AC|}{2} = c$$

BDEF dikdörtgeninde $|DF|\ ve\ |BE|$ köşegenlerinin uzunlukları birbirne eşittir.

O halde;

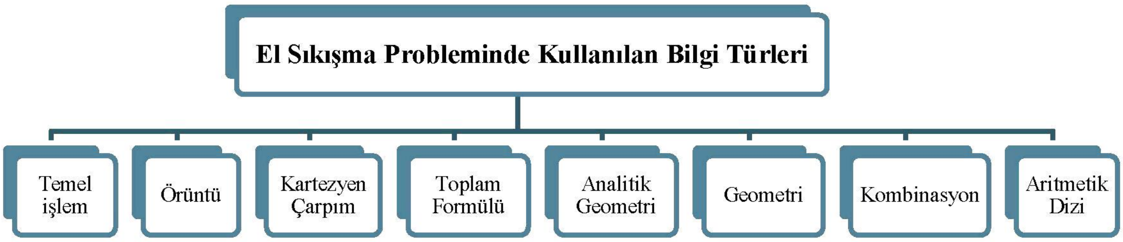
$|DF| = |BE| = \frac{|AC|}{2} = c$ bulunur.

El Sıkışma Problemi Kolektif Çözüm Uzayının Bilgi Türleri Bağlamında Oluşturulmasına İlişkin Bulgular ve Yorumlar

El sıkışma problemi için öğretmen adaylarının toplamda 16 farklı çözüm yaklaşımı ortaya koydukları görülmüştür. Bu çözümlerde ortaya çıkan bilgi türü kategorileri; kombinasyon, geometri, temel işlem, örüntü, kartezyen çarpım, toplam formülü, analitik geometri ve aritmetik dizi bilgisi şeklindedir (bkz. Şekil 11).

Şekil 11

El Sıkışma Problemine Ait Çözüm Uzayında Yer Alan Bilgi Türleri



Şekil 11'de görüldüğü gibi öğretmen adayları el sıkışma probleminin çözümünde de farklı bilgi kategorilerinden yararlanmıştır. Tablo 3'te el sıkışma problemi için ortaya çıkan tüm çözümler, bilgi türleri kategorileri bağlamında ele alınmıştır. Bu bilgi kategorilerinden biri olan "örüntü bilgisi" nin kullanıldığı çözümlerde öğretmen adayları iki farklı yaklaşım ortaya koymuştur. Öğretmen adaylarının bir bölümü örüntü kuralını kendileri oluştururken (bkz. Çözüm 7) bir bölümü ise bilinen bir örüntüden yararlanmışlardır (bkz. Çözüm 9).

Tablo 3
El Sıkışma Problemine Ait Kolektif Çözüm Uzayı

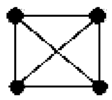
Kombinasyon Bilgisi:	<u>Çözüm 1:</u> 2 kişi kendi arasında el sıkışacağına göre 10 kişi; $C\binom{10}{2} = \frac{10.(10-1)}{2} = 45$ farklı şekilde el sıkışabilir.

Geometri Bilgisi:

Çözüm 2:

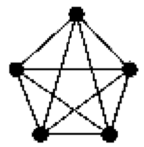
Toplam El Sıkışma Sayısı=Kenar Sayısı+Köşegen Sayısı

3



$4 \quad + \quad 2 \quad = 6$

(Kenar Sayısı) +(Köşegen Sayısı)



$5 \quad + \quad 5 \quad = 10$

(Kenar Sayısı) + (Köşegen Sayısı)

n-gende: $n \quad + \quad \frac{n.(n-3)}{2}$

O halde ongende:

$$10 \quad + \quad \frac{10.(10-3)}{2} = 10 + 35 = 45 \; bulunur$$

Temel İşlem Bilgisi: Çözüm 3:

Kişi Sayısı	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tokalaştığı Kişi Sayısı	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Çözüm 4: 10 kişi için toplam tokalaşma sayısının bulunması

		Kişilerin tokalaşma sayısı toplamları
1. kişi	9 tokalaşma	9
2. kişi	8	9+8
3. kişi	7	9+8+7
4. kişi	6	9+8+7+6
5. kişi	5	9+8+7+6+5
6. kişi	4	9+8+7+6+5+4
7. kişi	3	9+8+7+6+5+4+3
8. kişi	2	9+8+7+6+5+4+3+2
9. kişi	1	9+8+7+6+5+4+3+2+1
10. kişi herkes ile tokalaşmış olacağı için önceki toplamlar 10 kişi arasında oluşacak tokalaşma sayısını verecektir. Bu nedenle yanıt 9+8+7+6+5+4+3+2+1= 45 dir.		

Çözüm 5:

$1.kişi + 9.kişi = 10$ (1. Kişi 9 kişiyle 9. Kişi ise 1 kişiyle e toplamda 10 kez el sıkışılır.)

$2.kişi + 8.kişi = 10$

$3.kişi + 7.kişi = 10$

$4.kişi + 6.kişi = 10$

$5.kişi \qquad = 5$

Toplamda 45 el sıkışması olur.

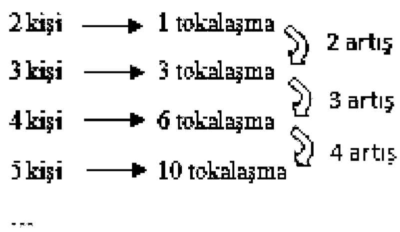
Çözüm 6:

Herkes kendi haricindeki 9 kişiyle el sıkışırsa;

$10.9 = 90$ el sıkışması olur.
Ancak A kişisi B kişisiyle el sıkışırken B kişisi de A kişisiyle el sıkışmış olur. Bu tekrarı ortadan kaldırmak için bulunan el sıkışma sayısı ikiye bölünür ve istenen el sıkışma sayısı bulunmuş olur.

$\frac{90}{2} = 45$

Örüntü Bilgisi: Çözüm 7:

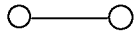


10. kişide 9 artış olacaktır. O halde toplam artış;

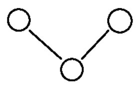
$$\sum_{i=2}^{9} n = 2 + 3 + 4 + \cdots + 9 = 44$$

2 kişi arasında 1 tokalaşma vardı. 1 tokalaşmanın üzerine 44 artış olduğundan toplam tokalaşma sayısı 45 olarak bulunur.

Çözüm 8:

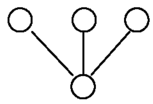
2 kişi olduğunda :  1 el sıkışması olur.

(Ortama 1 kişi daha eklenirse)



2 el sıkışması daha olur.

3 kişi olduğunda:

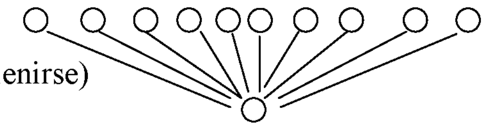


$(1 + 2 = 3)$

(Ortama 1 kişi daha eklenirse 3 el sıkışması daha olur.

4 kişi olduğunda:

$(1 + 2 + 3 = 6)$



(Ortama 1 kişi daha eklenirse)

9 el sıkışması daha olur.

10 kişi olduğunda:

Toplamda;

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 9 = 45$ el sıkışması olur.

Kartezyen Çarpım Bilgisi:

Çözüm 11:

Kişiler a, b, c, d, …, n olarak adlandırılsın. İki kişi arasında “bir” tokalaşma olur. Bir tokalaşma sayısını gösteren sıralı ikililer oluşturmaya çalışalım:

Örneğin (a, b) sıralı ikilisi a kişisi ile b kişisi arasındaki tokalaşmayı ifade eder. O halde;

“a” on farklı kişi arasından, “b” ise geri kalan dokuz farklı kişi arasından seçilebileceğinden çarpma yoluyla sayma prensibine göre $10.9 = 90$ farklı sıralı ikili oluşturulabilir. Ancak (a, b) sıralı ikilisiyle (b, a) sıralı ikilisi aynı tokalaşmaya karşılık gelmektedir. Bu tekrarları ortadan kaldırmak için:

$\frac{90}{2} = 45$ sonucuna ulaşılır.

Çözüm 12:

a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} a_{16} a_{17} a_{18} a_{19} a_{110}

a_{23} a_{24} a_{25} a_{26} a_{27} a_{28} a_{29} a_{210}

a_{34} a_{35} a_{36} a_{37} a_{38} a_{39} a_{310}

a_{45} a_{46} a_{47} a_{48} a_{49} a_{410}

a_{56} a_{57} a_{58} a_{59} a_{510}

a_{67} a_{68} a_{69} a_{610}

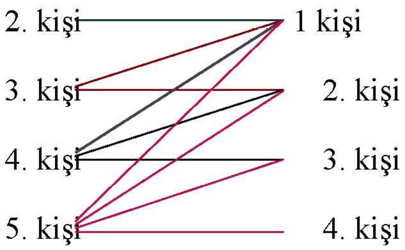
a_{78} a_{79} a_{710}

a_{89} a_{810}

a_{910}

Geometri Bilgisi:

Çözüm 13:



Toplam doğru sayısı = Toplam el sıkışma sayısı

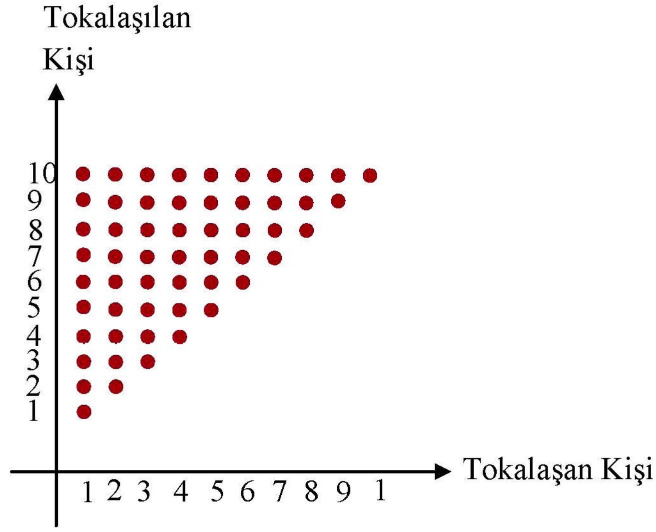
$1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$

…

n. kişi (n-1). kişi

Analitik Geometri Bilgisi:

Çözüm 14:



Tablo Bilgisi:

Çözüm 15:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x	•	•	•	•	•	•	•	•	•
2	•	x	•	•	•	•	•	•	•	•
3	•	•	x	•	•	•	•	•	•	•
4	•	•	•	x	•	•	•	•	•	•
5	•	•	•	•	x	•	•	•	•	•
6	•	•	•	•	•	x	•	•	•	•
7	•	•	•	•	•	•	x	•	•	•
8	•	•	•	•	•	•	•	x	•	•
9	•	•	•	•	•	•	•	•	x	•
10	•	•	•	•	•	•	•	•	•	x

Satır ve sütunlardaki sayılar kişileri, tablo içindeki her bir nokta ise el sıkışma sayısını göstermektedir. Kişilerin kendileriyle el sıkışamadığı durum köşegen üzerindeki çarpı işaretleriyle ifade edilmiştir. Birinci kişi ikinci kişiyle tokalaştığında ikinci kişi de birinci kişiyle tokalaşmış olacağından bu tekrarı ortadan kaldırmak için tablodaki toplam nokta sayısı ikiye bölünür ve 45 olarak bulunur.

Aritmetik Dizi Bilgisi:	Çözüm 16: $a_{n+1} = a_n + n$ ve $a_1 = 0$ olan dizide a_{10} on kişinin toplam tokalaşma sayısı verir.

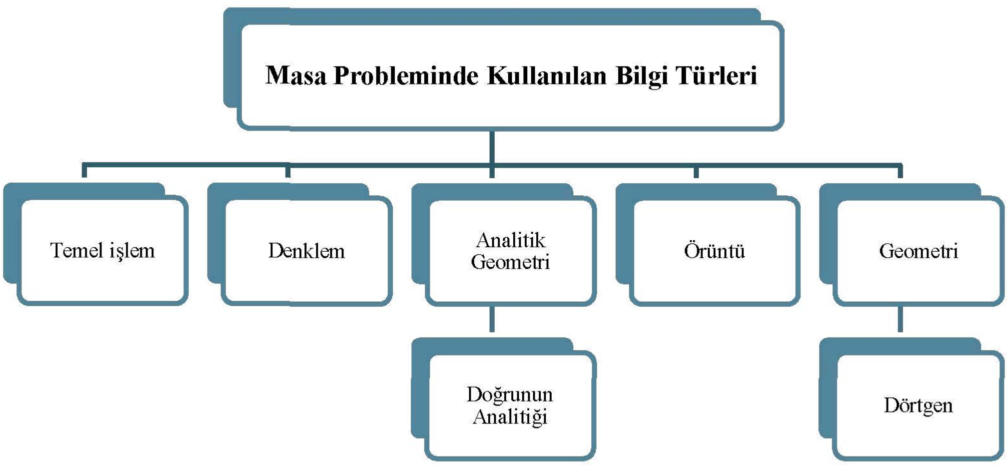
$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 1 \\
a_3 &= a_2 + 2 \\
a_4 &= a_3 + 3 \\
&\ldots \\
+\quad a_{10} &= a_9 + 9 \\
\hline
a_{10} &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45
\end{aligned}
$$

Masa Problemi Kolektif Çözüm Uzayının Bilgi Türleri Bağlamında Oluşturulmasına İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Öğretmen adaylarının masa problemine ilişkin dokuz farklı çözüm ürettikleri görülmüştür. Ortaya konulan çözüm yaklaşımlarında kullanılan bilgi türü kategorileri temel işlem, geometri, analitik geometri, denklem, örüntü bilgisi şeklindedir (bkz. Şekil 12).

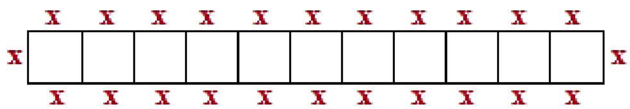
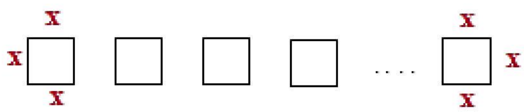
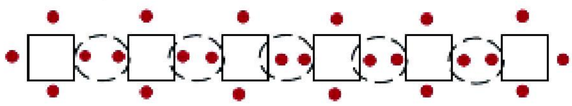
Şekil 12

Masa Problemine Ait Çözüm Uzayında Yer Alan Bilgi Türleri



Şekil 12'de verilen bilgi türlerinden analitik geometri bilgisinin kullanıldığı çözüm yaklaşımında doğrunun analitiğinden yararlanılmıştır (bkz. Çözüm 9). Geometri bilgisinin kullanıldığı çözümlerde ise dikdörtgenin alanından yararlanılmıştır (bkz. Çözüm 4). Bunun yanı sıra geometri bilgisinin kullanıldığı çözümlerde temel işlem bilgisinden de yararlanılmıştır. Bu yüzden masa problemine ait kolektif çözüm uzayında geometri ve temel işlem bilgisi birlikte verilmiştir. Tablo 4'te masa problemi için ortaya çıkan tüm çözümler, bilgi türleri kategorileri bağlamında verilmiştir.

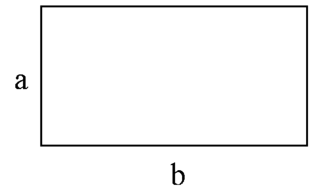
Tablo 4
Masa Problemine Ait Kolektif Çözüm Uzayı

Geometri ve Temel İşlem Bilgisi	Çözüm1:  Kare masalar istenilen şekilde birleştirilmiş ve kişiler "x" simgesiyle gösterilmiştir. Çizilen kare sayısı doğrudan sayılarak sonuç on bir olarak bulunmuştur. Çözüm 2:  Masalar birleştirildiğinde ilk ve son masaya 3'er kişi oturabileceğine göre geriye $(24 - 6 = 18)$ oturması gereken 18 kişi kalır. Birleşen her kare masaya iki kişi karşılıklı oturabildiğine göre; $\frac{18}{2} = 9$ kare masa gerekir. Çözüm 3 :  Masalar birleştirilirse aradaki işaretlenmiş olan kişiler

çıkarılır. Toplam 10 kişi çıkmış olur. Bu ikililer de aralara yerleştirilerek masalara karşılıklı otururlarsa; her iki kişiye bir kare masa gerekir. O halde 10 kişi için beş masa gerekir. İlk başta 6 masa vardı. Toplamda 5+6=11 masa yeterlidir.

Çözüm 4 :

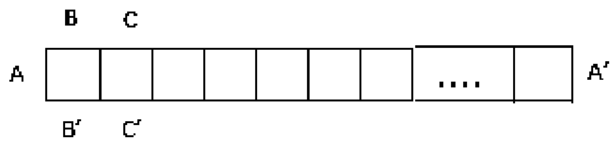
$$2a + 2b = 24$$
$$a + b = 12$$



"$2a + 2b = 24$ olduğuna göre kaç farklı "a.b" ifadesi bulunur?" sorusunun cevabı istenen masa sayısını verir. Dolayısıyla $a + b = 12$ olan "a.b"ler bize masa sayısını verir.

$a + b = 12$		$a.b = Masa\ Sayısı$
1	11	$\boxed{11\ masa}$
2	10	20 "
3	9	27 "
4	8	32 "
5	7	35 "

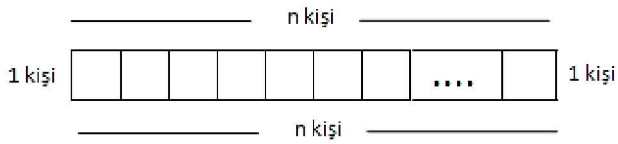
Çözüm 5 :



Çiftlerin hepsinin birbirinin karşısına oturduğunu düşünelim. Çiftlerden biri dikdörtgen şeklindeki masanın kısa kenarlarına oturur. Geriye kalan 11 çift ise dikdörtgen şeklindeki masanın uzun kenarlarına karşılıklı olacak şekilde oturur. Bu durumda bu 11 çift için birer masa gerekeceğinden toplamda 11 masa yeterlidir.

Denklem Bilgisi:

Çözüm 6:



$1 + 1 + n + n = 24$

$2n = 22$

$n = 11$ bulunur.

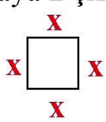
Örüntü Bilgisi:

Çözüm 7:

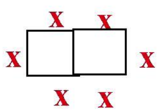
Masa Sayısı	Çift Sayısı	Kişi Sayısı
1	2	4
2	3	6
3	4	8
…		
n	n+1	2(n+1)

Çözüm 8:

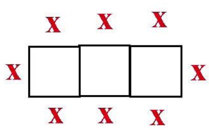
Bir masaya 2 çift, 4 kişi oturabilir.



İki masaya 3 çift, 6 kişi oturabilir.



İki masaya 4 çift, 8 kişi oturabilir.



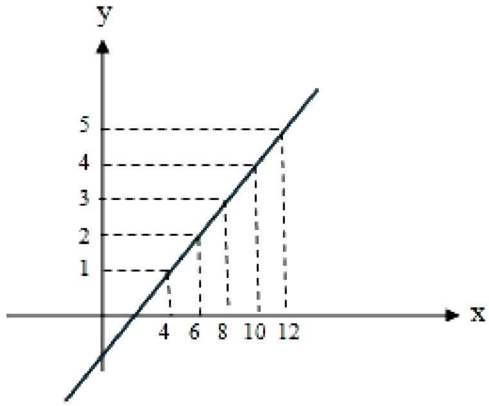
Masa sayısı x olursa, oturacak çift sayısı x+1 olur. O halde;

$x + 1 = 12$

$x = 11$

Analitik Geometri Bilgisi

Çözüm 9 :



İki noktası bilinen doğru denklemi:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

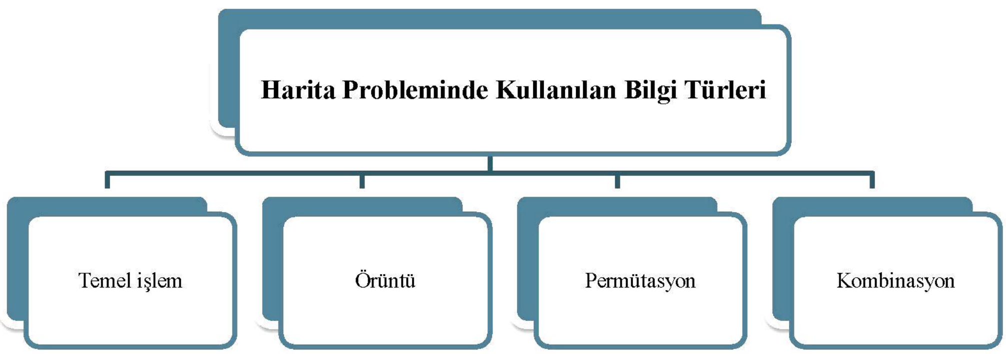
$$2y = x - 2$$

$x = 24$ için
$y = 11$ bulunur.

Harita Problemi Kolektif Çözüm Uzayının Bilgi Türleri Bağlamında Oluşturulmasına İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Harita problemi için öğretmen adaylarının toplamda yedi farklı çözüm ürettikleri görülmüştür. Bu çözümlerde kullanılan bilgi türü kategorileri permütasyon, temel işlem (toplama yoluyla sayma), kombinasyon ve örüntü bilgisidir. Oluşturulan bilgi kategorileri Şekil 13'te verilmiştir.

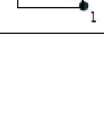
Şekil 13
Harita Problemine Ait Çözüm Uzayında Yer Alan Bilgi Türleri



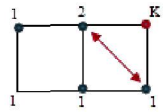
Şekil 13'te verilen bilgi türü kategorileri kullanılarak oluşturan çözümler ayrıntılı olarak Tablo 5'te verilmiştir. Şekil 13'te verilen öğretmen adaylarının kullandıkları bilgi türleri incelendiğinde örüntü bilgisi hariç diğer bilgi türlerinin öğretim programında "Permütasyon-Kombinasyon ve Olasılık Öğrenme Alanı"nda yer aldığı görülmüştür. Örüntü bilgisini kullanan katılımcılar ise ön öğrenmelerine dayalı olarak çözüm yapmışlardır. Harita problemine yönelik katılımcıların ürettikleri yedi farklı çözüm açısından bakıldığında ise; ortaöğretim matematik ders kitaplarında yaygın olarak Çözüm 1 ve Çözüm 4'ün yer aldığı diğer çözümlerin ise söz konusu kaynaklarda yer almadığı görülmüştür. Bu yönü ile üretilen beş çözümün geleneksel çözüm olmadığı sonucuna varılabilir. Yurtdışı alan yazın açısından incelendiğinde ise söz konusu problemin farklı çözüm yollarının stratejiler bağlamında Posamentier ve Krulik'in (1998, s.46) kitabında yer aldığı ve çözümlerde Çözüm 2, Çözüm 3 ve Çözüm 7'nin bulunduğu görülmüştür. İncelenen yurtiçi ve yurtdışı alan yazında ise Çözüm 6'da verilen çözüm yaklaşımına yer verilmediği görülmüştür.

Tablo 5

Harita Problemine Ait Kolektif Çözüm Uzayı

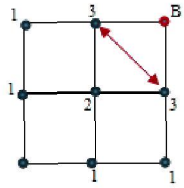
Permütasyon Bilgisi:	Çözüm 1: Doğa Alp'in evine ulaşmak için toplamda 9 br yol gitmelidir. Ancak bu yollardan 4 tanesi ile 5 tanesi aynı olduğundan; tekrarlı permütasyon uygulanır. $\frac{9!}{4!5!} = 126$ farklı yoldan gider. Çözüm 2: 4 yatay ve 5 dikey yol vardır: YYYYDDDDD Problem "(Y,Y,Y,Y,D,D,D,D,D) harflerini kullanarak 9 harfli kaç değişik sayı yazılabilir?" şekline dönüşür. Toplamda gideceği yol sayısı: $\frac{9!}{4!5!} = 126$
Temel İşlem Bilgisi: (Toplama Yoluyla Sayma)	Çözüm 3: Her köşeye o noktaya kaç farklı şekilde gidebileceğini yazarsak; Doğa A noktasına,  1+1=2 farklı yoldan gidebilir.

K noktasına;



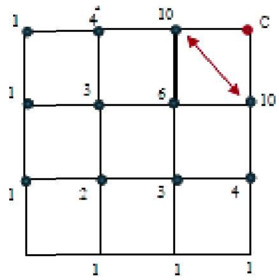
2+1=3 farklı yoldan gidilebilir.

Doğa B noktasına,



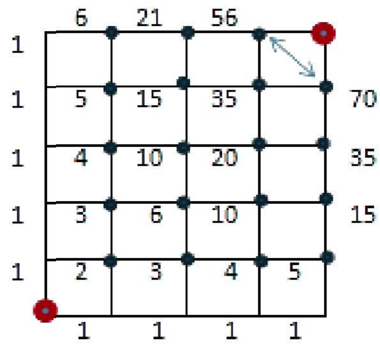
3+3=6 farklı yoldan gidilebilir.

Doğa C noktasına,



10+10=20 farklı yoldan gidebilir.

Benzer şekilde işlemi devam ettirirsek, Alp'in evine 70+56=126 farklı yoldan gidebileceğini buluruz.

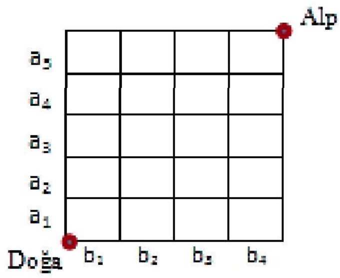


Kombinasyon Bilgisi: Çözüm 4: Doğu'ya doğru 4 farklı yol seçebilir. Kuzeye doğru 5 farklı yol seçebilir. Toplam yol 9 br. Olduğuna göre 4 doğu ya da

5 kuzey belirlenirse diğer yollar belirlenmiş olur.

$$\binom{9}{4} = \binom{9}{5} = \frac{9!}{4!\,5!} = 126 \text{ seçim yapabilir}$$

Çözüm 5: Doğa, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 yollarından birini seçsin; bununla birlikte b_1, b_2, b_3, b_4 yollarından herhangi birini seçebilir.



$$\binom{5}{1}\binom{4}{4} + \binom{5}{2}\binom{4}{3} + \binom{5}{3}\binom{4}{2} + \binom{5}{4}\binom{4}{1} + \binom{5}{5}\binom{4}{0}$$

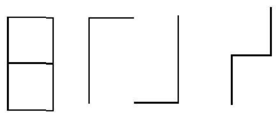
$$= \frac{5!}{4!}.1 + \frac{5!}{3!\,2!}\frac{4!}{3!\,1!} + \frac{5!}{3!\,2!}\frac{4!}{2!\,2!} + \frac{5!}{4!\,1!}\frac{4!}{3!} + 1$$

$$= 5 + 40 + 60 + 20 + 1$$

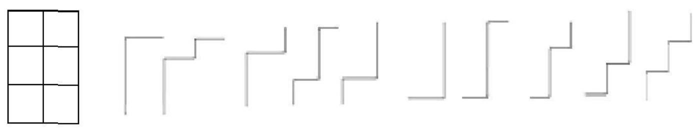
$$= 126 \text{ farklı yoldan gidebilir}$$

Örüntü Bilgisi:

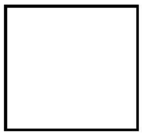
Çözüm 6:



$$\frac{3!}{2!} = 3$$

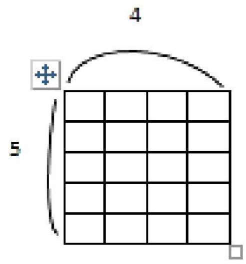


$$\frac{5!}{3!\,2!} = 10$$



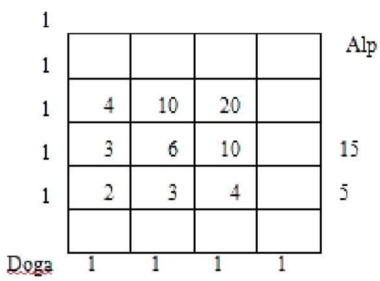
$$\rightarrow \frac{(n+n-1)}{n!(n+1)!} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}$$

O halde;

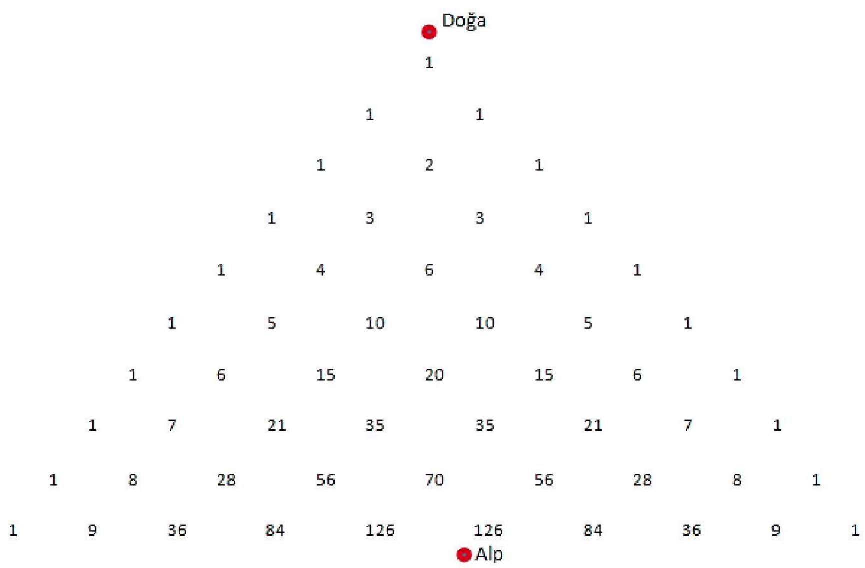


$$\frac{(5+4)!}{5!\,4!} = \frac{9!}{5!4!} = 126$$

<u>Çözüm 7:</u>



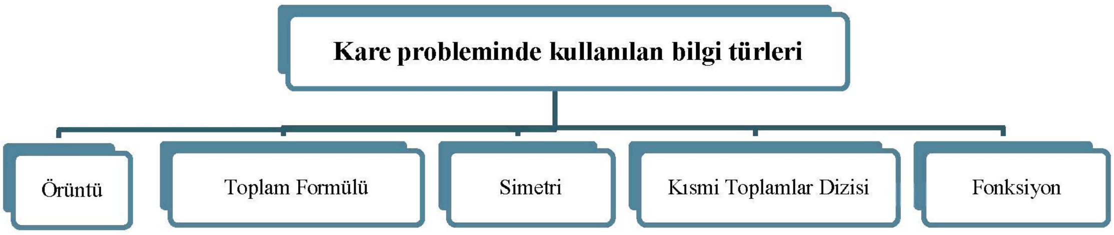
Yandaki haritayı 135^{o} çevirirsek Pascal üçgenine benzer bir yapıyla karşılaşırız.



Kare Problemi Kolektif Çözüm Uzayının Bilgi Türleri Bağlamında Oluşturulmasına İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Kare problemi için öğretmen adaylarının toplamda on farklı çözüm ürettikleri görülmüştür. Bu çözümlerde kullanılan bilgi türü kategorileri örüntü, toplam formülü, kısmi toplamlar dizisi, fonksiyon ve simetri bilgisidir (bkz. Şekil 14).

Şekil 14
Kare Problemine Ait Çözüm Uzayında Yer Alan Bilgi Türleri



Şekil 14'te görülen örüntü ve toplam sembolü bilgisinin problem çözümlerinde birlikte kullanıldığı görülmektedir. Söz konusu çözümlerde toplam sembolü bilgisinin, bulunan örüntüyü matematiksel olarak ifade etmek amacıyla kullanıldığı görülmektedir (bkz. Çözüm5). Şekil 14'te görülen bilgi türleri kullanılarak oluşturulan tüm çözüm yaklaşımları Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6

Kare Problemine Ait Kolektif Çözüm Uzayı

Örüntü-Toplam Sembolü Bilgisi:	<u>Çözüm1:</u> 1. Şekil ⟶ 1 siyah kare fark 4 – 1.4 2. Şekil ⟶ 5 siyah kare fark 8 – 2 . 4 3. Şekil ⟶ 13 siyah kare fark 12 – 3.4 4. Şekil ⟶ 25 siyah kare … … 10. Şekil ⟶ fark 36 – 9.4 O halde ;

1. şekil ile 10. şekil arasındaki kare sayısı farkı;

$$1.4 + 2.4 + 3.4 + \ldots + 9.4 = 4\,(1 + 2 + \cdots + 9)$$

$$= 4.\,9\,.\frac{10}{2} = 180$$

10. şekilde 1+180 = 181 siyah kare vardır.

Çözüm 2:

1. Şekilde siyah + beyaz	$1^2 = 1$ kare	0 Beyaz 1 Siyah
2. Şekilde siyah + beyaz	$3^2 = 9$ kare	4 Beyaz 5 Siyah
3. Şekilde siyah + beyaz	$5^{2=}$ 25 kare	12 Beyaz 13 Siyah
...	...	...
10. şekilde	$19^2 = 361$ kare	180 Beyaz 181 Siyah

Çözüm 3:

1. Şekil → 1 . 1 = 1 kare
2. Şekil → 1.1 + 2.2 = 5 kare
3. Şekil → 2.2 + 3.3 = 13 kare
4. Şekil → 3.3 +4.4 = 25 kare
5. Şekil → 4.4 + 5.5 = 41 kare

n. Şekil → $(n-1)^2 + n^2$ olacağından

10. Şekilde → n=10 için $9^2 + 10^2 = 181$ siyah kare bulunur.

Çözüm 4:

Beyaz karelereden yola çıkılırsa;

1. Şekil: 0
2. Şekil: $1+2+1=4$
3. Şekil: $2+3+2+3+2=2.3+3.2=12\ tane$
4. Şekil: $3+4+3+4+3+4+3=3.4+4.3=24\ tane$

....

n. Şekil: $n(n-1)+\ n(n-1)$

O halde siyah kare sayısı;

1. Şekil; $1^2-0=1$

2. Şekil; $3^2-4=5$

3. Şekil; $5^2-12=13$

4. Şekil; $7^2-24=25$

....

n. şekil; $(2n-1)^2-2\text{n}.(\text{n}-1)$ olacaktır.

10. şekilde; $19^2-2.10.9=361-180=181$ tane siyah kare vardır.

Çözüm 5:

1.şekil 1br. Kenarlı karede 1 siyah

2.şekil 3br. Kenarlı karede $145+\frac{(19-1)\cdot 4}{2}=181$ siyah

3.şekil 5br. Kenarlı karede $1+4+\frac{(5-1)\cdot 4}{2}=1+4+8=13$ siyah

4.şekil 7br. Kenarlı karede $1+4+8+\frac{(7-1)\cdot 4}{2}=25$ siyah

5.şekil 9br. Kenarlı karede $1+4+8+12+\frac{(9-1)\cdot 4}{2}=25+16=41$ siyah

6.şekil 11br. Kenarlı karede

$1+4+8+12+16+\frac{(11-1)\cdot 4}{2}=41+20=61$

7.şekil 13br. Kenarlı karede $= 61 + \frac{(13-1)\cdot 4}{2} = 85$

8.şekil 15br. Kenarlı karede

$$= 85 + \frac{(15-1)\cdot 4}{2} = 113$$

9.şekil 17br. Kenarlı karede

$$= 113 + \frac{(7-1)}{2} \cdot 4 = 145$$

10.şekil 19br. Kenarlı karede

$$= 145 + \frac{(19-1)\cdot 4}{2} = 181$$

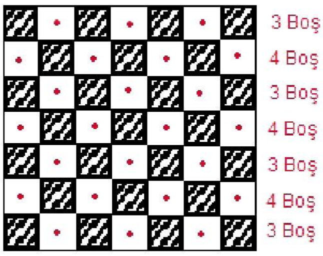
Genellenirse,

n kenar sayısı ise A siyah kare sayısı olsun

$$A = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-2)\cdot 4}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} 4(k-1)$$

Çözüm 6:

Tüm karelerin sayısından beyaz karelerın sayısı çıkarılarak siyah karelerin sayısı bulunur.



10. Şekilde karenin kenarı 19br.

olduğundan beyaz karelerin sayısı

9 10 9 10 9 10 ... 9 (19 tane terim var)

10.9 + 10.9 = 180 tane beyaz kare

361 – 180 = 181tane siyah

Çözüm 7:

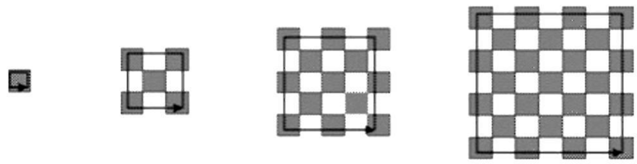
	Siyah Kare Sayısı	Beyaz Kare Sayısı	Toplam Kare Sayısı
1. Şekil	1	0	$1 = 1^2$
2. Şekil	5	4	$9 = 3^2$
3. Şekil	13	12	$25 = 5^2$
4. Şekil	25	24	$49 = 7^2$

5. Şekil	41	40	$81 = 9^2$
6. Şekil	61	60	$121 = 11^2$
7. Şekil	85	84	$169 = 13^2$
8. Şekil	113	112	$225 = 15^2$
9. Şekil	145	144	$289 = 17^2$
10. Şekil	181	180	$361 = 19^2$

Kısmi Toplamlar Dizisi Bilgisi:

Çözüm 8:

Siyah kareler içeriden dışarı doğru sayıldığında;



1. Şekil → 1

2. Şekil → 1 + 4 (2 terim)

3. Şekil → 1+ 4 + 8 (3 terim)

4. Şekil → 1+ 4 + 8 + 12 (4 terim)

"

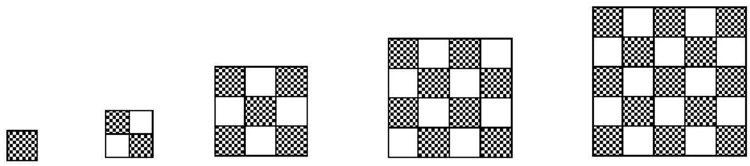
"

10. Şekil → 1+ 4 + 8 + 12+ . . . . (10 terim)

1+ 4 + 8 + 12+...+ 28 + 32 + 36 = 181

Fonksiyon Bilgisi:

Çözüm 9:



(1 × 1) (2 × 2) (3 × 3) (4 × 4) (5 × 5)

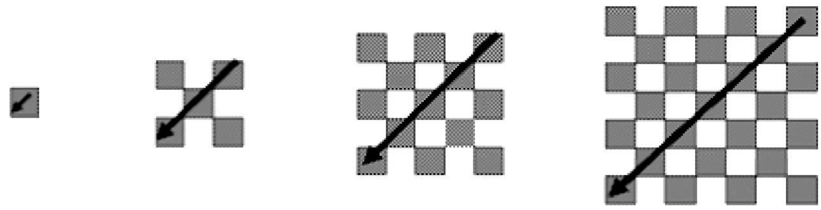
$$(x \times x) = \begin{cases} x\ \text{çiftse}, & \dfrac{x^2}{2}\ \text{siyah}, \dfrac{x^2}{2}\ \text{beyaz kare oluşur.} \\ x\ \text{tekse}, & \dfrac{x^2+1}{2}\ \text{siyah}, \dfrac{x^2-1}{2}\ \text{beyaz kare oluşur.} \end{cases}$$

Şekil sırası m olsun.

m. şekilde $(2m-1)^2$ kadar kare oluşacaktır. Yani şekil; $[(2m-1)\times(2m-1)]$ şeklinde olacaktır. 10. Şekil için; $m = 10$ için $2m-1 = 19$ tek olduğundan;

$\frac{19^2+1}{2} = 181$ siyah kare oluşur.

Simetri Bilgisi: Çözüm 10:



Köşegenler Sayıldığında;

1. Şekil → : $\mathbf{1}$

2. Şekil → : $1 + \mathbf{3} + 1$

3. Şekil → : $1 + 3 + \mathbf{5} + 3 + 1$

4. Şekil → : $1 + 3 + 5 + \mathbf{7} + 5 + 3 + 1$

n. Şekil → : $1 + 3 + \ldots + (\mathbf{2n-1}) + \ldots + 3 + 1 = n^2 + n^2 - (2n-1)$

O halde 10. şekilde : $10^2 + 10^2 - (2.10-1) = 181$

II. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar

İkinci alt problem, matematik öğretmen adaylarının problemlere farklı çözüm yolları üretme durumlarını belirlemeyi ve bu çözüm yollarında kullanılan bilgi türlerine göre öğretmen adaylarının durumunu ortaya çıkarmayı içermektedir. Söz konusu alt problemde hem öğretmen adaylarının ürettikleri çözüm yolları hem de birinci alt problemde,ortaya konan bilgi türü kategorilerinden yararlanılarak analizler gerçekleştirilmiştir. Belirlenen bilgi türü kategorilerine göre yapılan içerik analizi sonucunda her bir bilginin hangi öğretmen adayı tarafından ve hangi sıklıkla kullanıldığı belirlenmiş ve tablolar halinde sunulmuştur. İkinci alt probleme yönelik bulgular ve yorumlar sunulurken her problem için elde edilen çözümlemeler ayrı alt başlıklar altında verilmektedir.

Dik Üçgen Problemine Ait Farklı Çözüm Yollarına İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"Dik Üçgen Problemi" için tüm öğretmen adaylarından toplamda yirmi farklı çözüm yaklaşımının ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının çözümlerinin yer aldığı dokümanlar dik üçgen probleminde üretilen farklı çözümler açısından incelendiğinde elde edilen sonuçlarla Tablo 7 oluşturulmuştur. Tablo 7'ye bakıldığında bir öğretmen adayının tek bir çözüm ürettiği, diğer adayların en az iki çözüm yaklaşımı ortaya koyduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının %16'sı beş ve beşten fazla çözüm üretmiştir.

Tablo 7
Öğretmen Adaylarının Dik Üçgen Problemi İçin Ürettikleri Çözümlere Ait Analiz Sonuçları

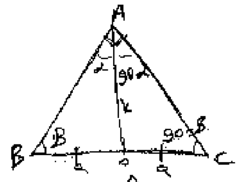
	Üretilen Çözüm Sayısı						
	1	2	3	4	5	6	7
ÖA Sayısı	1	14	16	11	2	3	3
Yüzdesi	%2	%28	%32	%22	%4	%6	%6

Üç öğretmen adayı dik üçgen problemi için yedi farklı çözüm sunarak tüm öğretmen adayları içerisinde en çok çözüm üreten adaylar olmuşlardır. Söz konusu öğretmen adaylarından biri olan $ÖA_{31}$'in tüm çözüm yaklaşımları Şekil 15'te verilmiştir.

Şekil 15

ÖA$_{31}$'in Dik Üçgen Problemi için Ortaya Koyduğu Tüm Çözüm Yaklaşımları

Çözüm 1:



Sin Teoreminde; $\overset{\Delta}{ABO}$'da

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin B}{k}$ ...(1)

$\frac{\sin^2\alpha}{a^2} = \frac{\sin^2 B}{k^2}$

$\overset{\Delta}{AOC}$'de

$\frac{\sin (90-\alpha)}{a} = \frac{\sin (90-B)}{k}$

$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos B}{k}$ ...(2)

$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} = \frac{\cos^2 B}{k^2}$

Buradan

$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{a^2} = \frac{\sin^2 B + \cos^2 B}{k^2} \Leftrightarrow k^2 = a^2$ $k, a > 0$ $\boxed{k = a}$

Çözüm 2:

Aynı şekilde ayrıca $|AC| = b$ olsun

$\overset{\Delta}{ABC}$'de sin teoreminden

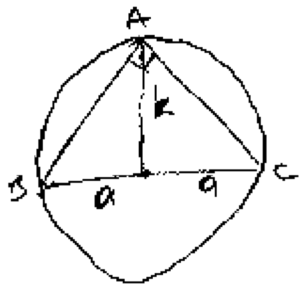
$\frac{\sin 90}{2a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow b = 2a.\sin B$ sonra

$\overset{\Delta}{AOC}$'de cos teoreminden

$k^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos(90-B)$ devamında

$\boxed{k = a}$ gelir.

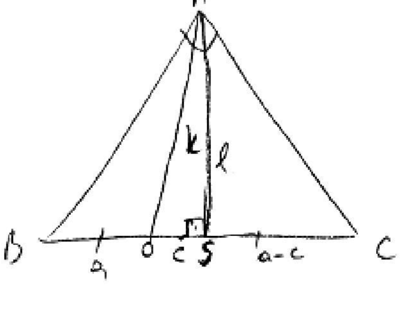
Çözüm 3 :



Çapı gören çevre açı 90°'dir

Buradan $a = k$ görülür.

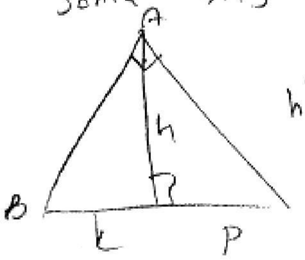
Çözüm 4 :



$\overset{\triangle}{AOS}$'den

$\ell^2 = k^2 - c^2$ --- (1)

Sonra biliyoruz ki

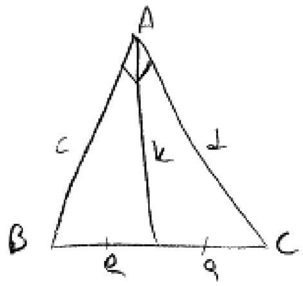


$h^2 = k.p$

Bunu kullanarak

$\ell^2 = \left(\sqrt{k^2-c^2}\right)^2 = (a+c).(a-c) \iff a = k$

Çözüm 5 :



$k^2 = \dfrac{c^2a+d^2a}{2a} - a^2$ ve $c^2+d^2=4a^2$

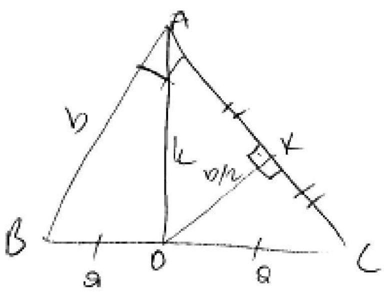
$c^2 = 4a^2-d^2$

$k^2 = \dfrac{4a^3-d^2a+d^2a}{2a} - a^2$

$k^2 = a^2$

$\boxed{k = a}$

Çözüm 6 :



OK // AB

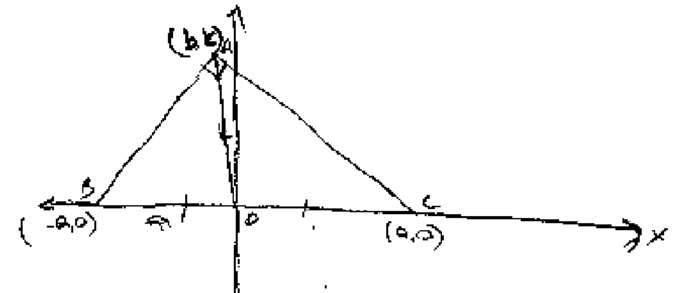
$\overset{\triangle}{AOC}$ ikizkenar dik olmalı

Çünkü

OK ⊥ AC ve |AK|=|KC|'dir

Yani; a = k'dır.

Çözüm 7 :



AC ⊥ AB olduğundan

$\frac{c}{b+a} \cdot \frac{c}{b+a} = -1 \iff \frac{c^2}{b^2-a^2} = -1 \quad c^2 = a^2 - b^2$

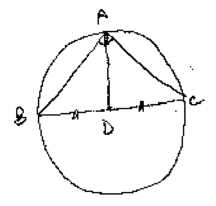
$a^2 = b^2 + c^2$

$|AO| = k^2 = b^2 + c^2$'dir

Yani $a = k$'dır.

Katılımcıların çözüm uzayında yer alan matematiksel bilgi kategorilerini kullanma durumlarını ortaya koymak üzere Tablo 8 oluşturulmuştur. Tablo 8 incelendiğinde katılımcıların dik üçgen problemi için en az bir çözüm üretebildiği ve bu bir çözüm üreten öğretmen adaylarının ise çember bilgisinden yararlandığı (bkz. Şekil 16) görülmüştür.

Şekil 16
ÖA$_1$'in Çözüm Yaklaşımı



Bir çember üzerindeki hipotenüse çap uzunluğuna eşit olan bir dik üçgen çizelim. A noktasındaki açı dik ve BC çap aynı zamanda hipotenüs olsun. BC uzunluğunu D noktası ile eşit parçaya bölersek BD = DC. merkez aynı zamanda D noktası olacaktır. A'dan D noktasına bir doğru çizilirse AD doğrusu aynı zamanda çemberin yarıçapıdır. ABC üçgeninde kenar ortaydır. BD = DC = AD = r dir.

O halde bir üçgende hipotenüse çizilen kenar ortay hipotenüsün yarısı kadardır.

Tablo 8
Dik Üçgen Probleminin Çözüm Uzayında Yer Alan Bilgi Türlerine Yönelik Analiz Sonuçları

	Geometri				Trigonometri		Analitik Geometri		
	Dikdörtgen	ÜÇGEN BİLGİSİ		Çember	Teorem Ve Özdeşlik	Trigonometrik Oran	Eğim-Uzaklık	Orta Nokta	Simetri
		Teorem	Alan						
Öğretmen Adayı	ÖA$_{4}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{17}$,ÖA$_{19}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{27}$,ÖA$_{29}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{34}$,ÖA$_{38}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{43}$,ÖA$_{44}$, ÖA$_{47}$	ÖA$_{2}$,ÖA$_{3}$, ÖA$_{5}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{8}$, ÖA$_{9}$,ÖA$_{10}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{12}$,ÖA$_{13}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{22}$, ÖA$_{23}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{37}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{42}$, , ÖA$_{43}$,ÖA$_{44}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{46}$, ÖA$_{48}$, ÖA$_{49}$, ÖA$_{50}$	ÖA$_{40}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{49}$	ÖA$_{1}$, ÖA$_{2}$,ÖA$_{3}$, ÖA$_{4}$, ÖA$_{5}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{8}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{12}$,ÖA$_{13}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{22}$, ÖA$_{23}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{27}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{37}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{42}$, , ÖA$_{43}$,ÖA$_{44}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{47}$, ÖA$_{48}$, ÖA$_{49}$, ÖA$_{50}$	ÖA$_{6}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{45}$	ÖA$_{31}$	ÖA$_{15}$, ÖA$_{31}$	ÖA$_{5}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{50}$	ÖA$_{28}$
Kullanan ÖA Sayısı	19	45	3	49	5	1	2	3	1
Kullanma Sıklığı	20	88	3	49	5	1	2	3	1

Tablo 8 incelendiğinde öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun (%96) ürettiği farklı çözümlerde üçgen bilgisinden yaralandığı görülmüştür. Aynı zamanda hemen hemen tüm öğretmen adayları (%98) yaptıkları çözümlerin birinde çember bilgisinden faydalanmıştır. Öğretmen adaylarının %38'si dikdörtgen bilgisinden, %12'si trigonometri bilgisinden ve %12'si de analitik geometri bilgisinden yaralanarak çözüm üretebilmiştir. Analitik geometri bilsinden yararlanarak problemi çözen öğretmen adaylarının dik üçgen problemi için en az üç farklı çözüm ürettikleri görülmüştür. Trigonometri bilgisini kullanabilen öğretmen adaylarının ise en çok çözüm üreten adaylar arasında yer aldığı belirlenmiştir. Bununla birlikte öğretmen adaylarının dik üçgen problemine ait ürettikleri farklı çözüm yollarına bakıldığında en çok üçgenle ilgili teoremlerden faydalandıkları belirlenmiştir. Trigonometri ve analitik geometri bilgisine başvuran öğretmen adaylarının ise tüm katılımcıların %20'sini oluşturduğu görülmüştür.

El Sıkışma Problemine Ait Farklı Çözüm Yollarına İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"El Sıkışma Problemi" için tüm öğretmen adaylarından toplamda on altı farklı çözüm yaklaşımının ortaya çıktığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının çözümlerinin yer aldığı dokümanlar el sıkışma probleminde üretilen farklı çözümler açısından incelendiğinde elde edilen sonuçlarla Tablo 9 oluşturulmuştur.

Tablo 9

Öğretmen Adaylarının El Sıkışma Problemi İçin Ürettikleri Çözümlere Ait Analiz Sonuçları

	Üretilen Çözüm Sayısı					
	1	2	3	4	5	6
ÖA Sayısı	1	9	23	13	2	2
Yüzdesi	%2	%18	%46	%26	%4	%4

Tablo 9 incelendiğinde tüm öğretmen adaylarının el sıkışma problemi için en az bir çözüm üretebildiği ve söz konusu çözümlerinde ise temel işlem bilgisinden yararlandığı (bkz. Tablo 10) görülmüştür. Bir öğretmen adayı sadece tek çözüm yaklaşımı sunarken (bkz. Şekil 17) diğer adaylar en az iki çözüm üretebilmişlerdir.

Şekil 17

ÖA$_5$'in Çözüm Yaklaşımı

1. kişi → 9 kişiyle el sıkışacak
2. kişi → 1. hariç 8 kişiyle
3. kişi → 1. ve 2. hariç 7 kişi ile
⋮
9. kişi → 1, 2, 3, 4, ..., 8. hariç 1 kişi ile
10. kişi → herkesle el sıkışmış olduğu için farklı biriyle el sıkışmayacak.

$\frac{9.10}{2} = 45$ el sıkışması olacak

Genel adımı: Kişi sayısı n

$\frac{(n-1)n}{2}$ ⇒ Toplam el sıkışma sayısını verir

Öğretmen adaylarının %8'i beş ve beşten fazla çözüm üretmişlerdir. Buna ek olarak iki öğretmen adayının ise altı farklı çözüm sunarak tüm öğretmen adayları içerisinde en çok çözüm üreten adaylar oldukları belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarından biri olan ÖA$_{29}$'ün tüm çözümleri Şekil 18'de verilmiştir.

Şekil 18

ÖA$_{29}$'un Tüm Çözüm Yaklaşımları

Çözüm 1:

10 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı bütün alt kümeleridir

$\binom{10}{2} = \frac{10.9}{2} = 45$

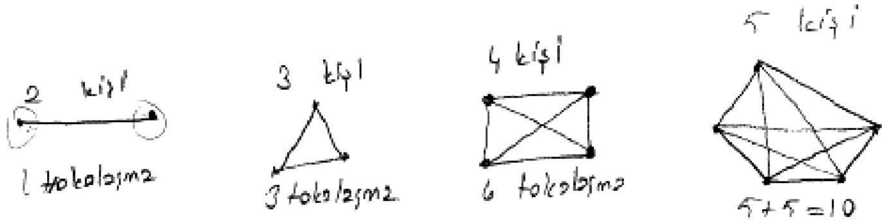
Çözüm 2 :

2 kişi : 2(1 tokalaşma
3 kişi : 3(3 ''
4 '' : 4(6 ''
5 '' : 5(10 ''
6 '' : 15 ''
⋮
10 '' : 9(45 ''

$\frac{5.6}{2}$

$\frac{9.10}{2}$

Çözüm 3 :



10 kişi

köşegen $\frac{10.(7)}{2} = 35$

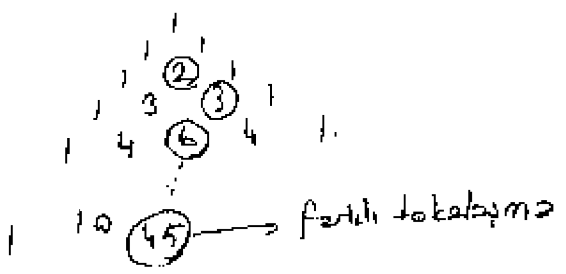
kenar : 10 $= 10$

45 tokalaşma

Çözüm 4 :

Gruptaki her bir birey 9 kişi ile tokalaşacaktır.
Grupta 10 kişi var.
10.9=90 ancak A kişisi B ile tokalaşınca B kişisi A ile tokalaşmış olur. $\frac{90}{2}=45$

Çözüm 5 :



Çözüm 6 :

$(a_{n+1}) = a_n + n$ ve $a_1 = 0$ olan dizide a_{10}, 10 kişinin tokalaşma sayısını verir.

$a_2 = a_1 + 1$
$a_3 = a_2 + 2$
$\vdots$
$+\ a_{10} = a_9 + 9$
$a_{10} = 1+2+3+\dots+9 = 45$

Katılımcıların çözüm uzayında yer alan matematiksel bilgi kategorilerini kullanma durumlarını ortaya koymak üzere Tablo 10 oluşturulmuştur. Yapılan içerik analizi sonucunda öğretmen adaylarının yarısından fazlasının el sıkışma probleminin çözümü için doğrudan kombinasyon bilgisini kullandığı ortaya çıkmıştır. Katılımcıların %54'ü ise problem çözme sürecinde işlem kolaylığı sağlaması için farklı basamaklarda toplam formüllerinden yararlanmışlardır. Diğer yandan katılımcıların yarısı dört işlem dışında herhangi bir bilgiye gereksinim duymadan problemi çözebilmiştir. Öğretmen adaylarının %28'i çözümlerini geometrik şekillerden faydalanarak yapmıştır. Geometrik şekil oluşturan bazı öğretmen adaylarının çokgen bilgisi yardımıyla çözüme ulaştıkları görülürken bazılarının ise benzer bir problemin çözümünden faydalandıkları görülmüştür. Kartezyen çarpımı, aritmetik dizi ve analitik geometri bilgilerini kullanarak çözüm üreten öğretmen adaylarının düşük yüzdeye (sırasıyla %6, %2, %10) sahip olduğu saptanmıştır. Ek olarak farklı türdeki bilgileri kullanabilen öğretmen adaylarının farklı çözüm yolları üretebildikleri belirlenmiştir.

Tablo 10

El Sıkışma Probleminin Çözüm Uzayında Yer Alan Bilgi Türlerine Yönelik Analiz Sonuçları

	Kombinasyon	Geometri	Temel işlem	Toplam formülü	Örüntü	Kartezyen çarpım	Tablo	Aritmetik dizi	Analitik geometri
Öğretmen Adayı	ÖA$_{1}$, ÖA$_{2}$, ÖA$_{3}$, ÖA$_{5}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{14}$,ÖA$_{20}$, ÖA$_{23}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{46}$, ÖA$_{47}$, ÖA$_{48}$, ÖA$_{49}$, ÖA$_{50}$	ÖA$_{4}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{8}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{37}$	ÖA$_{1}$, ÖA$_{2}$, ÖA$_{3}$, ÖA$_{4}$, ÖA$_{5}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{22}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{27}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{37}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{48}$	ÖA$_{6}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{8}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{22}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{46}$, ÖA$_{49}$, ÖA$_{50}$	ÖA$_{4}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{27}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{37}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{45}$	ÖA$_{4}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{48}$,	ÖA$_{1}$, ÖA$_{2}$, ÖA$_{3}$, ÖA$_{4}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{23}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{48}$, ÖA$_{49}$	ÖA$_{29}$	ÖA$_{6}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{47}$
Kullanan ÖA Sayısı	32	14	28	27	17	3	22	1	5
Kullanma Sıklığı	34	16	32	32	24	3	21	1	5
Kullanan Öğretmen Adayı	%64	%28	%56	%54	%34	%6	%44	%2	%10

Masa Problemine Ait Farklı Çözüm Yollarına İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"Masa Problemi" için tüm öğretmen adaylarından toplamda dokuz farklı çözüm yaklaşımının ortaya çıktığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının çözümlerinin yer aldığı dokümanlar masa probleminde üretilen farklı çözümler açısından incelendiğinde elde edilen sonuçlarla Tablo 11 oluşturulmuştur.

Tablo 11
Öğretmen Adaylarının Masa Problemi İçin Ürettikleri Çözümlere Ait Analiz Sonuçları

	Üretilen Çözüm Sayısı				
	0	1	2	3	4
ÖA Sayısı	1	15	25	8	1
Yüzdesi	%2	%30	%50	%16	%2

Tablo 11 incelendiğinde bir öğretmen adayının masa problemi için hiç çözüm üretemediği görülmektedir. Onun dışındaki tüm öğretmen adayları masa problemi için en az bir çözüm üretebilmiştir. Öğretmen adaylarının %18'i üç ve daha fazla çözüm üretebilmişlerdir. Ancak katılımcıların yarısının bu probleme iki farklı çözüm yaklaşımı ortaya koyabilmiştir. Katılımcıların çözüm uzayında yer alan matematiksel bilgi kategorilerini kullanma durumlarını ortaya koymak üzere Tablo 12 oluşturulmuştur.

Tablo 12

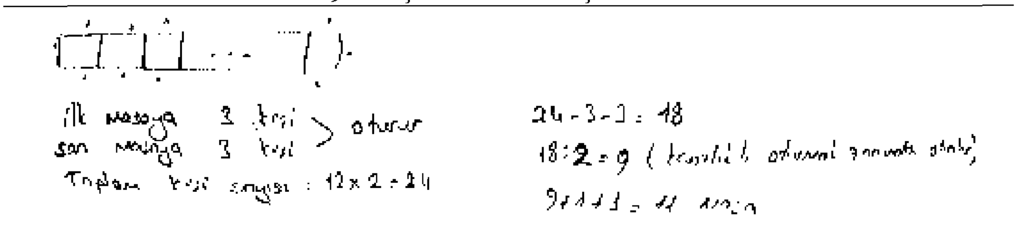
Masa Probleminin Çözüm Uzayında Yer Alan Bilgi Türlerine Yönelik Analiz Sonuçları

	Geometri	Temel İşlem	Denklem	Örüntü	Analitik Geometri
Öğretmen Adayı	$ÖA_1$, $ÖA_7$, $ÖA_{10}$, $ÖA_{11}$, $ÖA_{13}$, $ÖA_{19}$, $ÖA_{20}$, $ÖA_{23}$, $ÖA_{24}$, $ÖA_{26}$, $ÖA_{32}$, $ÖA_{33}$, $ÖA_{34}$, $ÖA_{35}$, $ÖA_{36}$, $ÖA_{38}$, $ÖA_{39}$, $ÖA_{40}$, $ÖA_{42}$, $ÖA_{45}$	$ÖA_1$, $ÖA_6$, $ÖA_7$, $ÖA_9$, $ÖA_{10}$, $ÖA_{11}$, $ÖA_{13}$, $ÖA_{14}$, $ÖA_{19}$, $ÖA_{20}$, $ÖA_{23}$, $ÖA_{24}$, $ÖA_{29}$, $ÖA_{30}$, $ÖA_{31}$, $ÖA_{32}$, $ÖA_{33}$, $ÖA_{34}$, $ÖA_{35}$, $ÖA_{36}$, $ÖA_{38}$, $ÖA_{39}$, $ÖA_{40}$, $ÖA_{41}$, $ÖA_{42}$, $ÖA_{44}$, $ÖA_{45}$, $ÖA_{47}$, $ÖA_{50}$	$ÖA_3$, $ÖA_8$, $ÖA_{14}$, $ÖA_{16}$, $ÖA_{17}$, $ÖA_{21}$, $ÖA_{22}$, $ÖA_{23}$, $ÖA_{26}$, $ÖA_{27}$, $ÖA_{34}$, $ÖA_{39}$, $ÖA_{44}$, $ÖA_{46}$, $ÖA_{48}$, $ÖA_{49}$	$ÖA_4$, $ÖA_5$, $ÖA_7$, $ÖA_9$, $ÖA_{10}$, $ÖA_{12}$, $ÖA_{15}$, $ÖA_{16}$, $ÖA_{18}$, $ÖA_{19}$, $ÖA_{21}$, $ÖA_{22}$, $ÖA_{25}$, $ÖA_{27}$, $ÖA_{28}$, $ÖA_{31}$, $ÖA_{37}$, $ÖA_{38}$, $ÖA_{40}$, $ÖA_{42}$, $ÖA_{43}$, $ÖA_{45}$	$ÖA_7$, $ÖA_{12}$
Kullanan Öğretmen Adayı Sayısı	20	29	16	22	2
Kullanma Sıklığı	22	42	19	29	2
Kullanan Öğretmen Adayı Yüzdesi	%40	%58	%32	%44	%4

Tablo 12 incelendiğinde masa problemi için öğretmen adaylarının %58'inin temel işlem bilgisini kullanarak çözüm yaklaşımları sergiledikleri görülmektedir. Bununla birlikte bu öğretmen adaylarının bir bölümü masa yerleşimi için şekiller çizmiş ve çizdikleri geometrik şekillerin özelliklerinden de faydalanarak çözümlerini gerçekleştirmişlerdir. Temel işlem bilgisini kullanan öğretmen adaylarının diğer bölümü ise (bkz.Şekil 19) mantıksal sorgulama ardından dört işlem yaparak problemin çözümüne ulaşmıştır.

Şekil 19

ÖA$_9$'un Çözüm Yaklaşımı

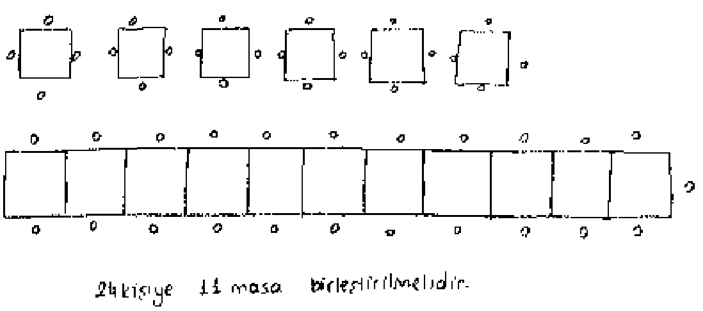


Dört farklı çözüm üreten öğretmen adayı, iki farklı çözümünde temel işlem bilgisinden yararlanmış, bir çözümünde geometrik şekil çizip temel işlem bilgisini kullanmayı tercih etmiş ve bir çözümünde ise örüntü bilgisini kullanmıştır. Tüm öğretmen adayları içinde en çok çözüm üreten söz konusu öğretmen adayının (ÖA$_{45}$) çözümleri Tablo 13'te verilmiştir.

Tablo 13

ÖA$_{45}$'in Tüm Çözüm Yaklaşımları

Çözüm 1 :



Çözüm 2 :

Masalar birleştirildiğinde, her iki uçtaki masaların çevresine 3 kişi oturur.
3.2 = 6 kişi uçtaki masalarda oturur.

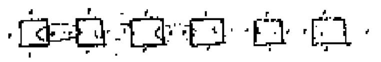
12 çift 24 kişidir.

24-6 = 18 kişi kaldı.

Aradaki masaların iki kenarı kapalı olduğu için, bu masalara sadece 2 kişi oturur. 18:2 = 9 masa gerekir.

Başta 2 masa vardı. Toplamda 2+9 = 11 masa gerekir.

Çözüm 3 :



Bu masalar birleştirilirse aradaki işaretlenmiş olan kişiler çıkarılır.
Toplam 10 kişi çıkmış olur.
Bu ikililer de, aralara yerleştirilecek masalara karşılıklı otururlarsa;
her 2 kişiye 1 tane masa gerekir. O halde 10 kişiye 5 masa gerekir.
İlk başta 6 masa vardı. Toplam olarak 6+5 = 11 masa gerekir.

Çözüm 4 :

2 çift	4 kişi	1 masa
3 çift	6 kişi	2 masa
4 çift	8 kişi	3 masa
5 çift	10 kişi	4 masa
6 çift	12 kişi	5 masa
⋮		⋮
12 çift	24 kişi	11 masa
⋮		
n çift	2n kişi	n-1 masa

n tane çift varsa, n-1 tane masa gerekir.

Masa probleminin çözümü için bir yaklaşımında analitik geometri bilgisini kullanan $ÖA_7$ ve $ÖA_{12}$ toplamda üçer çözüm üretebilmişlerdir. Öğretmen adaylarının %32'si çözüm aşamasında birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurarak problemde istenen masa sayısına ulaşmıştır. Öğretmen adaylarının %44'ü problemi basitleştirerek kişi sayısı ile gereken masa sayısı arasında bir örüntü bulmaya çalışmıştır. En sık kullanılan bilgi dört işlemi içeren temel işlem bilgisi olmuştur. Bununla birlikte örüntü bilgisinin kullanım sıklığına bakıldığında bir öğretmen adayının farklı çözümler yaparken en az bir kez bu bilgiye başvurduğu görülmüştür.

Harita Problemine Ait Farklı Çözüm Yollarına İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"Harita Problemi" için tüm öğretmen adaylarından toplamda yedi farklı çözüm yaklaşımının ortaya çıktığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının çözümlerinin yer aldığı dokümanlar harita probleminde üretilen farklı çözümler açısından incelendiğinde elde edilen sonuçlarla Tablo 14 oluşturulmuştur.

Tablo 14

Öğretmen Adaylarının Harita Problemi İçin Ürettikleri Çözümlere Ait Analiz Sonuçları

	Üretilen Çözüm Sayısı				
	0	1	2	3	4
ÖA Sayısı	1	26	16	6	1
Yüzdesi	%2	%52	%32	%12	%2

Harita problemi için hiç çözüm üretemeyen öğretmen adayı sayısı bir iken analiz sonuçları incelendiğinde katılımcıların %52'lik bir bölümü sadece bir çözüm üretebilmişlerdir. Üç ve dört çözüm üreten öğretmen adayları tüm katılımcıların %14'ünü oluşturmaktadır. Katılımcıların çözüm uzayında yer alan matematiksel bilgi kategorilerini kullanma durumlarını ortaya koymak üzere Tablo 15 oluşturulmuştur.

Tablo 15

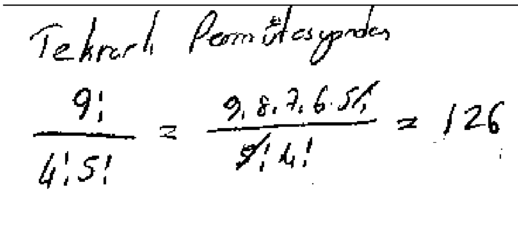
Harita Probleminin Çözüm Uzayında Yer Alan Bilgi Türlerine Yönelik Analiz Sonuçları

				Örüntü Bilgisi	
	Tekrarlı Permütasyon	Kombinasyon	Temel İşlem	Bilinen Bir Örüntü	Örüntü Kuralını Oluşturarak
Kullanan Öğretmen Adayları	$ÖA_2$,$ÖA_3$,$ÖA_4$, $ÖA_5$,$ÖA_6$,$ÖA_7$, $ÖA_8$, $ÖA_9$, $ÖA_{10}$, $ÖA_{11}$,$ÖA_{12}$,$ÖA_{13}$, $ÖA_{14}$,$ÖA_{15}$,$ÖA_{16}$, $ÖA_{17}$,$ÖA_{18}$,$ÖA_{19}$, $ÖA_{20}$,$ÖA_{21}$,$ÖA_{22}$, $ÖA_{23}$,$ÖA_{24}$,$ÖA_{25}$, $ÖA_{26}$,$ÖA_{27}$,$ÖA_{28}$, $ÖA_{29}$,$ÖA_{30}$,$ÖA_{31}$, $ÖA_{32}$,$ÖA_{33}$,$ÖA_{34}$, $ÖA_{35}$,$ÖA_{36}$,$ÖA_{37}$, $ÖA_{38}$,$ÖA_{39}$,$ÖA_{40}$, $ÖA_{41}$,$ÖA_{42}$,$ÖA_{43}$, $ÖA_{44}$,$ÖA_{45}$,$ÖA_{46}$, $ÖA_{47}$,$ÖA_{48}$,$ÖA_{49}$, $ÖA_{50}$	$ÖA_8$, $ÖA_{15}$, $ÖA_{16}$,$ÖA_{21}$, $ÖA_{22}$,$ÖA_{32}$, $ÖA_{38}$, $ÖA_{44}$	$ÖA_8$, $ÖA_{15}$, $ÖA_{21}$, $ÖA_{22}$, $ÖA_{38}$	$ÖA_8$	$ÖA_8$, $ÖA_9$, $ÖA_{12}$, $ÖA_{13}$, $ÖA_{18}$, $ÖA_{19}$, $ÖA_{29}$, $ÖA_{35}$, $ÖA_{36}$, $ÖA_{43}$, $ÖA_{45}$, $ÖA_{48}$
Kullanan Öğretmen Adayı Sayısı	49	8	5	1	12
Kullanma Sıklığı	55	8	5	1	12
Kullanan Öğretmen Adayı Yüzdesi	%98	%16	%10	%2	%24

Bir çözüm üreten tüm öğretmen adayları çözümlerinde tekrarlı permütasyon bilgisinden yararlanmışlardır. Harita problemine çözüm üretebilen öğretmen adaylarının tamamı tekrarlı permütasyon bilgisini (bkz. Şekil 20) kullanmıştır. Bazı öğretmen adaylarının farklı çözümlerinde tekrarlı permütasyon bilgisini birden çok kullandığı dikkat çekmektedir. Öğretmen adayları bu bilgiyi kullandığı çözümlerinde ya doğrudan tekrarlı permütasyon formülünü uygulamışlar ya da benzer bir problemin çözümünden faydalanmışlardır.

Şekil 20

ÖA$_{21}$'in Çözüm Yaklaşımı

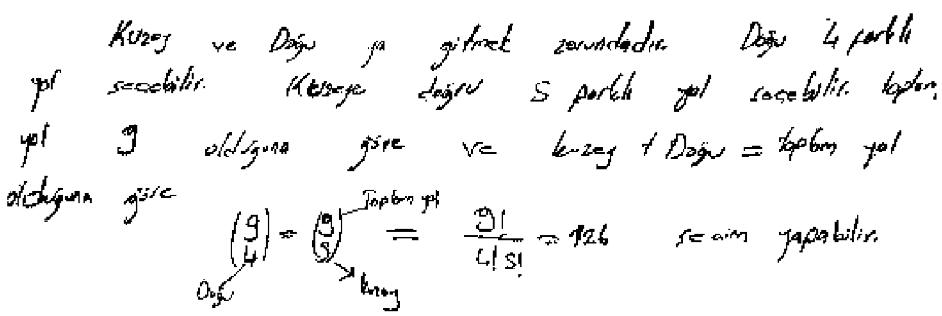


Tekrarlı permütasyon bilgisinden sonra en çok kullanılan bilgi örüntü bilgisi olmuştur. Sadece bir öğretmen adayı problemi çözerken Pascal üçgeni ile benzerlik kurup bilinen bir örüntüden yararlanarak çözüme ulaşırken öğretmen adaylarının %24'ü örüntünün kuralını kendileri oluşturarak çözüm yapmışlardır. Katılımcıların %16'sı kombinasyon bilgisini kullanarak çözümlerinde farklı yaklaşımlar sunmuşlardır (bkz. Şekil 21).

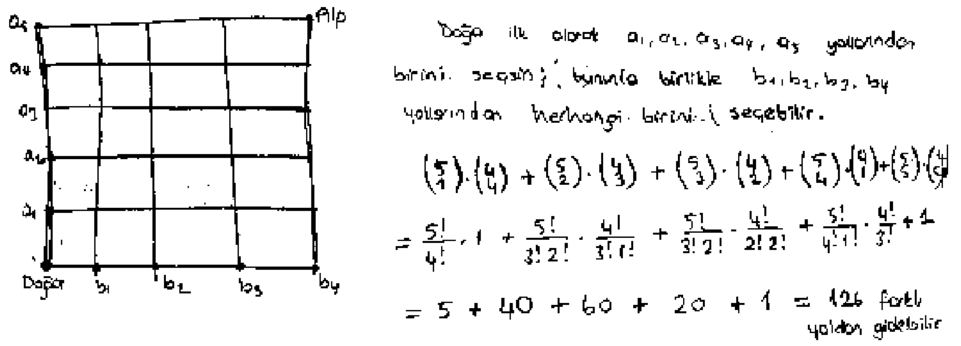
Şekil 21

Harita Probleminin Çözümünde Kombinasyon Bilgisini Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

ÖA$_{44}$'ün çözüm yaklaşımı



ÖA$_{22}$'in çözüm yaklaşımı

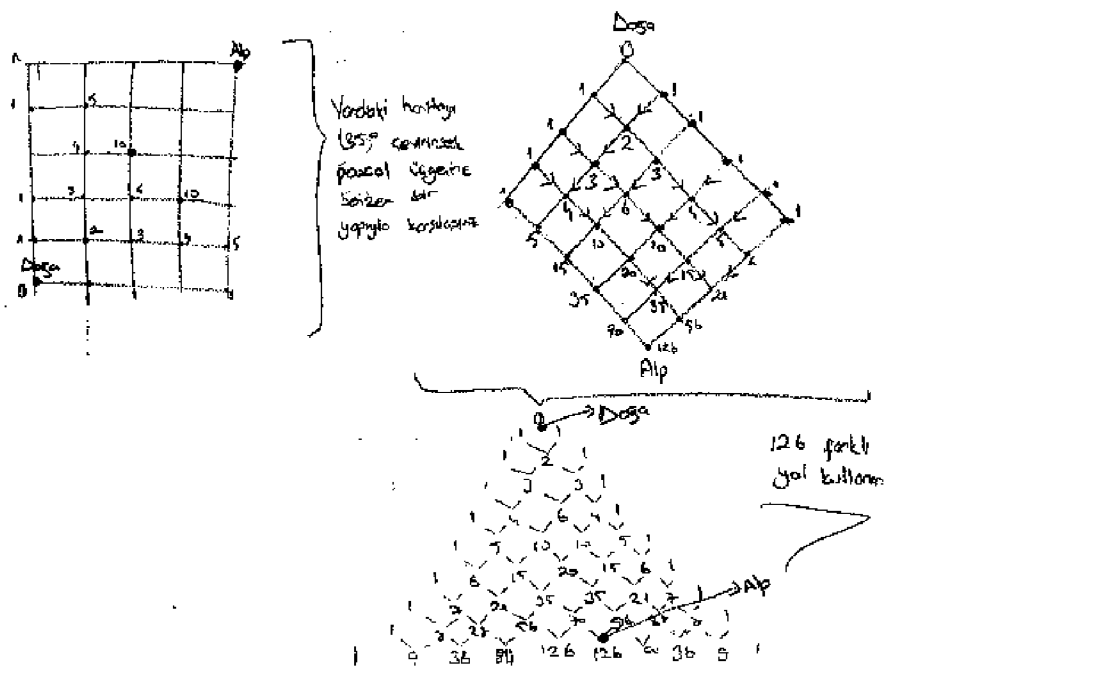


Öğretmen adaylarının sadece %10'u temel işlem bilgisini kullanarak çözüme ulaşmıştır ve bu öğretmen adayları harita problemi için en az üç farklı çözüm üreterek tüm öğretmen adayları içinde en çok çözüm üreten grup içinde yer almışlardır. Harita problemi için en fazla çözüm üreten öğretmen adayı olan ÖA$_8$ dört çözüm yaklaşımı ortaya koymuş ve Tablo 15'te yer alan tüm bilgileri kullanmıştır. ÖA$_8$'in tüm çözüm yaklaşımları Şekil 22 'de verişmiştir.

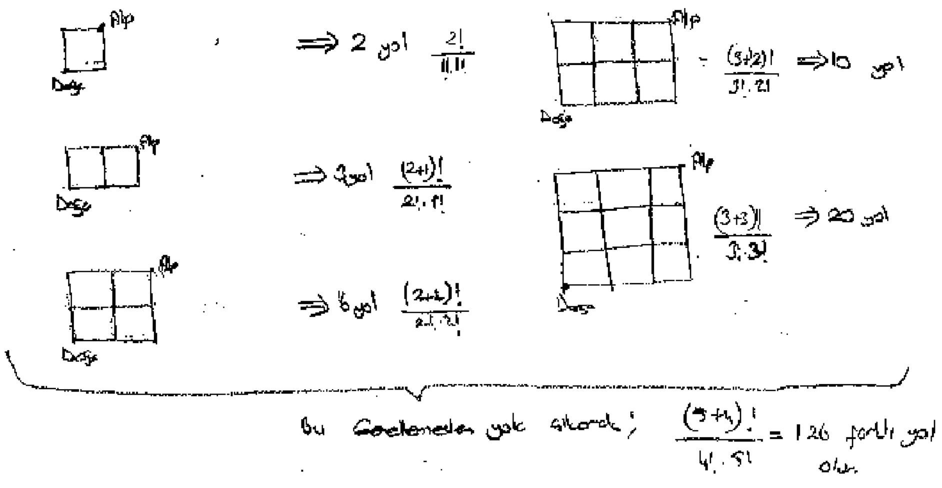
Şekil 22

ÖA$_8$'in Tüm Çözüm Yaklaşımları

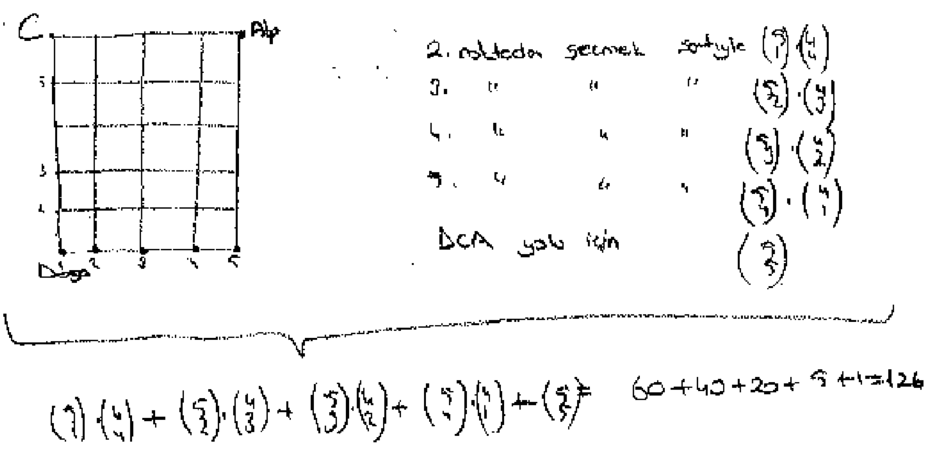
Çözüm 1 :



Çözüm 2 :



Çözüm 3 :



Çözüm 4 :

$$\frac{9!}{4!.5!} = 126$$

Kare Problemine Ait Farklı Çözüm Yollarına İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"Kare Problemi" için tüm öğretmen adaylarından toplamda on farklı çözüm yaklaşımının ortaya çıktığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının çözümlerinin yer aldığı dokümanlar kare probleminde üretilen farklı çözümler açısından incelendiğinde elde edilen sonuçlarla Tablo 16 oluşturulmuştur.

Tablo 16

Öğretmen Adaylarının Kare Problemi İçin Ürettikleri Çözümlere Ait Analiz Sonuçları

	Üretilen Çözüm Sayısı					
	0	1	2	3	4	5
ÖA Sayısı	1	4	13	17	11	4
Yüzdesi	%2	%8	%26	%34	%22	%8

Tablo 16'ya bakıldığında bir öğretmen adayının kare problem için hiç çözüm üretemediği görülmüştür. Kare problem için bir çözüm üreten öğretmen adayları örüntü bilgisini kullanarak sonuca ulaşmışlardır. Dört ve beş farklı çözüm yaklaşımında bulunan öğretmen adayları ise tüm katılımcıların % 30'unu oluşturmaktadır. Tablo 17'de ise söz konusu bilgi türlerini çözümlerinde kullanan öğretmen adayları ayrıntılı olarak sunulmuştur.

Tablo 17

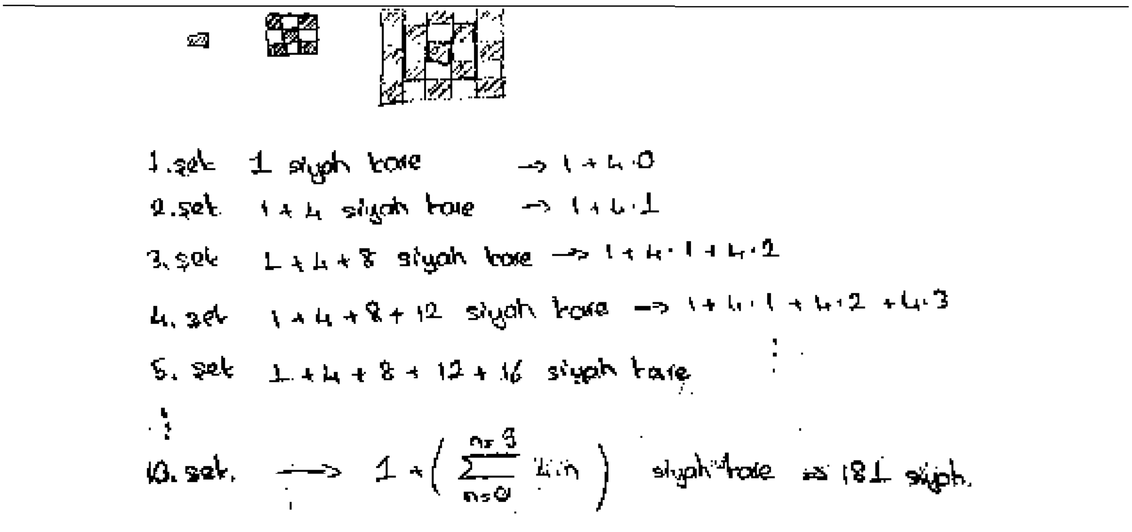
Kare Probleminin Çözüm Uzayında Yer Alan Bilgi Türlerine Yönelik Analiz Sonuçları

	Örüntü	Toplam Formülü	Kısmi Toplamlar Dizisi	Simetri	Fonksiyon
Öğretmen Adayı	$ÖA_2$,$ÖA_3$, $ÖA_4$, $ÖA_5$, $ÖA_6$, $ÖA_7$, $ÖA_8$, $ÖA_9$, $ÖA_{10}$, $ÖA_{11}$,$ÖA_{12}$,$ÖA_{13}$, $ÖA_{14}$, $ÖA_{15}$, $ÖA_{16}$, $ÖA_{17}$, $ÖA_{18}$, $ÖA_{19}$, $ÖA_{20}$, $ÖA_{21}$, $ÖA_{22}$, $ÖA_{23}$, $ÖA_{24}$, $ÖA_{25}$, $ÖA_{26}$, $ÖA_{27}$, $ÖA_{28}$, $ÖA_{29}$, $ÖA_{30}$, $ÖA_{31}$, $ÖA_{32}$, $ÖA_{33}$, $ÖA_{35}$, $ÖA_{36}$, $ÖA_{37}$, $ÖA_{38}$, $ÖA_{40}$, $ÖA_{41}$, $ÖA_{42}$,$ÖA_{43}$, $ÖA_{44}$, $ÖA_{45}$, $ÖA_{46}$, $ÖA_{47}$, $ÖA_{48}$, $ÖA_{49}$, $ÖA_{50}$	$ÖA_{14}$,$ÖA_{15}$, $ÖA_{20}$,$ÖA_{21}$, $ÖA_{29}$,$ÖA_{33}$, $ÖA_{36}$, $ÖA_{47}$	$ÖA_{21}$,$ÖA_{33}$, $ÖA_{38}$,$ÖA_{45}$, $ÖA_{47}$	$ÖA_{12}$, $ÖA_{16}$, $ÖA_{18}$, $ÖA_{20}$, $ÖA_{21}$, $ÖA_{23}$, $ÖA_{27}$, $ÖA_{28}$, $ÖA_{29}$, $ÖA_{30}$, $ÖA_{33}$, $ÖA_{35}$, $ÖA_{36}$, $ÖA_{41}$, $ÖA_{49}$, $ÖA_{43}$	$ÖA_3$, $ÖA_6$, $ÖA_{15}$,$ÖA_{26}$, $ÖA_{34}$,$ÖA_{39}$, $ÖA_{42}$,$ÖA_{43}$, $ÖA_{45}$
Kullanan Öğretmen Adayı Sayısı	47	8	5	16	9
Kullanma Sıklığı	119	12	5	16	15
Kullanan Öğretmen Adayı Yüzdesi	%94	%16	%10	%32	%18

Öğretmen adaylarının % 94'ü ürettikleri farklı çözümlerde en az bir defa örüntü bilgisinden yararlanmışlardır. Katılımcıların %16'sı ise kare problemini çözümünde toplam formülünü sonuç bulmaya yardımcı olacak bir araç olarak kullanmıştır. Sadece beş öğretmen adayı şekillerdeki siyah karelerin sayısını kısmi toplamlar dizisinden yararlanarak ifade etmiştir (bkz. Şekil 23)

Şekil 23

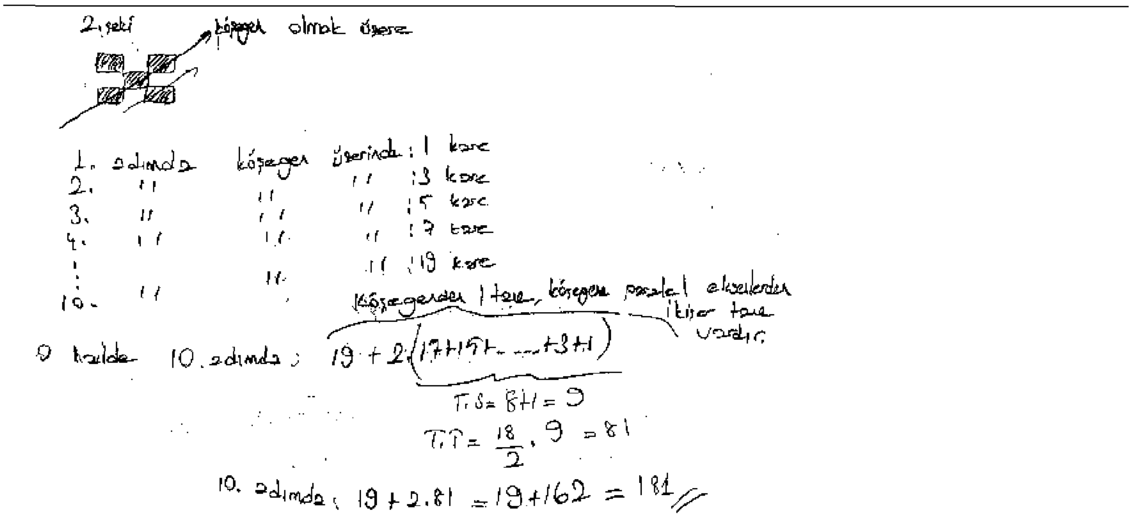
ÖA$_{33}$'ün Çözüm Yaklaşımı



Katılımcıların %32'si ise şekillerdeki siyah karelerin köşegenlere göre simetrik olduğunu fark etmişler ve bu yolla çözüme ulaşmışlardır. Örnek olarak simetri bilgisini kullanan bir öğretmen adayının çözümü Şekil 24'te verilmiştir.

Şekil 24

ÖA$_{29}$'un Çözüm Yaklaşımı



Dokuz öğretmen adayı siyah kare sayılarına göre fonksiyon kuralı oluşturarak çözüm yapmıştır. Bu öğretmen adaylarının üç tanesi ise farklı çözümlerinde fonksiyon bilgisini birden fazla kullanmıştır. Kare problemini çözerken fonksiyon bilgisinden yararlanan iki öğretmen adayının çözümleri örnek olarak Şekil 24'te verilmiştir. Yapılan analize bakıldığında en sık kullanılan bilginin örüntü bilgisi olduğu görülmüştür.

Şekil 25

Kare Probleminin Çözümünde Fonksiyon Bilgisinden Yararlanılan Çözüm Yaklaşımları

ÖA₃'ün Çözüm Yaklaşımı

1 – 5 – 13 – 25

Kuralımız

$f(1) = 1$
$f(2) = 1 + 4 = 5$
$f(3) = 5 + 8 = 13$
$f(4) = 13 + 12 = 25$

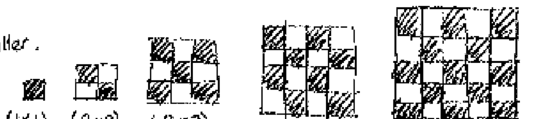
Buradan kuralımız $f(n+1) = f(n) . 4.n$ olarak bulunur.

Buradan basamak basamak devam edersek

$f(5) = f(4) + 16 = 41$
$f(6) = f(5) + 20 = 61$
$f(7) = f(6) + 24 = 85$
$f(8) = f(7) + 28 = 113$
$f(9) = f(8) + 32 = 145$
$f(10) = f(9) + 36 = 181$ olarak bulunur.

ÖA₆'nın Çözüm Yaklaşımı

Şekiller.



... çok olsa.

$[x, x] =$ x çiftse → $\frac{x^2}{2}$ siyah, $\frac{x^2}{2}$ beyaz kare oluşur.
x tekse → $\frac{x^2+1}{2}$ siyah, $\frac{x^2-1}{2}$ beyaz kare oluşur.

şekil sırası m olsun.

m. şekilde $(2m-1)^2$ kadar kare oluşacaktır, Yani şekil $((2m-1) \times (2m-1))$ şekl olacaktır.

Kare problemi için en çok çözüm üreten $ÖA_{12}$ beş farklı çözüm yaklaşımı ortaya koymuş ve tüm çözüm yaklaşımları Şekil 26'te sunulmuştur.

Şekil 26

ÖA$_{12}$'nin Tüm Çözüm Yaklaşımları

Çözüm 1 :

$\frac{1}{1}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{13}$ $\frac{4}{25}$ $\frac{5}{-}$ — — —

Şeklinde gittiğinden.

genel terim $\Rightarrow (a_n) = n^2 + (n-1)^2$

Terim sayısı	Kare sayısı	
1	1	$1^2 + (1-1)^2$
2	5	$2^2 + (2-1)^2$
3	13	$3^2 + (3-1)^2$
4	25	$4^2 + (4-1)^2$
⋮	⋮	⋮
n	$n^2+(n-1)^2$	çıkar.

Öyleyse

10. şekil

$10^2 + (10-1)^2 = 100 + 81$

$= \underline{\underline{181}}$ kare

Çözüm 2 :

1. şekil

köşegeninde çizgi altında boş kare yoktur.

0 tanedir. $0 \cdot 2 + 1 = \boxed{1}$ çıkar.

siyah kare

2. şekil

çizgi altında

2 tane boşluk vardır.

toplam 5 tane siyah kare vardır.

$2 \cdot 2 + 1 = \boxed{5}$ çıkar.

siyah kare

3. şekilde

Boşluk sayısı için

1. şekil = 0 $1 \cdot (1-1) = 0$

2. şekil = 2 $2 \cdot (2-1) = 2$

3. şekil = 6 $3 \cdot (3-1) = 6$

4. şekil = 12 $4 \cdot (4-1) = 12$

⋮

n. şekil = $n \cdot (n-1)$ (boşluk) tane olur.

indirilen çizginin altında 6 tane boşluk vardır.

$6 \cdot 2 + 1 = 13$ tane siyah kare vardır. (n. şekil için $\Rightarrow 2 \cdot n + 1$ siyah çıkar.)

genelleme yaparsak

öncelikle şekildeki boşluk sayısını buluruz. 0 da n. terimde $n \cdot (n-1)$ tane boşluk vardır.

sonra da siyah sayıları n. boşluk için $2n+1$ tane olur.

y boşluk sayısıdır.

O halde.

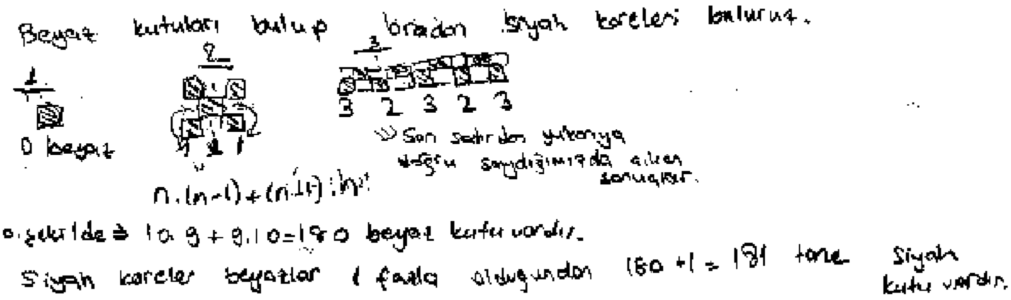
$2 \left[\underbrace{n \cdot (n-1)}_{90} \right] + 1 \Rightarrow$ siyah kare çıkar.

10. şekilde $\Rightarrow$ $10 \cdot (10-1) = 90$ tane boşluk vardır.

Siyah karede boşlukların 2 katından 1 fazladır.

$90 \cdot 2 + 1 = 181$ tane siyah kare çıkar.

Çözüm 3 :

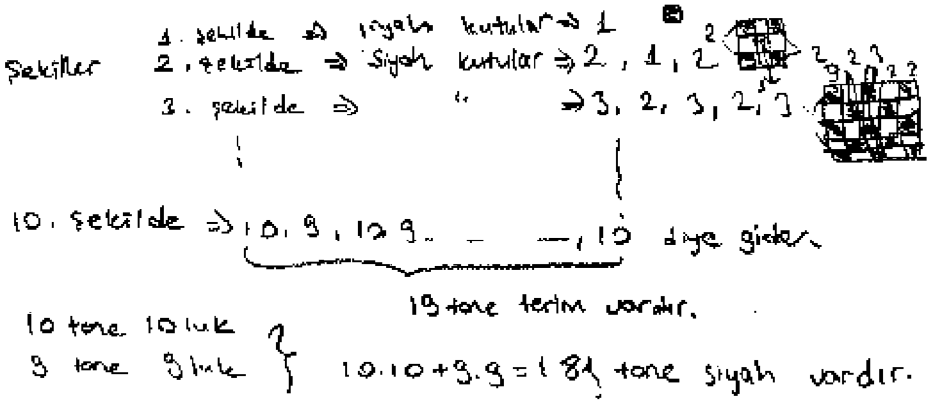


Çözüm 4 :

Siyah kutu beyaz kutudan her zaman 1 fazla.

$$\frac{(2n-1)^2+1}{2} = \frac{(2.10-1)^2+1}{2} = 181$$ tane siyah kare çıkar.

Çözüm 5 :



III. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar

Üçüncü alt problem, matematik öğretmen adaylarının problem çözerken kullandıkları stratejiler incelenmesini içermektedir. Bu alt probleme ait bulgular araştırma literatüründe yer alan Fan ve Zhu'nun (2007) çalışmalarında kullandıkları problem çözme stratejilerinden olan diyagram çizme, mantıksal sorgulama, örüntü arama, sistematik liste yapma, tablo yapma, problemi basitleştirme, benzer bir problemi düşünme, model oluşturma, denklem yazma stratejileri ile LaRusso'nun (2010) çalışmasında yer alan formül kullanma olarak adlandırdığı stratejisi ve probleme özgü ortaya çıkan ve araştırmacı tarafından adlandırılan bilgiler ışığında yorumlanmıştır. Belirlenen startejilerin hangi öğretmen adayları tarafından ve hangi sıklıkla kullanıldığının belirlenmesi için elde edilen içerik analizi sonuçları ve yorumları her problem için ayrı alt başlıklar altında verilmiştir. Problem çözümlerinde kullanılan stratejiler bağlamında yapılan incelemelerde bazı çözümlerde tek bir strateji kullanımının çözüme ulaştırdığı görülmüşken bazı çözümlerde ise birden fazla strateji birlikte kullanılarak çözüme ulaşmayı sağlamıştır.

Dik Üçgen Probleminin Çözümünde Kullanılan Stratejilere İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"Dik Üçgen Problemi" için tüm öğretmen adaylarının çözüm sürecinde kullandıkları stratejiler; şekil çizme, ek çizim yapma, teoremlerden yararlanma, analitik düzleme taşıma ve formül kullanma olarak belirlenmiştir. Bu stratejilerden "ek çizim yapma, teoremlerden yararlanma ve analitik düzleme taşıma" stratejileri probleme özgü olarak ortaya çıkmış ve araştırmacılar tarafından adlandırılmıştır. Öğretmen adaylarının dik üçgen probleminin çözümünde kullandıkları stratejiler ayrıntılı olarak Tablo 18'de verilmiştir.

Tablo 18

Dik Üçgen Probleminin Çözümünde Ortaya Çıkan Stratejilere Yönelik Analiz Sonuçları

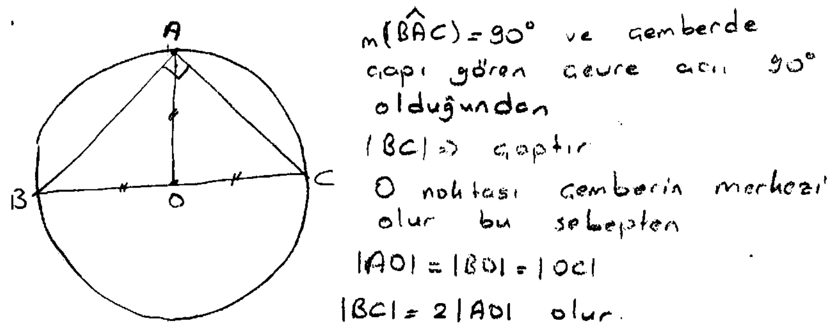
	Şekil Çizme	Ek Çizim Yapma	Teoremlerden Yararlanma	Analitik Düzleme Taşıma	Formül Kullanma
Öğretmen Adayları	$ÖA_1$, $ÖA_2$, $ÖA_3$, $ÖA_4$, $ÖA_5$, $ÖA_6$, $ÖA_7$, $ÖA_8$, $ÖA_9$, $ÖA_{10}$, $ÖA_{11}$, $ÖA_{12}$, $ÖA_{13}$, $ÖA_{14}$, $ÖA_{15}$, $ÖA_{16}$, $ÖA_{17}$, $ÖA_{18}$, $ÖA_{19}$, $ÖA_{20}$, $ÖA_{21}$, $ÖA_{22}$, $ÖA_{23}$, $ÖA_{24}$, $ÖA_{25}$, $ÖA_{26}$, $ÖA_{27}$, $ÖA_{28}$, $ÖA_{29}$, $ÖA_{30}$, $ÖA_{31}$, $ÖA_{32}$, $ÖA_{33}$, $ÖA_{34}$, $ÖA_{35}$, $ÖA_{36}$, $ÖA_{37}$, $ÖA_{38}$, $ÖA_{39}$, $ÖA_{40}$, $ÖA_{41}$, $ÖA_{42}$, $ÖA_{43}$, $ÖA_{44}$, $ÖA_{45}$, $ÖA_{47}$, $ÖA_{48}$, $ÖA_{49}$, $ÖA_{50}$	$ÖA_2$, $ÖA_3$, $ÖA_4$, $ÖA_5$, $ÖA_6$, $ÖA_7$, $ÖA_8$, $ÖA_9$, $ÖA_{10}$, $ÖA_{11}$, $ÖA_{12}$, $ÖA_{13}$, $ÖA_{14}$, $ÖA_{15}$, $ÖA_{16}$, $ÖA_{17}$, $ÖA_{18}$, $ÖA_{19}$, $ÖA_{20}$, $ÖA_{21}$, $ÖA_{22}$, $ÖA_{23}$, $ÖA_{24}$, $ÖA_{25}$, $ÖA_{26}$, $ÖA_{27}$, $ÖA_{28}$, $ÖA_{29}$, $ÖA_{30}$, $ÖA_{31}$, $ÖA_{32}$, $ÖA_{33}$, $ÖA_{34}$, $ÖA_{35}$, $ÖA_{36}$, $ÖA_{37}$, $ÖA_{38}$, $ÖA_{39}$, $ÖA_{40}$, $ÖA_{41}$, $ÖA_{42}$, $ÖA_{43}$, $ÖA_{44}$, $ÖA_{45}$, $ÖA_{46}$, $ÖA_{47}$, $ÖA_{48}$, $ÖA_{49}$, $ÖA_{50}$	$ÖA_2$, $ÖA_3$, $ÖA_5$, $ÖA_6$, $ÖA_7$, $ÖA_8$, $ÖA_9$, $ÖA_{10}$, $ÖA_{11}$, $ÖA_{12}$, $ÖA_{13}$, $ÖA_{14}$, $ÖA_{15}$, $ÖA_{16}$, $ÖA_{17}$, $ÖA_{18}$, $ÖA_{19}$, $ÖA_{20}$, $ÖA_{21}$, $ÖA_{22}$, $ÖA_{23}$, $ÖA_{24}$, $ÖA_{25}$, $ÖA_{26}$, $ÖA_{28}$, $ÖA_{29}$, $ÖA_{31}$, $ÖA_{32}$, $ÖA_{33}$, $ÖA_{34}$, $ÖA_{37}$, $ÖA_{38}$, $ÖA_{40}$, $ÖA_{41}$, $ÖA_{42}$, $ÖA_{43}$, $ÖA_{44}$, $ÖA_{45}$, $ÖA_{46}$, $ÖA_{48}$, $ÖA_{49}$, $ÖA_{50}$	$ÖA_5$, $ÖA_{13}$, $ÖA_{15}$, $ÖA_{28}$, $ÖA_{31}$, $ÖA_{50}$	$ÖA_{49}$
Öğretmen Adayı Sayısı	49	49	42	6	1
Kullanan ÖA Yüzdesi	%98	%98	%84	%12	%2
Kullanma Sıklığı	49	90	81	6	1

Tablo 18 incelendiğinde öğretmen adaylarının büyük bölümünün yaygın olarak dik üçgen problemi için şekil çizme, ek çizim yapma ve teoremlerden yararlanma stratejilerini kullandıkları görülmektedir. En az kullanılan iki strateji ise formül kullanma ve problem özgü olarak ortaya çıkan analitik düzleme taşıma stratejileridir. Dikdörtgen, üçgen ve çember bilgisini kullanan katılımcıların da yaygın kullanılan üç stratejiyi kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür. Şekil çizme stratejisini kullanan öğretmen adayları problemin çözümü için çember ve dikdörtgen çizimi yaparak çözüme ulaşmışlardır (bkz. Şekil 27).

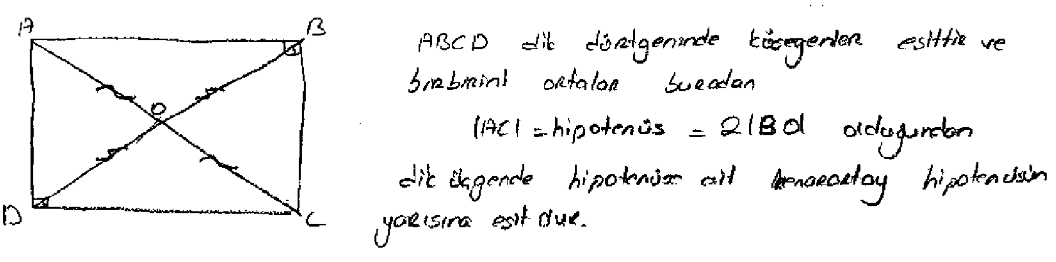
Şekil 27

Şekil Çizme Stratejisini Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

ÖA$_3$'ün çember çizme yaklaşımı



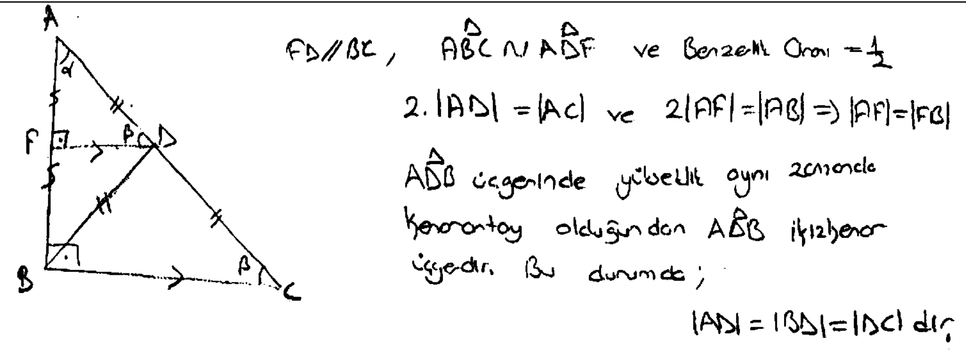
ÖA$_{15}$'in dikdörtgen çizme yaklaşımı



Şekil çizme stratejisinin yanı sıra ek çizim yapma stratejisinden yararlanan öğretmen adayları, verilen problemden bağımsız herhangi bir geometrik şekil çizmemiş olup dik üçgen üzerinde çeşitli ek çizimler yaparak bazen benzer ya da özel üçgenler oluşturmaya çalışmışlar bazen de pisagor teoremi ve eşlik-benzerlik teoremleri gibi üçgenle ilgili teoremleri kullanarak çözüme ulaşmışlardır (bkz. Şekil 28).

Şekil 28

ÖA$_8$'in Çözüm Yaklaşımı

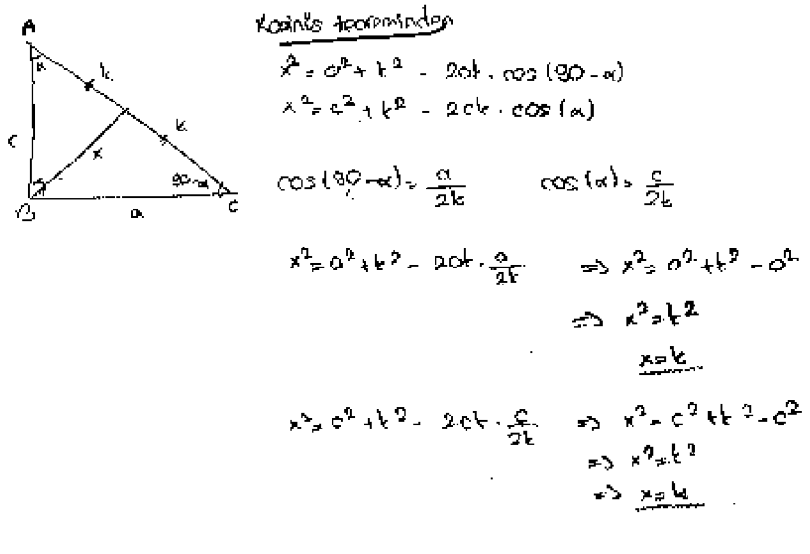


Teoremlerden yararlanarak çözüme ulaşan öğretmen adayları dik üçgende öklit ve pisagor bağıntıları, eşlik-benzerlik teoremleri, stewart teoremi, kenarortay teoremi, sinus ve kosinüs teoremlerini kullanmışlardır. Bununla birlikte Stewart teoremi, sinüs ve kosinüs teoremleri az sayıda öğretmen adayı tarafından kullanılmıştır. Teoremlerden yararlanma stratejisini kullanan bir öğretmen adayının çözüm yaklaşımı Şekil 28'de verilmiştir.

Şekil 29

ÖA$_{33}$'ün Çözüm Yaklaşımı

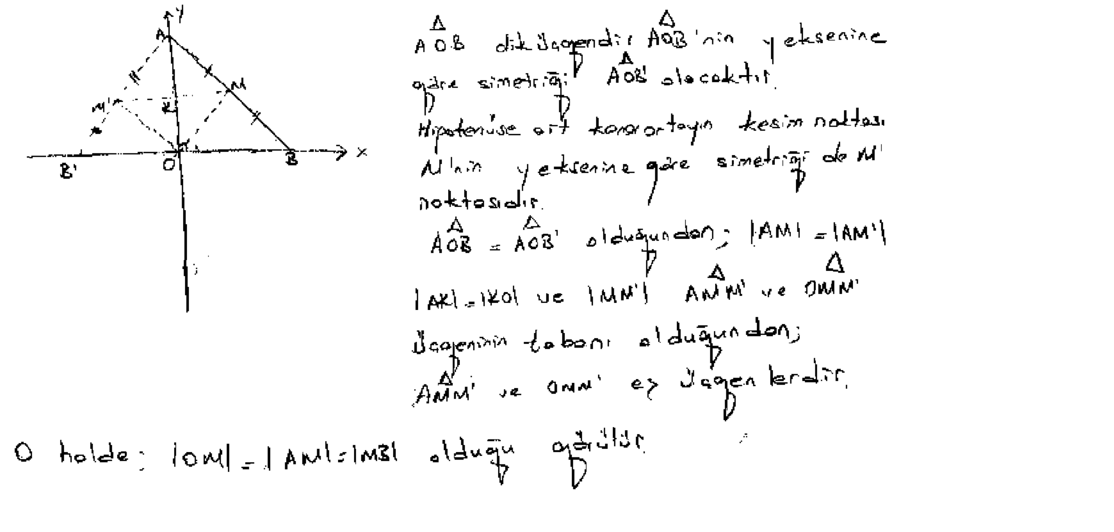
ÖA$_{33}$'ün kosinüs teoreminden yararlanma yaklaşımı



Dik üçgen probleminin çözümünde ortaya çıkan diğer bir strateji olan analitik düzleme taşıma stratejisini kullanan öğretmen adayları, dik üçgeni analitik düzleme farklı şekillerde taşıdıktan sonra analitik düzlemin özelliklerinden yararlanmışlardır. Analitik düzleme taşıma stratejisinden yararlanan bir öğretmen adayının çözüm yaklaşımı Şekil 30'da verilmiştir.

Şekil 30

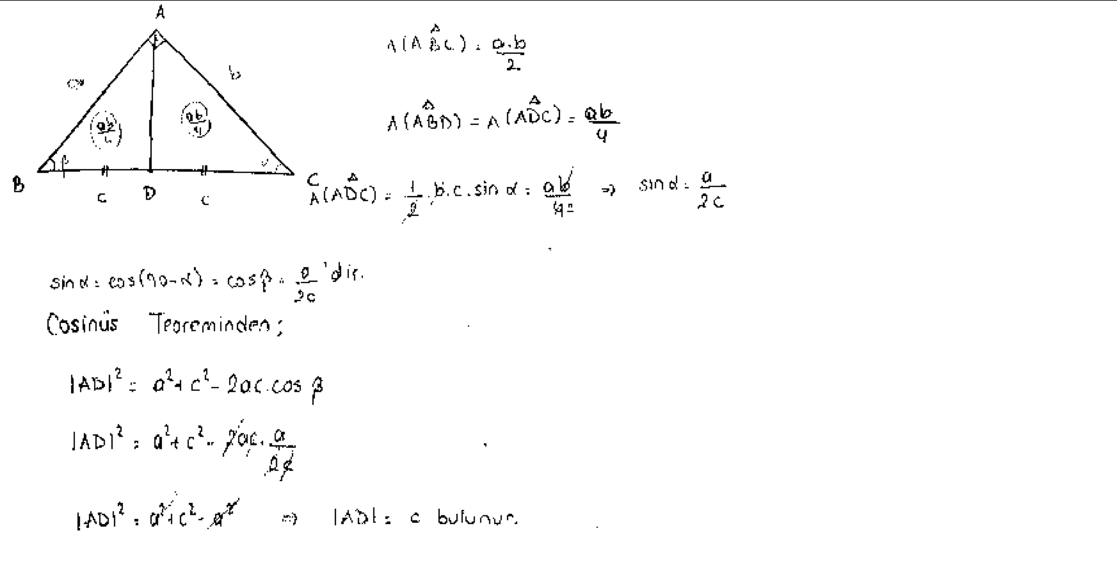
ÖA$_{28}$'in Çözüm Yaklaşımı



Dik üçgen probleminin çözümünde ortaya çıkan bir diğer strateji ise formül kullanma stratejisidir. Bu stratejiyi kullanan öğretmen adayı alan formülünü kullanmıştır. ÖA$_{45}$'in formül kullanma stratejisinden yararlandığı çözümü Şekil 31'de verilmiştir.

Şekil 31

ÖA$_{45}$'in Çözüm Yaklaşımı

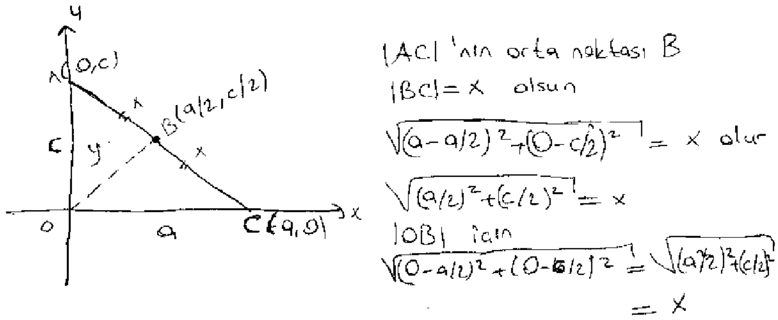


Bazı öğretmen adaylarının iki nokta arasındaki uzaklığı ve iki noktadan geçen doğrunun eğimini bulmak için de formüllerden yararlandıkları görülmüştür ancak kullandıkları bu formüller formül kullanma stratejisi bağlamında ele alınmamış olup analitik düzleme taşıma stratejisi altında kodlanmıştır. Çünkü söz konusu çözümlerde öğretmen adayını çözüme ulaştıran ana yaklaşım analitik düzleme taşıma olmuş ve formül kullanımı bu çözümlerde çözüme yardımcı bir araç olarak yer almıştır (bkz. Şekil 32).

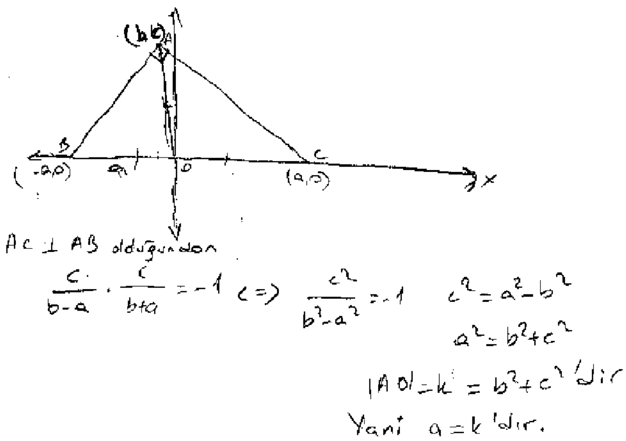
Şekil 32

Analitik Düzleme Taşıma Stratejisini Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

ÖA$_5$'in Analitik Düzleme Taşıma Stratejisi



ÖA$_{31}$'in Analitik Düzleme Taşıma Stratejisi

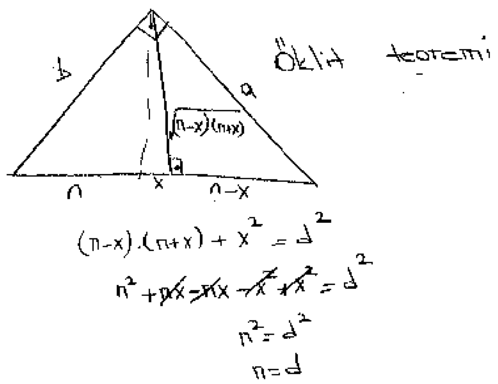


Öğretmen adaylarının bazen aynı çözüm içerisinde birden fazla stratejiden yararlandıkları görülmüştür (bkz. Şekil 33). İki ya da daha fazla stratejinin kullanılmasını gerektiren çözümlerde yapılan kodlamalarda kodlanan stratejilerin her birinin çözüme ulaşmada etkin rol oynaması göz önüne alınmıştır.

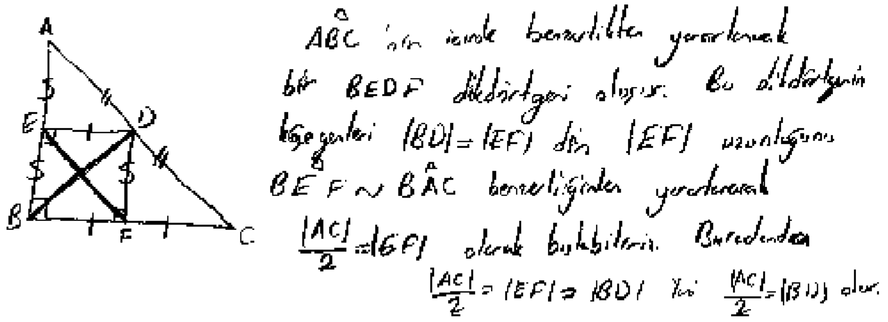
Şekil 33

Bir Çözümde Birden Çok Strateji Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

ÖA$_{19}$'un ek çizim yapma ve öklit teoreminden yararlanma yaklaşımı



ÖA$_{21}$'in ek çizim yapma ve eşlik-benzerlik teoremlerinden yararlanma yaklaşımı



El Sıkışma Probleminin Çözümünde Kullanılan Stratejilere İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"El Sıkışma Problemi" için tüm öğretmen adaylarının çözüm sürecinde kullandıkları stratejiler; şekil çizme, örüntü arama, tablo yapma, mantıksal sorgulama, problemi basitleştirme, diyagram çizme, benzer bir problemi düşünme, bilinen bir örüntüden yararlanma, sistematik liste yapma ve formül kullanma olarak adlandırılmıştır. Bu stratejilerden "bilinen bir örüntüden yararlanma" stratejisi probleme özgü olarak ortaya çıkmış ve araştırmacılar tarafından adlandırılmıştır. Öğretmen adaylarının el sıkışma probleminin çözümünde kullandıkları stratejiler ayrıntılı olarak Tablo 19'da verilmiştir.

Tablo 19

El Sıkışma Probleminin Çözümünde Kullanılan Stratejilere Yönelik Analiz Sonuçları

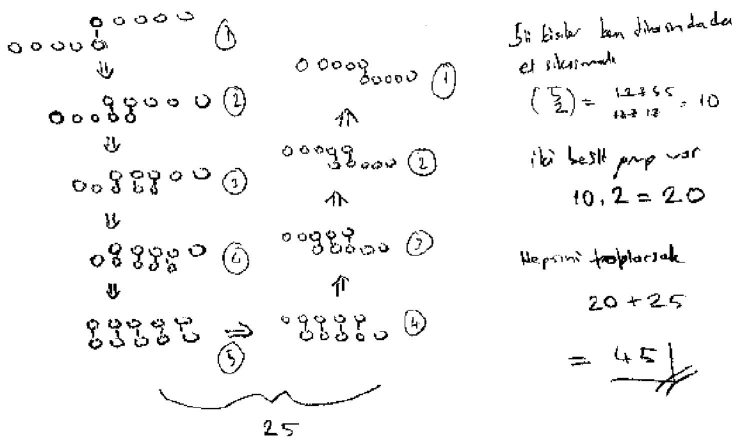
	Şekil Çizme	Örüntü Arama	Tablo Yapma	Mantıksal Sorgulama	Formül Kullanma	Problemi Basiteştirme	Diyagram Çizme	Benzer Bir Problemi Düşünme	Bilinen Bir Örüntüden Yararlanma	Sistematik Liste Yapma
Öğretmen Adayları	ÖA$_{3}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{37}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{47}$	ÖA$_{4}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{27}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{37}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{45}$	ÖA$_{1}$, ÖA$_{4}$, ÖA$_{8}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{22}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{43}$	ÖA$_{2}$, ÖA$_{3}$, ÖA$_{5}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{22}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{27}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{50}$	ÖA$_{1}$, ÖA$_{2}$, ÖA$_{3}$, ÖA$_{4}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{23}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{46}$, ÖA$_{47}$, ÖA$_{48}$, ÖA$_{49}$, ÖA$_{50}$	ÖA$_{17}$	ÖA$_{1}$, ÖA$_{2}$, ÖA$_{4}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{8}$ ÖA$_{9}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{23}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{34}$,ÖA$_{35}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{37}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{46}$, ÖA$_{48}$, ÖA$_{49}$, ÖA$_{50}$	ÖA$_{4}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{45}$	ÖA$_{25}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{33}$	ÖA$_{11}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{48}$
ÖA Sayısı	20	14	9	26	32	1	33	10	3	4
Kullanan ÖA Yüzdesi	%40	%28	%18	%52	%64	%2	%66	%20	%6	%8
Kullanma Sıklığı	23	17	9	29	32	1	44	11	3	4

Tablo 19 incelendiğinde öğretmen adaylarının büyük bölümünün el sıkışma problemi için yaygın olarak şekil çizme, formül kullanma, mantıksal sorgulama, diyagram çizme stratejilerini kullandıkları görülmektedir. En az kullanılan stratejiler; problemi basitleştirme, bilinen bir örüntüden yararlanma ve sistematik liste yapma stratejileri olarak belirlenmiştir. Şekil çizme/model oluşturma stratejisini kullanan öğretmen adayları çizdikleri şekilleri problemi görselleştirmek ya da anlaşılmasını kolaylaştırmak için kullanmışlardır (bkz. Şekil 34). Öğretmen adayları tarafından en sık kullanılan strateji ise diyagram çizme stratejisi olarak belirlenmiştir.

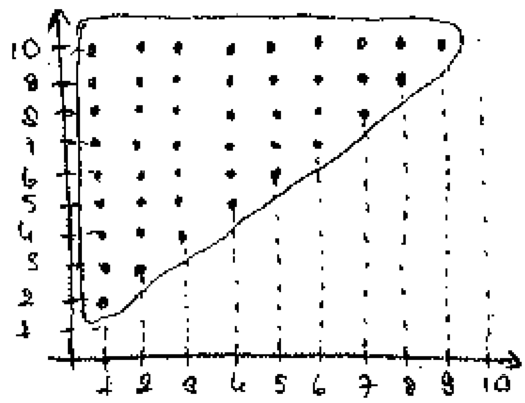
Şekil 34

Şekil Çizme/Model oluşturma Stratejisini Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

ÖA$_{40}$'ın şekil çizme/model oluşturma yaklaşımı



ÖA$_6$'nın şekil çizme/model oluşturma yaklaşımı

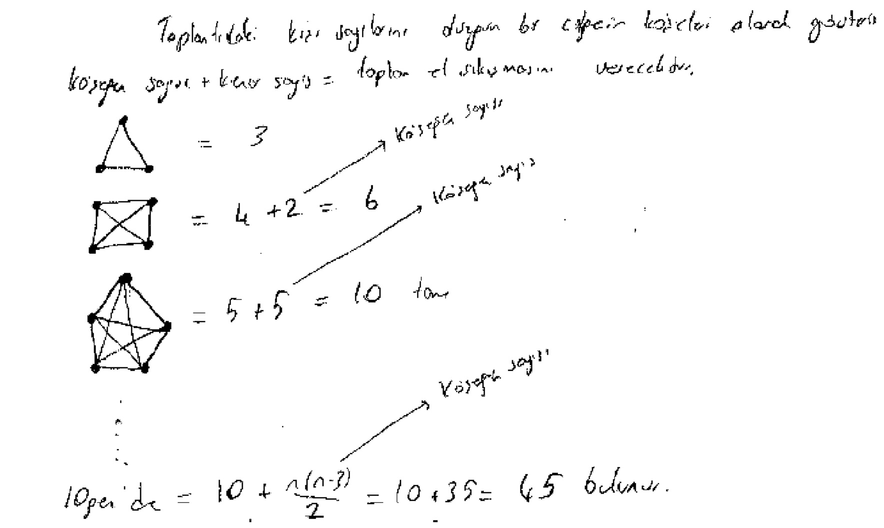


Öğretmen adaylarının yüzde yirmisi el sıkışma probleminin çözümünde benzer bir problemin çözümünden faydalanıp sonuca ulaşmıştır. Bu öğretmen adaylarından bazıları kişileri düzgün çokgenlerin köşeleri olarak düşünüp istenen el sıkışma sayısının kenar sayısı ile köşegen sayısının toplamı olarak vermiş ve çokgen bilgisini kullanarak çözüme ulaşmıştır (bkz. Şekil 35/ÖA$_{10}$). Bazı öğretmen adayları ise tokalaşan kişileri nokta olarak işaretleyip toplam el sıkışma sayısını, iki noktadan geçen doğru sayısının hesaplanması ile bulmuştıur (bkz. Şekil 35/ÖA$_{8}$).

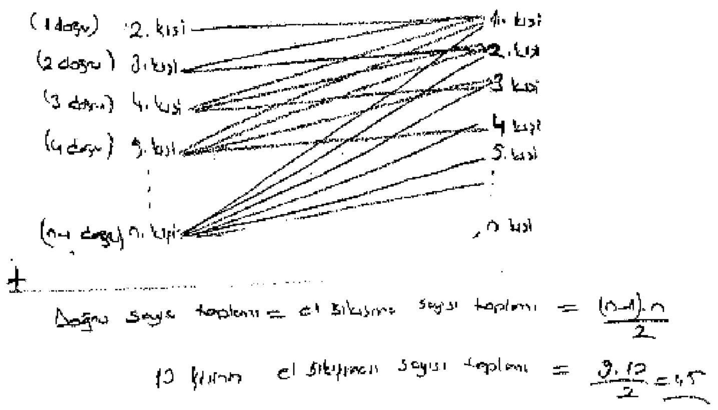
Şekil 35

Benzer Bir Problemi Düşünme Stratejisini Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

ÖA$_{10}$'un Benzer Bir Problemi Düşünme Yaklaşımı



ÖA$_{8}$'in Benzer Bir Problemi Düşünme Yaklaşımı

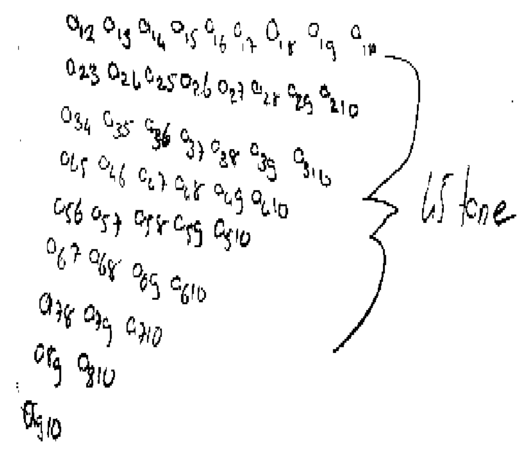


Dört öğretmen adayı olası tüm el sıkışma durumlarını ortaya koyma yaklaşımında bulunurken bu dört öğretmen adayından sadece birisi olası tüm durumları sembolik gösterim şekli kullanarak ifade etmiştir (bkz. Şekil 36/ $ÖA_{24}$). Diğer üç öğretmen adayı kartezyen çarpım bilgisinden yararlanarak sistematik liste yapma yaklaşımını sergilemiş ancak çözümlerinde tüm el sıkışma durumlarını tek tek yazmamışlardır (bkz. Şekil 36/ $ÖA_{50}$).

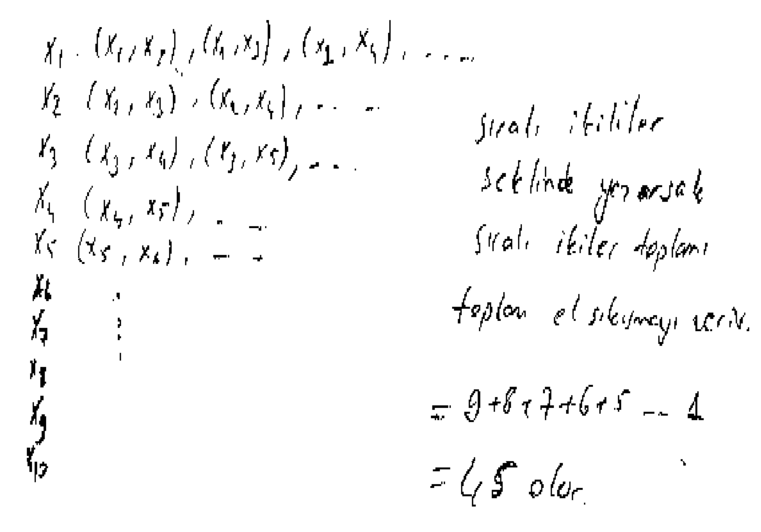
Şekil 36

Sistematik Liste Yapma Stratejisini Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

$ÖA_{24}$'ün Sistematik Liste Yapma Yaklaşımı



$ÖA_{50}$'nin Sistematik Liste Yapma Yaklaşımı

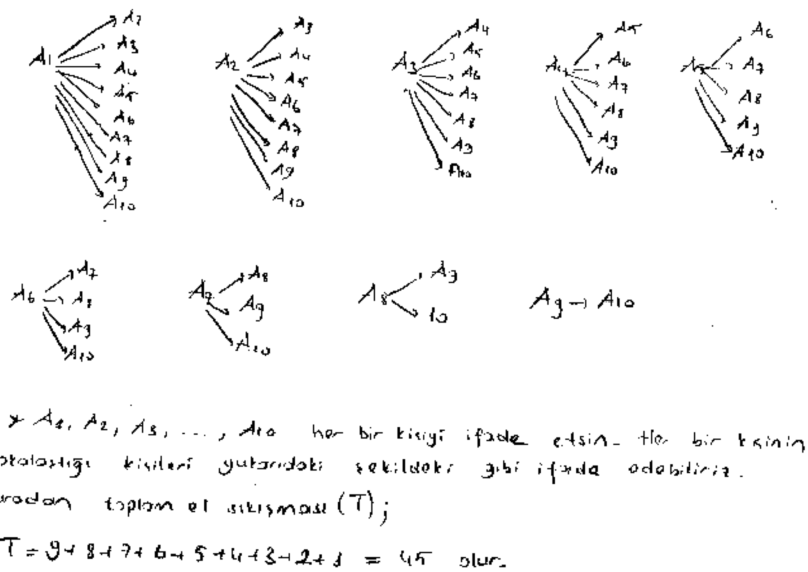


Öğretmen adaylarının %66’sı problem çözme süreçlerinde diyagramlardan yararlanmıştır. Diyagram çizen katılımcıların %39’u dört ve dörtten fazla çözüm üretebilmişlerdir. Diyagram çizme stratejisini kullanan öğretmen adaylarına ait çözümlerin bazıları Şekil 37’de sunulmuştur.

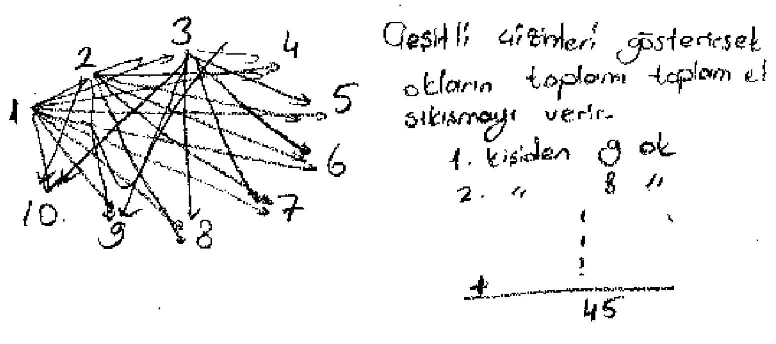
Şekil 37

Diyagram Çizme Stratejisini Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

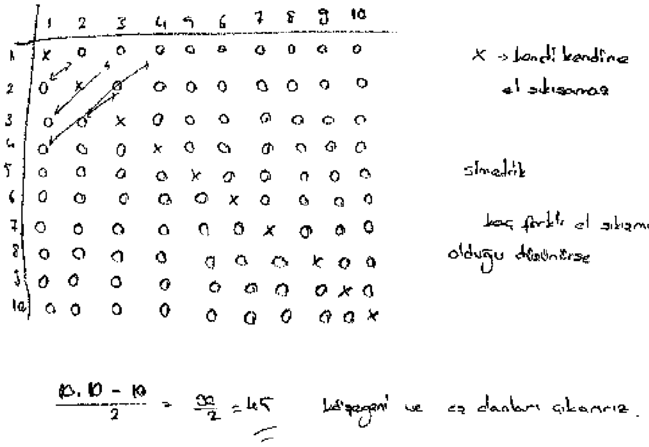
A_{49}’un Diyagram Çizme Yaklaşımı



ÖA$_{36}$’nın Diyagram Çizme Yaklaşımı



ÖA$_{32}$'nin Diyagram Çizme Yaklaşımı



Tablo 19 incelendiğinde öğretmen adaylarının yarısından fazlasının (%64) bir çözümlerinde formül kullanma stratejisini kullandığı görülmüştür. Formül kullanan öğretmen adayları el sıkışmanın iki kişi arasında olduğunu göz önüne alarak çözüm yapmışlardır (bkz. Şekil 38).

Şekil 38

ÖA$_{50}$'nin Çözüm Yaklaşımı

10 kişi ikişerli el sıkışacaklarına göre, kombinasyon kullanabiliriz.

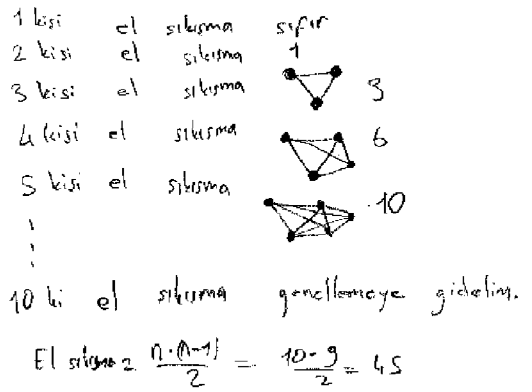
$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2!} = 45$$

Öğretmen adaylarının %28'i örüntü arama stratejisini kullanmıştır. Örüntü arama stratejisinin kullanıldığı bazı çözümler incelendiğinde öğretmen adaylarının şekiller çizdiği ve çizdikleri bu şekillerin kişi sayısı ile el sıkışma sayısı arasında var olan örüntüyü fark etmelerine yardımcı olduğu görülmüştür. Söz konusu çözümlerde kullanılan stratejiler, örüntü arama ve şekil çizme/model oluşturma olarak kodlanmıştır (bkz. Şekil 39/ *ÖA$_{44}$*). Diğer yandan hiç bir şekil çizmeden örüntü kuralının oluşturulduğu çözümler de mevcuttur (bkz. Şekil 39/ *ÖA$_{33}$)*.

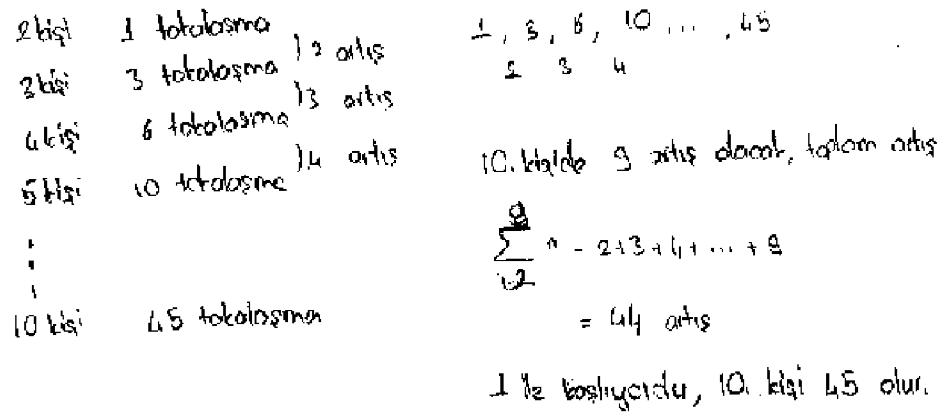
Şekil 39

Örüntü Arama Stratejisini Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

$\ddot{O}A_{44}$'ün örüntü arama ve şekil çizme/model oluşturma yaklaşımı



$\ddot{O}A_{33}$'ün örüntü arama yaklaşımı



Öğretmen adaylarının sadece %18'i tarafından kullanılan tablo yapma stratejisinde öğretmen adaylarının tabloyu verileri düzenlemek için kullandıkları ve böylece kişi sayısı ile el sıkışma sayısı üzerinden bir çıkarımda bulunmaya çalıştıkları görülmüştür (bkz. Şekil 40).

Şekil 40

ÖA$_{28}$'in Çözüm Yaklaşımı

Kişi sayısı	tokalaşma sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$
2	1
3	3
4	6
5	10
⋮	
n	$\frac{n(n-1)}{2}$

Bu tablodan şu çıkarımda bulunabiliriz.

2 kişi 1 tokalaşma
3 kişi 1+2=3 tokalaşma
4 kişi 3+3=6 tokalaşma
5 kişi 6+4=10 tokalaşma
⋮
n kişi $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+(n-1)$ tokalaşma

Ardışık olarak artan kişi sayısı ile tokalaşma sayısı arasındaki bağıntı:

Bir önceki basamaktaki kişi sayısı + Bir önceki basamaktaki tokalaşma say.

Öğretmen adaylarının %52'si tarafından tercih edilen mantıksal sorgulama stratejisi çözüm yaklaşımlarına göre farklılık göstermiştir. Çözüm yaklaşımlarında mantıksal sorgulama starejisini tercih eden katılımcıların temel işlem bilgisini kullandıkları ve çözümlerini açıklamak için sözel ifadelerden yararlandıkları görülmüştür (bkz. Şekil 41).

Şekil 41

Mantıksal Sorgulama Stratejisini Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

ÖA$_{20}$'nin Mantıksal Sorgulama Yaklaşımı

Herkes birbiriyle 1 kez el sıkışmasın. Bu durumda bütün olasılıkları düşünelim

Herkes 9 defa tokalaşacağı için, 10 kişi bulunuyorsa

9.10 = 90 tokalaşma olur.

Herkes arasında 2 tokalaşma olduğu için yani A-B ve B-A farklı tokalaşmaları gözük kişi için

$\frac{90}{2} = 45$ tokalaşma olur.

ÖA$_5$'in Mantıksal Sorgulama Yaklaşımı

1. kişi → 9 kişiyle el sıkışacak
2. kişi → 1. hariç 8 kişiyle
3. kişi → 1. ve 2. hariç 7 kişi ile
⋮
9. kişi → 1, 2, 3, 4, ..., 8. hariç 1 kişi ile
10. kişi → herkesle el sıkışmış olduğu için farklı biriyle el sıkışmayacak.

$\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ el sıkışması olacak

Tablo 19 incelendiğinde sadece bir öğretmen adayının problem basitleştirme stratejisini kullandığı dikkat çekmektedir. Söz konusu stratejiyi kullanan öğretmen adayı *ÖA$_{17}$*'nin tüm çözüm yaklaşımları incelendiğinde el sıkışma problem için toplamda üç farklı çözüm üretebildiği ve bu çözümlerinde şekil çizme/model oluşturma ve örüntü arama stratejilerini kullandığı görülmektedir. Öğretmen adayı problemde verilen on kişinin el sıkışma durumu yerine beş kişinin el sıkışma durumunu ele almış ve böylece problemin verilerini basitleştirmiştir (bkz. Şekil 42).

Şekil 42

ÖA$_{17}$'nin Çözüm Yaklaşımı

Toplulukta 5 kişi var diye düşünelim.

5. kişi 4 kişiyle
4. kişi 3 kişiyle
3. kişi 2 kişiyle
2. kişi 1 kişiyle

Toplam 10 el sıkışması olur

O halde toplulukta n kişi olduğunu düşünelim

n. kişi (n-1) kişiyle
(n-1). kişi (n-2) kişiyle
(n-2). kişi (n-3) kişiyle
⋮ ⋮

bunları toplayarak toplam el sıkışma sayısını bulabiliriz.

Masa Probleminin Çözümünde Kullanılan Stratejilere İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"Masa Problemi" için tüm öğretmen adaylarının çözüm sürecinde kullandıkları stratejiler; şekil çizme/model oluşturma, mantıksal sorgulama, denklem yazma, tablo yapma, problemi basitleştirme, benzer bir problemi düşünme, örüntü arama olarak adlandırılmıştır. Öğretmen adaylarının el sıkışma probleminin çözümünde kullandıkları stratejiler ayrıntılı olarak Tablo 20'de verilmiştir.

Tablo 20

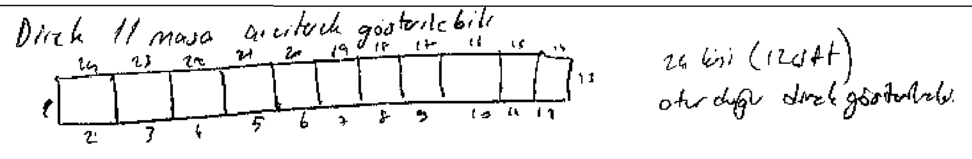
Masa Probleminin Çözümünde Kullanılan Stratejilere Yönelik Analiz Sonuçları

	Şekil Çizme/ Model Oluşturma	Mantıksal Sorgulama	Denklem Yazma	Tablo yapma	Problemi Basiteştirme	Benzer Bir Problemi Düşünme	Örüntü Arama
Öğretmen Adayları	ÖA_1, ÖA_3, ÖA_4, ÖA_5, ÖA_6, ÖA_7, ÖA_8, ÖA_9, ÖA_{10}, ÖA_{11}, ÖA_{13}, ÖA_{14}, ÖA_{15}, ÖA_{16}, ÖA_{17}, ÖA_{18}, ÖA_{19}, ÖA_{20}, ÖA_{21}, ÖA_{22}, ÖA_{23}, ÖA_{24}, ÖA_{25}, ÖA_{26}, ÖA_{27}, ÖA_{28}, ÖA_{29}, ÖA_{30}, ÖA_{31}, ÖA_{32}, ÖA_{33}, ÖA_{34}, ÖA_{35}, ÖA_{36}, ÖA_{37}, ÖA_{38}, ÖA_{39}, ÖA_{40}, ÖA_{41}, ÖA_{42}, , ÖA_{44}, ÖA_{45}, ÖA_{46}, ÖA_{47}, ÖA_{48}, ÖA_{49}, ÖA_{50}	ÖA_6, ÖA_9, ÖA_{11}, ÖA_{13}, ÖA_{14}, ÖA_{16}, ÖA_{17}, ÖA_{20}, ÖA_{23}, ÖA_{24}, ÖA_{26}, ÖA_{29}, ÖA_{30}, ÖA_{32}, ÖA_{33}, ÖA_{41}, ÖA_{44}, ÖA_{45}, ÖA_{47}, ÖA_{50}	ÖA_3,ÖA, ÖA_7,ÖA, ÖA_{12}, ÖA_{14}, ÖA_{17}, ÖA_{21}, ÖA_{22}, ÖA_{25}, ÖA_{27}, ÖA_{38}, ÖA_{39}, ÖA_{44}, ÖA_{48}, ÖA_{49}	ÖA_4, ÖA_{12}, ÖA_{18}, ÖA_{27}, ÖA_{28} , ÖA_{38} , ÖA_{43}	ÖA_4, ÖA_5, ÖA_7, ÖA_9, ÖA_{10}, ÖA_{12}, ÖA_{15}, ÖA_{16}, ÖA_{18}, ÖA_{19}, ÖA_{22}, ÖA_{28}, ÖA_{31}, ÖA_{37}, ÖA_{42}	ÖA_{17}, ÖA_{34}	ÖA_9, ÖA_{10}, ÖA_{15}, ÖA_{31}, ÖA_{43}, ÖA_{45}
Öğretmen Adayı Sayısı	47	19	16	7	15	2	6
Kullanan ÖA Yüzdesi	%94	%38	%32	%14	%30	%4	%12
Kullanma Sıklığı	58	25	19	7	15	2	6

Tablo 20 incelendiğinde masa probleminin çözümünde öğretmen adaylarının %94'ünün şekil çizme/model oluşturma stratejisini kullandığı görülmektedir. Şekil çizen bazı öğretmen adayları 12 çiftin oturduğu bir masa düzeni çizerek çözüm yaklaşımında bulunmuştur (bkz. Şekil 43).

Şekil 43

ÖA$_{10}$'un Çözüm Yaklaşımı

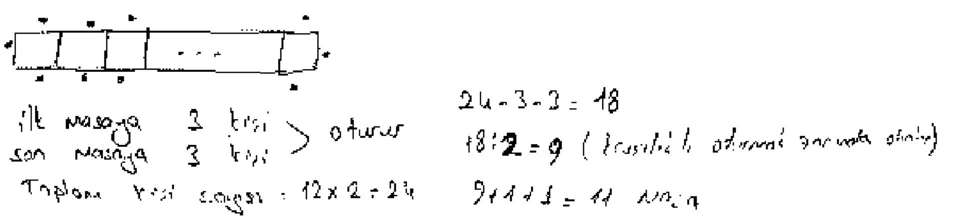


Bazıları ise şekil çizme stratejisini mantıksal sorgulama stratejisi ile birlikte kullanarak çözüm yaklaşımları sergilemişlerdir. Mantıksal sorgulama stratejisinin kullanıldığı çözümlerde öğretmen adaylarının farklı yaklaşımlar sergiledikleri Şekil 44'te görülmektedir.

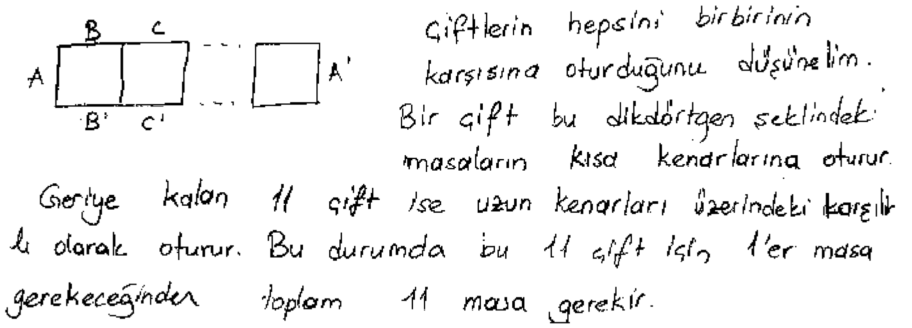
Şekil 44

Şekil Çizme/Model Oluşturma ve Mantıksal Sorgulama Stratejilerini Birlikte Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

ÖA$_9$'un Çözüm Yaklaşımı



ÖA$_{14}$'ün Çözüm Yaklaşımı



ÖA$_{50}$'nin Çözüm Yaklaşımı

$6 \cdot 4 = 24$ kişi

$(6-1) \cdot 2 = 10$ kişi açıkta

Baştaki ve sondaki masalarda 3 kişi oturmakta.

Bu 10 kişi aralara koyacak olan masalara yerleştirilirken

Aradaki her masada da 2 kişi oturabileceğine göre,

$\frac{10}{2} = 5$ masaya daha ihtiyaç vardır

$6 + 5 = 11$ masa.

Mantıksal sorgulama, denklem yazma ve problemi basitleştirme stratejilerinin öğretmen adayları tarafından tercih edilme yüzdeleri birbirine yakındır. En az tercih edilen strateji olan benzer bir problemi düşünme öğretmen adaylarının sadece %4'ü tarafından kullanılmıştır. Katılımcıların %38'inin mantıksal sorgulama stratejisini en az bir kez farklı çözümlerinde kullandığı ortaya çıkmıştır. Mantıksal sorgulama stratejisini tek başına kullanan katılımcıların çözümlerini açıklarken çoğunlukla sözel ifade ve sembolik gösterim şeklini kullandığı görülmüştür (bkz. Şekil 45).

Şekil 45

ÖA$_{47}$'nin Çözüm Yaklaşımı

Her masaya 3 kişi oturduğunu düşünürsek

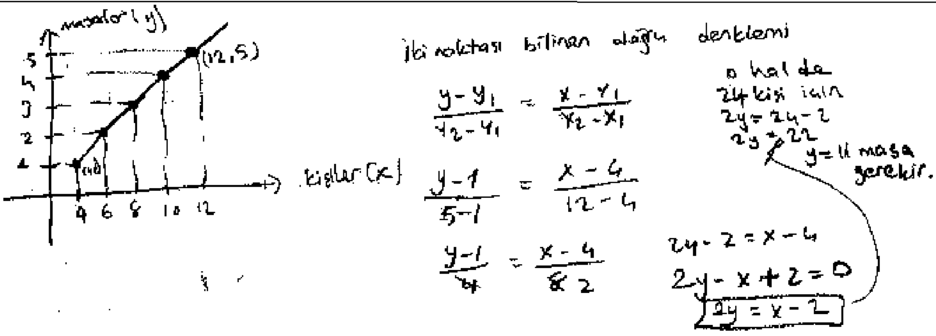
$\frac{24}{3} = 8$ masa yapılır. İlk ve son masa hariç 3 kişi oturulamaz

$8 - 2 = 6$ $\frac{6}{2} = 3$ masa ihtiyacı var $\Rightarrow 8+3 = 11$ masa

Masa probleminin çözümünde öğretmen adaylarının %32'si denklem yazma stratejisini kullanmıştır. Doğrunun analitiği bilgisini kullanarak iki noktası bilinen doğru denklemi yazan öğretmen adayının çözümü Şekil 46'da verilmiştir.

Şekil 46

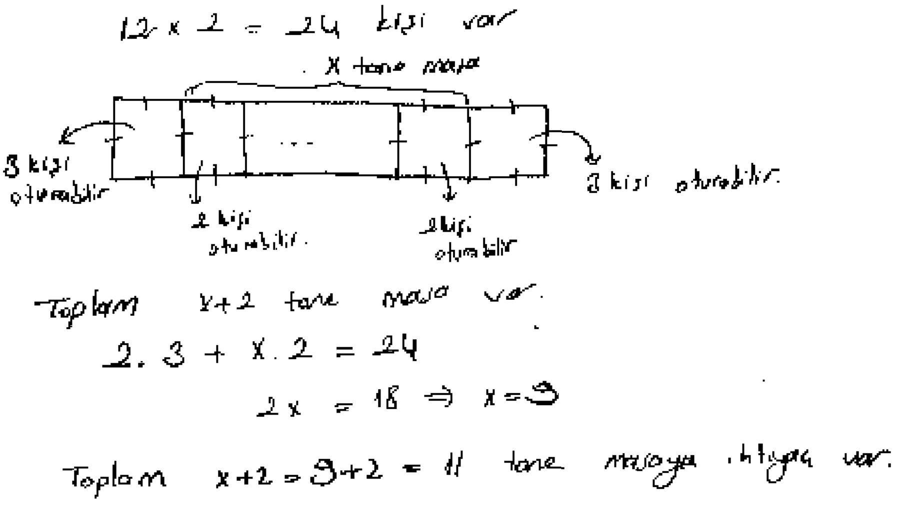
ÖA$_{12}$'nin Çözüm Yaklaşımı



Masa problemi için ortaya konan çözümlerde, tek bir strateji kullanılmasının yanı sıra birden fazla stratejinin de birlikte kullanılarak sonuca ulaşıldığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının bazıları dikdörtgen şeklindeki masanın kısa kenarlarına iki kişinin oturduğunu düşünerek çözüm yaklaşımında bulunurken bazıları köşelerde bulunan masalara üçer kişinin oturabileceğini düşünerek çözüm yapmıştır. Şekil çizme/model oluşturma ve denklem yazma stratejilerini birlikte kullanan öğretmen adayının çözüm yaklaşımı Şekil 47de verilmiştir.

Şekil 47

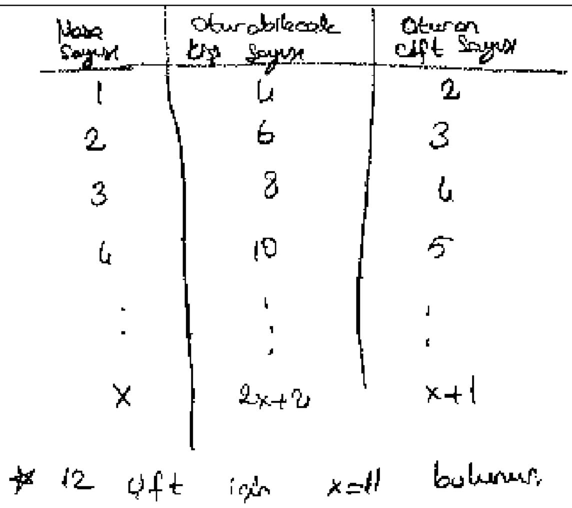
ÖA$_{46}$'nın Çözüm Yaklaşımı



Öğretmen adaylarının %14'ü tablo yaparak çözüm yaklaşımı sunmuştur. Bu çözüm yöntemini kullanan katılımcılar masa sayısı ile kişi sayısı arasında bir örüntü yakalamış ve bu yolla sonuca ulaşmışlardır. Tablo yapma stratejisini kullanan öğretmen adaylarının %86'sı masa problemi için iki ve üç farklı çözüm üretmiştir. Söz konusu stratejiyi kullanan bir öğretmen adayının çözümü örnek olarak Şekil 48'de sunulmuştur.

Şekil 48

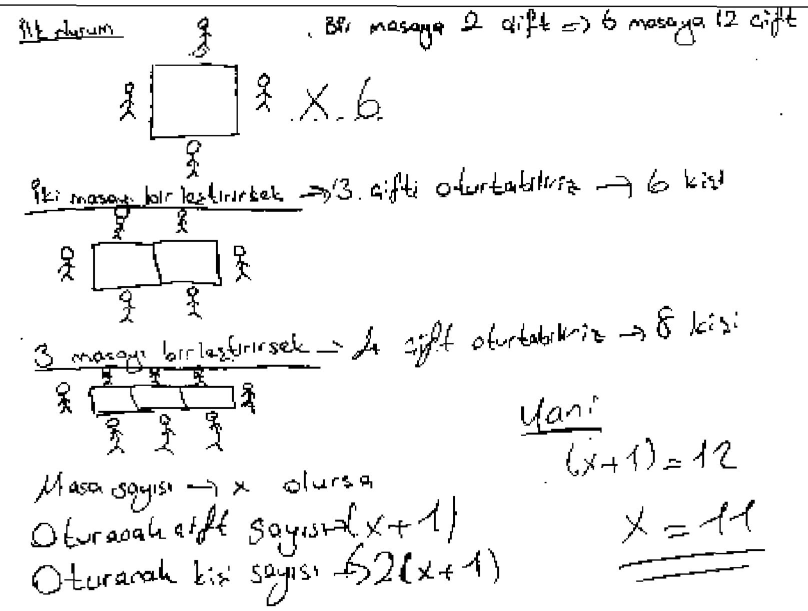
ÖA$_{43}$'ün Çözüm Yaklaşımı



Problemi basitleştirme stratejisini kulanan öğretmen adayları (%30) problemdeki verileri basitleştirirek istenen kişi sayısı için gerekli masa sayısını bulmuştur. Problemi basitleştirme yaklaşımı sunan öğretmen adaylarının tamamının şekil çizdiği ve masaları birer birer ekleyerek kişi sayısındaki değişimi gözlemledikleri görülmüştür. Şekil çizme/model oluşturma ve problemi basitleştirme stratejilerini birlikte kullanan bir öğretmen adayının çözümü örnek olarak Şekil 49'da sunulmuştur.

Şekil 49

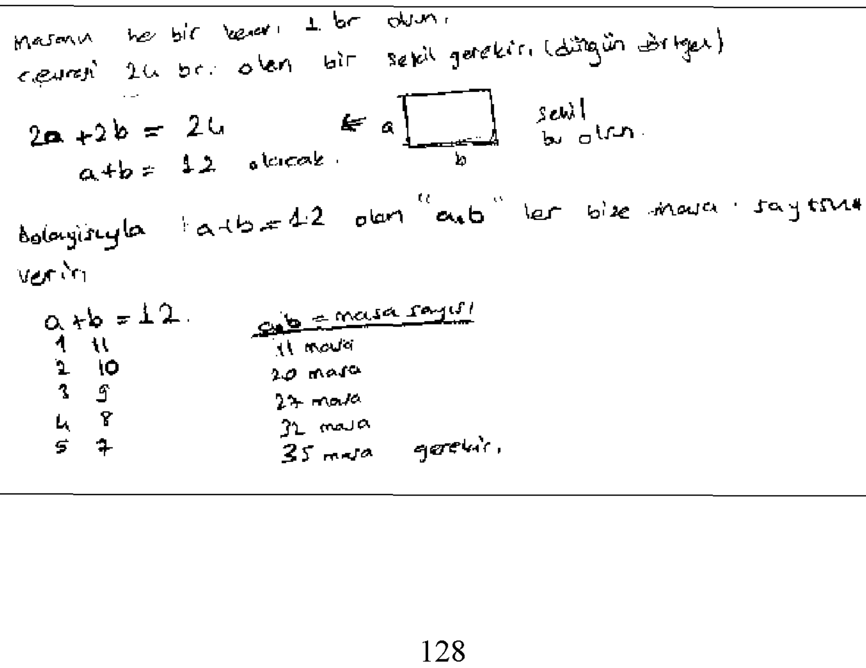
ÖA$_5$'in Çözüm Yaklaşımı



Benzer bir problemi düşünme stratejisini kullanan iki öğretmen adayı da masa problemini, dikdörtgenin çevre uzunluğu ile ilişkilendirip toplamları sabit olan iki sayma sayısının çarpımlarının alacağı değerlerin problemde istenen masa sayısını vereceğini ifade etmiştir. Bu çözümlerden biri Şekil 50'de verilmiştir.

Şekil 50

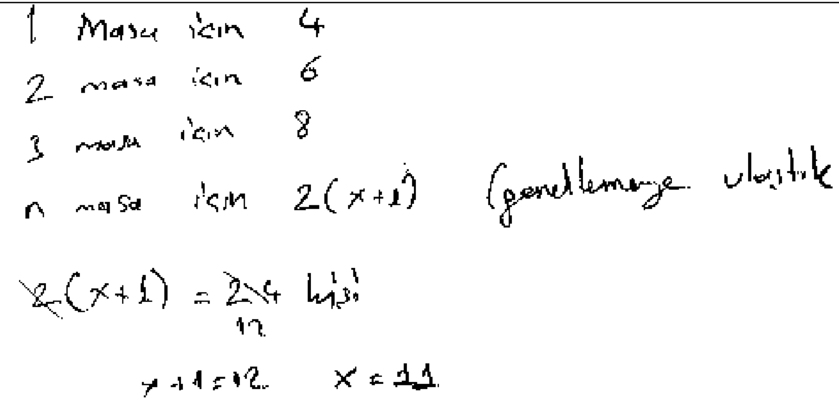
ÖA$_{34}$'nin Çözüm Yaklaşımı



Öğretmen adaylarının %12’si örüntü arama stratejisini çözüm yaklaşımı olarak kullanmıştır. Kişi sayısı ile masa sayısı arasında örüntü arayan öğretmen adaylarının %50’si masa problemi için üç ve daha fazla çözüm üretebilmişlerdir. Şekil 51’de örüntü arama stratejisini kullanan bir öğretmen adayının çözüm yaklaşımı sunulmuştur.

Şekil 51

ÖA$_{40}$’ın Çözüm Yaklaşımı



Harita Probleminin Çözümünde Kullanılan Stratejilere İlişkin Bulgular ve Yorumlar

“Harita Problemi” için tüm öğretmen adaylarının çözüm sürecinde kullandıkları stratejiler; formül kullanma, benzer bir problemi düşünme, toplama yoluyla sayma, bilinen bir örüntüden yararlanma, problemi basitleştirme olarak belirlenmiştir. Bu stratejilerden toplama yoluyla sayma ve bilinen bir örüntüden yararlanma stratejileri probleme özgü olarak ortaya çıkmış ve araştırmacılar tarafından adlandırılmıştır. Öğretmen adaylarının harita probleminin çözümünde kullandıkları stratejiler ayrıntılı olarak Tablo 21’de verilmiştir.

Tablo 21
Harita Probleminin Çözümünde Kullanılan Stratejilere Yönelik Analiz Sonuçları

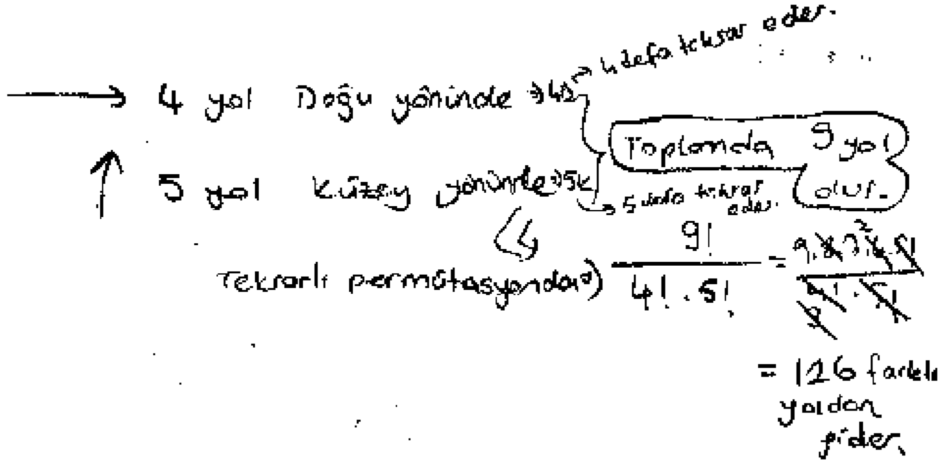
	Formül Kullanma	Benzer Bir Problemi Düşünme	Toplama Yoluyla Sayma	Bilinen Bir Örüntüden Yararlanma	Problemi Basitleştirme
Öğretmen Adayları	$ÖA_2$, $ÖA_3$, $ÖA_4$, $ÖA_5$, $ÖA_6$, $ÖA_7$, $ÖA_8$, $ÖA_9$, $ÖA_{10}$, $ÖA_{11}$, $ÖA_{12}$, $ÖA_{13}$, $ÖA_{14}$, $ÖA_{15}$, $ÖA_{16}$, $ÖA_{17}$, $ÖA_{18}$, $ÖA_{20}$, $ÖA_{21}$, $ÖA_{22}$, $ÖA_{23}$, $ÖA_{24}$, $ÖA_{25}$, $ÖA_{26}$, $ÖA_{27}$, $ÖA_{28}$, $ÖA_{29}$, $ÖA_{30}$, $ÖA_{31}$, $ÖA_{32}$, $ÖA_{33}$, $ÖA_{34}$, $ÖA_{35}$, $ÖA_{36}$, $ÖA_{37}$, $ÖA_{38}$, $ÖA_{39}$, $ÖA_{40}$, $ÖA_{41}$, $ÖA_{42}$, $ÖA_{43}$, $ÖA_{44}$, $ÖA_{45}$, $ÖA_{46}$, $ÖA_{47}$, $ÖA_{48}$, $ÖA_{49}$, $ÖA_{50}$	$ÖA_9$, $ÖA_{14}$, $ÖA_{19}$,$ÖA_{24}$, $ÖA_{25}$, $ÖA_{41}$, $ÖA_{44}$	$ÖA_8$,$ÖA_{15}$, $ÖA_{21}$,$ÖA_{22}$, $ÖA_{38}$	$ÖA_8$	$ÖA_8$,$ÖA_9$,$ÖA_{12}$, $ÖA_{13}$, $ÖA_{18}$, $ÖA_{19}$, $ÖA_{29}$, $ÖA_{35}$, $ÖA_{36}$, $ÖA_{43}$, $ÖA_{45}$, $ÖA_{48}$
Öğretmen Adayı Sayısı	48	7	5	1	12
Kullanan ÖA Yüzdesi	%96	%14	%10	%2	%24
Kullanma Sıklığı	56	7	5	1	12

Tablo 21 incelendiğinde öğretmen adaylarının tamamına yakınının (%96) harita probleminin çözümünde formül kullanma stratejisini kullandığı görülmektedir. Söz konusu adaylar formül kullanma stratejisini kullandıkları çözümlerinde tekrarlı permütasyon formülünü (bkz. Şekil 51/ $ÖA_{12}$) ya da kombinasyon formülünü uygulayıp sonuca ulaşmıştır (bkz. Şekil 51/ $ÖA_{44}$). Formül kullanma stratejisini kullanan adayların %85'i çözüm yaklaşımlarında tekrarlı permütasyon formülünü kullanırken %15'i kombinasyon formülünü kullanmayı tercih etmiştir.

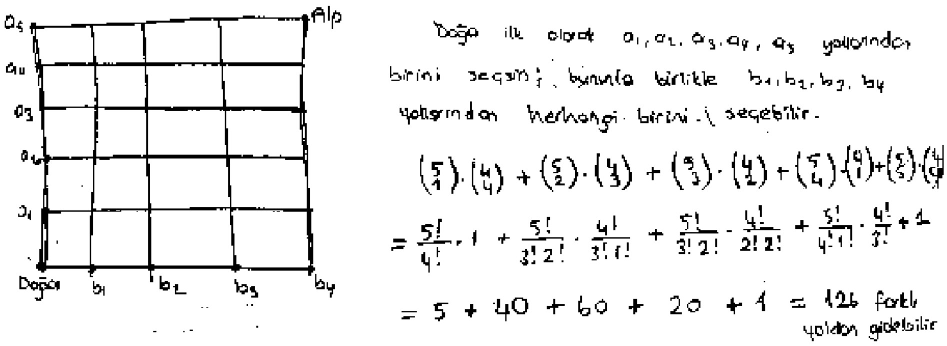
Şekil 52

Formül Kullanma Stratejisini Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

ÖA$_{12}$'nin Çözüm Yaklaşımı



ÖA$_{44}$'ün Çözüm Yaklaşımı



Benzer bir problemi düşünme stratejisini kullanan öğretmen adayları (%14) harita üzerinde gidilmesi gereken yolları tekrar eden farklı harflerle isimlendirerek istenen noktaya kaç farklı yoldan gidilebileceğini bu harflerin farklı sıralanışları ile bulunabileceğini belirtmişlerdir. Bu stratejiyi herhangi bir çözümünde kullanan öğretmen adayları, harita problem için iki ve üç farklı çözüm yaklaşımı sunabilmiştir. Çözümünde benzer bir problemi düşünme stratejisini kullanan iki öğretmen adayının çözümleri Şekil 53'te verilmiştir.

Şekil 53

Benzer Bir Problemi Düşünme Stratejisini Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

ÖA$_{14}$'ün Çözüm Yaklaşımı

Doğa, Alp'e giderken 5 birim kuzeye 4 birim doğuya
Doğu yönüne gittiği bir birim için D diyelim.
Kuzey yönüne " " " için K diyelim.
Yolu: DDDDDKKK harflerinin sıralamaları olur.
Bu durumda $\frac{9!}{5!.4!} = 126$ farklı yol kullanılabilir.

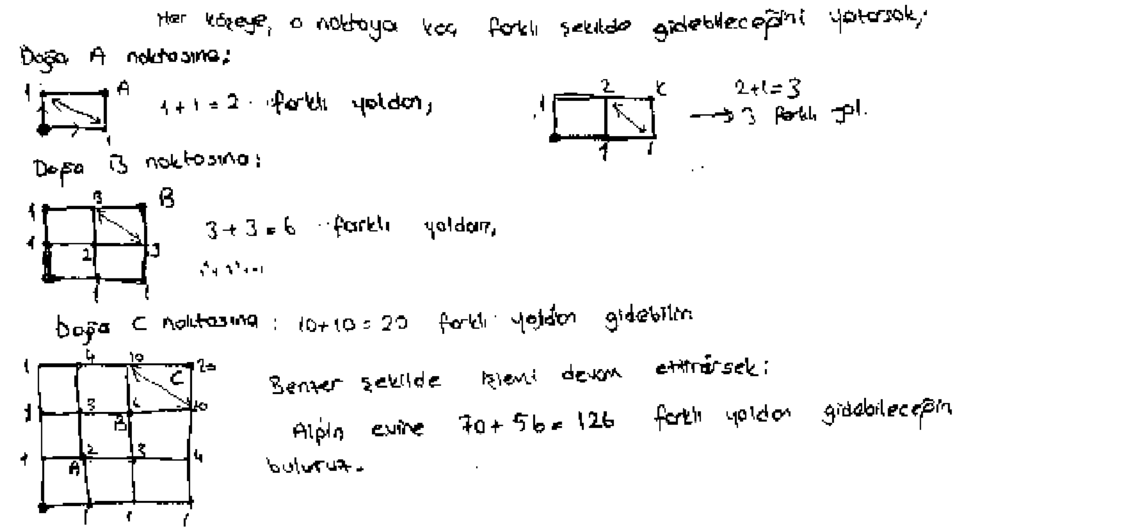
ÖA$_{41}$'in Çözüm Yaklaşımı

AAAABBBBB) harfleriyle 9 harften oluşan anlamlı ya da anlamsızla kaç farklı kelime yazılabilir. Sorusuna benzetilebilir.
$\frac{9!}{4!.5!} = 126$

Öğretmen adaylarının az bir yüzdesi (%10) probleme özgü ortaya çıkan toplama yoluyla sayma stratejisini kullanmıştır. Bu stratejiyi kullanan öğretmen adaylarının tamamı üç ve üçten fazla çözüm yaklaşımı ortaya koyabilmiştir. Söz konusu strateji ile haritada bulunan sokakların kesiştiği noktalara kaç farklı şekilde gidildiği yazılarak bu sayıların toplamı ile hedeflenen noktaya kadar kaç farklı şekilde gidilebileceği bulunmuştur (bkz. Şekil 54).

Şekil 54

ÖA$_{22}$'nin Çözüm Yaklaşımı

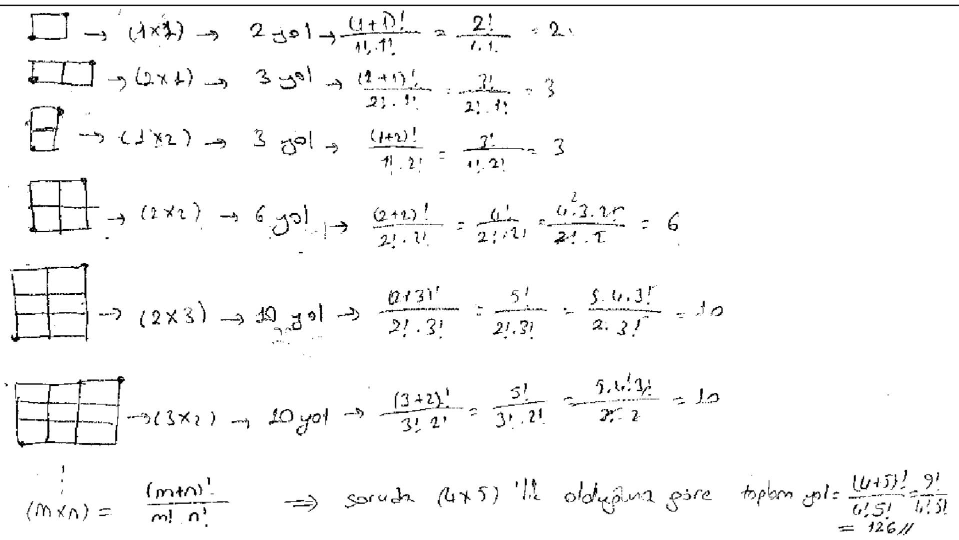


Bilinen bir örüntüden yararlanma stratejisi ise sadece bir öğretmen adayı tarafından kullanılmış olup en az tercih edilen strateji olmuştur. Söz konusu stratejiyi kullanan öğretmen adayı ÖA$_{8}$ harita problem için tüm katılımcılar arasında en fazla çözüm üreten öğretmen adayıdır.

Diğer yandan öğretmen adaylarının %24'ü harita probleminde problem basitleştirme stratejisinden yararlanmıştır. Bu yaklaşımı kullanarak öğretmen adayları, problemde verilen haritanın boyutlarını değiştirerek istenen hedefe kaç farklı şekilde gidilebileceğine dair bir çıkarımda bulunmuşlardır (bkz. Şekil 55).

Şekil 55

ÖA₉'un Çözüm Yaklaşımı



Kare Probleminin Çözümünde Kullanılan Stratejilere İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"Kare Problemi" için tüm öğretmen adaylarının çözüm sürecinde kullandıkları stratejiler; örüntü arama, diyagram çizme, formül kullanma, tablo yapma, sistematik liste yapma, şekil çizme olarak belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının kare probleminin çözümünde kullandıkları stratejiler ayrıntılı olarak Tablo 22'de verilmiştir.

Tablo 22

Kare Probleminin Çözümünde Kullanılan Stratejilere Yönelik Analiz Sonuçları

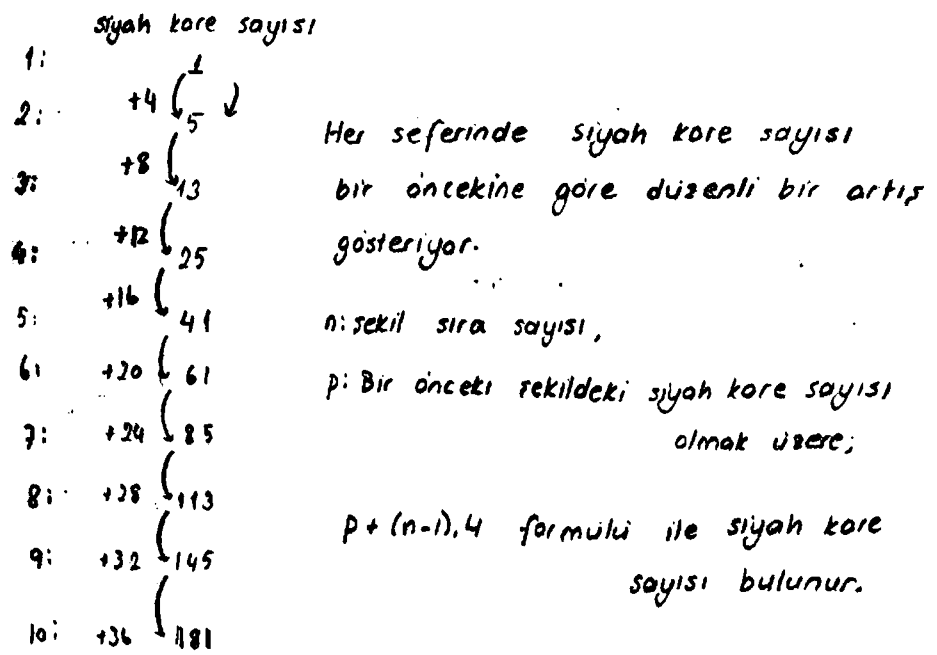
	Örüntü Arama	Diyagram Çizme	Formül Kullanma	Tablo Yapma	Sistematik Liste Yapmak	Şekil Çizme
Öğretmen Adayları	ÖA$_{2}$, ÖA$_{3}$, ÖA$_{4}$, ÖA$_{5}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{22}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{27}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{37}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{46}$, ÖA$_{47}$, ÖA$_{48}$, ÖA$_{49}$,ÖA$_{50}$	ÖA$_{12}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{23}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{27}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{45}$,ÖA$_{49}$	ÖA$_{14}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{28}$	ÖA$_{4}$, ÖA$_{5}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{8}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{50}$	ÖA$_{31}$	ÖA$_{6}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{45}$
Öğretmen Adayı Sayısı	45	18	5	13	1	9
Kullanan Öğretmen Adayı Yüzdesi	%90	%36	%10	%26	%2	%18
Kullanma Sıklığı	104	21	6	14	1	10

Tablo 22'ye bakıldığında katılımcıların %90'ının kare probleminin çözümünde örüntü arama stratejisini kullandığı görülmektedir. Örüntü arama stratejisinin kullanılma sıklığına bakıldığında ise öğretmen adaylarının farklı çözümlerinde bu stratejiyi en az bir kez kullanmış olduğu dikkat çekmektedir. Bu öğretmen adaylarının bazıları çözüm yaklaşımlarında siyah kare sayıları arasındaki örüntü kuralı oluşturmaya çalışırken (bkz. Şekil 56/ *ÖA*$_{45}$) bazıları ise beyaz kare sayılarını sayarak sonuca ulaşmışlardır (bkz. Şekil 56/ *ÖA*$_{12}$).

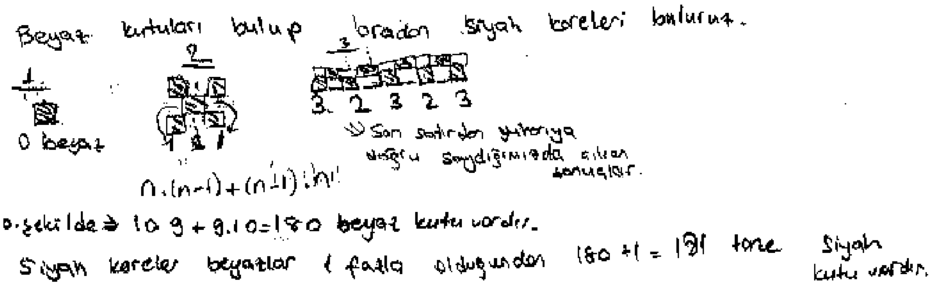
Şekil 56

Örüntü Arama Stratejisini Kullanan Öğretmen Adaylarının Çözüm Yaklaşımları

ÖA$_{45}$'in Çözüm Yaklaşımı



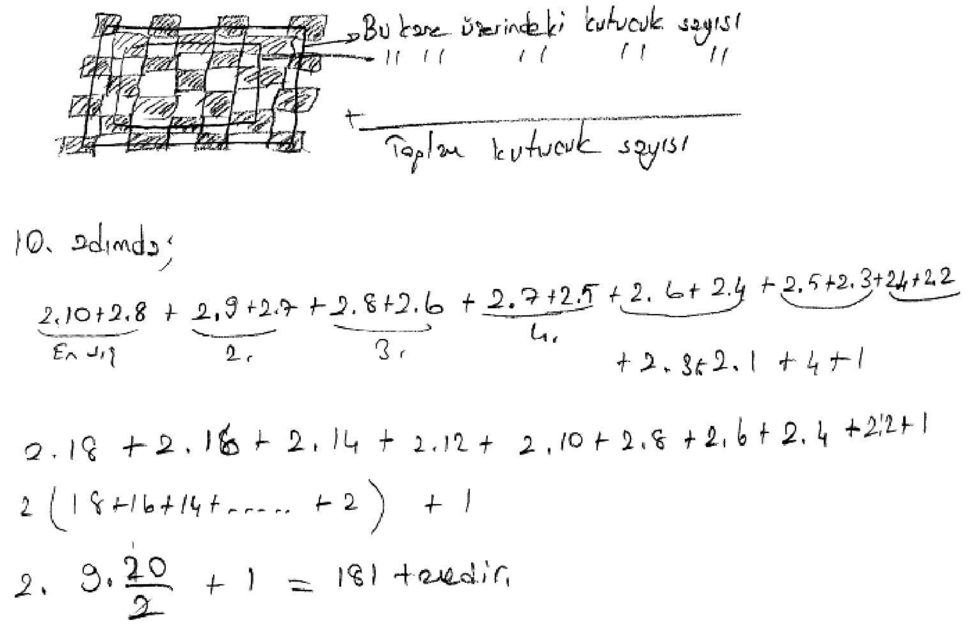
ÖA$_{12}$'nin Çözüm Yaklaşımı



Katılımcıların %36'sı farklı çözüm yaklaşımlarında diyagram çizmeyi (bkz. Şekil 57) %26'sı ise tablo yapmayı tercih etmiştir. Tablo yapma yaklaşımında bulunan öğretmen adayları, bu yolla eldeki verileri düzenli bir şekilde görme fırsatı bulmuştur ve veriler arasındaki örüntüyü fark edip sonuca ulaşmıştır.

Şekil 57

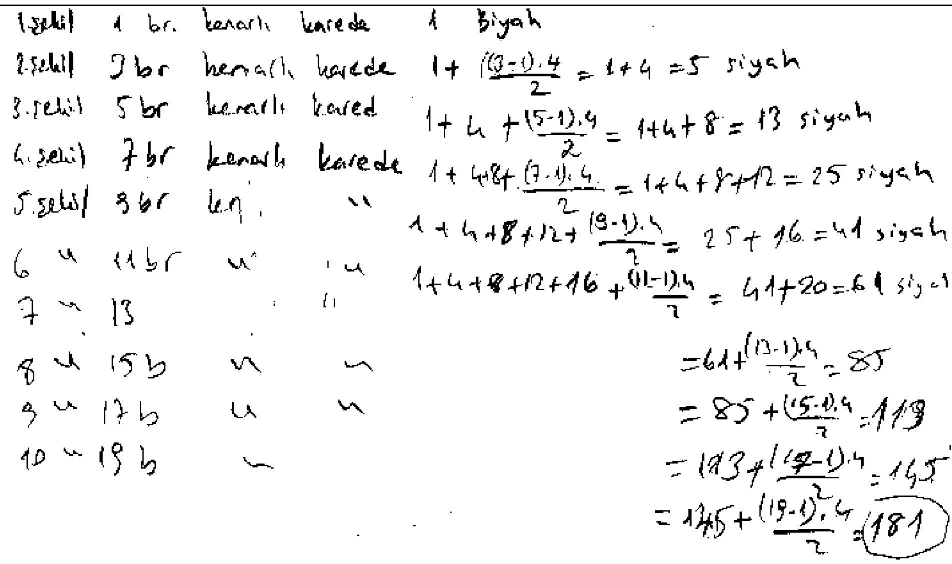
ÖA$_{29}$'un Çözüm Yaklaşımı



Sistematik liste yapma (%2), formül kullanma (%10) ve şekil çizme (%18) sırasıyla en az tercih edilen stratejiler olmuştur. Çözüm yaklaşımlarında formül kullanan öğretmen adayları genellikle aritmetik sayı dizisi oluşturan sayıları kısa yoldan toplayabilmek için toplam formüllerinden yararlanmıştır. Sistematik liste yapan katılımcılar ise (bkz. Şekil 58) problemde istenen şekle kadar olan tüm şekillerdeki siyah karelerin sayısını hesaplamışlardır.

Şekil 58

ÖA$_{31}$'in Çözüm Yaklaşımı



IV. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar

Dördüncü alt problem, matematik öğretmen adaylarının problem çözümlerini açıklarken kullandıkları gösterim şekillerinin belirlenmesini içermektedir. Bu alt probleme ait bulgularda araştırma literatüründe yer alan Shield ve Galbraith'in (1998) çalışmalarında kullandıkları gösterim şekilleri kategorileri ve Lesh Landou ve Hamilton'un (1983) çalışmalarında ortaya çıkan gösterim şekilleri arasındaki dönüşümler dikkate alınmış ancak tez çalışmasında farklı olarak bir çözümü ayrıntılarıyla açıklamak için ikili dönüşümlerin yanı sıra üçlü dönüşümlere de yer verilmiştir. Gösterim şekilleri sembolik (smb), sözel ifade (sö), ve şekil (şe) olarak kategorilendirilmiştir. Bununla birlite problem çözümlerinde kullanılan gösterim şekillerine ait kodlamalar tablolaştırılırken tek bir gösterim şeklinin kullanıldığı çözümlerde sadece ilgili gösterim şeklinin kısaltması yer alırken birden fazla gösterim şeklinin kullanıldığı çözümlerde ilgili gösterim şekilleri arasına virgüller konulmuştur.

Dik Üçgen Probleminin Çözümünün Açıklanmasında Yararlanılan Gösterim Şekillerine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Dik üçgen Problemine ait çözüm yaklaşımları incelendiğinde öğretmen adaylarının gösterim şekilleri arasında ağırlıklı olarak ikili ve üçlü dönüşümler yapmayı tercih ettiği görülmüştür. Bunun yanı sıra gösterim şekillerini tek başına kullanmayı tercih eden öğretmen adayı sayısının oldukça az olduğu dikkat çekmektedir.Öğretmen adaylarının dik üçgen probleminin çözümünde kullandıkları gösterim şekilleri ayrıntılı olarak Tablo 23'te de verilmiştir.

Tablo 23'e bakıldığında öğretmen adayları, dik üçgen problemi için ürettikleri çözümlerini ifade ederken tek bir gösterim şeklini kullanmak yerine birden fazla gösterim şekli arasında dönüşüm yapmayı tercih etmiştir. Tek başına şekil, sembolik ya da sözel ifade kullanarak çözüm sürecini temsil eden öğretmen adayının oldukça az sayıda olduğu görülmektedir. Örneğin $ÖA_{19}$'un dik üçgen problem için yedi farklı çözüm yaklaşımında bulunduğu ve bu çözümlerinin dördünü ifade ederken sadece şekil kullandığı diğer üç çözümünde ise şekilin yanında sembolik ifadelerden de yararlandığı belirlenmiştir. Bunun yanısıra çözüm sürecini açıklarken sadece sözel ifadeleri kullanan öğretmen adayı bulunmamaktadır.

İki gösterim şekli arasında dönüşüm yapmayı tercih eden öğretmen adayları en çok şekil ve sembolik gösterim şekillerini birlikte kullanırken sözel ve sembolik ifadeler arasında dönüşüm yapan hiç bir öğretmen adayı bulunmamaktadır. Öğretmen adayı $ÖA_{33}$'ün yedi farklı çözüm yaklaşımının altısında şekil ve sembolik gösterim şekilleri arasında dönüşüm yapabildiği diğer çözümünde ise üç gösterim şeklinden de yararlandığı dikkat çekmektedir. Öğretmen adaylarının %72'si çözümlerini ifade ederken üç gösterim şekli arasında dönüşüm yapabilmiştir. Bir öğretmen adayının tüm çözüm yaklaşımlarında kullanmayı tercih ettiği gösterim şekilleri bazında bakıldığında ise öğretmen adaylarının genellikle benzer gösterim şekillerini kullandığı görülmektedir. Örneğin $ÖA_6$ dik üçgen problemi için altı farklı çözüm yaklaşımında bulunmuştur ve bu çözümlerinin tamamında şekil ve sembolik gösterim şekilleri kullanmış olup hiç bir çözümünde sözel ifadelere yer vermemiştir.

Tablo 23

Dik Üçgen Probleminin Çözümünde Ortaya Çıkan Gösterim Şekillerine Yönelik Analiz Sonuçları

	Tek Gösterim Şekli			İkili Dönüşüm			Üçlü Dönüşüm
	şe	smb	sö	Şe,sö	Şe,smb	Sö,smb	Şe,sö,smb
1. çözüm	ÖA$_{23}$,ÖA$_{29}$			ÖA$_{5}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{27}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{47}$	ÖA$_{4}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{45}$		ÖA$_{1}$, ÖA$_{2}$, ÖA$_{3}$, ÖA$_{8}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{22}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{37}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{46}$, ÖA$_{48}$, ÖA$_{49}$, ÖA$_{50}$, ÖA$_{21}$
2. çözüm	ÖA$_{19}$,ÖA$_{25}$	ÖA$_{31}$		ÖA$_{26}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{48}$	ÖA$_{4}$, ÖA$_{5}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{23}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{27}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{46}$, ÖA$_{48}$		ÖA$_{2}$, ÖA$_{3}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{8}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{22}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{37}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{47}$, ÖA$_{49}$, ÖA$_{50}$
3. çözüm	ÖA$_{19}$				ÖA$_{5}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{23}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{50}$		ÖA$_{2}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{49}$
4. çözüm	ÖA$_{19}$			ÖA$_{29}$	ÖA$_{6}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{23}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{50}$		ÖA$_{2}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{43}$
5. çözüm				ÖA$_{42}$	ÖA$_{6}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{45}$		
6. çözüm					ÖA$_{6}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{33}$		
7. çözüm	ÖA$_{19}$				ÖA$_{29}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{33}$		

El Sıkışma Probleminin Çözümünün Açıklanmasında Yararlanılan Gösterim Şekillerine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

El sıkışma problemine ait çözümler incelendiğinde öğretmen adaylarının hem tek bir gösterim şeklini kullandıkları hem de gösterim şekilleri arasında dönüşüm yaptıkları görülmüştür. En çok tercih edilen gösterim şekli sembolik ifadeler olarak belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının el sıkışma probleminin çözümünde kullandıkları gösterim şekilleri ayrıntılı olarak Tablo 24'te verilmiştir.

Tablo 24'e bakıldığında el sıkışma problemini çözerken hiçbir öğretmen adayı nın tek başına sözel ifadeleri kullanmadığı görülmüştür. Bunun yanı sıra sözel ifadeleri şekil ve sembolik gösterim şekilleriyle birlikte kullanmıştır. İki gösterim şekli arasında dönüşüm yapan öğretmen adayları çoğunlukla çözümlerinde ya çizdikleri şekilleri cebirsel ifadeleri de içeren farklı sembolik gösterim şekilleriyle desteklemişler ya da doğrudan sözel ifadelerle sembolik ifadeleri birlikte kullanmışlardır. Örneğin el sıkışma problemi için en çok çözüm üreten öğretmen adaylarından biri olan $ÖA_{33}$'ün çözümleri incelendiğinde ilk dört çözümünde sözel ve sembolik ifadeler arasında dönüşüm yaptığı sonraki çözümünde sembolik ifadeleri kullandığı ve son çözümünde ise şekil ve sembolik gösterim şekillerini birlikte kullandığı görülmektedir. Bu bağlamda $ÖA_{33}$'ün tüm çözümlerinde sembolik gösterim şekli kullandığı dikkat çekmektedir.

Öğretmen adaylarının %44'ü üç gösterim şekli arasında dönüşüm yapmıştır. Çözüm yaklaşımlarının herhangi birinde üç gösterim şekli arasında dönüşüm yapabilen öğretmen adaylarının %86'sı el sıkışma problemi için üç ve daha fazla çözüm üretebilmişlerdir. Örneğin beş farklı çözüm yaklaşımı sunan $ÖA_{10}$ ilk iki çözümünde sözel ve sembolik ifadeler arasında dönüşüm yaparken diğer çözümlerinde üç gösterim şeklini birden kullanmıştır.

Tablo 24

El Sıkışma Probleminin Çözümünde Ortaya Çıkan Gösterim Şekillerine Yönelik Analiz Sonuçları

	Tek Gösterim Şekli			İkili Dönüşüm			Üçlü Dönüşüm
	şe	smb	sö	Şe,sö	Şe,smb	Sö,smb	Şe,sö,smb
1. çözüm		ÖA$_1$, ÖA$_2$, ÖA$_4$, ÖA$_7$, ÖA$_9$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{27}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{37}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{46}$, ÖA$_{47}$			ÖA$_6$, ÖA$_8$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{48}$	ÖA$_3$, ÖA$_5$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{22}$, ÖA$_{23}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{50}$	ÖA$_{28}$, ÖA$_{49}$
2. çözüm	ÖA$_6$	ÖA$_2$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{50}$			ÖA$_1$, ÖA$_4$, ÖA$_7$, ÖA$_8$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{22}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{38}$	ÖA$_3$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{27}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{48}$, ÖA$_{49}$	ÖA$_9$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{23}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{46}$, ÖA$_{47}$
3. çözüm	ÖA$_6$	ÖA$_{13}$, ÖA$_{29}$		ÖA$_{15}$	ÖA$_1$, ÖA$_2$, ÖA$_4$, ÖA$_9$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{48}$, ÖA$_{49}$	ÖA$_7$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{45}$	ÖA$_3$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{37}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{50}$
4. çözüm		ÖA$_{11}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{25}$			ÖA$_6$, ÖA$_9$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{43}$	ÖA$_{33}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{48}$	ÖA$_4$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{45}$
5. çözüm		ÖA$_{29}$, ÖA$_{33}$			ÖA$_{26}$, ÖA$_{43}$		ÖA$_{10}$
6. çözüm					ÖA$_{33}$	ÖA$_{29}$	

Masa Probleminin Çözümünün Açıklanmasında Yararlanılan Gösterim Şekillerine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Masa probleminin çözümlerinde ortaya çıkan gösterim şekilleri incelendiğinde şekil, sözel ifade ya da sembolik gösterim şekillerinden her birinin tek başına en az bir öğretmen adayı tarafından kullanıldığı görülmektedir. Öğretmen adaylarının masa probleminin çözümünde kullandıkları gösterim şekilleri ayrıntılı olarak Tablo 25'te verilmiştir.

Tablo 25 incelendiğinde çözümlerinde sadece şekil çizen ya da sembolik gösterim şekli kullanan öğretmen adayı tüm katılımcıların %28'ini oluşturmaktadır. Gösterim şekillerini en az bir çözümlerinde yalnız başına kullanan on dört öğretmen adayı en az iki farklı çözüm yaklaşımı sunarken bu öğretmen adaylarının %36'sı üç ve daha fazla çözüm üretmişlerdir. İki gösterim şekli arasında dönüşüm yapan öğretmen adayları tüm katılımcıların %68'ini oluşturmaktadır. Bu öğretmen adaylarının ağırlıklı tercihi şekil ve sembolik gösterim şekilleridir. Sözel ifadeyi içeren ikili dönüşümler ise az sayıda öğretmen adayları tarafından kullanılmıştır. En az bir çözümünde üç gösterim şekli arasında dönüşüm yapan öğretmen adayı tüm katılımcıların %28'ini oluşturmaktadır ve en az iki çözüm üretmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının %43'ü ise masa problemi için en az üç çözüm üreten adaylar arasında yer almaktadır. Tüm çözüm yaklaşımlarında bu üç gösterim şekli arasında dönüşüm yapan öğretmen adayları ($ÖA_9$, $ÖA_{14}$, $ÖA_{17}$, $ÖA_{39}$) ise tüm katılımcıların sadece %8'idir.

Tablo 25

Masa Probleminin Çözümünde Ortaya Çıkan Gösterim Şekillerine Yönelik Analiz Sonuçları

	Tek Gösterim Şekli			İkili Dönüşüm			Üçlü Dönüşüm
	şe	smb	sö	Şe,sö	Şe,smb	Sö,smb	Şe,sö,smb
1. çözüm	$ÖA_{19}$, $ÖA_{24}$, $ÖA_{34}$, $ÖA_{45}$		$ÖA_{20}$	$ÖA_{31}$	$ÖA_{1}$, $ÖA_{4}$, $ÖA_{5}$, $ÖA_{6}$, $ÖA_{7}$, $ÖA_{10}$, $ÖA_{11}$, $ÖA_{12}$, $ÖA_{16}$, $ÖA_{21}$, $ÖA_{23}$, $ÖA_{25}$, $ÖA_{27}$, $ÖA_{32}$, $ÖA_{35}$, $ÖA_{36}$, $ÖA_{38}$, $ÖA_{40}$, $ÖA_{42}$, $ÖA_{43}$, $ÖA_{46}$, $ÖA_{48}$	$ÖA_{29}$, $ÖA_{47}$	$ÖA_{3}$, $ÖA_{8}$, $ÖA_{9}$, $ÖA_{13}$, $ÖA_{14}$, $ÖA_{15}$, $ÖA_{17}$, $ÖA_{18}$, $ÖA_{22}$, $ÖA_{26}$, $ÖA_{28}$, $ÖA_{30}$, $ÖA_{33}$, $ÖA_{37}$, $ÖA_{39}$, $ÖA_{41}$, $ÖA_{44}$, $ÖA_{49}$, $ÖA_{50}$
2. çözüm	$ÖA_{7}$, $ÖA_{29}$, $ÖA_{33}$	$ÖA_{13}$, $ÖA_{21}$, $ÖA_{32}$, $ÖA_{40}$	$ÖA_{24}$		$ÖA_{4}$, $ÖA_{12}$, $ÖA_{16}$, $ÖA_{18}$, $ÖA_{19}$, $ÖA_{20}$, $ÖA_{22}$, $ÖA_{27}$, $ÖA_{28}$, $ÖA_{42}$, $ÖA_{44}$	$ÖA_{11}$, $ÖA_{15}$, $ÖA_{23}$, $ÖA_{38}$, $ÖA_{45}$	$ÖA_{9}$, $ÖA_{10}$, $ÖA_{14}$, $ÖA_{17}$,$ÖA_{30}$, $ÖA_{31}$, $ÖA_{34}$, $ÖA_{39}$, $ÖA_{47}$
3. çözüm		$ÖA_{9}$	$ÖA_{30}$		$ÖA_{7}$, $ÖA_{12}$, $ÖA_{38}$	$ÖA_{10}$, $ÖA_{47}$	$ÖA_{24}$, $ÖA_{45}$
4. çözüm		$ÖA_{45}$					

Harita Probleminin Çözümünün Açıklanmasında Yararlanılan Gösterim Şekillerine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Harita problemine ait çözüm yaklaşımları incelendiğinde öğretmen adaylarının tek bir gösterim şeklini kullanmayı ya da iki gösterim şekli arasında dönüşüm yapmayı tercih ettikleri görülmüştür. Tek gösterim şekli kullanan öğretmen adaylarının tamamı sembolik gösterim şekillerini tercih ederken hiçbir öğretmen adayı, şekilleri ve sözel ifadeleri tek başına kullanmamıştır. Öğretmen adaylarının harita probleminin çözümünde kullandıkları gösterim şekilleri ayrıntılı olarak Tablo 26'da verilmiştir.

Şekil-sembolik ve sözel ifade-sembolik gösterim şekilleri en çok tercih edilen gösterim ikilileri olmuştur. Şekil çizip sözel ifade kullanan tek öğretmen adayı $ÖA_{21}$ ise sözel ifadeleri yaptığı çizimi açıklamak amacıyla kullanmıştır. Tüm çözümlerinde sembolik ve sözel ifadeler arasında dönüşüm yapmayı tercih eden öğretmen adaylarından biri olan $ÖA_{44}$ sembolik ifadeleri kullanarak sonuca ulaşmıştır. $ÖA_{44}$ ilk iki çözümünde sözel ifadeleri açıklama yapmak için kullanırken son çözümünde verilen problemi benzer bir probleme dönüştürmüş ve sözel ifadeleri bu yeni problemi ifade etmek için kullanmıştır.

Öğretmen adaylarının %16'sı çözümlerini açıklarken üç gösterim şekli arasında dönüşüm yapmayı tercih etmiştir. Herhangi bir çözümünde üç gösterim şekli arasında dönüşüm yapan öğretmen adaylaının %50'si üç ve daha fazla çözüm üretebilmiştir.

Tablo 26

Harita Probleminin Çözümünde Ortaya Çıkan Gösterim Şekillerine Yönelik Analiz Sonuçları

	Tek Gösterim Şekli			İkili Dönüşüm			Üçlü Dönüşüm
	şe	smb	sö	Şe,sö	Şe,smb	Sö,smb	Şe,sö,smb
1. çözüm		$ÖA_{2}$, $ÖA_{4}$, $ÖA_{5}$, $ÖA_{6}$, $ÖA_{7}$, $ÖA_{9}$, $ÖA_{10}$, $ÖA_{13}$, $ÖA_{16}$, $ÖA_{17}$, $ÖA_{18}$, $ÖA_{24}$, $ÖA_{25}$, $ÖA_{27}$, $ÖA_{28}$, $ÖA_{29}$, $ÖA_{32}$, $ÖA_{34}$, $ÖA_{37}$, $ÖA_{39}$, $ÖA_{40}$, $ÖA_{42}$, $ÖA_{45}$, $ÖA_{47}$			$ÖA_{15}$, $ÖA_{21}$, $ÖA_{43}$	$ÖA_{3}$, $ÖA_{11}$, $ÖA_{12}$, $ÖA_{14}$, $ÖA_{19}$, $ÖA_{20}$, $ÖA_{23}$, $ÖA_{26}$, $ÖA_{30}$, $ÖA_{31}$, $ÖA_{33}$, $ÖA_{34}$, $ÖA_{36}$, $ÖA_{41}$, $ÖA_{44}$, $ÖA_{46}$, $ÖA_{48}$, $ÖA_{49}$	$ÖA_{8}$, $ÖA_{22}$, $ÖA_{38}$, $ÖA_{50}$
2. çözüm		$ÖA_{16}$, $ÖA_{32}$, $ÖA_{38}$		$ÖA_{21}$	$ÖA_{8}$,$ÖA_{9}$, $ÖA_{12}$, $ÖA_{18}$, $ÖA_{19}$, $ÖA_{34}$, $ÖA_{43}$, $ÖA_{45}$, $ÖA_{48}$	$ÖA_{14}$, $ÖA_{24}$, $ÖA_{25}$, $ÖA_{41}$, $ÖA_{44}$	$ÖA_{13}$, $ÖA_{15}$, $ÖA_{22}$, $ÖA_{29}$, $ÖA_{36}$
3. çözüm		$ÖA_{21}$, $ÖA_{22}$, $ÖA_{38}$			$ÖA_{15}$	$ÖA_{8}$,$ÖA_{9}$, $ÖA_{44}$	
4. çözüm		$ÖA_{8}$					

Kare Probleminin Çözümünün Açıklanmasında Yararlanılan Gösterim Şekillerine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Kare problemine ait çözüm yaklaşımları incelendiğinde öğretmen adaylarının sembolik gösterim şeklini tek başına kullanmayı ya da iki ve üç gösterim şekli arasında dönüşüm yapmayı tercih ettikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının %72'si tek bir gösterim şeklini (sembolik) kullanmış ve herhangi bir dönüşüme gerek duymamıştır. Şekil ve sözel ifadeleri çözümlerinde tek başına kullanan öğretmen adayı bulunmamaktadır. Bunun yanısıra katılımcıların ağırlıklı olarak iki gösterim şeklini kullandıkları ve yaygın olarak şekil-sembolik ve sözel ifade-sembolik ikililerinden yararlandıkları görülmüştür. Şekil-sözel ifade gösterim şekli ikilisini kullanan öğretmen adayı olmamıştır. Üç gösterim şekli arasında dönüşüm yapan öğretmen adayları tüm katılımcıların %18'ini oluşturmaktadır. Söz konusu adayların tamamı en az üç farklı çözüm yaklaşımı sunmuştur.

Çözümlerinde sözel ifade kullanan öğretmen adayları genellikle bu ifadeleri çözüm yaklaşımlarını ya da kare sayıları arasındaki örüntü kuralını açıklamak için kullanmışlardır. Öğretmen adayları ağırlıklı olarak sembolik ifaler kullanarak çözüme ulaşmıştır. Öğretmen adaylarının kare probleminin çözümünde kullandıkları gösterim şekilleri ayrıntılı olarak Tablo 27'da verilmiştir.

Tablo 27

Kare Probleminin Çözümünde Ortaya Çıkan Gösterim Şekillerine Yönelik Analiz Sonuçları

	Tek Gösterim Şekli			İkili Dönüşüm			Üçlü Dönüşüm
	şe	smb	sö	Şe,sö	Şe,smb	Sö,smb	Şe,sö,smb
1. çözüm		ÖA$_{2}$, ÖA$_{3}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{7}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{22}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{27}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{31}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{37}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{46}$, ÖA$_{47}$, ÖA$_{49}$			ÖA$_{5}$, ÖA$_{8}$, ÖA$_{12}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{23}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{44}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{50}$	ÖA$_{4}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{48}$	ÖA$_{16}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{41}$
2. çözüm		ÖA$_{2}$, ÖA$_{9}$, ÖA$_{10}$, ÖA$_{17}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{34}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{46}$, ÖA$_{47}$, ÖA$_{49}$			ÖA$_{4}$, ÖA$_{8}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{27}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{37}$	ÖA$_{3}$, ÖA$_{5}$, ÖA$_{6}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{15}$, ÖA$_{22}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{25}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{48}$, ÖA$_{50}$	ÖA$_{12}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{35}$
3. çözüm		ÖA$_{9}$, ÖA$_{11}$, ÖA$_{18}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{28}$, ÖA$_{30}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{40}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{42}$, ÖA$_{48}$			ÖA$_{6}$, ÖA$_{14}$, ÖA$_{16}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{35}$, ÖA$_{43}$, ÖA$_{45}$, ÖA$_{49}$	ÖA$_{3}$, ÖA5, ÖA$_{15}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{20}$, ÖA$_{24}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{50}$	ÖA$_{12}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{36}$
4. çözüm		ÖA$_{9}$, ÖA$_{13}$, ÖA$_{26}$, ÖA$_{32}$, ÖA$_{39}$, ÖA$_{41}$, ÖA$_{48}$			ÖA$_{6}$, ÖA$_{21}$, ÖA$_{29}$, ÖA$_{33}$, ÖA$_{36}$, ÖA$_{49}$	ÖA$_{12}$, ÖA$_{19}$, ÖA$_{38}$, ÖA$_{45}$	
5. çözüm					ÖA$_{12}$, ÖA$_{45}$	ÖA$_{19}$, ÖA$_{38}$	

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Matematik problemlerinin çözümünde öğretmen adaylarının kullandıkları bilgi türlerini, stratejileri ve gösterim şekillerini incelemek amacıyla gerçekleştirilen tez çalışmasının bu bölümünde bulgular ışığında ulaşılan sonuçlar, tartışma ve son olarak da öneriler sunulmaktadır.

Öğretmen adaylarının problemlere verdikleri yanıtlar incelendiğinde kolektif çözüm uzayında ortaya çıkan bilgi türlerinin özellikle dik üçgen ve el sıkışma problemleri için oldukça kapsamlı olduğu görülmüştür. Ancak öğretmen adaylarının kişisel çözüm uzaylarına bakıldığında çok sayıda çözüm yaklaşımı ortaya koyan öğretmen adaylarının farklı bilgi türlerini kullanmak yerine genellikle bir bilgi türünden yararlanarak farklı çözüm yolları ortaya koymaya çalıştıkları dikkat çekmiştir.

Dik üçgen probleminin çözüm uzayında yer alan bilgi kategorileri üç başlık altında toplanmış ve her başlık kendi içerisinde alt başlıklara ayrılmıştır. Dik üçgen problemi için tüm öğretmen adayları tarafından toplamda yirmi farklı çözüm yaklaşımı ortaya konmuştur. Dik üçgen probleminin kolektif çözüm uzayında ortaya çıkan bilgi türlerinin tamamını kullanarak çözüm üreten sadece bir öğretmen adayının bulunduğu saptanmıştır. Bununla birlikte sadece üçgen bilgisini kullanarak birden fazla çözüm yaklaşımı sergileyen öğretmen adaylarının da oldukça fazla olduğu belirlenmiştir. Ancak bu çözümlerin genellikle kolektif çözüm uzayında yer alan çözümler içerisindeki farklı yaklaşımlar olarak görülmeyen, daha geleneksel yaklaşımlar olduğu söylenebilir. El sıkışma problemi için öğretmen adayları tarafından toplamda on altı farklı çözüm üretilmiştir. Buna paralel olarak söz konusu çözümlerde kullanılan bilgi türlerinin de oldukça farklı olduğu belirlenmiştir. El sıkışma problemi için öğretmen adaylarının genellikle kullandıkları farklı bilgi türü sayısına paralel sayıda çözüm yaklaşımı ortaya koydukları görülmüştür.

Diğer dört problemin aksine masa problemi için tek bir öğretmen adayı tarafından ortaya konan farklı çözüm yolu sayısı çok olmamasına rağmen kolektif çözüm uzayına bakıldığında öğretmen adaylarının büyük bir yüzdesinin farklı bilgi türlerini kullanabildiği görülmüştür. Masa probleminin yapısı gereği ilköğretimden ortaöğretime kadar her sınıf düzeyinde karşılaşılabilecek bir problem türü olması nedeniyle öğretmen adaylarının, bu problemi çözerken farklı bilgi türleri arasındaki ilişkileri diğer dört probleme kıyasla daha rahat kurabildikleri ortaya çıkmıştır. Bunun yanı sıra harita problemi ile sadece permütasyon konusu anlatılırken karşılaşılıyor olmasının kullanılan bilgi türlerini kısıtladığı düşünülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının neredeyse tamamı en az bir çözümlerinde permütasyon bilgisini bir başka deyim ile tekrarlı permütasyon formülünü kullanmışlardır. Harita problemine birden fazla çözüm yaklaşımında bulunan öğretmen adayları ise çözümlerinde ilk olarak permütasyon ardından da kombinasyon bilgisine yönelmişlerdir. Bunun haricinde problemi basitleştirerek örüntü bilgisini kullanmaya çalışan öğretmen adaylarının bazılarının çözümlerini yarıda bırakarak sonuca ulaşmakta sıkıntı yaşadıkları ortaya çıkmıştır. Kare problemine ait kolektif çözüm uzayında, örüntü, toplam formülü, simetri, kısmi toplamlar dizisi ve fonksiyon bilgilerinin kullanıldığı ortaya çıkmıştır. Bu bilgilerden toplam sembolü bilgileri kare probleminin çözümünde birlikte kullanılmıştır. Toplam sembolünün problem çözümlerinde toplama işlemini kolaylaştırmak için kullanıldığı belirlenmiştir. Bunun yanı sıra kare problemini kısmi toplamlar dizisi ya da fonksiyon bilgisini kullanarak çözen öğretmen adayları da bulunmaktadır ancak söz konusu öğretmen adayları katılımcıların düşük bir yüzdesini (%26) temsil etmektedirler.

Bulgular sonucunda tüm problemler bazında öğretmen adayları tarafından en az kullanılan bilgi türleri şu şekilde ortaya çıkmıştır: Dik üçgen probleminde; analitik geometri, trigonometri ve üçgende alan bilgisi: el sıkışma probleminde; analitik geometri, geometri, kartezyen çarpımı, aritmetik dizi bilgisi: masa probleminde; analitik geometri bilgisi, harita probleminde; kombinasyon, temel işlem, örüntü bilgisi: kare probleminde ise fonksiyon, kısmi toplamlar dizisi ve simetri bilgisidir. Tüm problemlerin çözüm uzaylarındaki bilgi kategorileri en az kullanılan bilgi türleri açısından incelendiğinde analitik geometri bilgisini kullanan öğretmen adaylarının sayısının oldukça az olduğu görülmüştür. Özellikle el sıkışma ve masa problemlerinde analitik geometri ve geometri bilgilerinin çok az kullanılmış olması öğretmen adaylarının matematik ile geometri bilgileri arasında bağlantı kurmada sıkıntı yaşadığını ortaya çıkarmıştır. Aynı zamanda öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun verilen geometri problemlerini cebirle ilişkilendirip çözebilmekte de sıkıntı yaşadıkları görülmüştür. Örneğin kare problemine ait çözümlerde kısmi toplamlar dizisi ya da fonksiyon bilgilerini kullanabilen öğretmen adayı yüzdesinin (%26) az olması ise bunun bir göstergesi olarak düşünülebilir. Öğretmen adaylarının bir bölümünün masa ve kare problemlerinin çözümünde geometri ve cebiri ilişkilendirebildiği görülmüştür. Ancak genele bakılacak olursa katılımcılar geometri problemlerini cebirle ilişkilendirip çözmekte ya da cebir problemlerini geometri ile ilişkilendirip çözmekte sıkıntı yaşamışlardır.

Ortaya çıkan bu bilgiler ışığında; genel olarak bir öğretmen adayı ne kadar farklı bilgi türü kullanabilmişse o kadar fazla çözüm üretebilmiştir sonucuna ulaşılmıştır. Leikin'e (2006) göre problem çözerken kullanılacak bilgiler arasında bağlantı kurmanın bir yolu, hem farklı çözümü hem de farklı matematiksel bilgilerin kullanılmasını sağlayan birden fazla çözüm yoluna açık bağlantılı problemlerin kullanılmasıdır. Bu bağlamda öğretmen adaylarının geniş bilgi yelpazesi kullanıp çözüm üretmede sıkıntı yaşamış olmalarının sahip oldukları matematik bilgileri arasındaki bağın zayıf olmasından kaynaklanabileceği düşünülmektedir. Ülkemizdeki lise matematik programının geliştirmeyi hedeflediği beceriler arasında "ilişkilendirme becerisi" yer almaktadır. Bu bilginin kazanılabilmesi için ise öğrencilerde "öğrenme alanları arasında ilişki kurabilme" becerisinin geliştirilmesi beklenmektedir (MEB, 2006). Hedeflenen becerileri kazandırmak için rehber olacak öğretmenlerin istenen öğrenme ortamlarını oluşturmadaki katkısı büyüktür. Ancak elde edilen bulgular öğretmen adaylarının meslek hayatlarında öğrencilerinin matematik konuları arasında bağlantı kurması konusunda rehberlik ederken sıkıntı yaşayabilecekleri düşüncesini ortaya çıkarmıştır. Farklı çözüm yaklaşımlarının sunulması, farklı temsil biçimlerinden yararlanılması ve sınıfta ele alınan konunun matematiğin diğer alanlarla ilişkilendirilmesi açısından problem çözme, güçlü bir araç olarak kullanılmaktadır. Karataş (2008), öğrencilerin problem çözme başarılarını geliştirmek için oluşturduğu problem merkezli öğrenme ortamlarını bilişsel ve duyuşsal alan açısından değerlendirmiş ve problem merkezli öğrenme uygulamalarını tamamlayan öğrencilerin problem çözme başarılarında artış olduğu belirlenmiştir. Bu açıdan ele alındığında, lise matematik programında yer alan ilişkilendirme becerisinin hedeflendiği şekilde geliştirilmesinde problem çözme merkezli öğrenme ortamlarından yararlanılmasının ve söz konusu öğrenme ortamlarında verilen problemlerin farklı öğrenme alanlarıyla ilişkili olmasına ve farklı çözümlerinin sunulmasına dikkat edilmesinin uygun olabileceği düşünülmektedir.

Öğretmen adaylarının problemlere verdikleri yanıtlar problem çözme stratejileri bağlamında incelendiğinde dik üçgen problemi için; şekil çizme ve ek çizim yapma: el sıkışma problemi için; formül kullanma ve diyagram çizme: masa problemi için şekil çizme: harita problemi için; formül kullanma: kare problemi için ise örüntü arama stratejilerinin en sık kullanıldığı görülmüştür. Aynı zamanda öğretmen adaylarının problemlere özgü olarak çıkan ve literatürde yer almayan bazı stratejileri de kullandıkları ortaya çıkmıştır. Probleme özgü ortaya çıkan bu bulgular, Yazgan (2007) tarafından problem çözme stratejileri üzerine yapılan deneysel çalışmaya paralellik göstermektedir. Yazgan çalışmasının sonucunda öğrencilerin rutin olmayan problemler için geliştirdikleri bazı stratejilerin problemler için özgün olduğunu belirtmiştir.

Dik üçgen problemine ait çözümlerde literatürden farklı olarak “ek çizim yapma”, “teoremlerden yararlanma” ve “analitik düzleme taşıma” stratejileri ortaya çıkmıştır. Ek çizim stratejisini kullanan öğretmen adayları problemde verilen dik üçgen üzerinde çeşitli ek çizimler yaparken şekil çizen öğretmen adayları doğrudan geometri bilgisinden yararlanarak çember ya da dikdörtgen çizmişlerdir. Teoremlerden yararlanma stratejisinde ise üçgen ve trigonometri öğrenme alanlarında yer alan ve farklı sınıf düzeylerinde öğretilen teoremler dik üçgen probleminin çözümü için kullanılmıştır. Sadece altı öğretmen adayı dik üçgeni farklı şekillerde koordinat ekseni üzerine taşımış ve analitik düzlemin özelliklerinden faydalanarak problemi çözmüştür. Söz konusu öğretmen adaylarının çözümleri ders kitaplarında sunulan çözüm yaklaşımları baz alındığında geleneksel olmayan çözümler olarak adlandırılabilir. Analitik düzleme taşıma stratejisini kullanan öğretmen adayları dik üçgen problemi için en az üç çözüm üretmiş ve farklı bilgi türlerinden etkili bir şekilde yararlanmışlardır. Star ve Rittle-Johnson (2008) problemleri çözmek için birden fazla yaklaşım ortaya koyabilen kişileri problem çözerken esnek olabilen kişiler (flexible problem solvers) olarak adlandırılacağını ve söz konusu kişilerin problem çözerken hangi stratejilerin diğerlerinden daha etkili olduğunu bildiklerini ifade etmiştir. Bu bağlamda geleneksel olmayan çözüm yaklaşımları sunan ve problemleri birden fazla yolla çözebilen bu öğretmen adaylarının problem çözerken esnek oldukları söylenebilir. Ancak bu öğretmen adayları söz konusu katılımcıların çok az bir yüzdesini oluşturmaktadır.

El sıkışma problemine ait çözümlerde literatürden farklı olarak "bilinen bir örüntüden yararlanma" stratejisi ortaya çıkmıştır. Söz konusu stratejiyi çözümlerinde kullanan öğretmen adayları, kişi sayısı ve el sıkışma sayısı arasındaki örüntü ile Paskal üçgeninde yer alan sayılar arasındaki benzerlikten yola çıkarak çözüm yapmışlardır.

Masa probleminin kolektif çözüm uzayında probleme özgü herhangi bir strateji kullanılmamışken harita problemine ait bazı çözümlerde dört işleme dayalı temel işlem bilgisi kullanılmış ve "toplama yoluyla sayma" stratejisi bu probleme özgü olarak ortaya çıkmıştır. Yurtdışı alan yazında da söz konusu çözüme rastlanmıştır (Posamentier&Krulik, 1998).

Kare problemine bakıldığında ise örüntü arama stratejisini kullanan öğretmen adaylarının yeterli sayıda farklı çözüm üretemedikleri dikkat çekmiştir. Oysaki ilköğretim matematik öğretim programına bakıldığında örüntü bilgisinin kullanımına ilişkin çok sayıda etkinliğin olduğu dikkat çekmektedir (MEB, 2009). Öğretmen adaylarının örüntü arama stratejisini kullanarak sınırlı sayıda çözüm yaklaşımı ortaya koyabilmeleri meslek hayatlarında öğrencilerine farklı çözüm yaklaşımları geliştirmek konusunda yeterli rehberliği yapamayabilecekleri sonucuna ulaştırabilir.

Tüm problemler bazında ele alındığında benzer bir problemi düşünme, bilinen bir örüntüden yararlanma, problemi basitleştirme, sistematik liste yapma gibi stratejilerin öğretmen adayları tarafından çok az kullanılmış olması onların bu problem çözme stratejileri hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları ya da önceki öğrenim hayatlarında karşılaşmamış olma olasılıklarını düşündürmektedir. Araştırmanın sistematik liste yapma stratejisi ile ilgili olan bulguları Yazgan'nın (2007) ortaya koyduğu sonuçların aksi yönündedir. Yazgan sistematik liste yapma ve şekil çizme stratejilerinin öğrenciler tarafından rahatlıkla kullanılabildiği vurgulamıştır.

Öğretmen adaylarının öğretmenlik mesleğine başlamadan önce problem çözme stratejileri ile ilgili bilgi sahibi olmaları ve bu stratejileri derslerinde kullanmaları teşvik edilmelidir. Derslerde problem çözme uygulamaları gerçekleştirilirken farklı problem çözme stratejilerine değinerek öğretim yapmanın öğrencilerin problem çözme yeteneklerini geliştirdiği görülmektedir (Charles ve Lester 1984; Hembree 1992; Higgins 1997; Lee 1982; Oladunni 1998; Schoenfeld 1979'den aktaran Fan ve Zhu, 2007). Matematik öğretmen adaylarının böyle bir öğretim gerçekleştirebilmeleri ise problem çözme stratejileri ile ilgili bir eğitimden geçirilmeleri ile mümkün olacaktır. Aynı zamanda çoklu strateji kullanımının keşfedilmesine yönelik yapılan teşviklerin ve bunun üzerine verilen eğitimin farklı yollar bulmadaki esnekliği arttırdığı Star ve Rittle-Johnson (2008) tarafından ortaya konmuştur. Dolayısıyla öğretmen adaylarının kendi sınıflarında öğrencileri problem çözerken farklı stratejiler kullanmaya teşvik etmelerinin farklı çözüm yollarını ortaya çıkaracağı ve böylece öğrenmeye teşvik edeceği düşünülmektedir.

Öğretmen adaylarının problemlere ürettikleri çözümler gösterim şekilleri açısından incelendiğinde ise genel olarak tüm problemler için tek başına en sık kullanılan gösterim şeklinin sembolik ifadeler olduğu görülmüştür. Gösterim şekilleri arasındaki ikili dönüşümlerde ise ağırlıklı olarak şekil-sözel ve şekil-sembolik gösterim ikililerinin kullanıldığı belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının kullanmayı en az tercih ettiği gösterim şekli sözel ifadeler olarak bulunmuştur. Sözel ifadeler çoğunlukla şekillerle birlikte kullanılmıştır. Problem çözümlerinde, şekil-sözel gösterim ikilisinin sıklıkla tercih ediliyor olması öğretmen adaylarının çizdikleri şekilleri açıklama gereği duyduğu için sözel ifadeleri kullanmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu bulgular Cai'nin (1995) çalışmasında ortaya çıkan bulgular ile farklılık göstermektedir. Cai, Amerikalı ve Çinli öğrenciler üzerine yaptığı çalışmasında gösterim şekillerini; sadece sözel, sözel ve sembolik, sözel ve görsel olmak üzere üç kategori altında kodlamış ve sonuç olarak problem çözme sürecinde açıklama yapan her öğrencinin sözel gösterim şeklini kullandığını ifade etmiştir. Tez çalışmasında öğretmen adayları ile çalışılmasının problem çözümlerinde sıklıkla sembolik gösterim şekillerinin kullanılması durumunu ortaya çıkarmış olabileceği düşünülmektedir.

Dik üçgen probleminde öğretmen adayları, sözel ifadeleri tek başına ya da sembolik ifadelerle birlikte kullanmamışlardır. Bunun yanı sıra dik üçgen problemi için öğretmen adayları tarafından en çok kullanılan gösterim şekli ikilisi şekil-sembolik olarak bulunmuştur. Ayrıca bu problemde öğretmen adaylarının üçlü gösterim şekillerini de sıklıkla kullanıldığı görülmüştür. El sıkışma probleminde ise ağırlıklı olarak ikili dönüşümler kullanılmıştır. Ayrıca el sıkışma problemini sadece sembolik ifadeler kullanarak açıklayan öğretmen adayları tüm katılımcıların neredeyse yarısını (%52) oluştururken üçlü gösterim şekilleri arasında dönüşüm yapan öğretmen adayları %48'ini oluşturmaktadır. Masa probleminin çözümlerinde ortaya çıkan gösterim şekilleri incelendiğinde şekil, sözel ifade ya da sembolik gösterim şekillerinden her birinin tek başına en az bir öğretmen adayı tarafından kullanıldığı görülmektedir. İki gösterim şekli arasında dönüşüm yapan öğretmen adaylarının ağırlıklı tercihi şekil ve sembolik gösterim şekilleri olarak ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık olarak yarısı (%52) çözüm süreçlerini açıklarken üç gösterim şekli arasında dönüşüm yapmayı tercih etmiştir. Harita problemine ait çözümlerde kullanılan gösterim şekilleri incelendiğinde tek gösterim şeklini kullanan öğretmen adaylarının tamamı sembolik gösterim şekillerini tercih etmiştir ve hiçbir öğretmen adayı şekilleri ve sözel ifadeleri tek başına kullanmamıştır. İki gösterim şekli arasında dönüşüm yapan öğretmen adayları ağırlıklı olarak sözel ve sembolik gösterim şekillerini kullanmışlardır. Üç gösterim şekli arasında dönüşüm yapan öğretmen adayları ise tüm katılımcıların çok az bir yüzdesini oluşturmaktadır (%16). Harita probleminin çözümü için öğretmen adaylarının ağırlıklı olarak sembolik gösterim şekillerinden faydalanmalarının, formül kullanma stratejisi ile ilişkili olduğu sonucuna varılmıştır. Kare probleminin çözümü için ortaya çıkan gösterim şekillerine bakıldığında ise öğretmen adaylarının ağırlıklı olarak sembolik gösterim şeklini gerek tek başına gerekse bir diğer gösterim şekli ile birlikte kullandığı görülmüştür. Bunun bir sebebi olarak kare probleminde örüntü ararken sayılar ve sembollerin kullanılması olarak düşünülmektedir. Çözüm yaklaşımlarında şekilleri kullanan öğretmen adayları, fonksiyon ve kısmi toplamlar dizisi gibi bilgileri de kullanarak geleneksel olmayan çözümler sunmuştur.

Araştırmada elde edilen sonuçlara bağlı olarak aşağıda bazı önerilere yer verilmektedir.

- Matematik problemlerine farklı çözüm yolu üretilmesinin istenmesi farklı bilgi türlerinin kullanımını ortaya çıkarmıştır. Bu bağlamda matematik öğretmenlerinin sınıflarında farklı çözüm yaklaşımlarını kullanması ya da bunu öğrencilerinden istemesi durumunda öğrenciler farklı bilgi türleri arasında ilişki kurabilir.
- Matematik öğretmen adaylarına stratejiler konusunda herhangi bir ön eğitim verilmemiştir. Buna rağmen tüm öğretmen adaylarının çözüm yaklaşımları ortak olarak ele alınırsa ortaya çıkan stratejiler ve kullanılan bilgi türleri yeterince farklılık göstermektedir. Üniversitelerde matematik öğretmen adaylarına okutulacak ders içeriklerine problem çözme stratejileri ve çözüm uzayları eklenebilir ve böylece öğretmen adaylarının sadece ortak çözüm uzayları değil aynı zamanda bireysel çözüm uzayları da genişleyebilir. Aynı zamanda bilinçli bir şekilde kullanılan problem çözme stratejileri sonucunda çok daha orjinal çözüm yaklaşımları ortaya konabilir.
- Öğretmen adaylarının problem çözümlerinde kullandıkları gösterim şekilleri farklı çözüm yaklaşımlarını ortaya çıkarmıştır. Dolayısıyla öğretmenlerin kendi sınıflarında problem çözerken uygun gösterim şekillerini kullanmalarının çözüm yaklaşımlarının anlaşılabilirliğini arttıracağı düşünülmektedir. Ancak problem çözüm sürecinde kullanılan gösterim

şekilleri ile seçilen strateji arasındaki ilişkilerin ortaya konması için ilerleyen araştırmalara ihtiyaç duyulmaktadır.

- Daha az sayıda öğretmen adayı seçilerek daha derin bir inceleme sağlanabilir ve farklı veri toplama araçlarından da yararlanılarak problem çözme süreçlerinde kullanılan bilgi, strateji ve gösterim şekilleri hakkında daha ayrıntılı bilgiler elde edilebilir.

KAYNAKÇA

Akkuş-Çıkla, O. (2004). Çoklu Temsil Temelli Öğretimin Yedinci Sınıf Öğrencilerinin Cebir Performansına, Matematiğe Karşı Tutumuna Ve Temsil Tercihlerine Etkisi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, ODTÜ, Ankara.

Altun, M., Sezgin-Memnun, D. (2008). Mathematics Teacher Trainees' Skills And Opinions On Solving Non-Routine Mathematical Problems. **Journal of Theory and Practice in Education**, 4 (2): 213-238.

Anderson, C. R., Hoffmeister, A. M. (2007). Knowing And Teaching Middle School Mathematics: A Professional Development Course For İn-Service Teachers. **School Science and Mathematics**, 107 (5), 193.

Anderson, J. (2009). Mathematics Curriculum Development And The Role Of Problem Solving. In K. Schoo Curriculum: A National Conversation. Canberra, 2-4 October 2009.

Arslan, Ç. (2002). Ilköğretim Yedinci Ve Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Problem Çözme Stratejilerini Kullanabilme Düzeyleri. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Arslan, Ç., Altun, M. (2007). Learning To Solve Non-Routine Mathematical Problems. **Elementary Education Online**, 6(1), 50-61.

Balcı, A. (2009). **Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntem, Teknik ve İlkeler** (7. Baskı). Pegem Akademi, Ankara.

Brenner, M.E., Mayer, R.E., Moseley, B., Brar, T., Duran, R. & Smith Reed, B., et al. (1997). Learning By Understanding: The Role Of Multiple Representations İn Learning Algebra. **American Educational Research Journal**, 34, 663-689.

Büyüköztürk ve ark. (2009). **Bilimsel Araştırma Yöntemleri** (3. Baskı). Pegem Akademi, Ankara.

Cai, J. (1995). A cognitive Analysis of U.S. and Chinese Students' Mathematical Performance on Tasks involving computation, simple Problem Solving and Complex Problem Solving. **Journal For Research İn Mathematics Education Monograph Series 7**, Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Cai, J., & Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: Research and practice. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, 39, 459–473.

Canbazoğlu, S. (2008). Fen Bilgisi Öğretmen Adaylarının Maddenin Tanecikli Yapısı Ünitesine İlişkin Pedagojik Alan Bilgilerinin Değerlendirilmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü Gazi Üniversitesi, Ankara.

Corter, J., Zahrer, D. (2007). Use Of External Visual Representations İn Probability Problem Solving. **Statistics Education Research Journal**, 6 (1), 22-50.

Çepni,S. (2007). **Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş**, 3.Baskı, Trabzon.

Emre, E. (2008). Ortaogretim Ögrencilerinin Uygun Problem Çözme Stratejisi Kullanabilme Becerileri. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

English L. D., Bartolini Bussi M.G., Jones G. A., Lesh R. A., Tirosh D. (2002). **Handbook of International Research in Mathematics Education**. ISBN: 0-8058-3371-4MAHAWAH, NEW JERSEY: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers (UNITED STATES).

English , L. D. (2002). Future İssues And Direction İn İnternational Mathematics Education Research.In Lyn D. English (ED.) . **Handbook of international research in mathematical education**, 787 – 812. NewJersey : Lawrence Erlbaum Associates, publishers .

Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation Of Problem-Solving Procedures: A Comparative Look At China, Singapore, And US Mathematics Textbooks. **Educational Studies in Mathematics**, 66(1), 61-75.

G.Polya, (1957). **How to solve it**, Princeton Univ. Press, Princeton USA (Çeviri: Feryal Halatçı, Sistem yayıncılık,1997, İstanbul

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability To Translate From One Representation Of The Concept Of Function To Another And Mathematical Problem Solving. **Educational Psychology**, 24(5), 645-657.

Goldin, G. A. (1998). Representational Systems, Learning, And Problem Solving İn Mathematics. **Journal of Mathematical Behavior**, *17* (2), 137-165.

Goldin, G. A. (2000). Affective Pathways and Representation in Mathematical Problem Solving. **Mathematical Thinking and Learning**. 2(3), 209-219.

Goldin, G. (2010). Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, 36 (2), 56-60

Goldin, G. A., Janvier, C. (1998). Representations And Psychology Of Mathematics Education. **Journal Of Mathematical Behavior**, 17(1), 1-4.

Goldin, G. e Kaput, J. (1996). A Joint Perspective On The İdea Of Representation İn Learning And Doing Mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin & B. Greer (Eds.), **Theories of mathematical learning** (pp. 397-430). New Jersey: Lawrence Erlbaum

GroBe, C. S., Alexandar, R. (2006). Effects of Multiple Solution Methods in Mathematics Learning. **Learning and Instruction**. 16(2), 122-138. http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/ALL/Papers/PEHKON.pdf

Hwang, W.-Y., Chen, N.-S., Dung, J.-J., & Yang, Y.-L. (2007). Multiple Representation Skills and Creativity Effects on Mathematical Problem Solving using a Multimedia Whiteboard System. **Educational Technology & Society**, 10 (2), 191-212.

Jiang, Z., Mcclintock, E. (2000). Multiple Approaches to Problem Solving and the Use of Technology. **Journal Of Computers in Mathematics and Science Teaching**. 19(1), 7-20.

Karataş, I. (2008). Problem Çözmeye Dayalı Öğrenme Ortamının Bilişsel ve Duyuşsal Öğrenmeye Etkisi, Yayımlanmamış doktora tezi, KTÜ, Trabzon.

Karp, A. (2010). Analyzing And Attempting To Overcome Prospective Teachers' Difficulties During Problem-Solving İnstruction. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 13, 121–139.

Koedinger, K.R., & Tabachneck, H.J.M. (1994). Two Strategies Are Better Than One: Multiple Strategy Use İn Word Problem Solving. Presented At The Annual Meeting İf The American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Krulik, S., & Rudnick, A. (1987). **A Handbook For Teachers Second Edition**. Ally and Bacon Inc.

Krulik, S., & Rudnick, J. (1989). **Problem Solving: A Handbook For Elementary School Teachers**. Boston: Allyn & Bacon.

Kümbetoğlu, B. (2008). **Sosyolojide ve Antropolojide Niteliksel Yöntem ve Araştırma** (2. Baskı). Bağlam Yayıncılık, Ankara.

Lagrange, J.B., Minh, T. K. (2009). Approaching Functions Via Multiple Representations: A Teaching Experiment With Casyopée. Proceedings Of The Sixth Congress Of The European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6), Lyon, France, January 28 – February, 1, 2009.

LaRusso, J. (2010). PathfinderMathematics Problem Solving. Grade 7. (in ed. JeDeluca, R. & Williams, S. M.): Shelton. **http://www.qworkbooks.com/samples/Path/PTH_MPS_7.pdf** (Erişim Tarihi: 31 Aralık 2010)

Leikin, R. (2004). Towards High Quality Geometrical Tasks: Reformulation of A Proof Problem. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3, 209-216.

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. The Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME-5. (pp. 2330-2339)

Leikin, R., Levav-Waynberg, A. (2008). Solution Spaces of Multiple Solution Connecting Tasks as a Mirror of the Development of Mathematics Teachers' Knowledge. **Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education**, 8(3), 233-251.)

Lesh, R. Applied Mathematical Problem Solving. **Educational Studies in Mathematics**, 1981, *12*, 235-264.

Lesh, R., Landau, M. & Hamilton, E. (1983). Conceptual Models İn Applied Mathematical Problem Solving Research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts & Processe*s* (pp. 263-343). NY: Academic Press.

Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematical concepts and processes (pp. 229-261). Orlando, FL: Academic Press).

Levav-Waynberg, A. & Leikin R. (2009). Multiple solutions to a problem: A tool for assessment of mathematical thinking in geometry. The Sixth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME-6

Levav-Waynberg, A., Leikin R. (2006). Solving problems in different ways: Teachers' knowledge situated in practice. In J. Navotna, H. Maraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.), Proceedings of the 30th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, v. 4, (pp. 57-64). Charles University, Prague, Czech Republic.

Lisa, B. W., Roberta, Y. S. (2009). Flexible Use of Symbolic Tools for Problem Solving, Generalization, and Explanation. **The International Journal on Mathematics Education**, 41 (5), 663-679.

Ma, L. (1999). Knowing And Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2001). Research in education: A conceptual introduction (5th Ed.). New York, NY: Longman.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2006a). İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı Ve Kılavuzu, Ankara, Devlet Kitapları Müdürlüğü.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2006). Orta Öğretim Matematik (9, 10, 11 Ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı, Ankara, Milli Eğitim Basımevi.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2008). Öğretmen Yeterlilikleri: Öğretmenlik Mesleği Genel Ve Özel Alan Yeterlikleri. Ankara: Öğretmen Yetiştirme Ve Eğitimi Genel Müdürlüğü. [Çevrim-içi: http://otmg.meb.gov.tr/YetGenel.html, http://otmg.meb.gov.tr/YetOzel.html ve http://otmg.meb.gov.tr/Otmg.html] (Erişim tarihi: 1 Eylül 2010).

Miltner, D. (2007). Solving Problems in Different Ways: Aspects of Pre-Service Teachers' Math Cognition and Pedagogy, Doktora tezi, University of Illinois at Chicago.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles And Standards for School Mathematics. Reston: VA: NCTM.

Neria, D. & Amit, M. (2004). Students' Preference Of Non-Algebraic Representations İn Mathematical Communication. Proceedings of the 28th PME (Vol. 3, pp. 409-416). Bergen, Norway: PME.

Nuangchalerm, P, Pimta,S , Tayruakham,S, (2009) Factors Influencing Mathematics Problem solving Ability of Sixth Grade Students, **Journal of Social Sciences,** 5(4):381-385.

Ontario Ministry of Education. (2006). A Guide To Effective İnstruction İn Mathematics, Kindergarten To Grade 6, Vol. 2. Toronto, ON: Queen's Printer for Ontario.

Özkaya, S.S. (2002). Investigation of Tenth Grade Students" Problem Solving Strategies in Geometry. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, ODTU, Ankara.

Pantziara, M., Gagatsis, A., Elia, I. (2009). Using Diagrams As Tools For The Solution Of Non-Routine Mathematical Problems. **Educational Studies in Mathematics**, 72, 39-60.

Pehkonen, E. (2007). Problem Solving İn Mathematics Education İn Finland. Unpublished Manuscript, University of Helsinki at Finland.

Polya,G. (1945). **How to Solve It**, Garden City, New York: Doubleday

Posamentier, A., Krulik, S. (1998). Problem Solving Strategies For Efficient And Elegant Solutions*: Grades 6-12*, Corwin Press, USA.

Principles and Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 2000.

Punch, K. F. (2005). Sosyal Araştırmalara Giriş. Nicel ve Nitel Yaklaşımlar. (Çeviri: Zeliha Etöz). Ankara: Siyasal Kitapevi Yayınları.

Ryken, A. E. (2009). Multiple Representations As Sites For Teacher Reflection About Mathematics Learning. **J Math Teacher Educ**. 12:347–364.

Saundry, C., & Nicol, C. (2006). Drawing as problem-solving: Young Children's Mathematical Reasoning Through Pictures. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (v. 5, pp. 57-63). Prague, Czech Republic: PME.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning To Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, And Sense-Making İn Mathematics. In D. Grouws (Ed.), **Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning** (pp. 334-370). New York, MacMillan.

Sedig, K. & Liang, H.N. (2006). Interactivity of Visual Mathematical Representations: Factors Affecting Learning and Cognitive Processes. **Journal of Interactive Learning Research**, *17*(2), 179-212. Chesapeake, VA: AACE.

Sert, Ö. (2007). Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Cebir Kavramlarının Farklı Temsil Biçimleri Arasında Dönüşüm Yapma Becerileri. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Shield M. & Galbraith, P. (1998). The Analysis Of Students Expository Writing İn Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 36(1), 29-52.

Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C., & Font Strawhun, B. T. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. **Journal of Mathematical Behavior**, 24, 287–301.

Smith, M. S. (2001). Practice - Based professional development of mathematics . Reston .VA : National Council of Teacher of Mathematics.

Star, J. & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The Case of equation solving. **Learning and Instruction**, 18, 565-579

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap. New York: Free Press.

Stylinou, D. A. (2010). Teachers' Conceptions of Representation in Middle School Mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 13(4).

Şahin, A. A. (2007). 13- 14 yaş grubu öğrencilerin problem çözme stratejilerinin belirlenmesi. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

Şahin, A. A. (2007). 13-14 yaş grubu ğrencilerin problem çözme stratejilerinin belirlenmesi. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

Tubb, G. W. (1974). Heuristic questioning and problem solving strategies in mathematics graduate teaching assistants and their students. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Texas.

Tversky, B. (2001). Spatial schemas in depictions. In M. Gattis (Ed.), Spatial schemas and abstract thought (pp. 79-112). Cambridge, MA: MIT Press.

Van de Walle, J.A. (2004). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally. New York: Pearson Education, Inc.

Vural Akar, A., Cenksever, F. (2005). **Eğitim Araştırmalarında Örnek Olay (Vaka) Çalışmaları**: Tanımı, Türleri, Aşamaları ve Raporlaştırılması, Süleyman Demirel Üniversitesi Burdur Eğitim Fakültesi Dergisi, 6(10):126-139.

Warner, L.B., Schorr, R.Y., & Davis.G.E. (2009). Flexible use of symbolic tools for problem solving, generalization and explanation. **ZDM**, 41, p. 663.

Yavuz, İ., Baştürk, S. (2011). Ders kitaplarında fonksiyon kavramı:Türkiye ve Fransa Örneğinde. **Kastamonu Eğitim Dergisi**. Sayı 1. Cilt 9 sf 199-220

Yazgan, Y. (2007). Dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinin rutin olmayan problem çözme stratejileriyle ilgili gözlemler. Elementary Education Online, 6(2), 249-263. [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2003). **Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri**. Ankara: Sözkesen Matbaacılık.

Yıldırım, A., Şimşek, H. (2005). **Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri** (5. Baskı). Seçkin Yayıncılık, Ankara.

Yıldırım, C. (2004). **Matematiksel Düşünme**, 4. Baskı, İstanbul: Remzi Kitabevi.

EKLER

EK 1: DİK ÜÇGEN PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN STRATEJİ VE GÖSTERİM ŞEKİLLERİNİ BELİRLEMEYE YÖNELİK VERİ TOPLAMA ARACI

Sevgili Öğretmen Adayları,

Aşağıda size sunulan ve yanıtlamanız istenen problem, problemlere çok sayıda çözüm üretme ve bu süreçte kullanılan strateji ve gösterim şekillerinin analiz edilmesi üzerine yapılan bir araştırma için veri toplama amacıyla hazırlanmıştır. Bu araştırmanın, matematik öğretmeni olduğunuzda sınıf ortamlarınızda problemleri farklı yollarla çözmenin ve onları farklı şekillerde ifade etmenin önemini anlama yönünde farkındalığınızı sağlayarak sizleri olumlu yönde etkileyeceğini ümit ediyoruz. Problemin çözümünde farklı gösterim şekillerini (grafik, şekil, tablo, sözel, sembolik ...) veya bir gösterim şeklini farklı çözüm yollarında kullanarak sunulan probleme mümkün oldukça çok sayıda çözüm üretmeye çalışınız. Çözüm aşamasında aklınıza gelen her düşünceyi yazarak belirtiniz ve tüm yaklaşımlarınızı gerekçeleriyle ifade etmeye çalışınız. Problemlere verdiğiniz yanıtların notlandırılması sadece Seçmeli-I dersindeki final notunuzu oluşturmak için kullanılacaktır. Ancak bunun dışında, yapılan bu uygulamadaki tüm yaklaşımlarınızın ayrıntılı incelenmesi tez çalışması kapsamındaki araştırmalarda kullanılacak ve bu çalışmalarda kişisel bilgileriniz kesinlikle gizli tutulacaktır. Problemi çözme sürecinizdeki tüm yaklaşımlarınızın önemli olduğunu düşünüyor ve şimdiden katkılarınız için teşekkür ediyoruz.

F. Cemre PEHLİVAN (Yüksek Lisans Öğrencisi)

Yrd. Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL

PROBLEM 1: Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğunun hipotenüsün yarısına eşit olduğunu gösteriniz.

EK 2: MASA PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN STRATEJİ VE GÖSTERİM ŞEKİLLERİNİ BELİRLEMEYE YÖNELİK VERİ TOPLAMA ARACI

Sevgili Öğretmen Adayları,

Aşağıda size sunulan ve yanıtlamanız istenen problem, problemlere çok sayıda çözüm üretme ve bu süreçte kullanılan strateji ve gösterim şekillerinin analiz edilmesi üzerine yapılan bir araştırma için veri toplama amacıyla hazırlanmıştır. Bu araştırmanın, matematik öğretmeni olduğunuzda sınıf ortamlarınızda problemleri farklı yollarla çözmenin ve onları farklı şekillerde ifade etmenin önemini anlama yönünde farkındalığınızı sağlayarak sizleri olumlu yönde etkileyeceğini ümit ediyoruz. Problemin çözümünde farklı gösterim şekillerini (grafik, şekil, tablo, sözel, sembolik ...) veya bir gösterim şeklini farklı çözüm yollarında kullanarak sunulan probleme mümkün oldukça çok sayıda çözüm üretmeye çalışınız. Çözüm aşamasında aklınıza gelen her düşünceyi yazarak belirtiniz ve tüm yaklaşımlarınızı gerekçeleriyle ifade etmeye çalışınız. Problemlere verdiğiniz yanıtların notlandırılması sadece Seçmeli-I dersindeki final notunuzu oluşturmak için kullanılacaktır. Ancak bunun dışında, yapılan bu uygulamadaki tüm yaklaşımlarınızın ayrıntılı incelenmesi tez çalışması kapsamındaki araştırmalarda kullanılacak ve bu çalışmalarda kişisel bilgileriniz kesinlikle gizli tutulacaktır. Problemi çözme sürecinizdeki tüm yaklaşımlarınızın önemli olduğunu düşünüyor ve şimdiden katkılarınız için teşekkür ediyoruz.

F. Cemre PEHLİVAN (Yüksek Lisans Öğrencisi)

Yrd. Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL

PROBLEM 2: Oniki çift bir partiye davet edilir. Çiftlerin ardarda konmuş dört kişilik kare masalarda ağırlanması düşünülmektedir (Bu kare masaların herbir kenarına bir kişi oturabilmektedir). Ancak daha sonra organizasyon şirketi kare masaları uzunlamasına ardarda birleştirerek büyük dikdörtgen şeklinde bir masa oluşturmaya karar vermiştir. Bu oniki çiftin oturması için kaç küçük kare masaya ihtiyaç olduğunu bulunuz.

EK 3: EL SIKIŞMA PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN STRATEJİ VE GÖSTERİM ŞEKİLLERİNİ BELİRLEMEYE YÖNELİK VERİ TOPLAMA ARACI

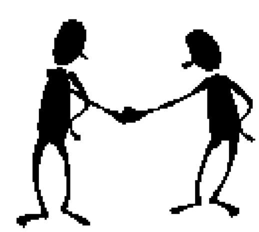
Sevgili Öğretmen Adayları,

Aşağıda size sunulan ve yanıtlamanız istenen problem, problemlere çok sayıda çözüm üretme ve bu süreçte kullanılan strateji ve gösterim şekillerinin analiz edilmesi üzerine yapılan bir araştırma için veri toplama amacıyla hazırlanmıştır. Bu araştırmanın, matematik öğretmeni olduğunuzda sınıf ortamlarınızda problemleri farklı yollarla çözmenin ve onları farklı şekillerde ifade etmenin önemini anlama yönünde farkındalığınızı sağlayarak sizleri olumlu yönde etkileyeceğini ümit ediyoruz. Problemin çözümünde farklı gösterim şekillerini (grafik, şekil, tablo, sözel, sembolik ...) veya bir gösterim şeklini farklı çözüm yollarında kullanarak sunulan probleme mümkün oldukça çok sayıda çözüm üretmeye çalışınız. Çözüm aşamasında aklınıza gelen her düşünceyi yazarak belirtiniz ve tüm yaklaşımlarınızı gerekçeleriyle ifade etmeye çalışınız. Problemlere verdiğiniz yanıtların notlandırılması sadece Seçmeli-I dersindeki final notunuzu oluşturmak için kullanılacaktır. Ancak bunun dışında, yapılan bu uygulamadaki tüm yaklaşımlarınızın ayrıntılı incelenmesi tez çalışması kapsamındaki araştırmalarda kullanılacak ve bu çalışmalarda kişisel bilgileriniz kesinlikle gizli tutulacaktır. Problemi çözme sürecinizdeki tüm yaklaşımlarınızın önemli olduğunu düşünüyor ve şimdiden katkılarınız için teşekkür ediyoruz.

F. Cemre PEHLİVAN (Yüksek Lisans Öğrencisi)

Yrd. Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL

PROBLEM 3: Bir toplantıda 10 kişi vardır. Herkes birbiriyle 1 kez el sıkışırsa toplantı salonunda toplam kaç el sıkışması olur?



EK 4: HARİTA PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN STRATEJİ VE GÖSTERİM ŞEKİLLERİNİ BELİRLEMEYE YÖNELİK VERİ TOPLAMA ARACI

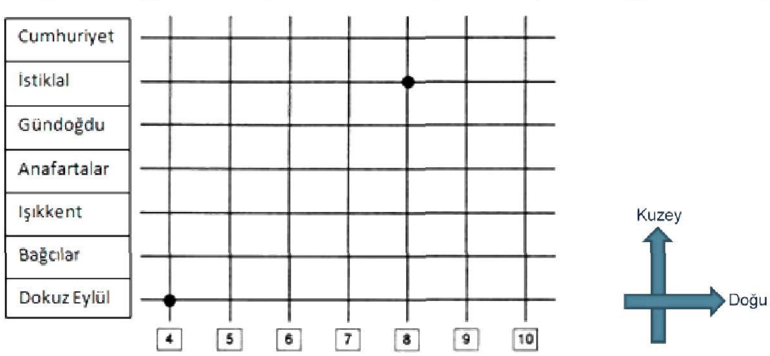
Sevgili Öğretmen Adayları,

Aşağıda size sunulan ve yanıtlamanız istenen problem, problemlere çok sayıda çözüm üretme ve bu süreçte kullanılan strateji ve gösterim şekillerinin analiz edilmesi üzerine yapılan bir araştırma için veri toplama amacıyla hazırlanmıştır. Bu araştırmanın, matematik öğretmeni olduğunuzda sınıf ortamlarınızda problemleri farklı yollarla çözmenin ve onları farklı şekillerde ifade etmenin önemini anlama yönünde farkındalığınızı sağlayarak sizleri olumlu yönde etkileyeceğini ümit ediyoruz. Problemin çözümünde farklı gösterim şekillerini (grafik, şekil, tablo, sözel, sembolik ...) veya bir gösterim şeklini farklı çözüm yollarında kullanarak sunulan probleme mümkün oldukça çok sayıda çözüm üretmeye çalışınız. Çözüm aşamasında aklınıza gelen her düşünceyi yazarak belirtiniz ve tüm yaklaşımlarınızı gerekçeleriyle ifade etmeye çalışınız. Problemlere verdiğiniz yanıtların notlandırılması sadece Seçmeli-I dersindeki final notunuzu oluşturmak için kullanılacaktır. Ancak bunun dışında, yapılan bu uygulamadaki tüm yaklaşımlarınızın ayrıntılı incelenmesi tez çalışması kapsamındaki araştırmalarda kullanılacak ve bu çalışmalarda kişisel bilgileriniz kesinlikle gizli tutulacaktır. Problemi çözme sürecinizdeki tüm yaklaşımlarınızın önemli olduğunu düşünüyor ve şimdiden katkılarınız için teşekkür ediyoruz.

F. Cemre PEHLİVAN (Yüksek Lisans Öğrencisi)

Yrd. Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL

PROBLEM 4: Aşağıdaki şekilde bir semtin haritası görülmektedir. Doğa 4. Cadde ile Dokuz Eylül Bulvarının kesişimi üzerindeki bir apartmanda yaşamaktadır. Alp ise 8. Cadde ile İstiklal Bulvarının kesişiminde, köşedeki apartmanda yaşamaktadır. Doğa, hergün başka bir yoldan ve caddeleri sadece kuzey ve doğu yönünde gitmek koşuluyla Alp'in evini ziyaret etmeye karar verir. Buna göre Doğa'nın Alp'in evine kaç farklı şekilde gidebileceğini bulunuz?



EK 5: KARE PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN STRATEJİ VE GÖSTERİM ŞEKİLLERİNİ BELİRLEMEYE YÖNELİK VERİ TOPLAMA ARACI

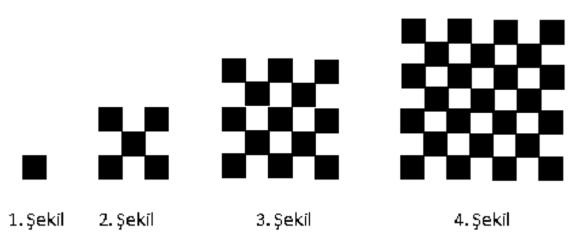
Sevgili Öğretmen Adayları,

Aşağıda size sunulan ve yanıtlamanız istenen problem, problemlere çok sayıda çözüm üretme ve bu süreçte kullanılan strateji ve gösterim şekillerinin analiz edilmesi üzerine yapılan bir araştırma için veri toplama amacıyla hazırlanmıştır. Bu araştırmanın, matematik öğretmeni olduğunuzda sınıf ortamlarınızda problemleri farklı yollarla çözmenin ve onları farklı şekillerde ifade etmenin önemini anlama yönünde farkındalığınızı sağlayarak sizleri olumlu yönde etkileyeceğini ümit ediyoruz. Problemin çözümünde farklı gösterim şekillerini (grafik, şekil, tablo, sözel, sembolik ...) veya bir gösterim şeklini farklı çözüm yollarında kullanarak sunulan probleme mümkün oldukça çok sayıda çözüm üretmeye çalışınız. Çözüm aşamasında aklınıza gelen her düşünceyi yazarak belirtiniz ve tüm yaklaşımlarınızı gerekçeleriyle ifade etmeye çalışınız. Problemlere verdiğiniz yanıtların notlandırılması sadece Seçmeli-I dersindeki final notunuzu oluşturmak için kullanılacaktır. Ancak bunun dışında, yapılan bu uygulamadaki tüm yaklaşımlarınızın ayrıntılı incelenmesi tez çalışması kapsamındaki araştırmalarda kullanılacak ve bu çalışmalarda kişisel bilgileriniz kesinlikle gizli tutulacaktır. Problemi çözme sürecinizdeki tüm yaklaşımlarınızın önemli olduğunu düşünüyor ve şimdiden katkılarınız için teşekkür ediyoruz.

F. Cemre PEHLİVAN (Yüksek Lisans Öğrencisi)

Yrd. Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL

PROBLEM 5:



Yukarıdaki şekilleri inceleyiniz. Buna göre, 10. şekilde kaç tane siyah kare bulunacağını açıklayınız. NOT: Farklı gösterim şekillerinden (cebirsel, grafiksel, şekillerden yararlanma, tablo...) veya bir gösterim şeklinin farklı çözüm yollarından yararlanarak maksimum sayıda çözüm üretmeye çalışınız.

EK 6

T.C
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
BUCA EĞİTİM FAKÜLTESİ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK
ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI

Sayı : B.30.2.DEÜ.0.16.00/50 **2 Şubat 2011**
Konu:

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜNE

İLGİ: 31.01.2011 tarih ve 72.00/500/406 sayılı yazınız.

Enstitünüz Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Yükseklisans Programı öğrencisi Fatma Cemre ÇAMLIYER'in tez çalışması kapsamında Anabilim Dalımız Matematik Öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerine uygulama yapması tarafımızca uygun görülmektedir.

Gereği için bilgilerinize arz ederim.

Prof.Dr.Mehmet KARTAL
Anabilim Dalı Başkanı

GELEN EVRAK

Tarihi :	02 ŞUBAT. 2011.
Kayıt No :	330
Dosya No :	

Uğur Mumcu Caddesi 135 Sokak No.5 35150 Buca / İZMİR Tel.: 0- 232 - 4204882-4204883-4204884-4204885-4204886-4204887 – 4204598 – 4207602 – 4400808 – 4409609 – 4409611 – 4409612 - 4409613 – 4409615 – 4201472 Fax.: 0-232-4204895 – 0-232-4409610 web: www.deu.edu.tr/egitim e-mail: egitim@deu.edu.tr