

DIRICHLET PROBLEMİNİN ELİPTİK
FONKSİYONLAR CİNSİNDEN
ÇÖZÜMÜ

128157

128157

Nurcan KURT

Dokuz Eylül Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
DOKTORA TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

İzmir
2003

DIRICHLET PROBLEMİNİN ELİPTİK FONKSİYONLAR CİNSİNDEN ÇÖZÜMÜ

128157

Nurcan KURT

Dokuz Eylül Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Danışman:

Yrd. Doç. Dr. Adem Çelik

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
DOKTORA TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

İzmir
2003

Eğitim Bilimleri Enstitüsü M¼d¼rl¼ę¼'ne

İşbu alışma, j¼rimiz tarafından Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan Yrd. Doç. Dr. Adem elik

Adem elik

¼ye Prof. Dr. Mehmet Sezer

Mehmet Sezer

¼ye Prof. Dr. řuur Nizamoglu

řuur Nizamoglu

¼ye Prof. Dr. Mehmet Terziler

Mehmet Terziler

¼ye Yrd. Doç. Dr. Hayrettin Koroęlu

Hayrettin Koroęlu

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim ¼yelerine ait olduğunu onaylarım.

28/7/2003

Sedef Gidener
Prof. Dr. Sedef Gidener
Enstit¼ M¼d¼r¼

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana yardımcı olan danışmanım sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Adem Çelik'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca konu seçimimde yol gösterip sonuca ulaşmamdaki adımları inceleyerek tavsiyelerini esirgemeyen kıymetli Hocam Prof. Dr. Mehmet Sezer'e de en içten teşekkürlerimi sunarım. Hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen annemi ve babamı hürmetle anıyorum ve sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Bu çalışma esnasında bana manevi desteklerini hiç eksiltmeyen kardeşlerimi de teşekkürle anıyorum. Daima destek olan değerli eşim ve zamanından çalmamaya çalışarak yapmaya çalıştığım ancak başarısız olduğum durumlar için bana anlayış gösteren kızım Yaren'den hem özür diliyor hem de ona çok teşekkür ediyorum. Son olarak, çalışmalarım esnasında bana büyük sabır gösterip destek olan tüm arkadaşlarımı şükranla anıyorum.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
TABLO LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BAĞINTILAR	7
2.1. Eliptik Fonksiyonlar	7
2.1.1. Jakobiye eliptik fonksiyonlar	7
2.1.2. Eliptik Fonksiyonlarda Bazı Kavramların Tanımı	8
2.1.3. Diğer Jakobiye Eliptik Fonksiyonlar	11
2.1.4. Jakobiye Fonksiyonların Kareleri Arasındaki İlişkiler	12
2.1.5. Türev ve İntegral	12
2.1.6. Toplama Formülü	13
2.1.7. Dejenere Durumlar ve Yaklaştırma Formülleri	15
2.2. Eliptik İntegraller	17
2.2.1. Eliptik İntegrallerin Üç Kanonik Formu	18
2.2.2. Tam Eliptik İntegraller	18
2.2.3. $E(\varphi, k)$, $F(\varphi, k)$, $E(k)$ ve $K(k)$ nın Grafikleri	19
2.2.4. Konform Dönüşümler	23
2.3. Konform Dönüşüm	25
2.4. Schwarz-Christoffel Dönüşümü	27
2.5. Riemann Dönüşüm Teoremi	30
2.6. Green Fonksiyonu	31
2.6.1. Green Fonksiyonunun Tanımı	31
2.6.2. Green Fonksiyonunun Fiziksel Yorumu	33
3. DIRICHLET PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN YÖNTEMLER	34
3.1. Dikdörtgen Bölgede Dirichlet Probleminin Çözümü	34
3.1.1. Dikdörtgen Bölgenin Birim Çembere Dönüşümü	34
3.1.2. Dikdörtgen Bölge İçin Green Fonksiyonu	37
3.1.3. Problemin Çözümü	37
3.2. Elips Bölgede Dirichlet Probleminin Çözümü	38

3.2.1. Elips Bölgenin Üst Yarı Düzleme Dönüşümü	39
3.2.2. Elips Bölge İçin Green Fonksiyonu	41
3.2.3. Problemin Çözümü	44
4. UYGULAMA	47
4.1. (4.1) Probleminin Eliptik Fonksiyonlar Cinsinden Çözümü	47
4.2. (4.1) Probleminin Değişkenlere Ayırma Metoduyla Çözümü	58
4.3. Bulunan Çözümlerin Karşılaştırılması	61
5. SONUÇ VE TARTIŞMA	74
6. KAYNAKLAR	76



TABLO LİSTESİ

Tablo 4.1.	U(x,y) ve V(x,y)'nin ($-K < x < 0, y = 10^{-10}$)'e göre sonuçları	62
Tablo 4.2.	U(x,y) ve V(x,y)'nin ($-K < x < 0, y = 1$)'e göre sonuçları	64
Tablo 4.3.	U(x,y) ve V(x,y)'nin ($-K < x < 0, y = 1.5$)'e göre sonuçları	65
Tablo 4.4.	U(x,y) ve V(x,y)'nin ($-K < x < 0, y = 3.166$)'ye göre sonuçları	66
Tablo 4.5.	U(x,y) ve V(x,y)'nin ($0 < x < K, y = 10^{-10}$)'e göre sonuçları	67
Tablo 4.6.	U(x,y) ve V(x,y)'nin ($0 < x < K, y = 1$)'e göre sonuçları	69
Tablo 4.7.	U(x,y) ve V(x,y)'nin ($0 < x < K, y = 1.5$)'e göre sonuçları	70
Tablo 4.8.	U(x,y) ve V(x,y)'nin ($-K < x < K, y = 3.166$)'e göre sonuçları	72

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1.	K, K' ve q değerlerinin m ve m_1 değişkenlerine göre değişim	10
Şekil 2.2.	$F(\varphi, k)$ değerinin $\sin^{-1} k$ değişkenine göre değişimi	20
Şekil 2.3.	$F(\varphi, k)$ değerinin φ değişkenine göre değişimi	20
Şekil 2.4.	$E(\varphi, k)$ değerinin $\sin^{-1} k$ değişkenine göre değişimi	21
Şekil 2.5.	$E(\varphi, k)$ değerinin φ değişkenine göre değişimi	21
Şekil 2.6.	$E(k)$ değerinin k^2 değişkenine göre değişimi	22
Şekil 2.7.	$K(k)$ değerinin k^2 değişkenine göre değişimi	22
Şekil 2.8.	$\text{Im}(z) > 0$ yarı-düzleminin ζ -düzlemindeki dikdörtgen üzerine dönüşümü	23
Şekil 2.9.	(2.49) fonksiyonunun dönüşümü	24
Şekil 2.10.	İki yatay çizginin, iki düşey çizgi üzerine dönüşümü	24
Şekil 2.11.	u_1, u_2, \dots, u_n noktalarının görüntüleri olan z_1, z_2, \dots, z_n tepeleri	28
Şekil 2.12.	D 'ki ξ noktasında pozitif yük durumu	33
Şekil 3.1.	Üst yarı düzlemin birim çemberin içine dönüşümü	36
Şekil 3.2.	Elipsin içinin birim çemberin içine dönüşümü	39
Şekil 3.3.	(3.13) ve (3.14) dönüşümleri	40
Şekil 3.4.	Elipsin üst yarı düzleme dönüşümü	41
Şekil 3.5.	D bölgesi	44
Şekil 4.1.	$U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(-K < x < 0, y = 10^{-10})$ 'e göre değişimi	63
Şekil 4.2.	$U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(-K < x < 0, y = 1)$ 'e göre değişimi	64
Şekil 4.3.	$U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(-K < x < 0, y = 1.5)$ 'e göre değişimi	65
Şekil 4.4.	$U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(-K < x < 0, y = 3.166)$ 'e göre değişimi	66
Şekil 4.5.	$U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(0 < x < K, y = 10^{-10})$ 'e göre değişimi	68
Şekil 4.6.	$U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(0 < x < K, y = 1)$ 'e göre değişimi	69
Şekil 4.7.	$U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(0 < x < K, y = 1.5)$ 'e göre değişimi	71
Şekil 4.8.	$U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(-K < x < K, y = 3.166)$ 'e göre değişimi	73

ÖZET

DIRICHLET PROBLEMİNİN ELİPTİK FONKSİYONLAR CİNSİNDEN ÇÖZÜMÜ

Bu çalışmada, Dirichlet probleminin Green fonksiyonu eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmiş ve problemin çözümü Green fonksiyonuna ve dolayısıyla eliptik fonksiyonlara dayandırılmıştır.

Birinci bölümde; diferansiyel denklemlerin tarihçesi, gelişimi, eliptik fonksiyonların tarihi, Dirichlet probleminin tanımı ve daha önce yapılan çalışmalara yer verilmiştir. İkinci bölümde; eliptik fonksiyonlar ve bunlarla ilgili işlemler, eliptik integraller, konform dönüşüm, Riemann dönüşüm teoremi, Green fonksiyonu gibi temel bağıntılardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde; problemin çözümü için yöntemler verilmiştir. Bu bölümde önce Dirichlet probleminin Green fonksiyonuyla çözümü için yöntem tanıtılmış daha sonra dikdörtgen bölgede Dirichlet probleminin çözümü için gerekli olan dönüşüm ve Green fonksiyonu bulunup problem dikdörtgen bölgede çözülmüştür. Daha sonra elips bölgede Dirichlet problemi için gerekli dönüşüm ve Green fonksiyonu bulunup problem elips bölgede çözülmüştür. Dördüncü bölümde Dirichlet probleminin eliptik fonksiyonlar cinsinden çözümüne uygulama olması açısından dikdörtgen bölgede problem için uygulama verilmiştir. Denklem önce eliptik fonksiyonlar cinsinden çözülmüştür. Daha sonra aynı denklem bilinen yöntem olan Değişkenlere Ayırma Metodu ile çözülmüş ve her iki yöntemle bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma yapılırken Mathcad bilgisayar paket programından yararlanılmıştır. Bulunan bu hassas sonuçların tutarlılığı grafiklerle gösterilmiştir. Beşinci bölümde; sonuç ve tartışmalara yer verilerek yöntemin sağladığı kolaylık ve zorluklara değinilmiş, ayrıca getirdiği yeniliklerden bahsedilmiştir.

Anahtar sözcükler: Dirichlet problemi, eliptik fonksiyonlar, eliptik integral, Green fonksiyonu.

ABSTRACT

In this study, the Green function of the Dirichlet problem is defined in terms of elliptic functions and the solution of the problem is based on the Green function and thus elliptic functions.

In the first chapter, the history and development of differential equations, the history of elliptic functions, the definition of Dirichlet problem and previous studies are presented. In the second chapter, fundamental relations such as elliptic functions and related operations, elliptic integrals, conform mapping, Riemann transformation theorem and Green theorem are mentioned. In the third chapter, methods are given for the solution of the problem. In this chapter, the method of solution for Dirichlet problem by Green function is presented first and then the Green function and the transformation required for the solution of the Dirichlet problem in the rectangular region is found and the problem is solved in the rectangular region. Subsequently, the Green function and the transformation required for the Dirichlet problem in the ellipse region is found and the problem is solved in the ellipse region. In the fourth chapter, an application for the problem in the rectangular region is given in order to present an application of the solution of Dirichlet problem in terms of elliptic functions. At first, the equation is solved in terms of elliptic functions. Then the same equation is solved by the known Method of Separation of Variables, and the results of both methods are compared. We made use Mathcad computer program to make the comparison. The consistency of these sensitive results are shown by graphics. In the fifth chapter, results and discussion are given, the facilities and difficulties of the method presented and the contributions of the method are mentioned.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Diferansiyel denklemler konusunda yapılan ilk çalışmalar, 17.yüzyılın ikinci yarısında, diferansiyel ve integral hesabın keşfinden hemen sonra, İngiliz matematikçi Newton (1642-1727) ve Alman matematikçi Leibnitz (1641-1716) ile başlar. Daha sonraları, matematik tarihinde büyük isim yapmış olan İsviçreli matematikçilerden Bernouilli kardeşler, 18.yüzyılda Euler, Clairaut, Lagrange, D'Alembert, Charbit, Monge, Laplace ile 19. yüzyılda Chrystal, Cauchy, Jacobi, Ampere, Darboux, Picard, Fusch ve Frobenius, diferansiyel denklemler teorisini bugünkü ileri seviyeye getiren matematikçilerdir.

Belli tip diferansiyel denklemlerin, belli şartlar altında çözümlerinin mevcut olmasının ispatı, diferansiyel denklemler teorisinde varlık teoremi konusunu teşkil etmekte olup, bu da, ilk olarak 1820 ile 1830 yılları arasında, Fransız matematikçi A. L. Cauchy tarafından bulunmuş ve daha sonra gelenler tarafından geliştirilmiştir.

'Diferansiyel denklem' ifadesi, bağımlı değişkenin, bir ya da daha fazla sayıda bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denklemi ifade eder. Doğadaki olayları açıklamak için en etkin ve sistematik yol, diferansiyel denklem kavramını kullanmaktır. Gerçekten de fizik, kimya, biyoloji, astronomi, mühendislik, ekonomi ve diğer pek çok uygulamalı bilimler diferansiyel denklemlerin önemli uygulama alanlarıdır. Bunun dışında, şüphesiz pür matematiğin kendi içinde, özellikle de geometride, diferansiyel denklemler önemli bir rol oynamaktadır.

Diferansiyel denklemlerin böyle geniş bir alanda uygulanabilir olmasının nedeni çok açıktır. Bilindiği gibi bize $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $y = f(x)$ gibi bir fonksiyon verildiğinde, bunun dy/dx türevi y 'nin x 'e göre değişim hızı olarak yorumlanabilir. Doğal olaylarda da, değişkenler ve bunların değişim hızları birbirlerine olayı yöneten bazı temel yasalarla bağlıdır. İşte bu yasalar matematik sembollerle yazıldığında sonuç çoğu zaman bir diferansiyel denklem olarak ortaya çıkmaktadır.

Örneğin $F = ma$ diye alışık olduğumuz Newton'un 2. Yasası gereğince bir diferansiyel denklemdir. Düzlem geometride, bir düzlemsel eğrinin y' eğimi ile (x, y) koordinatları

arasındaki ilişki bizi yine bir diferansiyel denkleme götürür. Bu iki örnek bile karşılaşılabilecek diferansiyel denklemlerin ne kadar çok olduğunu göstermeye yeterlidir.

Eliptik fonksiyonların hikayesi de matematik tarihinin en ilginç hikayelerinden biridir; karışık analitik bir fikirle, $\int R[t, \sqrt{p(t)}] dt$ integralleri (burada R bir rasyonel fonksiyon ve $p(t)$ ise 3. veya 4. dereceden bir polinom fonksiyondur) ile başlamış ve basit geometrik bir fikirle –torus yüzeyi ile- doruğa ulaşmıştır. Bunu anlamının en iyi yolu belki de, $\int dt/\sqrt{1-t^2}$ integrali ile başlayıp dairenin keşfi ile son bulan dairesel fonksiyonların sanal hikayesi ile karşılaştırmak olabilir. Eliptik fonksiyonların hikayesi ise eliptik fonksiyonların 1650’ler ile 1850’ler arasındaki gerçek gelişimine paralel olarak gitmiştir.

Eliptik fonksiyonların geometrik yapısının geç tanınması, kompleks sayıların varlığının ve geometrik yapısının geç tanınmasından dolayıdır. Aslında, eliptik fonksiyonların daha sonraki hikayesi, kompleks sayıların gelişimi ile birlikte gözler önüne serilmiştir (Stillwell, 1989).

Belirli bir bağlantılı bölgede harmonik olan ve bu bölgenin sınırları üzerinde önceden verilen koşulları sağlayan bir fonksiyon bulma problemi kısmi diferansiyel denklemlerdeki sınır değer problemlerinin en eskilerinden ve en önemlilerinden biridir. Eğer fonksiyonun kendisinin sınır boyunca değerleri önceden verilirse probleme Dirichlet problemi ya da “birinci türden bir sınır değer problemi” adı verilir. Eliptik tip kısmi diferansiyel denklemler için (iç) Dirichlet problemi kısaca, bir D bölgesinin sınırında bilinen U_0 değerlerini alan ve D bölgesi içinde denklemini sağlayan bir fonksiyonu bulmaktır. Bu tip problemlerin reel uzayda, basit bağlantılı sınırlı bir D bölgesindeki Green fonksiyonu ve çözümü iyi bilinmektedir (Garabedian, 1964; Hildebrand, 1976). Ayrıca kompleks düzlemde bazı bölgeler için Green fonksiyonları konform dönüşümler yardımıyla bulunabilmekte ve çözümler bunlara dayalı olarak verilmektedir (Mysk, 1979; Sveshnikov, 1982; Vladimirov, 1984).

Bu konuda daha önce yapılmış aşağıdaki çalışmalardan bahsedilebilir:

Dış Dirichlet sınır değer probleminin Green fonksiyonu, dönel elipsoid üzerine dağılmış Laplace eşitliği için kapalı bir formda Martinec ve Grafarend (1997:562-570)

tarafından kurulmuştur. Araştırılan sınır değer çözümünde sınırın eliptikliğinin etkisini açıklayan elipsoidal Poisson çekirdeği, $\psi=0$ tekil noktasında elipsoidal Poisson çekirdeğinin davranışını analitik biçimde açıklayan elemanter fonksiyonların sonlu toplamı olarak ifade edilmiştir. Elipsoidal Poisson çekirdeğinin, tek nokta civarındaki tekillik derecesinin orijinal küresel Poisson çekirdeğinin tekillik derecesi ile aynı olduğu gösterilmiştir.

Dirichlet problemi ile Cauchy problemi arasındaki ilişki, yerel operatörler için homojen olmayan sınır koşullarında Lumer ve Schnaubelt (2001:291-309) tarafından araştırılmıştır.

Wang (1997:305-312) esas olmayan karakter içeren Dirichlet polinomları için bir ters dönüşüm formülü çıkarmıştır. Dirichlet'nin L-fonksiyonları için, Heath-Brown üst-sınırı kullanılarak, q elemanında hata terimi içeren, hatasız bir üst sınır bulma olanağı elde etmiştir. Uygulama olarak da Dirichlet L-fonksiyonları için, kritik çizginin sağ tarafında mutlak bir hata terimi ile, yaklaşık bir fonksiyonel eşitlik bulunmuştur.

Diğer bir çalışma (Brovar, Kopeikina ve Pavlova, 2001:767-772), yarıçapa göre türevli sınır-koşulun, mutlak terimde küçük bir değişim yaparak 5×10^{-5} düzeyine kadar geliştirilebildiğini göstermiştir. *Dini* yöntemiyle koşulun değiştirilmesi, yerküre elipsoidinin dışında harmonik olan yardımcı bir fonksiyon için, Dirichlet problemi ile ilişkilendirme olanağı sağlar. Dirichlet probleminin çözümündeki bu yeni yöntem, küçük çekirdekli bir integral eşitliği elde etmemize olanak verir. Böylece bu integral, iterasyon adımları kullanarak ya da iterasyon kullanmaksızın kolayca çözülebilir. İntegral eşitliğinin çözümü, dağılım potansiyelini ve elipsoidin çok uzağındaki karışık graviteyi belirler.

Konveks poligonal bölgelerdeki biharmonik Dirichlet probleminin sınırlarının daraltılması hakkında etkili bir diskritizasyon şeması Khoromskij ve Schmidt (1998:577-596) tarafından önerilip analiz edilmiştir. Burada, biharmonik Dirichlet probleminin, harmonik Dirichlet çözümüne ve Poincare-Steklov operatörünün taranan uzayların alt uzaylarında operatör olarak çalıştığı bir eşitliğe indirgenebileceği gösterilmiştir. Bu durumda, etkili bir ön-koşullama ve matris sıkıştırılmasına izin veren karışık bir lineer sonlu elemanlar diskritizasyonu önerilmiştir. Sonuç olarak, konveks poligonal sınırlarda biharmonik Dirichlet probleminin sınırlarını azaltmak için asimptotik optimal iteratif bir arayüz çözümleyici elde edilmiştir.

Başka bir çalışmada (Aiyama ve Akutagawa, 2002:399-428), hiperbolik m -uzay'dan, tam olmayan spesifik *metrikli* açık n -küre ünitesine kadar tam harmonik dönüşümler için sonsuzdaki Dirichlet problemlerinin tekillik, varlık ve düzenlilik özelliklerinin araştırılması amaçlanmıştır. $m=n=2$ olduğunda Dirichlet probleminin çözümleri hiperbolik-3 uzayda tam sabit ortalama eğri yüzeyler vermektedir.

Sezer'in (1992:1-4) çalışmasında, dikdörtgen bir bölgede Laplace diferansiyel denklemi için Dirichlet probleminin Green fonksiyonu eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmiş ve problemin çözümü Green fonksiyonuna ve dolayısıyla eliptik fonksiyonlara dayandırılmıştır.

Lanzara (1998:63-92), sınırlanmış ve ölçülebilir katsayılara sahip ikinci dereceden eliptik lineer eşitlikler için Dirichlet problemi ile ilgilenmiştir. Ara operatörler yöntemini kullanarak, Green operatörünü ve buna karşılık gelen Green fonksiyonunu hesaplamıştır. Bu yöntem, katsayıları sınırlanmış ve ölçülebilir ikinci derece eliptik eşitlik için Dirichlet problemine uygulanmıştır. Çalışmada sayısal sonuçlar da verilmiştir.

Bir diğer çalışma (Babuska ve Chelobun, 2002) Dirichlet sınır değer probleminin tanımındaki belirsiz sınırı ele almaktadır. Lipschitz-olmayan sınırlara sahip bir bölge, Lipschitz sınırlı bölgelerin monoton biçimde genişleyen ya da büzülen bölgelerinin bir limiti olarak tanımlanır. Kendine özgü tekil bir biçimde çözülebilen Dirichlet sınır değer problemi bölgelerin her birisinde tanımlanır ve bu çözümlerin limiti araştırılır. Limit fonksiyonu, limit bölgelerindeki bir Dirichlet sınır değer problemini çözerse de, limit bölgesi Dirichlet sınır değer problemine göre kararsız olduğunda, problem bölgelerin sıralamasına bağlı olabilir. Bu makalenin esas noktası, birisi Lipschitz diğeri kararsız olan iki kapalı bölgede Dirichlet sınır değer problemlerinin birbirinden farklı çözümlerinin bulunabileceğini göstermektir.

Chen ve arkadaşları (Chen, Williams ve Zhao, 1999:735-769) Dirichlet sınır koşullarına sahip, $D^n \subset \mathfrak{R}^n$ ($n \geq 3$) gibi yarı eliptik eşitlikler için pozitif çözümlerin varlığına dair yeterli koşulları vermişlerdir. Bölgelerde uygun koşullar ile sadece dış koni koşullarını gerçekleştirme gereğine sahip bulunan bu sınır bölgelerindeki eşitliklerde düşük dereceli lineer olmayan katsayılar kullanılır. Tam bir olasılık sunumu olan *Schauder*'in sabit nokta teoremi ile buna karşılık gelen lineer eliptik eşitlikler için yeni öncül tahminler verilmiştir. Bu öncül tahminleri türetme aşamasında, D 'nin kompakt alt dizisindeki değişken

b terimi modifiye edildiğinde D'deki $\frac{1}{2}\Delta + b.\nabla$ biçimindeki operatörler için Green fonksiyonlarının karşılaştırılabilir olduğu gösterilmiştir.

Basit bağlantılı bölgeler için iki boyutlu Dirichlet sınır değer problemi çözümünün problem verilerindeki değişikliklere nasıl bağlı olduğu araştırılmıştır (Marshakov, Wiegmann ve Zabrodin, 2002:131-153). Bölgelerin deformasyonu durumunda, Dirichlet Green fonksiyonundaki değişmeler için *Hadamard* formülünün integre edilebilir bir yapı sergilediği gösterilmiştir. Dirichlet sınır probleminin çözümü, dağılımsız *Toda* dizisinin τ fonksiyonları yoluyla ifade edilmiştir. Burada, ayrıca boşluklu bir düzlemde Dirichlet probleminin dejenere bir hali de tartışılmıştır. Bu durumda, τ fonksiyonu, Hermitian tek-matris modelinin düzlemsel geniş N limitinin parçalı fonksiyonuna eşittir.

Bu çalışmada, reel ve kompleks düzlemde, önce Schwarz-Christoffel ve bazı konform dönüşümler (Mysk,1979; Sidorov, Fedoryuk, Shabunin,1985; Moretti, 1968) kullanılarak, z-düzlemindeki bir dikdörtgen bölgeyi w-düzlemindeki birim çembere dönüştüren fonksiyon eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmiş ve bu dönüşüm fonksiyonu ile Green fonksiyonu arasında bağlantı kurularak dikdörtgen bölge için Dirichlet probleminin çözümü eliptik fonksiyonlara dayandırılmıştır. Benzer şekilde, elipsin üst yarı düzleme dönüşümünü elde etmek için, elipsin içinin çemberin içine dönüşümü ile birim çemberin içinin üst yarı düzleme dönüşümünün bileşkesi alınmıştır. Dönüşüm fonksiyonu eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmiş ve Green fonksiyonu arasında bağlantı kurularak elips bölge için Dirichlet probleminin çözümü eliptik fonksiyonlara dayandırılmıştır. Bunlar yapılırken; eliptik fonksiyonlar, eliptik integraller, konform dönüşüm, Riemann dönüşüm teoremi ve Green fonksiyonları ile ilgili temel kavramlardan yararlanılmıştır.

Kullanılan çözüm yöntemine açıklık getirmek amacıyla problem için uygulama yapılmıştır. Uygulama, hem değişkenlerine ayırma metoduyla hem de eliptik fonksiyonlar cinsinden çözümlenerek, her iki yöntemle bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Sonuçların son derece tutarlı olduğu, sayısal değerler verilerek tablolarla ve grafiklerle gösterilmiştir.

Bilinen diğer yöntemlerle bulunan sonuçlar eliptik fonksiyonlar cinsinden elde edilemediği halde, bizim bu çalışmada kullandığımız yöntemle Laplace (aynı zamanda Poisson) diferansiyel denkleminin (iç) Dirichlet probleminin çözümü, eliptik fonksiyonlar cinsinden çıkarılmıştır. Dolayısıyla yapmış olduğumuz çalışmanın daha önceden

edilmemiş özgün sonuçlar ortaya koyduğunu söylemek mümkündür. Ayrıca bu çalışmada kullandığımız yöntem, bilinen diğer yöntemlere bir alternatif sağlaması açısından da önem taşımaktadır. Bulunan çözüm yönteminin, herhangi bir çokgen bölge için de kullanılabilir olduğu açıkça görülmektedir.

Sonuç olarak, kullandığımız bu yöntemle Laplace (aynı zamanda Poisson) diferansiyel denkleminin (iç) Dirichlet probleminin çözümüne bir alternatif sunulmuş olup üstelik çözüm Green fonksiyonuyla ifade edilerek sonuç eliptik fonksiyonlara dayandırılmıştır.



BÖLÜM 2

TEMEL BAĞINTILAR

Bu bölümde problemin çözümünde gerekli olan eliptik fonksiyonlar, eliptik integraller, konform dönüşüm, Riemann dönüşüm teoremi ve Green fonksiyonları ile ilgili temel bağıntılar verilmiştir.

2.1. Eliptik Fonksiyonlar

Periyodik fonksiyonların en iyi bilinen örnekleri periyodu 2π olan sinüs fonksiyonu ile, periyodu $2\pi i$ olan üstel fonksiyonlardır. Ama diğer fonksiyonlar iki farklı periyot için mevcuttur. z -düzlemindeki eksenlerin uygun seçilmesi ile, periyotlardan biri her zaman gerçel kabul edilebilir. Diğeri genellikle karmaşık olacaktır. Bu tür bütün meromorf fonksiyonlar eliptik fonksiyonlar olarak adlandırılır (Moretti, 1968).

Bir gerçel değişkenin eliptik fonksiyonları, mekanikteki bir çok problemin çözümünü oluşturmaktadır. Karmaşık bir değişkenin eliptik fonksiyonları, özellikle bir dairenin bir poligon üzerine dönüştürülmesi istendiğinde, konform dönüşüm problemlerinin çözümleri olarak bulunurlar. Bu fonksiyonlar, keskin-kenarlı elektrodlar da dahil olmak üzere elektrostatikte ya da poligon membranlı elastisite problemlerinde görülürler.

2.1.1. Jakobiyen Eliptik Fonksiyonlar

Bir Jakobiyen fonksiyonu ortaya koyabilmek için, $w = \sin z$ basit fonksiyonunun

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (2.1)$$

formülü ile tanımlanabildiğini söyleyerek başlayabiliriz. Sinüsün periyodikliğinin integraldeki kare köke bağlı olduğu ilerdeki kısımlarda yapacaklarımıza benzer bir analizle görülebilir. Buna ilaveten, çeyrek periyodun (yani, $\frac{\pi}{2}$) 0 ile 1 arasındaki integralin değeri olduğu bilinmektedir.

Benzer biçimde sinüs genliği adı verilen

$$w = \operatorname{sn} z \quad (2.2)$$

fonksiyonu bundan böyle

$$\int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \quad (2.3)$$

formülü vasıtasıyla ifade edilecektir.

Burada m sabitine eliptik fonksiyonun parametresi adı verilir. Bu aynı zamanda doğrudan (2.3) fonksiyonu ile belirlenen ters $z(w)$ fonksiyonunun da bir parametresidir. Burada m 'nin $(0,1)$ aralığında gerçel bir sayı olduğu kabul edilecektir. Bu taktirde (2.2) yerine

$$w = \operatorname{sn}(z|m) \quad (2.4)$$

yazılabilir. Denklem (2.2) ile tanımlanan fonksiyon,

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \quad K' = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{m}}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-mt^2)}} \quad (2.5)$$

olarak tanımlanan gerçel sayılar ile bağıntılı iki periyoda sahiptir.

2.1.2. Eliptik Fonksiyonlardaki Bazı Temel Kavramların Tanımları

Milne-Thomson'un (1950) tablolarında kullandığı "parametre" terimi ve bu terimlerin işareti olan m genelde pek kullanılmaz. Eski literatürde m yerine k^2 kullanılmış ve modül adını almıştır. Bu kullanıma sadık kalmak için, bu çalışmada (2.4) yerine

$$w = \operatorname{sn}(z, k) \quad (2.6)$$

ifadesi kullanılacaktır. Tamamlayıcı parametre olan m_1

$$m_1 = 1 - m \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Benzer biçimde tamamlayıcı modül (k') de,

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{m_1} \quad (2.8)$$

ile tanımlanmaktadır.

Eliptik fonksiyonlar teorisindeki kavramlar ve isimler üzerinde henüz bir uzlaşma mevcut değildir. Bu nedenle, literatürde sıkça görülen bazı simgeleri bilmek gerekmektedir.

En önemli farklılık, $w = \sin \phi$ eşitliğindeki w 'ye ilişkin ϕ değişkeninin kullanımından kaynaklanır. $\arcsin(w|m)$ olarak adlandırılabilen (2.3) ün sağ tarafı, $F(k, \phi)$ olarak yazılır ve birinci türden eliptik integrali ifade eder:

$$F(k, \phi) = \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\phi} \frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \omega}} \quad (2.9)$$

Son integral, $t = \sin \omega$ değişken değişimi yapılarak kolaylıkla elde edilebilir.

F 'nin $\phi = \frac{\pi}{2}$ 'deki (yani $w = 1$ 'deki) değeri birinci türden tam eliptik integral olarak adlandırılır. Bu yalnız k 'nin ya da daha çok tercih ettiğimiz ifadeyle m 'nin bir fonksiyonudur.

$$K(m) = F(k, \frac{\pi}{2}) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1-m \sin^2 \omega}} \quad (2.10)$$

Benzer biçimde $K'(m)$ de aşağıdaki integrallerle belirlenmiştir:

$$K'(m) = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-mt^2)}} = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-m_1\tau^2)}} \quad (2.11)$$

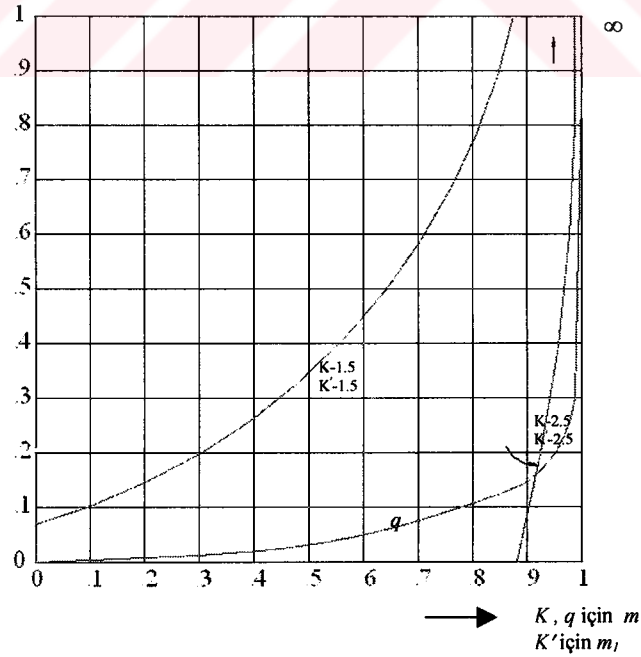
Son integral, $m_1\tau^2 = 1 - mt^2$ değişken değişimi ile elde edilmiştir.

$$K'(m) = K(1-m) \quad (2.12)$$

Sadece m 'nin bir fonksiyonu olan q büyüklüğü aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}} \quad (2.13)$$

Belirli bazı problemlerde K , K' ve m 'nin, q 'nun bir fonksiyonu yani $\frac{K'}{K}$ olarak belirlenebileceğini bilmek önemlidir. Şekil 2.1'de K ve q , m 'ye göre, K' ise m_1 'e göre çizilmiştir.



Şekil 2.1. K , K' ve q değerlerinin m ve m_1 değişkenlerine göre değişimi

2.1.3. Diğer Jakobiyen Eliptik Fonksiyonlar

Diğer çift periyodik fonksiyonlar sinüs genliği temelinde tanımlanabilirler. Bunlardan iki tanesi şunlardır: aşağıdaki gibi tanımlanan kosinüs-genliği, $cn z$;

$$cn z = \sqrt{1 - sn^2 z} \quad (2.14)$$

ve aşağıdaki gibi tanımlanan fark-genliği, $dn z$;

$$dn z = \sqrt{1 - m sn^2 z} \quad (2.15)$$

Her iki fonksiyona da, $z = 0$ da keyfi 1 değeri verilerek diğer değerler elde edilirler. $sn z$, $cn z$ ve $dn z$ nin sıklıkla ortaya çıkan diğer kombinasyonları aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{aligned} nsz &= \frac{1}{snz} & ncz &= \frac{1}{cnz} & ndz &= \frac{1}{dnz} \\ scz &= \frac{snz}{cnz} & csz &= \frac{cnz}{snz} & dsz &= \frac{dnz}{snz} \\ sdz &= \frac{snz}{dnz} & dcz &= \frac{dnz}{cnz} & cdz &= \frac{cnz}{dnz} \end{aligned} \quad (2.16)$$

(2.16) da verilen fonksiyonların özellikleri kolaylıkla $sn z$, $cn z$ ve $dn z$ 'nin özellikleri ile ilişkilendirilebilirler. Pratik bir noktadan bakılırsa, kanıtlanacak olan teorem ve $0 \leq m \leq 1$ ile $0 \leq z \leq K$ aralığında $sn z$, $cn z$ ve $dn z$ 'nin değerlerini göstermek üzere hazırlanacak olan bir tablo, eliptik fonksiyonlara ilişkin herhangi bir problemin nümerik çözümünde bize yardımcı olur.

2.1.4. Jakobiyen Fonksiyonların Kareleri Arasındaki İlişkiler

Jakobiyen fonksiyonlar arasında sinüs ve kosinüsün arasındaki ile aynı ilişki vardır:

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1 \quad (2.17)$$

Ayrıca (2.15) in karesi alınarak

$$\operatorname{dn}^2 z + m \operatorname{sn}^2 z = 1 \quad (2.18)$$

bulunabilir. Herhangi iki Jakobiyen fonksiyonun kareleri arasında da benzeri ilişkiler oluşturulabilir. Örneğin, (2.16) kullanılarak;

$$\begin{aligned} \operatorname{ns}^2 z - \operatorname{cs}^2 z &= 1 & \operatorname{ns}^2 z - \operatorname{ds}^2 z &= m \\ \operatorname{nc}^2 z - \operatorname{sc}^2 z &= 1 & \operatorname{dc}^2 z - m_1 \operatorname{nc}^2 z &= m \\ \operatorname{nd}^2 z - m \operatorname{sd}^2 z &= 1 & m \operatorname{cd}^2 z + m_1 \operatorname{nd}^2 z &= 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

bulunur. Bu formüller diğer Jakobiyen fonksiyonların değerlendirilmesini $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ ve $\operatorname{dn} z$ 'e indirgerler.

2.1.5. Türev ve İntegral

Yukarıda elde edilen sonuçlara göre

$$\frac{dw}{dz} = \sqrt{(1-w^2)(1-mw^2)} \quad (2.20)$$

eşitliği artık aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sn} z) = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z \quad (2.21)$$

Diğer yandan (2.14) ve (2.15) in türevi alınıp (2.21) kullanılarak:

$$\frac{d}{dz} \text{cn}z = -\text{sn}z \text{dn}z \quad (2.22)$$

$$\frac{d}{dz} \text{dn}z = -m \text{sn}z \text{cn}z \quad (2.23)$$

eşitlikleri elde edilir.

Jakobiyen fonksiyonların belirsiz integralleri, logaritma ve ters trigonometrik fonksiyonlar yoluyla ifade edilebilirler. Aşağıda $\text{sn}z$, $\text{cn}z$ ve $\text{dn}z$ için sonuçlar verilmektedir:

$$\int \text{sn}z dz = \frac{1}{k} \log(\text{dn}z - k \text{cn}z)$$

$$\int \text{cn}z dz = \frac{1}{k} \arccos \text{dn}z \quad (2.24)$$

$$\int \text{dn}z dz = \arcsin \text{sn}z$$

2.1.6. Toplama Formülü

$\text{sn}(u + v)$ yi, sadece u ve v nin Jakobiyen fonksiyonları cinsinden ifade etmek mümkündür, ama sonuç trigonometrik fonksiyonlarda olduğu kadar basit değildir.

$$\text{sn}(u + v) = \frac{\text{sn}u \text{cn}v \text{dn}v + \text{sn}v \text{cn}u \text{dn}u}{1 - m \text{sn}^2u \text{sn}^2v} \quad (2.25)$$

Kosinüs-genliği ve fark-genliği için benzer formüller şu şekildedir:

$$\text{cn}(u + v) = \frac{\text{cn}u \text{cn}v - \text{sn}u \text{dn}u \text{sn}v \text{dn}v}{1 - m \text{sn}^2u \text{sn}^2v} \quad (2.26a)$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - m \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - m \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \quad (2.26b)$$

Bunlar, her iki tarafın karesini alarak ve (2.17) ile (2.18) i kullanarak kolayca elde edilebilirler.

(2.25) ve (2.26) da $v = u = z$ koyarak çift argüman için aşağıdaki formüller elde edilir:

$$\operatorname{sn} 2z = \frac{2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - m \operatorname{sn}^4 z}$$

$$\operatorname{cn} 2z = \frac{\operatorname{cn}^2 z - \operatorname{sn}^2 z \operatorname{dn}^2 z}{1 - m \operatorname{sn}^4 z} \quad (2.27)$$

$$\operatorname{dn} 2z = \frac{\operatorname{dn}^2 z - m \operatorname{sn}^2 z \operatorname{cn}^2 z}{1 - m \operatorname{sn}^4 z}$$

Şimdi de karmaşık sayılar için toplam ve fark formüllerini verelim;

$$\operatorname{sn}(u \pm iv, k) = \frac{\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(v, k') \pm i \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{sn}(v, k') \operatorname{cn}(v, k')}{1 - \operatorname{sn}^2(v, k') \operatorname{dn}^2(u, k)}$$

$$\operatorname{cn}(u \pm iv, k) = \frac{\operatorname{cn}(u, k) \operatorname{cn}(v, k') \pm i \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{sn}(v, k') \operatorname{dn}(v, k')}{1 - \operatorname{sn}^2(v, k') \operatorname{dn}^2(u, k)}$$

$$\operatorname{dn}(u \pm iv, k) = \frac{\operatorname{dn}(u, k) \operatorname{cn}(v, k') \operatorname{dn}(v, k') \pm i k^2 \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{sn}(v, k')}{1 - \operatorname{sn}^2(v, k') \operatorname{dn}^2(u, k)} \quad (2.28)$$

$$\operatorname{tn}(u \pm iv, k) = \frac{\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{cn}(v, k') \operatorname{dn}(v, k') \pm i \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{sn}(v, k')}{1 - \operatorname{sn}^2(v, k') \operatorname{dn}^2(u, k)}$$

Eliptik fonksiyonların kendi aralarındaki bağıntılar da aşağıdaki gibidir:

**Y.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
BİLGİ TEKNOLOJİLERİ MERKEZİ**

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u &= 1 & -1 \leq \operatorname{sn} u \leq 1 \\
k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u &= 1 & -1 \leq \operatorname{cn} u \leq 1 \\
\operatorname{dn}^2 u - k'^2 \operatorname{cn}^2 u &= k'^2 & k' \leq \operatorname{dn} u \leq 1 \\
k'^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u &= \operatorname{dn}^2 u & -\infty \leq \operatorname{tn} u \leq \infty
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Eliptik fonksiyonların bazı özel değerleri de şunlardır:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}(-u) &= -\operatorname{sn} u & \operatorname{sn} 0 &= 0 & \operatorname{sn} K &= 1 \\
\operatorname{cn}(-u) &= \operatorname{cn} u & \operatorname{cn} 0 &= 1 & \operatorname{cn} K &= 0 \\
\operatorname{dn}(-u) &= \operatorname{dn} u & \operatorname{dn} 0 &= 1 & \operatorname{dn} K &= k' \\
\operatorname{tn}(-u) &= -\operatorname{tn} u & \operatorname{tn} 0 &= 0 & \operatorname{tn} K &= \infty
\end{aligned} \tag{2.30}$$

2.1.7. Dejenere Durumlar ve Yaklaştırma Formülleri

Eğer $m = 0$ olursa, (2.3) şu biçimi alır:

$$\operatorname{sn}(z|0) = \sin z \tag{2.31}$$

ve bu durumda (2.14) ve (2.15) den

$$\operatorname{cn}(z|0) = \cos z \quad \operatorname{dn}(z|0) = 1 \tag{2.32}$$

bulunur. Diğer bir deyişle, eğer $m = 0$ olursa Jakobiyeen eliptik fonksiyonlar trigonometrik fonksiyonlara dejenere olurlar.

Öte yandan, eğer $m = 1$ ise, (2.3) aşağıdaki sonucu verir;

$$\operatorname{sn}(z|1) = \tanh z \tag{2.33}$$

ve (2.14) ile (2.15) kullanılarak

$$\operatorname{cn}(z|1) = \operatorname{dn}(z|1) = \frac{1}{\cosh z} \tag{2.34}$$

elde edilir. Bu durumda, Jakobiye eliptik fonksiyonlar hiperbolik fonksiyonlara dejenere olurlar. Eğer m sıfır değil fakat karesinin ihmal edilebileceği kadar küçük ise, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\operatorname{sn}(z|m) = \operatorname{sn}(z|0) + m \frac{\partial}{\partial m} (\operatorname{sn}(z|0)) \quad (2.35)$$

$\operatorname{sn} z$ 'in $m = 0$ da m 'ye göre türevini almak için (2.3) eşitliği aşağıdaki gibi yazılır:

$$F(z, w, m) = z - \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} = 0 \quad (2.36)$$

buradan,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial m} \right)_{m=0} &= \left(\frac{\partial F}{\partial m} \right)_{m=0} = \left(\frac{\frac{1}{2} \int_0^w \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2 (1-mt^2)^2} \right)_{m=0} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{(1-w^2)(1-mw^2)}} \right)_{m=0} \\ &= -\frac{1}{2} \cos z \left(\arcsin w - \int_0^w \sqrt{1-t^2} dt \right)_{w=\sin z} \quad (2.37) \\ &= -\frac{1}{2} \cos z \left(z - \int_0^z \cos^2 \Phi d\Phi \right) \\ &= -\frac{1}{4} \cos z (z - \sin z \cos z) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece küçük bir m için $\operatorname{sn} z$ ' in yaklaşık değeri,

$$\operatorname{sn} z = \sin z - \left(\frac{m}{4} \right) \cos z (z - \sin z \cos z) \quad (2.38)$$

olur. Bu denklem ile (2.14) veya (2.15) den yararlanarak $cn z$ ve $dn z$ için de benzeri formüller elde edilebilir;

$$cn z = \cos z - \frac{m}{4} \sin z (z - \sin z \cos z) \quad (2.39a)$$

$$dn z = 1 - \frac{m}{2} \sin^2 z \quad (2.39b)$$

Eğer m bire çok yakınsa benzeri argümanlarla m_1 in karesi de ihmal edilerek aşağıdaki formüller elde edilir;

$$\begin{aligned} sn z &= \tanh z + \frac{m_1}{4} \frac{\sinh z \cosh z - z}{\cosh^2 z} \\ cn z &= \frac{1 - \frac{m_1}{4} \tanh z (\sinh z \cosh z - z)}{\cosh z} \\ dn z &= \frac{1 + \frac{m_1}{4} \tanh z (\sinh z \cosh z + z)}{\cosh z} \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.2. Eliptik İntegraller

Eğer $a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 = 0$ denklemi (a_0 ve a_1 her ikisi birden sıfır olmamak kaydıyla) çarpanlara ayrılamaz ve R , t 'nin ve $\sqrt{a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4}$ kare kökünün bir rasyonel fonksiyonu ise;

$$I = \int R[t, \sqrt{a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4}] dt \quad (2.41)$$

integraline *eliptik integral* adı verilir.

2.2.1. Eliptik İntegrallerin Üç Kanonik Formu

(2.41) denklemini, elemanter fonksiyonlar (cebirsal, trigonometrik, ters trigonometrik, logaritmik ve üstel fonksiyonlar) ve aşağıdaki üç temel integral cinsinden lineer olarak ifade etmek her zaman mümkündür:

Birinci Tip Eliptik İntegral

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\Psi \frac{d\Phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \Phi}} = \int_0^{u_1} du = u_1 = \text{sn}^{-1}(y, k) = F(\Psi, k) \quad (2.42)$$

$$[y = \sin \Psi \quad ; \quad \Psi = \text{am} u_1]$$

İkinci Tip Eliptik İntegral

$$\int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^\Psi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \Phi} d\Phi = \int_0^{u_1} \text{dn}^2 u du = E(u_1) \equiv E(\text{am} u_1, k) \equiv E(\Psi, k) \quad (2.43)$$

Üçüncü Tip Eliptik İntegral

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^y \frac{dt}{(1-\alpha^2 t^2) \sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} &= \int_0^\Psi \frac{d\Phi}{(1-\alpha^2 \sin^2 \Phi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \Phi}} \\ &= \int_0^{u_1} \frac{du}{1-\alpha^2 \text{sn}^2 u} = \Pi(u_1, \alpha^2) \equiv \Pi(\text{am} u_1, \alpha^2, k) \equiv \Pi(\Psi, \alpha^2, k) \\ & \quad [-\infty < \alpha^2 < \infty] \end{aligned} \right. \quad (2.44)$$

2.2.2. Tam Eliptik İntegraller

$y=1$ olduğunda (2.42)-(2.44) integralleri *tam eliptik integral* adını alırlar. Bu durumda şu denklemler yazılabilir:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \Phi}} = \int_0^K du = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv K(k) \equiv K \quad (2.45)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \Phi} d\Phi = \int_0^K dn^2 u du = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv E(k) \equiv E \quad (2.46)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{(1-\alpha^2 \sin^2 \Phi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \Phi}} = \int_0^K \frac{du}{1-\alpha^2 \sin^2 u} = \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \alpha^2, k\right) = \Pi(\alpha^2, k) \quad (2.47)$$

$[\alpha^2 \neq 1]$

Buna ek olarak,

$$K'(k) \equiv K(k') \equiv K'$$

$$E'(k) \equiv E(k') \equiv E'$$

dir. Bazı özel değerler ise aşağıdaki gibidir;

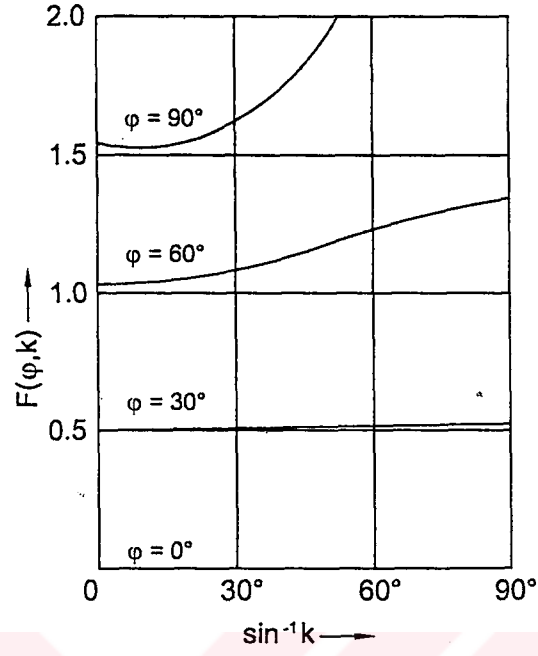
$$k = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{iken} \quad K' = K \quad \text{dır,}$$

$$k = \sqrt{2} - 1 \quad \text{iken} \quad K' = \sqrt{2} K \quad \text{dır,}$$

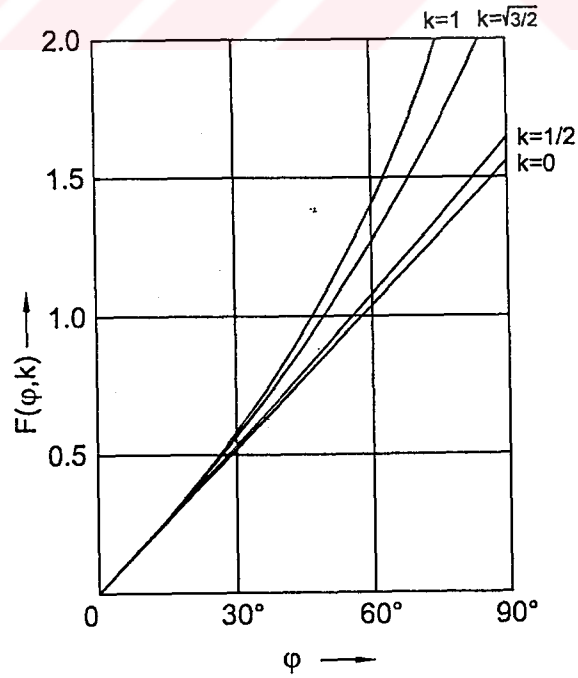
$$k = 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{iken} \quad K' = 2K \quad \text{dır.}$$

2.2.3. $E(\varphi, k)$, $F(\varphi, k)$, $E(k)$ ve $K(k)$ 'nın Grafikleri

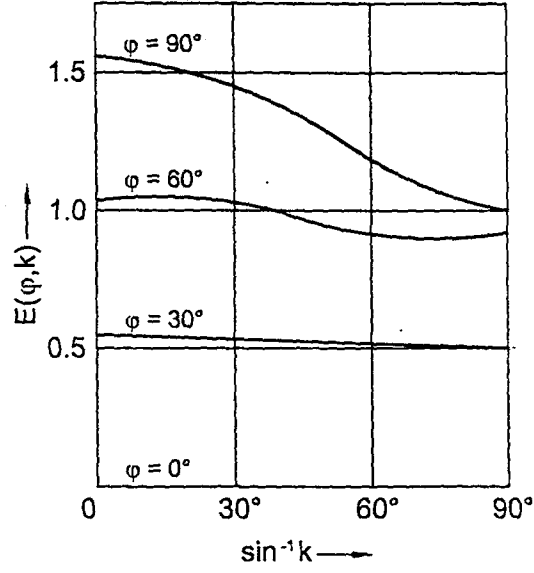
Şekil 2.2 ve Şekil 2.3 birinci tip tam olmayan eliptik integralleri, genliğin (φ) ve modüler açının (\sin^{-1}) fonksiyonları olarak ifade etmektedir. Şekil 2.4 ve Şekil 2.5 ikinci tip tam olmayan eliptik integralleri, genliğin (φ) ve modüler açının (\sin^{-1}) fonksiyonları olarak ifade etmektedir.



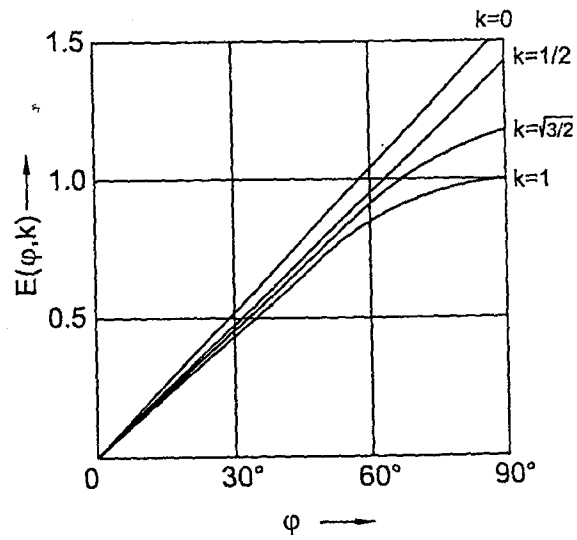
Şekil 2.2. $F(\varphi, k)$ değerinin $\sin^{-1} k$ değişkenine göre değişimi.



Şekil 2.3. $F(\varphi, k)$ değerinin φ değişkenine göre değişimi.

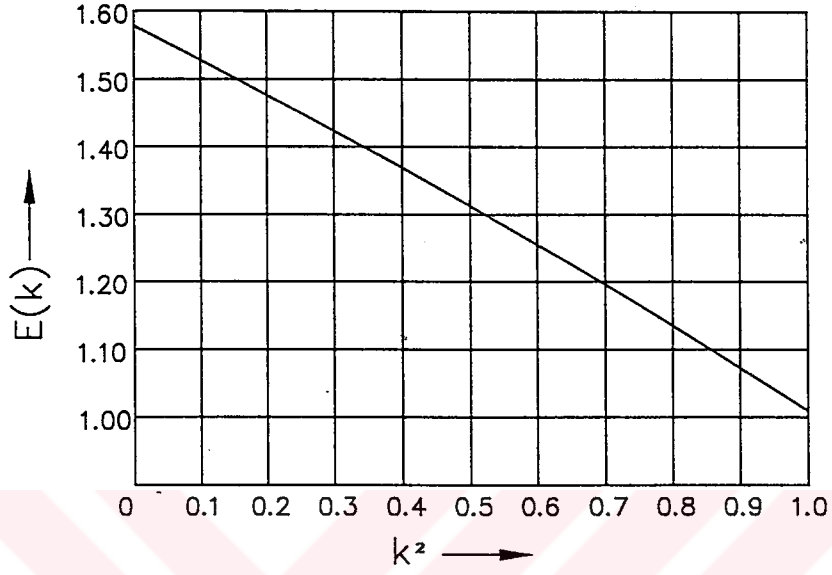


Şekil 2.4. $E(\varphi, k)$ değerinin $\sin^{-1} k$ değişkenine göre değişimi.

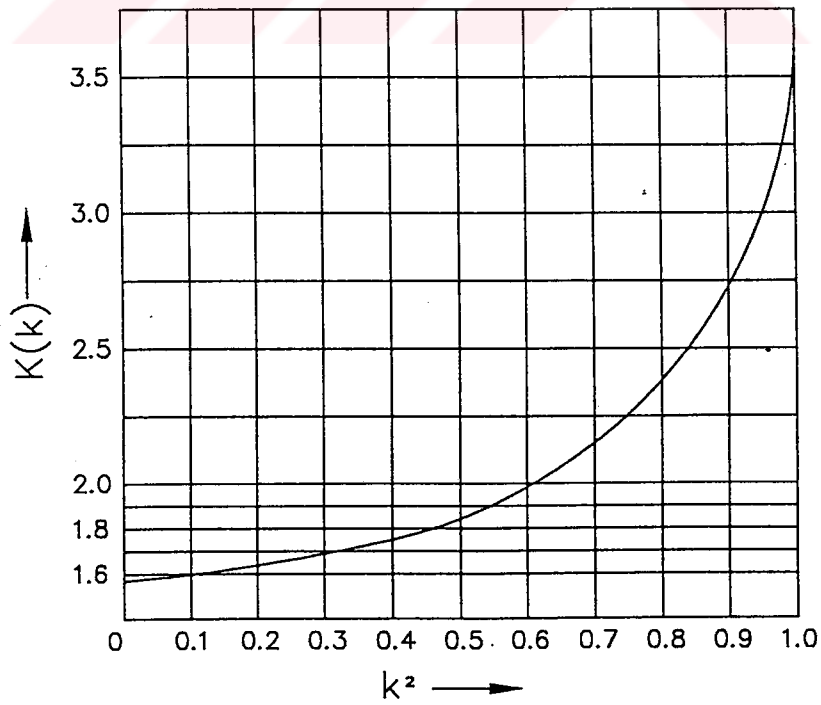


Şekil 2.5. $E(\varphi, k)$ değerinin φ değişkenine göre değişimi.

Şekil 2.6 ve Şekil 2.7, k^2 'ye karşılık $E(k)$ ve $K(k)$ tam integrallerini göstermektedir.



Şekil 2.6. $E(k)$ değerinin k^2 değişkenine göre değişimi.



Şekil 2.7. $K(k)$ değerinin k^2 değişkenine göre değişimi.

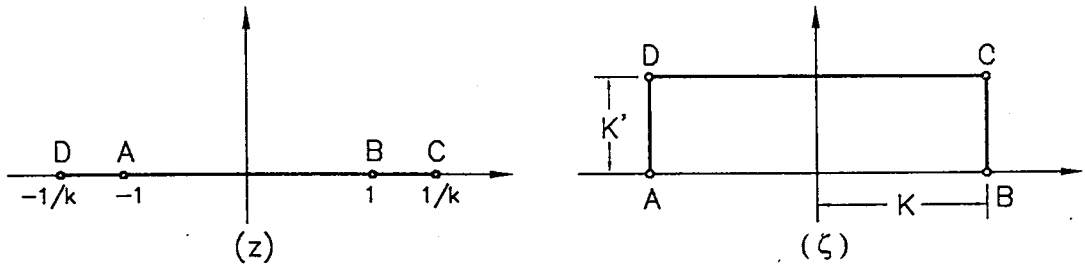
2.2.4. Konform Dönüşümler

Eliptik integrallerin bazı konform dönüşüm özellikleri aşağıdaki çizimlerde gösterilmiştir.

Im $z > 0$ yarı-düzleminin ζ -düzlemindeki bir dikdörtgen üzerine dönüşümü (Şekil 2.8) şudur:

$$\zeta = \int_0^z \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2z_1^2)}} = F(z, k); \quad z = \operatorname{sn}\zeta \quad (2.48)$$

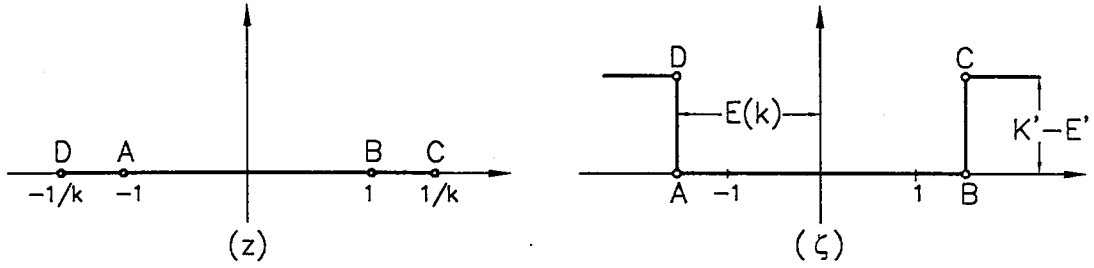
ζ	$-K+iK'$	$-K$	0	K	$K+iK'$	iK'
z	$-1/k$	-1	0	1	$1/k$	∞



Şekil 2.8. Im $z > 0$ yarı-düzleminin ζ -düzlemindeki dikdörtgen üzerine dönüşümü.

$$\zeta = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z_1^2}{1-z_1^2}} dz_1 = E(z, k) \quad (2.49)$$

(2.49) fonksiyonunun dönüşümü Şekil 2.9'da görülmektedir:

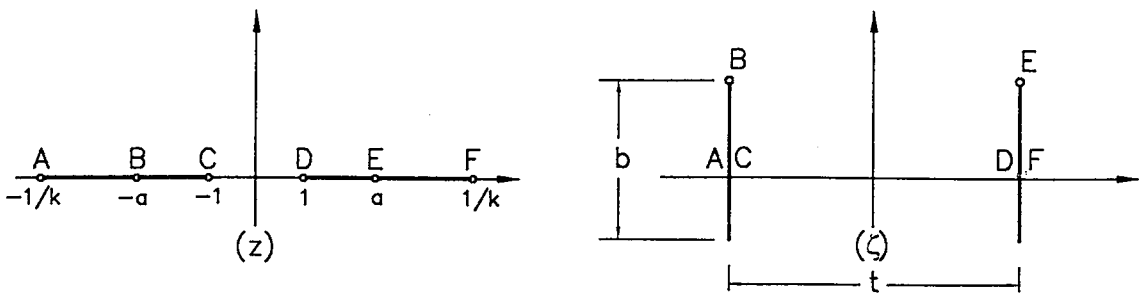


Şekil 2.9. (2.49) fonksiyonunun dönüşümü.

İki yatay çizginin, iki düşey çizgi üzerine dönüşümü (Şekil 2.10) ise şudur:

$$\zeta = \int_0^z \frac{(a^2 - z_1^2) dz_1}{\sqrt{(1 - z_1^2)(1 - k^2 z_1^2)}}, \quad 1 < a < \frac{1}{k} \quad (2.50)$$

$$t = \frac{2}{k} [E(k) - (1 - k^2 a^2) K(k)], \quad b = \frac{2}{k} [E(k) - k^2 a^2 K(k)]$$



Şekil 2.10. İki yatay çizginin, iki düşey çizgi üzerine dönüşümü.

burada

$$k_1 = \frac{k}{k'} \sqrt{a^2 - 1}$$

olup verilen k için a değeri aşağıdaki bağıntıdan elde edilir.

$$a^2 = \frac{E(k')}{k^2 K(k')}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

2.3. Konform Dönüşüm

$w = f(z)$ 'nin yorumunu yapmak için $z(x, y)$ ve $w(u, v)$ karmaşık düzlemleri ele alınır. Bu şekilde z -düzlemindeki (x, y) noktası f fonksiyonu vasıtasıyla w -düzlemindeki (u, v) noktasına dönüşür. Böylece iki düzlemin noktaları, eğrileri ve daha genel olarak bölgeleri arasında bir dönüşüm belirlenmiş olur.

Eğer f , tek değerli bir kompleks fonksiyon ise, her bir z noktasına $f(z)$ ile bir ve yalnız bir $w = u + iv$ noktası karşılık gelir. Eğer fonksiyon, tek değerli değilse, z noktasına w -düzleminde birden fazla nokta karşılık gelebilir. Genellikle, eğer f çok değerli ise z -düzleminde uygun konum olarak $f(z)$ fonksiyonunun verilen dalları, kesik düzlemde tek değerli olur. Bu halde u ve v , x ve y 'nin tek değerli fonksiyonlarıdır. Bunun karşıtı, yani iki ya da daha fazla $z = x + iy$ için aynı bir $w = u + iv$ noktasına dönüşmesi, doğru olmayabilir. Bu olasılığı araştırmak için,

$$w = f(z) = u + iv = f_1(x, y) + if_2(x, y) \quad (2.51)$$

u ve v sürekli ve türevlenebilir ise

$$u = f_1(x, y) \quad (2.52a)$$

$$v = f_2(x, y) \quad (2.52b)$$

x ve y 'yi u ve v 'nin fonksiyonu olarak ifade etmek istersek

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

olmalıdır. f , $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında analitik ise Cauchy-Riemann koşullarını sağlar.

$$[J]_{z_0} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{z_0} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]_{z_0} = |f'(z_0)|^2 \quad (2.53)$$

O halde, f , z_0 'ı da içinde bulunduran bir bölgede analitik ise ve $f'(z_0) \neq 0$ ise $w = f(z)$ fonksiyonu iki bölgenin noktaları arasında bire-bir bir dönüşüm belirler. $f'(z_0) = 0$ olan noktalara *kritik noktalar* denir.

$f'(z) \neq 0$ koşulu $z = F(w)$ nin $w = w_0$ için, $F(w)$ tek değerli ise analitik olduğunu belirler. f , z_0 noktasında analitik ise z -düzleminde z_0 'dan geçen herhangi bir C eğrisine w -düzleminde $w_0 = f(z_0)$ noktasından geçen bir C' eğrisi karşılık gelir. C üzerinde ikinci bir z_1 noktası ve bunun C' üzerindeki w_1 görüntüsünü düşünerek aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \frac{\Delta f}{\Delta z} \quad (2.54)$$

Bu oran, modülü $(w_0 w_1)$ ve $(z_0 z_1)$ olan kırımların oranı olur. Argüman ise bu kırımların doğrultuları arasındaki açının değeri olup, bir karmaşık sayıdır. Limitte Δz ve $\Delta w \rightarrow 0$ için aradaki açı C ve C' eğrilerinin z_0 ve w_0 daki teğetleri arasındaki açı, limit modül ise, z_0 komşuluğunda bir lokal büyüklük faktörü olacaktır. Fakat analitik fonksiyon için (2.54) oranı limitte $f'(z)$ türevini vereceğinden $(z_0 z_1)$ kırımlarının yönünden bağımsız olarak $f(z)$ z_0 'da analitik ise ve $f'(z_0) \neq 0$ ise z_0 'dan geçen bütün çizgiler f fonksiyonu ile w_0 'dan

geçen eğrilere dönüşür ve bu eğrilerin hepsi de $\arg f'(z_0)$ açısı aynı kalmak koşulu ile dönerler. Böylece f nin analitik ve $f'(z) \neq 0$ olduğu noktada izafi açı böyle bir dönüşümle değişmez, aynı kalır ve bu dönüşüme *Konform Dönüşüm* adı verilir.

Özel olarak $f'(z_0) = k_0 e^{i\alpha_0}$ ve $k_0 \neq 0$ ise eğri üzerindeki bir z_0 noktasındaki teğet, görüntü eğri üzerindeki w_0 noktasında tam α_0 açısı kadar dönen teğete karşı gelir. Sonuç olarak f, z_0 'da analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktasında kesişen iki eğrinin w -düzlemindeki görüntüleri yine w_0 da kesişen ve aralarındaki açı aynı kalan iki eğridir.

$f'(z) = 0$ olan noktalarda büyüklük faktörü sıfırdır ve dönme açısı tanımsızdır. Bu noktalara dönüşümün kritik noktaları denir. z_0 kritik noktaları, w_0 noktasına karşılık geldiğinde $z = F(w)$ ters fonksiyonunun analitik olmadığına dikkat edilmelidir (Hildebrand,1952).

Teorem

$w = f(z)$ fonksiyonu analitik ve $f'(z) \neq 0$ ise D bölgesinin bütün noktaları için $w = f(z)$ konform bir dönüşüm belirler.

Konform dönüşümde z -düzlemindeki bir şekil w -düzlemine açıları değişmeden ancak yaklaşık olarak $|f'(z_0)|^2$ kadar büyüterek dönüşür. Uzunluklar için ise, $|f'(z_0)|$ 'a *lineer büyüklük faktörü* denir (Hildebrand,1952).

2.4. Schwarz-Christoffel Dönüşümü

z -düzleminde bir poligon sınırı üzerindeki noktaları, w -düzlemindeki $v = 0$ gerçel eksen üzerindeki noktalara dönüştürüp 1-1 bir dönüşüm inceleyelim. Önce w -düzleminde z -düzlemine bir dönüşüm düşünmek uygun olacaktır. Bu nedenle $z = F(w)$ 'yi düşünelim ve

$$\frac{dz}{dw} = C(w - u_1)^{k_1} (w - u_2)^{k_2} \dots (w - u_n)^{k_n} \quad (2.55)$$

yazalım. Burada u_1, u_2, \dots, u_n ; w -düzleminde gerçel eksen boyunca $u_1 < u_2 < \dots < u_n$ noktalarıdır ve C , gerçel veya karmaşık bir sabittir. k 'lar gerçel sabitlerdir. Her iki tarafın logaritması alınırsa;

$$\log \frac{dz}{dw} = \log C + k_1 \log(w - u_1) + k_2 \log(w - u_2) + \dots + k_n \log(w - u_n) \quad (2.56)$$

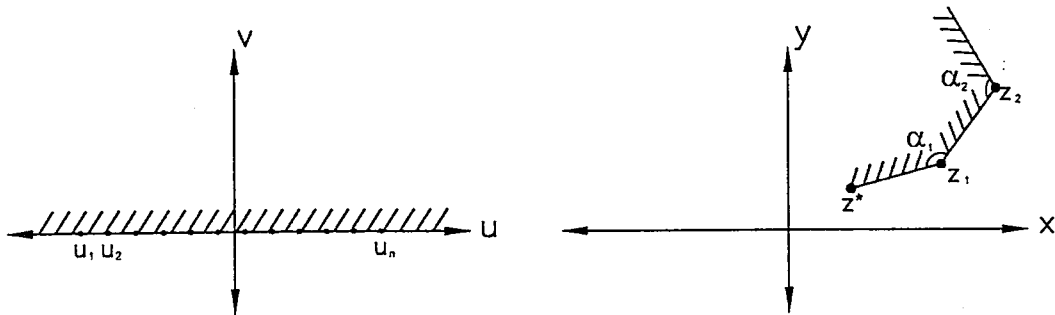
bulunur. Sağ taraftaki logaritmaların esas değerleri 0 ile 2π arasındaki açılar olarak alınır.

u ekseninin xy -düzlemine dönüşümünü düşünelim; öyle bir noktada $\frac{dz}{dw}$ nin şiddeti, w -düzleminden z -düzlemine dönüşümdeki lokal büyüklük faktörüdür. $\frac{dz}{dw}$ 'nin açısı da

$$\arg \frac{dz}{dw} = \text{Im} \left(\log \frac{dz}{dw} \right) \quad (2.57)$$

şeklinde ifade edilir. Bu açı, dönüşen eğri ile teğet arasındaki açının dönüşündeki dönmedir. (2.56) dan da aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\arg \frac{dz}{dw} = \arg C + k_1 \arg(w - u_1) + k_2 \arg(w - u_2) + \dots + k_n \arg(w - u_n) \quad (2.58)$$



Şekil 2.11. u_1, u_2, \dots, u_n noktalarının görüntüleri olan z_1, z_2, \dots, z_n tepeleri.

w-düzleminin sonsuzdaki noktası z-düzleminde, z^* noktasına dönüşür: $z^* \rightarrow z_\infty$ olabilir. Eğer $w = u$ noktasının negatif gerçel eksen boyunca sonsuzdan sağa doğru hareketini düşünerek (öyle ki $w = u < u_1$) $w - u_1, w - u_2, w, \dots, w - u_n$ lerin hepsi gerçel ve negatiftirler. Bunların açıları (2.58) den π ye eşittir.

$$\arg \frac{dz}{dw} = \arg C + (k_1 + k_2 + \dots + k_n)\pi, \quad (w = u < u_1) \quad (2.59)$$

Böylece u_1 noktasının sol tarafında kalan u ekseni, bir doğru parçasına dönüşür. Gerçel x ekseni ile bu doğru parçası (2.59) ile tanımlı açığı yapar.

w, u_1 den u_2 ye gelirken $\frac{dz}{dw}$ açısı da $k_1\pi$ kadar azalır ve yönü sabit kalır.

Böylece $(u_1 u_2)$ parçasının görüntüsü z-düzleminde $(z_1 z_2)$ doğru parçasıdır ve $(z^* z_1)$ parçası ile $-\pi k_1$ açısını yapar. Bu şekilde devam edersek, her bir $(u_p u_{p+1})$ kenarı (parçası) $(z_p z_{p+1})$ parçasına dönüşür. Her bir doğru parçası bir önce dönüşmüş parça ile $-k_p\pi$ açısını yapar. Meydana gelen poligonun iç açıları α_p ise $0 \leq \alpha_p \leq 2\pi$

$$\pi - \alpha_p = -k_p\pi \quad \text{veya} \quad k_p = \frac{\alpha_p}{\pi} - 1 \quad (2.60)$$

olur. İntegral alınarak

$$z = C \int (w - u_1)^{k_1} (w - u_2)^{k_2} \dots (w - u_n) dw + K \quad (2.61)$$

dönüşümü elde edilir. Burada C ve K keyfi karmaşık sabitlerdir. Bu dönüşüm ($v = 0$) gerçel eksenini z düzlemindeki poligona dönüştürür. Öyle ki, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ iç açıları olmak üzere z_1, z_2, \dots, z_n tepeleri u_1, u_2, \dots, u_n noktalarının (Şekil 2.11) görüntüleridirler.

$(w = u > u_n)$ son parça için $w - u_i$ sayılarının hepsi gerçel ve pozitiftir ve bundan dolayı sıfır açısına sahiptirler. Böylece bu kenar (parça)

$$\arg \frac{dz}{dw} = \arg C \quad (w = u > u_n) \quad (2.62)$$

olur. Kapalı bir poligon için iç açılarının toplamı ise

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = (n - 2)\pi \quad (2.63)$$

olur ve aynı zamanda

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = \frac{(n - 2)\pi}{\pi} - n = -2 \quad (2.64)$$

dir. Böylece (2.56) ve (2.59) denklemlerine göre, $v = 0$ doğrusunun (ekseninin) iki sonsuz kenarı $\arg C - 2\pi$ ve $\arg C$ açıları kadar döndürülmüşlerdir.

C sabiti $C = ce^{i\beta}$ şeklinde yazılırsa, bunun bir c keyfi büyüklük çarpanı ve bir β rotasyonundan meydana geldiğini görürüz ve (2.59) dan dolayı, β açısının, $w = u_n$ in sağ tarafındaki sonsuz parçanın tasvir edildiği zaman (sonlu ya da sonsuz kenara (parçaya)) döndürülmüş olduğu kadarki açı olduğu görülür.

Eğer $K = u_0 + iv_0$ yazılırsa, K sabiti, poligonun $u_0 + iv_0$ vektörü kadar keyfi bir ötelenmesini gösterir (Hildebrand,1976).

2.5. Riemann Dönüşüm Teoremi

z -düzleminde basit bağlantılı ve sınırı Γ olan bir bölge D , w -düzleminde merkezi O ve sınırı δ olan birim daire D' olsun. D nin her bir noktasını D' nün bir noktasına ve Γ nın herhangi noktasını δ nın bir noktasına eşleyen, D de holomorf bir tek $w = f(z)$ fonksiyonu vardır.

Bir Riemann yüzeyi, z -düzleminin birden fazla tabakası olan bir yüzeye, çok-değerli bir fonksiyonun yüzey üzerindeki noktaların her birine karşılık yalnız bir değeri olacak şekilde genelleştirilmesidir. Verilen bir fonksiyon için böyle bir yüzey bir kere

bulduğunda fonksiyon bu yüzey üzerinde tek-değerli olur ve orada tek değerli fonksiyonlar kuramı uygulanır. Böylece, fonksiyonun çok değerli olmasından dolayı ortaya çıkan zorluklar geometrisel bir düzenekle azaltılmış olur. Bununla birlikte böyle yüzeylerin belirlenmesi ve tabakalar arasında uygun bağıntıların düzenlenmesi oldukça karışık olabilir.

2.6. Green Fonksiyonu

Bu kısımda, Green fonksiyonunun tanımı yapılarak fiziksel yorumu verilmiştir.

2.6.1. Green Fonksiyonunun Tanımı

D basit bağlantılı sınırlı bir bölge, $z = x + iy$ ve $\zeta = \xi + i\eta$ olmak üzere,

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln|z - \zeta| + g(z, \zeta), \quad z \in D, \quad \zeta \in D \quad (2.65)$$

fonksiyonu, D bölgesinde Laplace operatörü için Green fonksiyonu olarak tanımlanır (Sidorov, Fedoryuk, Shabunin, 1985; Vladimirov, 1984). Burada $g(z, \zeta)$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyondur;

$$1) \quad g, \quad \forall \zeta \in D \text{ de harmoniktir, yani } \quad g_{xx} + g_{yy} = 0, \quad z = x + iy \in D \quad (2.66)$$

2) $g, \quad \forall \zeta \in D$ için D sınırına kadar sürekli ve

$$g(z, \zeta) \Big|_{z \in S} = -\frac{1}{2\pi} \ln|z - \zeta| \Big|_{z \in S} \quad (2.67)$$

Buna göre $G(z, \zeta) \Big|_{z \in S} = 0$ olduğu anlaşılır.

Basit bağlantılı bir bölgede Green fonksiyonunu bulmak, bu bölgeyi birim çembere dönüştüren fonksiyonu bulmaya denktir. Bu aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem

D basit bağlantılı sınırlı bir bölge olsun ve her $\zeta \in D$ için $w = w(z, \zeta)$, $z \in D$, $\zeta \in D$ fonksiyonu, $(z = \zeta \leftrightarrow w = 0)$ ve $w(z, \zeta) = 0$ olacak şekilde, D yi $|w| < 1$ birim çemberine konform olarak dönüştürsün. O zaman D bölgesinde Laplace operatörü için Dirichlet probleminin Green fonksiyonu

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln |w(z, \zeta)| \quad (2.68)$$

dır (Garabedian, 1964; Hildebrand, 1976; Sidorov ve ark., 1985).

O halde $w = w(z)$ D bölgesinin $|w| < 1$ birim çemberine konform dönüşümü ise,

$$w(z, \zeta) = \frac{w(z) - \overline{w(\zeta)}}{1 - w(z)w(\zeta)} \quad (2.69)$$

olmak üzere, D bölgesi için Green fonksiyonu,

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \frac{w(z) - \overline{w(\zeta)}}{1 - w(z)w(\zeta)} \quad (2.70)$$

olarak verilir. Bu fonksiyonun,

a) Simetrik,

b) D de ξ ve η , $(\zeta = \xi + i\eta)$, ye göre harmonik ,

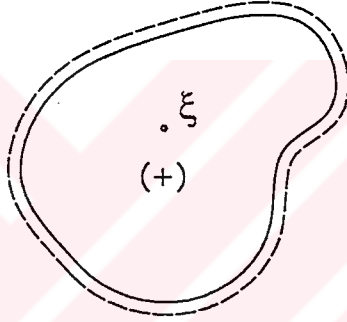
c) $\forall z \in D$ için D nin sınırına kadar sürekli ve $G(z, \zeta) \Big|_{\zeta \in \partial D} = 0$

olduğu bilinmektedir.

2.6.2. Green Fonksiyonunun Fiziksel Yorumu

Laplace denklemi halinde Green fonksiyonu elektrostatik bir yoruma sahiptir. D bölgesi tamamen iletken bir ∂D yüzeyi ile bir vakum (boşluk) olarak düşünölsün. D içindeki bir ξ noktasında bir pozitif yük durumu, ∂D yüzeyi boyunca bir negatif yük denge dağılımı (Şekil 2.12) yapar. (yani ξ deki (+) yük, ∂D yüzeyinde dengeli bir (-) yük dağılımı yapar).

Uygun olarak normalize edildiği zaman bu yüklerle meydana getirilen elektrostatik alan potansiyeli Green fonksiyonuna göre tanımlanmış özelliklere sahip olur.



Şekil 2.12. D 'deki ξ noktasında pozitif yük durumu ve ∂D yüzeyi boyunca negatif yük dağılımı

BÖLÜM 3

DIRICHLET PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN YÖNTEMLER

Poisson denklemi için Dirichlet problemi,

$$\nabla^2 U = h(z), \quad z \in D, \quad U|_{\partial D} = U_0(z) \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır. Bunun çözümünü bulmak için Green fonksiyonu (2.65) kullanılabilir. (3.1) probleminin Green fonksiyonuna dayalı çözümü,

$$U(z) = \iint_D G(z, \zeta) h(\zeta) d\xi d\eta + \int_{\partial D} \frac{G(z, \zeta)}{\partial n} U_0(\zeta) |d\zeta| \quad (3.2)$$

şeklinde bulunur. Burada $\zeta = \xi + i\eta$ dir ve $\frac{\partial}{\partial n}$, ζ ya göre D sınırı boyuncaki normal türevi göstermektedir.

3.1. Dikdörtgen Bölgede Dirichlet Probleminin Çözümü

Bu kısımda, dikdörtgen bölgede Dirichlet probleminin çözümünde gerekli olan dönüşüm ve bu dönüşüme göre Green fonksiyonu hesaplanmıştır.

3.1.1. Dikdörtgen Bölgenin Birim Çembere Dönüşümü

Burada, önce z-düzlemindeki A_1, A_2, A_3, A_4 köşeli dikdörtgen t düzleminin $\text{Im}t > 0$ üst yarısına ve sonra da $\text{Im}t > 0$ düzlemi w düzlemindeki $|w| < 1$ birim çemberine dönüştürülerek, dikdörtgeni birim çembere konform olarak dönüştüren fonksiyon eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilecektir.

z-düzlemindeki dikdörtgenin köşeleri, $A_1 (z = a)$, $A_2 (z = a+ib)$, $A_3 (z = -a+ib)$, $A_4 (z = -a)$ olsun. Bir $f_1(t)$ fonksiyonu yardımıyla ($\text{Re}t > 0$, $\text{Im}t > 0$) bölgesinin z-düzlemindeki dikdörtgenin sağ yarısına konform olarak dönüştüğü düşünülürse, simetri prensibine göre,

($\text{Re}t < 0$, $\text{Im}t > 0$) bölgesi de dikdörtgenin sol yarısına dönüşecektir. Böylece eksenler üzerindeki

$$a_1(t = 1) \rightarrow A_1(z = a), \quad a_4(t = -1) \rightarrow A_4(z = -a) \quad (3.3)$$

simetri noktaları kurulabilir. Burada ($t = 0 \rightarrow z = 0$) olduğu açıktır. O halde üç sınır noktasının karşılığı bulunmuş olur. ($a_2 \rightarrow A_2$), ($a_3 \rightarrow A_3$) karşılıklarını bulmak için de

$$a_2\left(t = \frac{1}{k} \rightarrow z = a+ib\right), \quad a_3\left(t = -\frac{1}{k} \rightarrow z = -a+ib\right) \quad (3.4)$$

$0 < k < 1$, olduğu kabul edilsin. Bu durumda Schwarz-Christoffel dönüşümü kullanılırsa, üst yarı düzlemin dikdörtgene konform dönüşümü (Sveshnikov ve Tikhonov, 1982), ($t=0 \rightarrow z=0$) ve (2.42) hesaba katılarak,

$$z = f(t) = c \int_0^t [(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)]^{-\frac{1}{2}} d\tau = c F(t,k) \quad (3.5)$$

olarak bulunur. (3.5) de (3.3) koşulları ve (2.45) kullanılırsa

$$a = c K(k) \quad (3.6)$$

elde edilir. $a_2\left(t = \frac{1}{k}\right) \leftrightarrow A_2(z = a+ib)$ için (3.5) ve (2.47) den

$$a+ib = c [K(k) + iK'(k)] \Rightarrow b = c K'(k) \quad (3.7)$$

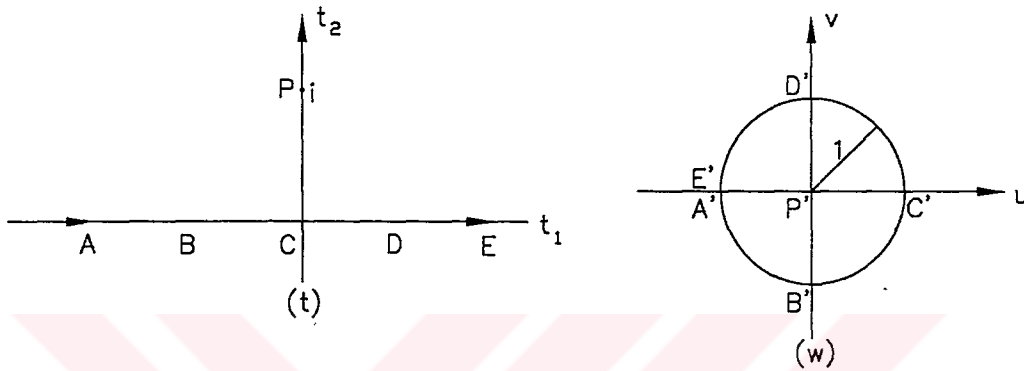
olduğu anlaşılır. a ve b verildiğinde (3.6) ve (3.7) den

$$a K'(k) = b K(k) \quad (3.8)$$

denklemini çözülebilir ve c, k değerleri hesaplanabilir. Böylece dikdörtgenin köşeleri tam eliptik integrale bağlı olarak bulunmuş ve $\text{Im}t > 0$ düzlemini z-düzlemindeki dörtgene konform olarak dönüştüren (3.5) fonksiyonu belirlenmiş olur. Diğer yandan, k

değişmediğinden ve c keyfi olduğundan $c=1$ seçilerek (Hildebrand, 1976; Myskis, 1979; Sidorov ve ark., 1985). (3.5) fonksiyonu (2.42) den $t = snz$ veya $z = sn^{-1}t$ olarak bulunur.

Şimdi, $Imt > 0$ üst yarı düzleminin w -düzlemindeki $|w| < 1$ birim çemberine konform dönüşümünü bulmaya çalışalım;



Şekil 3.1. Üst yarı düzleminin, birim çemberin içine dönüşümü.

$t = i \rightarrow w = 0$, $t = \infty \rightarrow w = -1$ ve t -deki üst yarı düzlemini w -düzlemindeki birim çemberin içine dönüştüren bilinear dönüşüm $w = e^{i\theta_0} \left(\frac{t - t_0}{t - \bar{t}_0} \right)$ bilgilerini kullanırsak;

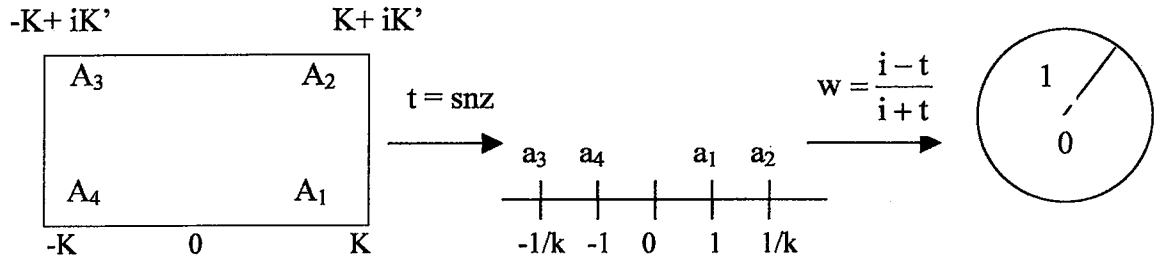
$0 = e^{i\theta_0} \left(\frac{i - t_0}{i - \bar{t}_0} \right) \Rightarrow t_0 = i$ bulunur. Aynı şekilde, $w = e^{i\theta_0} = -1$ de kullanılarak;

t -düzleminin üst yarısını w -düzlemindeki birim çemberin içine dönüştüren dönüşüm (Şekil 3.1); $w = (-1) \left(\frac{t - i}{t + i} \right) = \frac{i - t}{i + t}$ olarak bulunur. (Spiegel, 1974; Sidorov ve ark., 1985).

Buradan da, z -düzleminde seçilen dikdörtgenin w -düzlemindeki $|w| < 1$ birim çemberine konform dönüşümü;

$$w = \frac{i - snz}{i + snz} \quad (3.9)$$

formunda elde edilir. Sonuç aşağıda şematik olarak gösterilmiştir.



3.1.2. Dikdörtgen Bölge İçin Green Fonksiyonu

Kısım (2.6) da verilen Green fonksiyonuna göre D bölgesi, dikdörtgen olarak alınırsa, (3.9) ve (2.70) den dikdörtgen için Green fonksiyonu,

$$G = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \frac{\frac{i - \operatorname{sn} z}{i + \operatorname{sn} z} \frac{i - \operatorname{sn} \zeta}{i + \operatorname{sn} \zeta}}{1 - \frac{i - \operatorname{sn} z}{i + \operatorname{sn} z} \left(\frac{i - \operatorname{sn} \zeta}{i + \operatorname{sn} \zeta} \right)} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \frac{\operatorname{sn} z - \operatorname{sn} \zeta}{\operatorname{sn} z + \operatorname{sn} \zeta} \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilmiş olur.

3.1.3. Problemin Çözümü

(3.1) denkleminde, D bölgesi olarak kısım (3.1.1) de tanımlanan $A_1(K, 0)$, $A_2(K, K')$, $A_3(-K, K')$, $A_4(-K, 0)$ köşeli dikdörtgenin içini ve D sınırı olarak da $D = \overline{A_4 A_1} \cup \overline{A_1 A_2} \cup \overline{A_2 A_3} \cup \overline{A_3 A_4}$ çevresini alalım. Dikdörtgenin,

$$\overline{A_4 A_1} \text{ kenarı üzerinde } \eta = 0, \quad d\eta = 0, \quad -K \leq \xi \leq K;$$

$$\overline{A_1 A_2} \text{ kenarı üzerinde } \xi = K, \quad d\xi = 0, \quad 0 \leq \eta \leq K';$$

$$\overline{A_2 A_3} \text{ kenarı üzerinde } \eta = K', \quad d\eta = 0, \quad -K \leq \xi \leq K';$$

$\overline{A_3A_4}$ kenarı üzerinde $\xi = -K$, $d\xi = 0$, $0 \leq \eta \leq K'$;

olduğundan, (3.2) çözümü şu şekilde olur;

$$U(z) = \int_0^{K'} \int_{-K}^K G(z, \zeta) h(z) d\xi d\eta - \int_{-K}^K [G_\xi^2(z, \zeta) + G_\eta^2(z, \zeta)]^{\frac{1}{2}} U_0(\zeta) \Big|_{\eta=0}^{K'} d\xi + \int_0^{K'} [G_\xi^2(z, \zeta) + G_\eta^2(z, \zeta)]^{\frac{1}{2}} U_0(\zeta) \Big|_{\xi=-K}^K d\eta \quad (3.11)$$

Laplace denklemi için Dirichlet probleminin (yani (3.1) formunda $h(z)=0$ olması hali) söz konusu dikdörtgen bölgedeki çözümü;

$$U(z) = - \int_{-K}^K [G_\xi^2(z, \zeta) + G_\eta^2(z, \zeta)]^{\frac{1}{2}} U_0(\zeta) \Big|_{\eta=0}^{K'} d\xi + \int_0^{K'} [G_\xi^2(z, \zeta) + G_\eta^2(z, \zeta)]^{\frac{1}{2}} U_0(\zeta) \Big|_{\xi=-K}^K d\eta \quad (3.12)$$

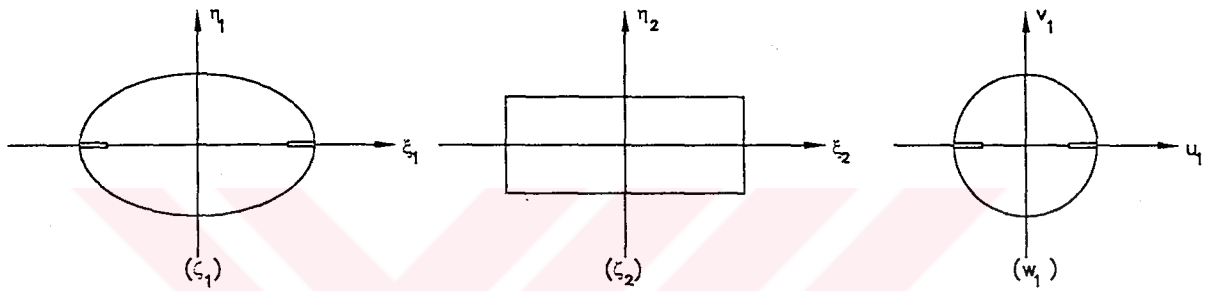
olur. Burada, $G(z, \zeta)$ Green fonksiyonu, eliptik fonksiyonlar cinsinden (3.10) ifadesi ile verilmiştir. $K(k)$ ve $K'(k)$ integral sınırları k modüllü tam eliptik integrallerdir ve k ($0 < k < 1$) sabitinin verilen herhangi bir değeri için bellidirler; bunlar (Byrd, 1954) verilen tablolardan hesaplanabilir.

3.2. Elips Bölgede Dirichlet Probleminin Çözümü

Bu kısımda elips bölgede Dirichlet probleminin çözümünde gerekli olan dönüşüm ve bu dönüşüme göre Green fonksiyonu hesaplanmıştır.

3.2.1. Elips Bölgenin Üst Yarı Düzleme Dönüşümü

Burada, önce z -düzlemindeki elips, w_1 -düzlemindeki $|w_1| < 1$ birim çemberine ve sonra da w_1 -düzlemindeki $|w_1| < 1$ birim çember, w -düzlemindeki $\text{Im}w > 0$ üst yarısına dönüştürülerek elipsi, üst yarı düzleme konform olarak dönüştüren fonksiyon eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilecektir.



Şekil 3.2. Elipsin içinin birim çemberin içine dönüşümü.

$\zeta_1 = \frac{z}{c}$ olsun. Şekil 3.2 'de çizilmiş iki kesikli elips, $\zeta_2 = \arcsin \zeta_1$ vasıtasıyla ζ_2 -düzleminde bir dikdörtgene dönüştürülür. $\frac{\pi}{2} = K$ ve $\arcsin h\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{K'}{2}$ olsun, böylece $K' = \frac{4K}{\pi} \arcsin h\left(\frac{b}{c}\right)$ olur. $\zeta = \left(\frac{2K}{\pi}\right) \zeta_2$ ve $w_1 = \text{sn} \zeta$ ile yatay kenarlar bir dairenin yayları üzerine dönüştürülür ve dikey kenarlar da iki kesik kenarlarına dönüştürülür. Bu şekilde, ζ_1 -düzlemindeki her kesik w_1 -düzlemindeki bir kesik karşılık gelir. Sonuç olarak bu kesikler de dahil edilmiş olur. m 'i K ve K' den elde edebilmek için, şunu yapmalıyız.

$$q = e^{\frac{-\pi K'}{K}} = e^{-4 \arcsin \frac{b}{c}} = \frac{c^4}{(b+a)^4} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

Buradan da elipsin içini birim çemberin içine dönüştüren

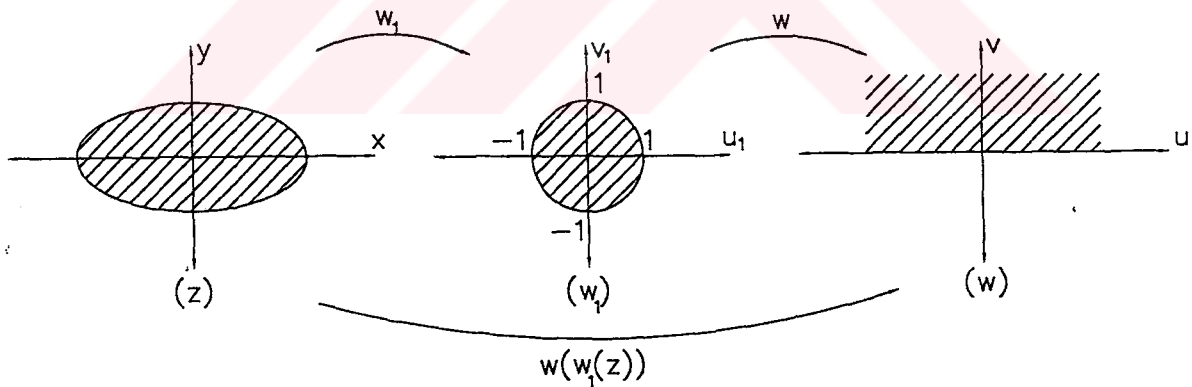
$$w_1 = m^{\frac{1}{4}} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{z}{c} \right) \quad (3.13)$$

dönüşümü elde edilir. (Moretti, 1968).

Sonuç olarak, w_1 -düzlemindeki $|w_1| < 1$ birim çemberinin, $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı düzlemine konform dönüşümü;

$$w = i \frac{1-z}{1+z} \quad (3.14)$$

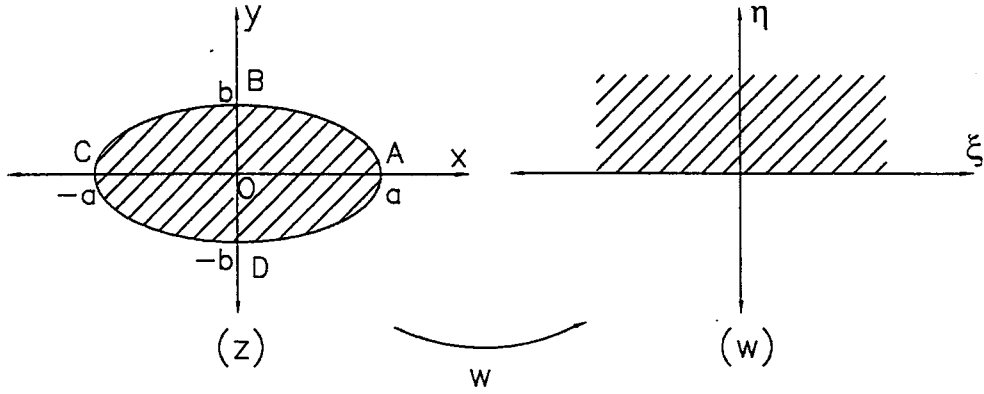
olarak bilindiğine göre (Spiegel, 1974; Sidorov ve ark., 1985). z -düzleminde seçilen elipsin w -düzlemindeki üst yarı düzleme konform dönüşümü (şekil 3.3);



Şekil 3.3. (3.13) ve (3.14) dönüşümleri.

$$w = i \frac{1 - m^{\frac{1}{4}} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{z}{c} \right)}{1 + m^{\frac{1}{4}} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{z}{c} \right)} \quad (3.15)$$

bulunmuş olur. Bulunan bileşke dönüşüm (3.15) Şekil 3.4'te görülmektedir.



Şekil 3.4. Elipsin üst yarı düzleme dönüşümü.

Burada

$$|OA| = a$$

$$|OB| = b$$

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}} = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)$$

$$c = a^2 - b^2 \quad \text{dir.}$$

3.2.2. Elips Bölge İçin Green Fonksiyonu

Kısım (2.6) da verilen Green fonksiyonuna göre D bölgesi, elips olarak alınırsa, bu bölge için Green fonksiyonunu tespit etme problemini, D bölgesini w-düzleminin üst yarısına tasvir eden bir analitik fonksiyonu tespit etme problemine indirgeyebiliriz (Hildebrand, 1952).

Üst yarı düzlem için Green fonksiyonu;

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{F(z) - F(\xi)}{F(z) - \overline{F(\xi)}} \right| = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \ln \left(\frac{F(z) - F(\xi)}{F(z) - \overline{F(\xi)}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ \frac{F(z) - F(\xi)}{F(z) - \overline{F(\xi)}} \cdot \frac{\overline{F(z) - F(\xi)}}{\overline{F(z) - \overline{F(\xi)}}} \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

dır (Hildebrand, 1952). Şimdi, (3.16) da (3.15)'i kullanalım. Burada,

$$F(z) = i \frac{1-u}{1+u} \quad u = m^{\frac{1}{4}} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{z}{c} \right)$$

$$F(\xi) = i \frac{1-v}{1+v} \quad v = m^{\frac{1}{4}} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{\xi}{c} \right)$$

olsun. Bu eşitlikler (3.16) da yazılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{F(z) - F(\xi)}{F(z) + F(\xi)} &= \frac{i \frac{1-u}{1+u} - i \frac{1-v}{1+v}}{i \frac{1-u}{1+u} + i \frac{1-v}{1+v}} = \frac{(1-u)(1+v) - (1-v)(1+u)}{(1+u)(1+v)} \\ &= \frac{(1+v-u-uv) - (1+u-uv-v)}{(1+u)(1+v)} \cdot \frac{(1+u)(1+\bar{v})}{1+\bar{v}-u-u\bar{v}+1+u-\bar{v}-u\bar{v}} \\ \frac{F(z) - F(\xi)}{F(z) + F(\xi)} &= \frac{(1+v-u-uv-1-u+uv+v)(1+\bar{v})}{(1+\bar{v}-u-u\bar{v}+1+u-\bar{v}-u\bar{v})(1+v)} \\ &= \frac{(2v-2u)(1+\bar{v})}{(2-2u\bar{v})(1+v)} = \frac{2(v-u)(1+\bar{v})}{2(1-u\bar{v})(1+v)} = \frac{(v-u)(1+\bar{v})}{(1-u\bar{v})(1+v)} \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde;

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F(z)} - \overline{F(\xi)}}{\overline{F(z)} + \overline{F(\xi)}} &= \frac{-i \frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}} + i \frac{1-\bar{v}}{1+\bar{v}}}{-i \frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}} - i \frac{1-\bar{v}}{1+\bar{v}}} = \frac{\frac{1-\bar{v}}{1+\bar{v}} - \frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}}}{-\left(\frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}} + \frac{1-\bar{v}}{1+\bar{v}} \right)} \\ &= \frac{(1-\bar{v})(1+\bar{u}) - (1-\bar{u})(1+\bar{v})}{(1+\bar{v})(1+\bar{u})} \cdot \frac{(1+\bar{u})(1+v)}{(1-\bar{u})(1+v) + (1-\bar{v})(1+\bar{u})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[1 + \bar{u} - \bar{v} - \bar{u}\bar{v} - (1 + \bar{v} - \bar{u} - \bar{u}\bar{v})](1 + \bar{v})}{(1 + \bar{v} - \bar{u} - \bar{u}\bar{v} + 1 + \bar{u} - \bar{v} - \bar{u}\bar{v})(1 + \bar{v})} \\
&= \frac{(1 + \bar{u} - \bar{v} - \bar{u}\bar{v} - 1 - \bar{v} + \bar{u} + \bar{u}\bar{v})(1 + \bar{v})}{(2 - 2\bar{u}\bar{v})(1 + \bar{v})} \\
&= \frac{(2\bar{u} - 2\bar{v})(1 + \bar{v})}{2(1 - \bar{u}\bar{v})(1 + \bar{v})} = \frac{2(\bar{u} - \bar{v})(1 + \bar{v})}{2(1 - \bar{u}\bar{v})(1 + \bar{v})} = \frac{(\bar{u} - \bar{v})(1 + \bar{v})}{(1 - \bar{u}\bar{v})(1 + \bar{v})}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak Green fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{4\pi} \log \left\{ \frac{(v-u)(1+\bar{v})}{(1-u\bar{v})(1+v)} \cdot \frac{\overline{(u-v)(1+v)}}{(1-\bar{u}\bar{v})(1+v)} \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi} \log \left\{ \frac{(v-u)\overline{(1+v)}}{(1-u\bar{v})} \cdot \frac{\overline{(u-v)}}{(1-\bar{u}\bar{v})(1+v)} \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi} \log \left\{ \frac{(v-u)\overline{(u-v)}}{(1-u\bar{v})(1-\bar{u}\bar{v})} \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi} \log \left\{ \frac{|v-u|^2}{|1-u\bar{v}|^2} \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi} \log \left\{ \left| \frac{v-u}{1-u\bar{v}} \right|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi} \cdot 2 \log \left| \frac{v-u}{1-u\bar{v}} \right|
\end{aligned}$$

$$G = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{v-u}{1-uv} \right|$$

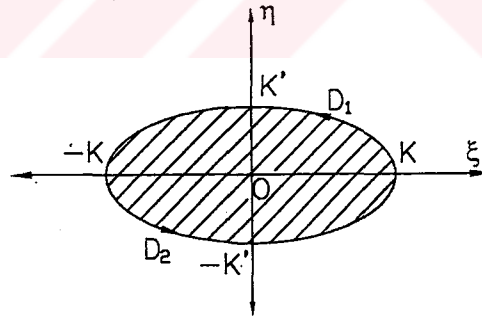
$$G = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{m^{\frac{1}{4}} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{\xi}{c} \right) - m^{\frac{1}{4}} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{z}{c} \right)}{1 - m^{\frac{1}{4}} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{z}{c} \right) m^{\frac{1}{4}} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{\xi}{c} \right)} \right| \quad (3.17)$$

olarak elde edilir.

3.2.3. Problemin Çözümü

(3.1) denkleminde, D bölgesi olarak kısım (3.2.1) de tanımlanan elips bölgeyi alalım. Bu kısımda elips bir bölgede Poisson ve Laplace diferansiyel denklemleri için Dirichlet probleminin eliptik fonksiyonlar cinsinden çözümü elde edilmiştir.

Buradaki D bölgesi Şekil 3.5'de görülmektedir.



Şekil 3.5. D bölgesi.

$\partial D = \partial D_1 + \partial D_2$ sınırı Şekil 3.5'de görülmektedir. Bu sınırı (3.2) çözümünde yerine koyarsak

$$U(z) = \int_{-K}^K \int_{-\frac{K'}{\sqrt{K^2-\xi^2}}}^{\frac{K'}{\sqrt{K^2-\xi^2}}} G(z, \zeta) h(\zeta) d\xi d\eta + \int_{\partial D} \frac{G(z, \zeta)}{\partial n} U_0(\zeta) d\zeta \quad (3.18)$$

olur.

Burada $\zeta = \xi + i\eta$,

$$G = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{m^{\frac{1}{4}} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{\xi}{c} \right) - m^{\frac{1}{4}} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{z}{c} \right)}{1 - m^{\frac{1}{4}} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{z}{c} \right) m^{\frac{1}{4}} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{\xi}{c} \right)} \right| \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial n} \quad \zeta \quad \text{ya göre } \partial D$$

sınırı boyunca normal türevi göstermektedir.

Laplace denklemi için Dirichlet probleminin (yani (3.1) formunda $h(z) = 0$ olması hali) sözkonusu elips bölgedeki çözümü;

$$\partial D : \frac{\xi^2}{K^2} + \frac{\eta^2}{K'^2} = 1 \quad \text{olduğundan,}$$

$$\eta = \pm \frac{K'}{K} \sqrt{K^2 - \xi^2}$$

$$d\eta = \pm \frac{K'}{K} \frac{-\xi}{\sqrt{K^2 - \xi^2}} d\xi$$

(3.19.a)

dır. Aynı şekilde,

$$\xi = \pm \frac{K}{K'} \sqrt{K'^2 - \eta^2}$$

$$d\xi = \pm \frac{K}{K'} \frac{-\eta}{\sqrt{K'^2 - \eta^2}} d\eta$$

(3.19.b)

olduğundan (3.19.a) ve (3.19.b) denklemleri, (3.18) denkleminde yazılırsa;

$$U(z) = - \int_{-K}^K \sqrt{G_{\xi}^2(z, \zeta) + G_{\eta}^2(z, \zeta)} U_0(\zeta) \Big|_{\eta=K'}^{K'} \frac{K'}{K} \frac{-\xi}{\sqrt{K^2 - \xi^2}} d\xi$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-K'}^{K'} \sqrt{G_{\xi}^2(z, \zeta) + G_{\eta}^2(z, \zeta)} U_0(\zeta) \Big|_{\xi=-K}^K \frac{K}{K'} \frac{-\eta}{\sqrt{K'^2 - \eta^2}} d\eta \\
& = \frac{K'}{K} \int_{-K}^K \sqrt{G_{\xi}^2(z, \zeta) + G_{\eta}^2(z, \zeta)} U_0(\zeta) \Big|_{\eta=-K'}^{K'} \frac{\xi}{\sqrt{K^2 - \xi^2}} d\xi \\
& - \frac{K}{K'} \int_{-K'}^{K'} \sqrt{G_{\xi}^2(z, \zeta) + G_{\eta}^2(z, \zeta)} U_0(\zeta) \Big|_{\xi=-K}^K \frac{\eta}{\sqrt{K'^2 - \eta^2}} d\eta \tag{3.19}
\end{aligned}$$

olur. Burada, $G(z, \xi)$ Green fonksiyonu eliptik fonksiyonlar cinsinden (3.17) ifadesi ile verilmiştir. $K(k)$ ve $K'(k)$ integral sınırları modüllü tam eliptik integrallerdir ve k ($0 < k < 1$) sabitinin verilen herhangi bir değeri için bellidirler; bunlar (Bryd ve Friedman, 1954) de verilen tablolardan hesaplanabilir.

BÖLÜM 4

UYGULAMA

Dikdörtgen ve elips bölgede Poisson ve Laplace diferansiyel denklemi için (iç) Dirichlet probleminin eliptik fonksiyonlar cinsinden çözümü 3. bölümde verildi. Bu bölümde, yöntemin pekişmesi açısından dikdörtgen bölgede Laplace diferansiyel denklemi için uygulama yapılmıştır.

Aşağıdaki koşulları sağlayan iki reel değişkenli U fonksiyonunu bulalım.

$$\begin{aligned} U_{xx}(x,y) + U_{yy}(x,y) &= 0 & (0 < x < K, \quad 0 < y < 2K) \\ U(x,0) = 0, \quad U(x,2K) &= 1 & (-K < x < K) \\ U(-K,y) = U(K,y) &= 0 & (0 < y < 2K) \end{aligned} \quad (4.1)$$

4.1. (4.1) Probleminin Eliptik Fonksiyonlar Cinsinden Çözümü

Bu kısımda (4.1) problemi, (3.12) fonksiyonu kullanılarak çözülecektir. Çözüm, $U(x,y)$ ile gösterilecektir.

$$\begin{aligned} U(z) &= - \int_{-K}^K [G_{\xi}^2(z,\zeta) + G_{\eta}^2(z,\zeta)]^{\frac{1}{2}} U_0(\zeta) \Big|_{\eta=0}^{2K} d\xi + \int_0^{2K} [G_{\xi}^2(z,\zeta) + G_{\eta}^2(z,\zeta)]^{\frac{1}{2}} U_0(\zeta) \Big|_{\xi=-K}^K d\eta \\ &= - \int_{-K}^K [G_{\xi}^2(x,y;\xi,2K) + G_{\eta}^2(x,y;\xi,2K)]^{\frac{1}{2}} U_0(\xi,2K) - [G_{\xi}^2(x,y;\xi,0) + G_{\eta}^2(x,y;\xi,0)]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad U_0(\xi,0) d\xi + \int_0^{2K} [G_{\xi}^2(x,y;K,\eta) + G_{\eta}^2(x,y;K,\eta)]^{\frac{1}{2}} U_0(K,\eta) \\ &\quad - [G_{\xi}^2(x,y;-K,\eta) + G_{\eta}^2(x,y;-K,\eta)]^{\frac{1}{2}} U_0(-K,\eta) d\eta \end{aligned}$$

Burada,

$$U_0(\xi,2K) = 1, \quad U_0(\xi,0) = 0, \quad U_0(K,\eta) = 0 \quad \text{ve} \quad U_0(-K,\eta) = 0$$

olur. Bu değerleri yukarıda yerlerine yazarsak;

$$U(z) = - \int_{-K}^K \left[G_{\xi}^2(x, y; \xi, 2K) + G_{\eta}^2(x, y; \xi, 2K) \right]^{\frac{1}{2}} d\xi \quad (4.2)$$

elde edilir.

Şimdi, çözümde gerekli olan bilgileri elde etmeye çalışalım. Green fonksiyonu

$$G = \frac{1}{2\pi} \ell n \left| \frac{\text{sn}z - \text{sn}\zeta}{\text{sn}z - \text{sn}\bar{\zeta}} \right|$$

olarak çıkarılmıştı.

$$\text{sn}z = \text{sn}(x + iy) = \frac{\text{sn}x \text{dn}y + i \text{cn}x \text{dn}x \text{sn}y \text{cn}y}{1 - \text{sn}^2 y \text{dn}^2 x}$$

$$\text{sn}\zeta = \text{sn}(\xi + i\eta) = \frac{\text{sn}\xi \text{dn}\eta + i \text{cn}\xi \text{dn}\xi \text{sn}\eta \text{cn}\eta}{1 - \text{sn}^2 \eta \text{dn}^2 \xi}$$

$$\text{sn}\bar{\zeta} = \text{sn}(\xi - i\eta) = \frac{\text{sn}\xi \text{dn}\eta - i \text{cn}\xi \text{dn}\xi \text{sn}\eta \text{cn}\eta}{1 - \text{sn}^2 \eta \text{dn}^2 \xi}$$

formülleri de kullanılarak,

$$G = \frac{1}{2\pi} \ell n \left| \frac{\frac{\text{sn}x \text{dn}y + i \text{cn}x \text{dn}x \text{sn}y \text{cn}y}{1 - \text{sn}^2 y \text{dn}^2 x} - \frac{\text{sn}\xi \text{dn}\eta + i \text{cn}\xi \text{dn}\xi \text{sn}\eta \text{cn}\eta}{1 - \text{sn}^2 \eta \text{dn}^2 \xi}}{\frac{\text{sn}x \text{dn}y + i \text{cn}x \text{dn}x \text{sn}y \text{cn}y}{1 - \text{sn}^2 y \text{dn}^2 x} - \frac{\text{sn}\xi \text{dn}\eta - i \text{cn}\xi \text{dn}\xi \text{sn}\eta \text{cn}\eta}{1 - \text{sn}^2 \eta \text{dn}^2 \xi}} \right|$$

$$G = \frac{1}{2\pi} \ell n \left| \frac{\left(\frac{\text{sn}x \text{dn}y}{1 - \text{sn}^2 y \text{dn}^2 x} - \frac{\text{sn}\xi \text{dn}\eta}{1 - \text{sn}^2 \eta \text{dn}^2 \xi} \right) + i \left(\frac{\text{cn}x \text{dn}x \text{sn}y \text{cn}y}{1 - \text{sn}^2 y \text{dn}^2 x} - \frac{\text{cn}\xi \text{dn}\xi \text{sn}\eta \text{cn}\eta}{1 - \text{sn}^2 \eta \text{dn}^2 \xi} \right)}{\left(\frac{\text{sn}x \text{dn}y}{1 - \text{sn}^2 y \text{dn}^2 x} - \frac{\text{sn}\xi \text{dn}\eta}{1 - \text{sn}^2 \eta \text{dn}^2 \xi} \right) + i \left(\frac{\text{cn}x \text{dn}x \text{sn}y \text{cn}y}{1 - \text{sn}^2 y \text{dn}^2 x} + \frac{\text{sn}\xi \text{dn}\xi \text{sn}\eta \text{cn}\eta}{1 - \text{sn}^2 \eta \text{dn}^2 \xi} \right)} \right|$$

elde edilir. Burada,

$$X = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \frac{\operatorname{sn} \xi \operatorname{dn} \eta}{1 - \operatorname{sn}^2 \eta \operatorname{dn}^2 \xi}$$

$$Y = \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \frac{\operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi \operatorname{sn} \eta \operatorname{cn} \eta}{1 - \operatorname{sn}^2 \eta \operatorname{dn}^2 \xi}$$

$$Z = \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} + \frac{\operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi \operatorname{sn} \eta \operatorname{cn} \eta}{1 - \operatorname{sn}^2 \eta \operatorname{dn}^2 \xi}$$

olsun.

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\pi} \ell n \left| \frac{X+iY}{X+iZ} \right| = \frac{1}{2\pi} \ell n \left| \frac{X^2 + iXY - iZX + ZY}{X^2 + Z^2} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \ell n \left| \frac{X^2 + ZY}{X^2 + Z^2} + i \frac{XY - ZX}{X^2 + Z^2} \right| = \frac{1}{2\pi} \ell n \sqrt{\frac{(X^2 + YZ)^2}{(X^2 + Z^2)^2} + \frac{X^2(Y-Z)^2}{(X^2 + Z^2)^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \ell n \left[\frac{(X^2 + YZ)^2}{(X^2 + Z^2)^2} + \frac{X^2(Y-Z)^2}{(X^2 + Z^2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \ell n \left[\frac{X^4 + 2X^2YZ + Y^2Z^2 + X^2(Y^2 - 2YZ + Z^2)}{(X^2 + Z^2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \ell n \left[\frac{X^4 + 2X^2YZ + Y^2Z^2 + X^2Y^2 - 2X^2YZ + X^2Z^2}{(X^2 + Z^2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \ell n \left[\frac{X^4 + Y^2Z^2 + X^2Y^2 + X^2Z^2}{(X^2 + Z^2)^2} \right] = \frac{1}{4\pi} \ell n \left[\frac{X^2(X^2 + Y^2) + Z^2(X^2 + Y^2)}{(X^2 + Z^2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \ell n \left[\frac{(X^2 + Y^2)(X^2 + Z^2)}{(X^2 + Z^2)^2} \right] = \frac{1}{4\pi} \ell n \left[\frac{X^2 + Y^2}{X^2 + Z^2} \right] \end{aligned}$$

olur; yani,

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{X^2 + Y^2}{X^2 + Z^2} \right]$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \xi} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{X^2 + Y^2}{X^2 + Z^2} \right)}{\frac{X^2 + Y^2}{X^2 + Z^2}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [X^2 + Y^2](X^2 + Z^2) - \frac{\partial}{\partial \xi} [X^2 + Z^2](X^2 + Y^2)}{(X^2 + Z^2)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \xi} (X^2) + \frac{\partial}{\partial \xi} (Y^2) \right] (X^2 + Z^2) - \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (X^2) + \frac{\partial}{\partial \xi} (Z^2) \right] (X^2 + Y^2)}{(X^2 + Z^2)^2} \frac{X^2 + Z^2}{X^2 + Y^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{X^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (X^2) + Z^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (X^2) + X^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (Y^2) + Z^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (Y^2) - X^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (X^2) - Y^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (X^2) - X^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (Z^2) - Y^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (Z^2)}{(X^2 + Z^2)(X^2 + Y^2)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{(Z^2 - Y^2) \frac{\partial}{\partial \xi} (X^2) + (X^2 + Z^2) \frac{\partial}{\partial \xi} (Y^2) - (X^2 + Y^2) \frac{\partial}{\partial \xi} (Z^2)}{(X^2 + Z^2)(X^2 + Y^2)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{2X(Z^2 - Y^2) \frac{\partial X}{\partial \xi} + 2Y(X^2 + Z^2) \frac{\partial Y}{\partial \xi} - 2Z(X^2 + Y^2) \frac{\partial Z}{\partial \xi}}{(X^2 + Z^2)(X^2 + Y^2)} \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\eta=2K} = \frac{1}{2\pi} \frac{X(Z^2 - Y^2) \frac{\partial X}{\partial \xi} + Y(X^2 + Z^2) \frac{\partial Y}{\partial \xi} - Z(X^2 + Y^2) \frac{\partial Z}{\partial \xi}}{(X^2 + Z^2)(X^2 + Y^2)} \right|_{\eta=2K} \quad (4.3)$$

yazılır. Aynı şekilde,

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=2K} = \frac{1}{2\pi} \frac{X(Z^2 - Y^2) \frac{\partial X}{\partial \eta} + Y(X^2 + Z^2) \frac{\partial Y}{\partial \eta} - Z(X^2 + Y^2) \frac{\partial Z}{\partial \eta}}{(X^2 + Z^2)(X^2 + Y^2)} \right|_{\eta=2K} \quad (4.4)$$

yazılabilir. (4.3) ve (4.4) için gerekli kısmi türevler bulunup yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \xi} &= \frac{cn\xi dn\xi dn\eta (1 - dn^2\xi sn^2\eta - 2k^2 sn^2\eta sn^2\xi)}{(1 - sn^2\eta dn^2\xi)^2} \\ \frac{\partial X}{\partial \xi} \Big|_{\eta=2K} &= -cn\xi dn\xi \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} &= \frac{sn\xi dn^2\xi sn\eta cn\eta (dn^2\xi sn^2\eta - 1) - k^2 sn\xi cn^2\xi sn\eta cn\eta (sn^2\eta dn^2\xi + 1)}{(1 - sn^2\eta dn^2\xi)^2} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} \Big|_{\eta=2K} &= 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial \xi} &= \frac{sn\xi dn^2\xi sn\eta cn\eta (dn^2\xi sn^2\eta - 1) - k^2 sn\xi cn^2\xi sn\eta cn\eta (sn^2\eta dn^2\xi + 1)}{(1 - sn^2\eta dn^2\xi)^2} \\ \frac{\partial Z}{\partial \xi} \Big|_{\eta=2K} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$$X \Big|_{\eta=2K} = \frac{\operatorname{sn}x \operatorname{dn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \operatorname{sn}\xi$$

$$Y \Big|_{\eta=2K} = \frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x}$$

$$Z \Big|_{\eta=2K} = \frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x}$$

$$(Z^2 - Y^2) \Big|_{\eta=2K} = 0$$

$$(X^2 + Z^2) \Big|_{\eta=2K} = \left(\frac{\operatorname{sn}x \operatorname{dn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \operatorname{sn}\xi \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \right)^2$$

$$(X^2 + Y^2) \Big|_{\eta=2K} = \left(\frac{\operatorname{sn}x \operatorname{dn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \operatorname{sn}\xi \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \right)^2$$

olur.

Şimdi bu bulunanlar (4.3) de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\eta=2K} = & \frac{1}{2\pi} \frac{\left(\frac{\operatorname{sn}x \operatorname{dn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \operatorname{sn}\xi \right) \cdot 0 \cdot (-\operatorname{cn}\xi \operatorname{dn}\xi)}{\left[\left(\frac{\operatorname{sn}x \operatorname{dn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \operatorname{sn}\xi \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \right)^2 \right]} \\ & + \frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \left[\left(\frac{\operatorname{sn}x \operatorname{dn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \operatorname{sn}\xi \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \right)^2 \right] \cdot 0 \\ & - \frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \left[\left(\frac{\operatorname{sn}x \operatorname{dn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \operatorname{sn}\xi \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \right)^2 \right] \cdot 0 \end{aligned}$$

=0

(4.5)

bulunur.

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} = -\frac{\operatorname{sn} \eta \operatorname{cn} \eta \operatorname{sn} \xi (-k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2 \eta \operatorname{dn}^2 \xi + 2 \operatorname{dn}^2 \eta \operatorname{dn}^2 \xi)}{(1 - \operatorname{sn}^2 \eta \operatorname{dn}^2 \xi)^2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} \Big|_{\eta=2K} = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \eta} = -\frac{(\operatorname{cn}^2 \eta \operatorname{dn} \eta \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi - \operatorname{sn}^2 \eta \operatorname{dn} \eta \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi)(1 - \operatorname{sn}^2 \eta \operatorname{dn}^2 \xi) + 2 \operatorname{sn}^2 \eta \operatorname{cn}^2 \eta \operatorname{dn} \eta \operatorname{dn}^3 \xi}{(1 - \operatorname{sn}^2 \eta \operatorname{dn}^2 \xi)^2}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \eta} \Big|_{\eta=2K} = -\operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta} = \frac{(\operatorname{cn}^2 \eta \operatorname{dn} \eta \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi - \operatorname{sn}^2 \eta \operatorname{dn} \eta \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi)(1 - \operatorname{sn}^2 \eta \operatorname{dn}^2 \xi) + 2 \operatorname{sn}^2 \eta \operatorname{cn}^2 \eta \operatorname{dn} \eta \operatorname{dn}^3 \xi}{(1 - \operatorname{sn}^2 \eta \operatorname{dn}^2 \xi)^2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta} \Big|_{\eta=2K} = \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi$$

Yukarıdaki eşitlikler (4.4) de yerlerine yazılarak (4.6) elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \operatorname{sn} \xi \right) \cdot 0.0 \\ & + \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \left[\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \operatorname{sn} \xi \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \right)^2 \right] (-\operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi) \\ & - \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \left[\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \operatorname{sn} \xi \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \right)^2 \right] \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi \\ \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=2K} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\left[\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \operatorname{sn} \xi \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \right)^2 \right]}{\left[\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \operatorname{sn} \xi \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \right)^2 \right]} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=2K} = -\frac{1}{\pi} \frac{\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \cdot \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi}{\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} - \operatorname{sn} \xi \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}{1 - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x} \right)^2} \quad (4.6)$$

Şimdi (4.5) ve (4.6)'yı (4.2) de yazalım.

$$\begin{aligned}
U(z) &= - \int_{-K}^K \left[\frac{1}{\pi} \frac{\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \cdot cn\xi \, dn\xi}{\left(\frac{snx \, dny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} - sn\xi \right)^2 + \left(\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} d\xi \\
&= - \int_{-K}^K \frac{1}{\pi} \frac{\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \cdot cn\xi \, dn\xi}{\left(\frac{snx \, dny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} - sn\xi \right)^2 + \left(\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \right)^2} d\xi \\
&= - \left[\int_{-K}^0 \frac{1}{\pi} \frac{\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \cdot cn\xi \, dn\xi}{\left(\frac{snx \, dny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} - sn\xi \right)^2 + \left(\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \right)^2} d\xi + \right. \\
&\quad \left. \int_0^K \frac{1}{\pi} \frac{\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \cdot cn\xi \, dn\xi}{\left(\frac{snx \, dny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} - sn\xi \right)^2 + \left(\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \right)^2} d\xi \right] \\
&= - \left[\int_{-K}^0 - \frac{1}{\pi} \frac{\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \cdot cn\xi \, dn\xi}{\left(\frac{snx \, dny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} - sn\xi \right)^2 + \left(\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \right)^2} d\xi + \right. \\
&\quad \left. \int_0^K \frac{1}{\pi} \frac{\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \cdot cn\xi \, dn\xi}{\left(\frac{snx \, dny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} - sn\xi \right)^2 + \left(\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \right)^2} d\xi \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-K}^0 \frac{\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \cdot cn\xi \, dn\xi}{\left(\frac{snx \, dny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} - sn\xi \right)^2 + \left(\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \right)^2} d\xi - \\
&\quad \frac{1}{\pi} \int_0^K \frac{\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \cdot cn\xi \, dn\xi}{\left(\frac{snx \, dny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} - sn\xi \right)^2 + \left(\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \right)^2} d\xi
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$U_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-k}^0 \frac{\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \cdot cn\xi \, dn\xi}{\left(\frac{snx \, dny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} - sn\xi \right)^2 + \left(\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \right)^2} d\xi \quad (4.8)$$

ve

$$U_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^k \frac{\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \cdot cn\xi \, dn\xi}{\left(\frac{snx \, dny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} - sn\xi \right)^2 + \left(\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \right)^2} d\xi \quad (4.9)$$

olmak üzere, (4.7) eşitliğini,

$U(z) = U_1(z) - U_2(z)$ şeklinde yazalım.

$\frac{snx \, dny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} - sn\xi = u$ olsun. Buradan $cn\xi \, dn\xi \, d\xi = -du$ bulunur.

Bu durumda,

$$U_1(z) = \frac{1}{\pi} \frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x} \int \frac{-du}{u^2 + \left(\frac{u}{\frac{cnx \, dnx \, sny \, cny}{1 - sn^2 y \, dn^2 x}} \right)^2}$$

olur. Aynı şekilde,

$$U_1(z) = -\frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2y \operatorname{dn}^2x} \int \frac{du}{\left[\left(\frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2y \operatorname{dn}^2x} \right)^2 \left(\frac{u}{\frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2y \operatorname{dn}^2x}} \right)^2 + 1 \right]}$$

bulunur. Burada,

$$\frac{u}{\frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2y \operatorname{dn}^2x}} = t \quad \text{ise} \quad du = \frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2y \operatorname{dn}^2x} dt \quad \text{dir.}$$

Bu bilgiler kullanılarak,

$$\begin{aligned} U_1(z) &= -\frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2y \operatorname{dn}^2x} \int \frac{\left(\frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2y \operatorname{dn}^2x} \right) dt}{t^2 + 1} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = -\frac{1}{\pi} \arctan t = -\frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{u}{\frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2y \operatorname{dn}^2x}} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{\frac{\operatorname{sn}x \operatorname{dny}}{1 - \operatorname{sn}^2y \operatorname{dn}^2x} - \operatorname{sn}\xi}{\frac{\operatorname{cn}x \operatorname{dn}x \operatorname{sn}y \operatorname{cn}y}{1 - \operatorname{sn}^2y \operatorname{dn}^2x}} \right) \Bigg|_{-K}^0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$\operatorname{sn}K = 1$ ve $\operatorname{sn}(-K) = -1$ değerleri kullanılır, gerekli işlemler yapılır ve aynı şekilde

$U_2(z)$ de hesaplanırsa,

$$-K < x \leq 0 \quad \text{ve} \quad y = 0 \quad \text{iken} \quad \begin{cases} -1 < \operatorname{sn}x \leq 0 \\ 0 < \operatorname{sn}x + 1 \leq 1 \\ -2 < \operatorname{sn}x - 1 \leq -1 \end{cases} \quad \text{olduğundan,}$$

$$U(z) = \frac{1}{\pi} \left[\begin{aligned} & -2 \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dny}}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cny}}\right) - \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dny} - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x + 1}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cny}}\right) \\ & + \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dny} + \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x - 1}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cny}}\right) \end{aligned} \right] \quad (4.10)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$0 \leq x < K \quad \text{ve} \quad y = 0 \quad \text{iken} \quad \begin{cases} 0 \leq \operatorname{sn} x < 1 \\ 1 \leq \operatorname{sn} x + 1 < 2 \\ -1 \leq \operatorname{sn} x - 1 < 0 \end{cases} \quad \text{olduğundan,}$$

$$U(z) = \frac{1}{\pi} \left[\begin{aligned} & 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dny}}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cny}}\right) - \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dny} - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x + 1}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cny}}\right) \\ & + \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dny} + \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x - 1}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cny}}\right) \end{aligned} \right] \quad (4.11)$$

bulunur. Diğer yandan,

$$-K \leq x \leq K \quad \text{ve} \quad 0 < y \leq 2K \quad \text{iken}$$

$$U(z) = \frac{1}{\pi} \left[\begin{aligned} & 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dny}}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cny}}\right) - \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dny} - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x + 1}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cny}}\right) \\ & - \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dny} + \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x - 1}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cny}}\right) \end{aligned} \right] \quad (4.12)$$

bulunur. Bütün bu işlemlerin sonucunda fonksiyon aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$U(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[\begin{array}{l} -2 \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}\right) - \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x + 1}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}\right) + \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y + \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x - 1}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}\right) \end{array} \right], & -K < x \leq 0, \quad y = 0 \text{ ise} \\ \\ \frac{1}{\pi} \left[\begin{array}{l} 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}\right) - \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x + 1}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}\right) + \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y + \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x - 1}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}\right) \end{array} \right], & K < x \leq 0, \quad y = 0 \text{ ise} \\ \\ \frac{1}{\pi} \left[\begin{array}{l} 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}\right) - \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y - \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x + 1}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}\right) - \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} y + \operatorname{sn}^2 y \operatorname{dn}^2 x - 1}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}\right) \end{array} \right], & -K < x \leq K, \quad 0 < y \leq 2K \text{ ise} \end{cases} \quad (4.13)$$

4.2. (4.1) Probleminin Değişkenlere Ayırma Metoduyla Çözümü

Bu kısımda (4.1) problemi, değişkenlerine ayırma metodu kullanılarak çözülecektir.

Çözüm $V(x,y)$ ile gösterilecektir:

$$V(x,y) = X(x).Y(y) \quad (4.14)$$

Burada $X(x)$, $Y(y)$ sırasıyla x ve y 'nin fonksiyonları olup bunları hesaplamaya çalışacağız. Bu sebeple bu metoda değişkenlere ayırma metodu adı verilmektedir.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = X'' Y \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = X Y''$$

$$X'' Y + Y'' X = 0 \Rightarrow -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

$$\Rightarrow X'' + \lambda X = 0, \quad Y'' - \lambda Y = 0$$

$$X'' + \lambda X = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda \quad m = \pm i\sqrt{\lambda}$$

(4.15)

$$X = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$X(K) = A \cos \sqrt{\lambda} K + B \sin \sqrt{\lambda} K = 0$$

(4.16)

$$X(-K) = A \cos \sqrt{\lambda} K - B \sin \sqrt{\lambda} K = 0$$

(4.17)

(4.16) ve (4.17) toplanır

$$2A \cos \sqrt{\lambda} K = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \text{bulunur. Buradan da,}$$

$$X = B \sin \sqrt{\lambda} x \quad \text{bulunur.}$$

$$X(K) = 0 \quad \text{olmasını tekrar kullanırsak} \quad B \sin \sqrt{\lambda} K = 0,$$

$$B \neq 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} K = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{K} \Rightarrow \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{K^2} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{K} x$$

(4.18)

elde edilir. Aynı şekilde,

$$Y'' - \lambda Y = 0 \Rightarrow m^2 = \lambda \quad m = \pm \sqrt{\lambda} \quad \text{denklemini için,}$$

$$Y_n(y) = C_n \cosh \frac{n\pi}{K} y + D_n \sinh \frac{n\pi}{K} y \quad (4.19)$$

bulunur. Bulunanlar (4.14) de yerine yazılırsa,

$$V_n(x, y) = B_n \sin \frac{n\pi}{K} x (C_n \cosh \frac{n\pi}{K} y + D_n \sinh \frac{n\pi}{K} y) \quad \text{elde edilir.}$$

$V_n(x, 0) = 0$ sınır şartı kullanılarak,

$$B_n \sin \frac{n\pi}{K} x (C_n \cosh \frac{n\pi}{K} 0 + D_n \sinh \frac{n\pi}{K} 0) \quad \text{ifadesi, buradan da}$$

$$B_n \sin \frac{n\pi}{K} x C_n = 0 \Rightarrow B_n \neq 0 \Rightarrow C_n = 0 \quad \text{değerleri bulunur.}$$

$$V_n(x, y) = B_n \sin \frac{n\pi}{K} x D_n \sinh \frac{n\pi}{K} y \quad \text{veya kısaca ,}$$

$$V_n(x, y) = E_n \sin \frac{n\pi}{K} x \sinh \frac{n\pi}{K} y \quad (4.20)$$

eşitliği ya da,

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi}{K} x \sinh \frac{n\pi}{K} y \quad (4.21)$$

yazılabilir. Daha sonra aşağıdaki işlemler yardımıyla

$$-K < x < K \quad 2L = 2K \Rightarrow L = K$$

$$V(x, 2K) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi}{K} x \sinh \frac{n\pi}{K} 2K = f(x) = 1$$

$$E_n = \frac{1}{K} \frac{1}{\sinh \frac{n\pi 2K}{K}} \int_{-K}^K 1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{K} dx$$

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{K} \frac{1}{\sinh 2n\pi} \left(\frac{-2K}{n\pi} \right) \left[\cos \frac{n\pi}{K} x \right]_0^K \\ &= -\frac{1}{K} \frac{2K}{\sinh(2n\pi) \cdot n\pi} \left[\cos \frac{n\pi}{K} K - 1 \right] \\ &= -\frac{2}{n\pi \sinh(2n\pi)} (\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $n = 2k \Rightarrow E_n = 0$, $n = 2k - 1 \Rightarrow E_k = \frac{4}{(2k - 1)\pi \sinh(2(2k - 1))}$

olur. Sonuç olarak E_n değeri (4.21) 'de yerine yazılırsa

$$V(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k - 1} \frac{\sinh \frac{(2k - 1)\pi x}{K}}{\sinh(2(2k - 1)\pi)} \sin \frac{(2k - 1)\pi y}{K} \right) \quad (4.22)$$

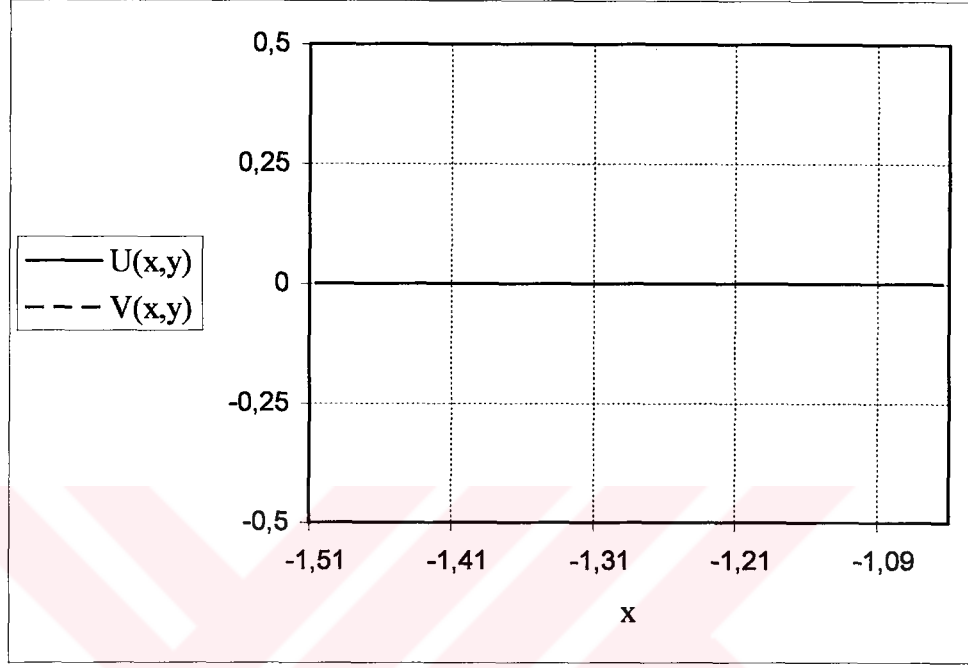
bulunur.

4.3. Bulunan Çözümlerin Karşılaştırılması

Bu bölümde (4.1) problemi için her iki yöntemle bulunan çözümler karşılaştırılmıştır. Burada, Dirichlet probleminin eliptik fonksiyonlar cinsinden çözümünü $U(x, y)$, değişkenlerine ayırma metoduyla çözümünü ise $V(x, y)$ ifade etmektedir.

Tablo 4.1. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin ($-K < x < 0$, $y = 10^{-10}$)'e göre sonuçları

x	y	U(x,y)	V(x,y)
-1.50	10^{-10}	8.940×10^{-10}	-1.359×10^{-10}
-1.49	10^{-10}	6.923×10^{-10}	-1.728×10^{-10}
-1.47	10^{-10}	5.647×10^{-10}	-2.095×10^{-10}
-1.45	10^{-10}	4.763×10^{-10}	-2.459×10^{-10}
-1.43	10^{-10}	4.112×10^{-10}	-2.819×10^{-10}
-1.41	10^{-10}	3.612×10^{-10}	-3.174×10^{-10}
-1.39	10^{-10}	3.214×10^{-10}	-3.524×10^{-10}
-1.37	10^{-10}	2.890×10^{-10}	-3.869×10^{-10}
-1.35	10^{-10}	2.621×10^{-10}	-4.208×10^{-10}
-1.33	10^{-10}	2.392×10^{-10}	-4.540×10^{-10}
-1.31	10^{-10}	2.195×10^{-10}	-4.864×10^{-10}
-1.29	10^{-10}	2.024×10^{-10}	-5.182×10^{-10}
-1.27	10^{-10}	1.873×10^{-10}	-5.491×10^{-10}
-1.25	10^{-10}	1.738×10^{-10}	-5.791×10^{-10}
-1.23	10^{-10}	1.618×10^{-10}	-6.082×10^{-10}
-1.21	10^{-10}	1.509×10^{-10}	-6.364×10^{-10}
-1.19	10^{-10}	1.410×10^{-10}	-6.636×10^{-10}
-1.17	10^{-10}	1.319×10^{-10}	-6.897×10^{-10}
-1.15	10^{-10}	1.234×10^{-10}	-7.147×10^{-10}
-1.13	10^{-10}	1.157×10^{-10}	-7.386×10^{-10}
-1.11	10^{-10}	1.084×10^{-10}	-7.614×10^{-10}
-1.09	10^{-10}	1.016×10^{-10}	-7.829×10^{-10}
-1.07	10^{-10}	9.513×10^{-11}	-8.032×10^{-10}
-1.05	10^{-10}	8.905×10^{-11}	-8.222×10^{-10}
-1.03	10^{-10}	8.327×10^{-11}	-8.400×10^{-10}
-1.02	10^{-10}	8.047×10^{-11}	-8.484×10^{-10}

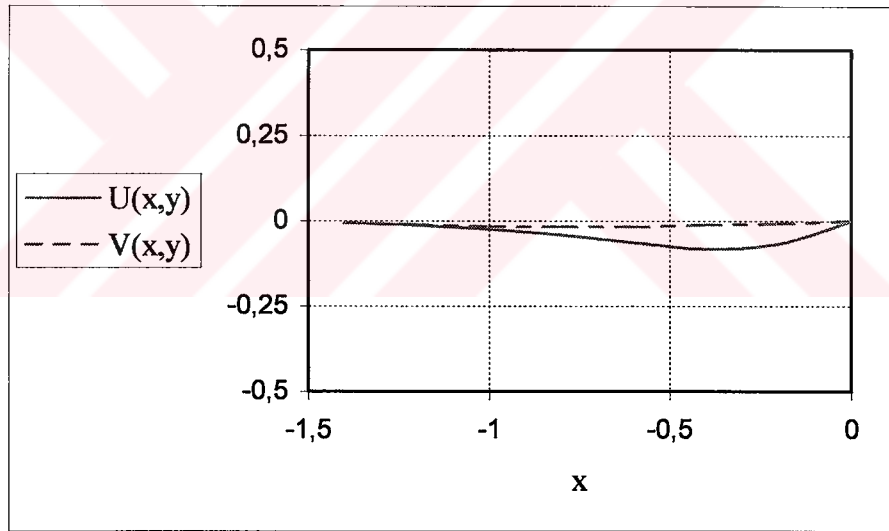


Şekil 4.1. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(-K < x < 0, y = 10^{-10})$ 'e göre değişimi.

Tablo 4.1'de bölgenin negatif alt kenarı $(-K < x < 0, y = 10^{-10})$ üzerindeki değerler incelenmiştir. $U(x,y)$ fonksiyonunda paydanın sıfır olması hesaplamalarda problem yaratacağı için y değeri için sıfır yerine sıfıra çok yakın olan 10^{-10} değeri alınmıştır. Tablodaki değerler Şekil 5.1 'de grafik üzerinde gösterilmiştir. Tablo ve grafik incelendiğinde her iki yöntemle bulunan değerlerin birbirleriyle neredeyse çakıştıkları açıkça görülmektedir.

Tablo 4.2. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(-K < x < 0, y = 1)$ 'e göre sonuçları

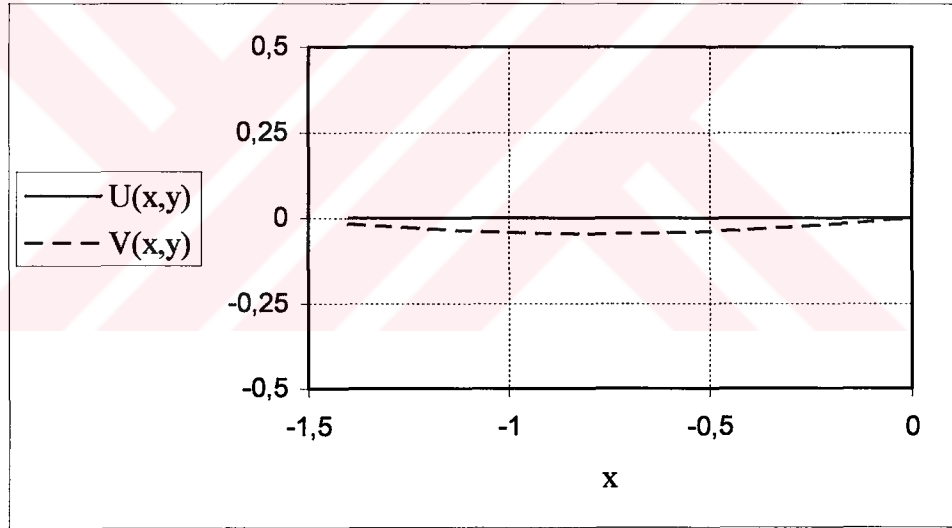
x	y	U(x,y)	V(x,y)
-1.4	1	-0.006	-0.006
-1.2	1	-0.014	-0.012
-1.0	1	-0.025	-0.016
-0.8	1	-0.041	-0.017
-0.6	1	-0.064	-0.016
-0.4	1	-0.083	-0.012
-0.2	1	-0.068	-0.007
0	1	0	0

Şekil 4.2. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(-K < x < 0, y = 1)$ 'e göre değişimi.

Tablo 4.2'de bölge içerisinde $(-K < x < 0, y = 1)$ üzerindeki değerler incelenmiştir. Tablodaki değerler Şekil 4.2 'de grafik üzerinde gösterilmiştir. Tablo ve grafik incelendiğinde her iki yöntemle bulunan değerlerin birbirlerine çok yakın oldukları anlaşılmaktadır.

Tablo 4.3. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin ($-K < x < 0, y = 1.5$)' e göre sonuçları

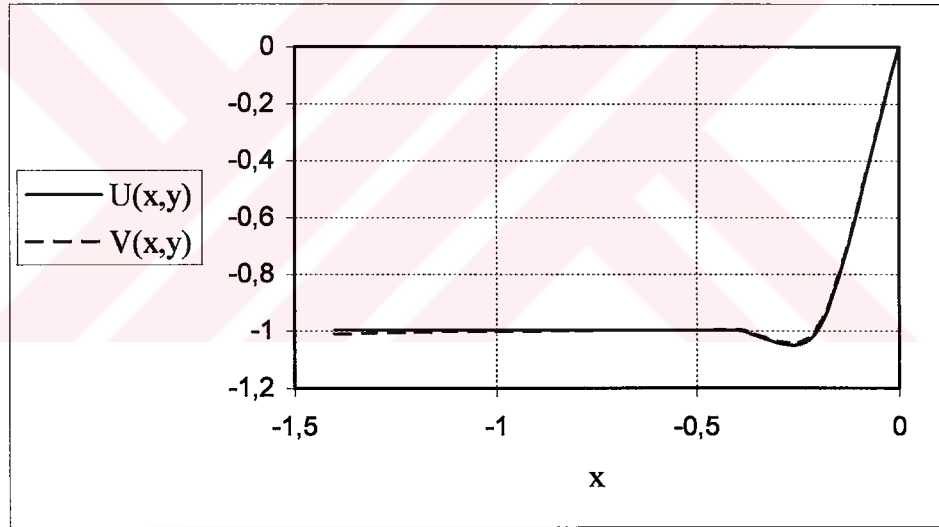
x	y	$U(x,y)$	$V(x,y)$
-1.4	1.5	-1.201×10^{-10}	-0.017
-1.2	1.5	-2.452×10^{-10}	-0.032
-1.0	1.5	-3.582×10^{-10}	-0.043
-0.8	1.5	-4.643×10^{-10}	-0.047
-0.6	1.5	-5.992×10^{-10}	-0.043
-0.4	1.5	-9.310×10^{-10}	-0.033
-0.2	1.5	-2.904×10^{-10}	-0.018
0	1.5	0	0

Şekil 4.3. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin ($-K < x < 0, y = 1.5$)' e göre değişimi.

Tablo 4.3'te bölge içerisinde ($-K < x < 0, y = 1.5$) üzerindeki değerler incelenmiştir. Tablodaki değerler Şekil 4.3'te grafik üzerinde gösterilmiştir. Tablo ve grafik incelendiğinde her iki yöntemle bulunan değerlerin birbirlerine çok yakın oldukları anlaşılmaktadır.

Tablo 4.4. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(-K < x < 0, y = 3.166)$ ' e göre sonuçları

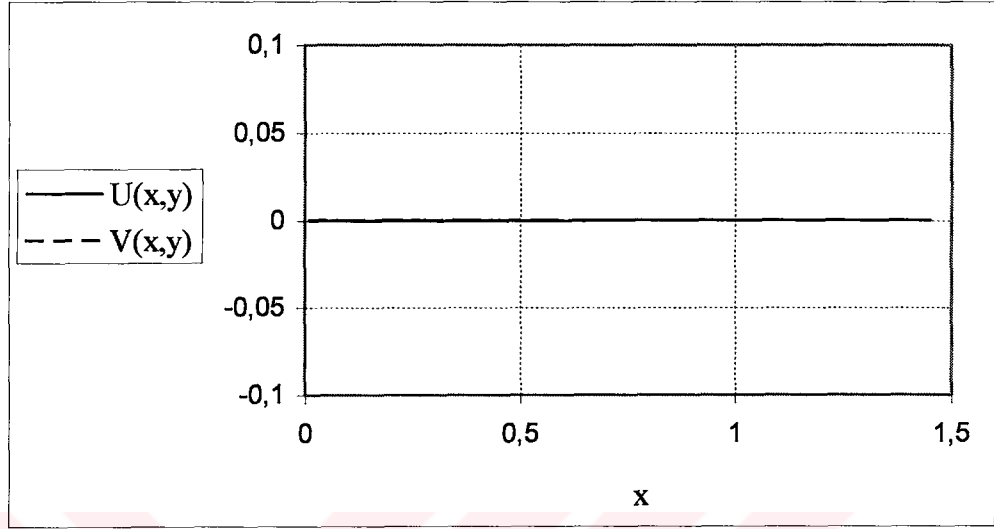
x	y	U(x,y)	V(x,y)
-1.4	3.166	-995	-1.012
-1.2	3.166	-998	-1.004
-1	3.166	-998	-1.001
-0.8	3.166	-998	-0.999
-0.6	3.166	-998	-0.997
-0.4	3.166	-998	-0.994
-0.2	3.166	-996	-0.986
0	3.166	-1.094×10^{-13}	-3.239×10^{-14}

Şekil.4.4. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(-K < x < 0, y = 3.166)$ ' e göre değişimi.

Tablo 4.4'te bölgenin üst kenarı $(-K < x < 0, y = 3.166)$ üzerindeki değerler incelenmiştir. Tablodaki değerler Şekil 4.4'te grafik üzerinde gösterilmiştir. Tablo ve grafik incelendiğinde her iki yöntemle bulunan değerlerin neredeyse çakıştıkları görülmektedir.

Tablo 4.5. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin ($0 < x < K, y = 10^{-10}$)'e göre sonuçları

x	y	U(x,y)	V(x,y)
0.01	10^{-10}	-6.302×10^{-9}	1.873×10^{-14}
0.10	10^{-10}	-5.705×10^{-10}	1.861×10^{-13}
0.19	10^{-10}	-2.661×10^{-10}	3.476×10^{-13}
0.28	10^{-10}	-1.551×10^{-10}	4.980×10^{-13}
0.37	10^{-10}	-9.579×10^{-11}	6.325×10^{-13}
0.46	10^{-10}	-5.744×10^{-11}	7.470×10^{-13}
0.55	10^{-10}	-2.926×10^{-11}	8.376×10^{-13}
0.64	10^{-10}	-6.383×10^{-12}	9.016×10^{-13}
0.73	10^{-10}	1.383×10^{-11}	9.369×10^{-13}
0.82	10^{-10}	3.313×10^{-11}	9.424×10^{-13}
0.91	10^{-10}	5.301×10^{-11}	9.178×10^{-13}
1.00	10^{-10}	7.507×10^{-11}	8.641×10^{-13}
1.09	10^{-10}	1.016×10^{-10}	7.829×10^{-13}
1.18	10^{-10}	1.363×10^{-10}	6.767×10^{-13}
1.27	10^{-10}	1.873×10^{-10}	5.491×10^{-13}
1.36	10^{-10}	2.750×10^{-10}	4.039×10^{-13}
1.45	10^{-10}	4.763×10^{-10}	2.459×10^{-13}

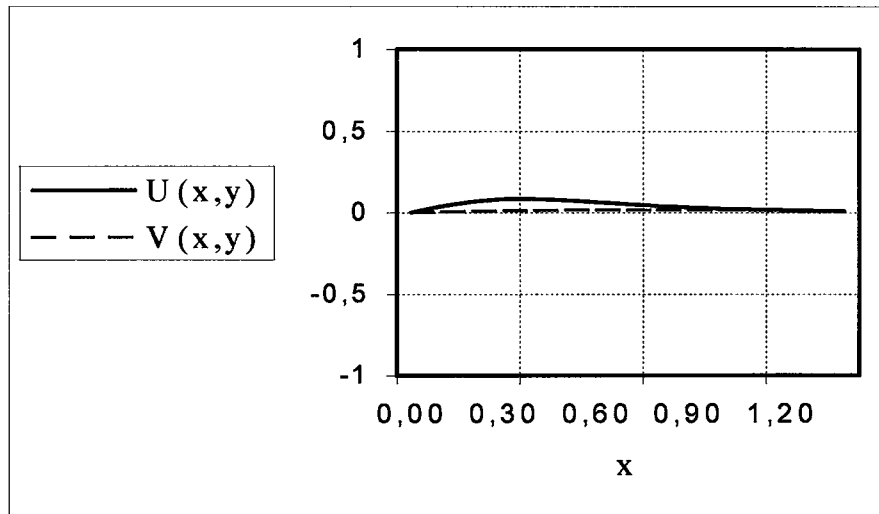


Şekil 4.5. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin ($0 < x < K, y = 10^{-10}$)'e göre değişimi.

Tablo 4.5'te bölgenin pozitif alt kenarı ($0 < x < K, y = 10^{-10}$) üzerindeki değerler incelenmiştir. U fonksiyonunda paydanın sıfır olması hesaplamalarda problem yaratacağı için y değeri için sıfır olmayan ama sıfıra çok yakın olan 10^{-10} değeri alınmıştır. Tablodaki değerler Şekil 4.5'te grafik üzerinde gösterilmiştir. Tablo ve grafik incelendiğinde her iki yöntemle bulunan değerlerin neredeyse çakıştıkları görülmektedir.

Tablo 4.6. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin ($0 < x < K$, $y = 1$) 'e göre sonuçları

x	y	$U(x,y)$	$V(x,y)$
0	1	0	0
0.1	1	0.039	0.003
0.2	1	0.068	0.007
0.3	1	0.083	0.010
0.4	1	0.083	0.012
0.5	1	0.075	0.014
0.6	1	0.064	0.016
0.7	1	0.052	0.017
0.8	1	0.041	0.017
0.9	1	0.032	0.017
1.0	1	0.025	0.016
1.1	1	0.019	0.014
1.2	1	0.014	0.012
1.3	1	0.010	0.009
1.4	1	0.006	0.006

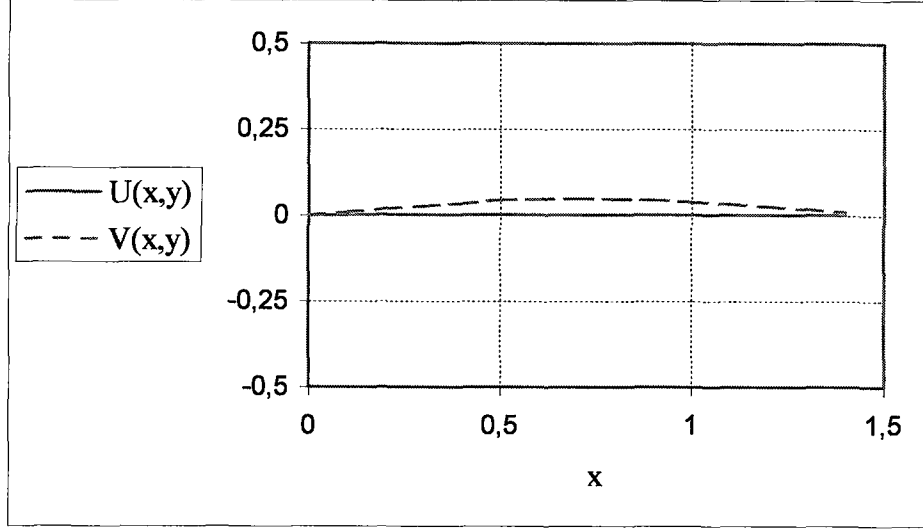
Şekil 4.6. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin ($0 < x < K$, $y = 1$) 'e göre değişimi.

Tablo 4.6'da bölge içerisinde ($0 < x < K$, $y = 1$) üzerindeki değerler incelenmiştir. Tablodaki değerler Şekil 4.6'da grafik üzerinde gösterilmiştir. Tablo ve grafik

incelendiğinde her iki yöntemle bulunan değerlerin birbirlerine çok yakın hatta bazı noktalarda eşit oldukları görülmektedir.

Tablo 4.7. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin ($0 < x < K$, $y = 1.5$)'e göre sonuçları

x	y	U(x,y)	V(x,y)
0	1.5	0	0
0.1	1.5	8.877×10^{-4}	0.009
0.2	1.5	2.904×10^{-4}	0.018
0.3	1.5	1.424×10^{-4}	0.026
0.4	1.5	9.310×10^{-5}	0.033
0.5	1.5	7.155×10^{-5}	0.039
0.6	1.5	5.992×10^{-5}	0.043
0.7	1.5	5.234×10^{-5}	0.046
0.8	1.5	4.643×10^{-5}	0.047
0.9	1.5	4.110×10^{-5}	0.045
1.0	1.5	3.582×10^{-5}	0.043
1.1	1.5	3.032×10^{-5}	0.038
1.2	1.5	2.452×10^{-5}	0.032
1.3	1.5	1.840×10^{-5}	0.025
1.4	1.5	1.201×10^{-5}	0.017
1.5	1.5	5.456×10^{-5}	0.008

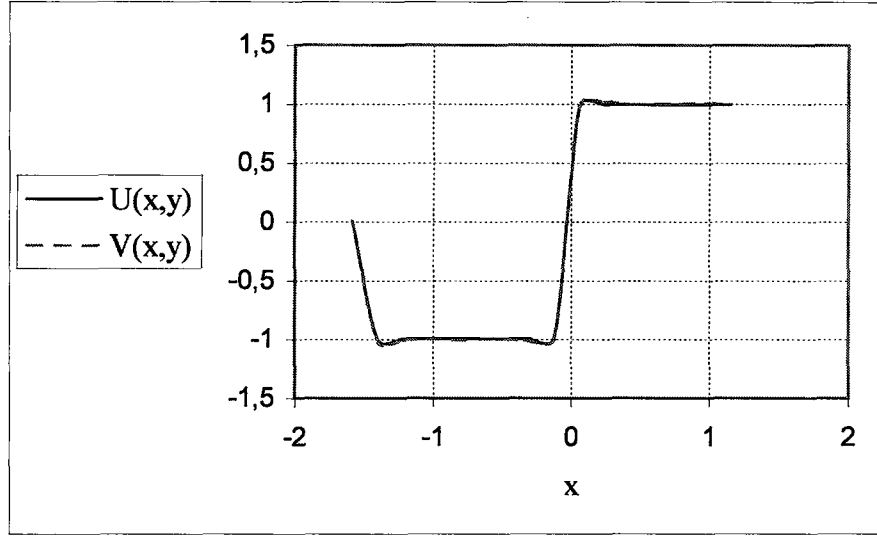


Şekil 4.7. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin ($0 < x < K$, $y = 1.5$)'e göre değişimi.

Tablo 4.7'de bölge içerisinde ($0 < x < K$, $y=1.5$) üzerindeki değerler incelenmiştir. Tablodaki değerler Şekil 4.7'de grafik üzerinde gösterilmiştir. Tablo ve grafik incelendiğinde her iki yöntemle bulunan değerlerin birbirlerine çok yakın oldukları görülmektedir.

Tablo 4.8. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(-K < x < K, y=3.166)$ 'e göre sonuçları

x	y	U(x,y)	V(x,y)
-1.583	3.166	0.002	$-9.535.10^{-15}$
-1.4	3.166	-0.995	-1.012
-1.217	3.166	-0.998	-1.004
-1.034	3.166	-0.998	-0.994
-0.852	3.166	-0.998	-1.006
-0.669	3.166	-0.998	-1
-0.486	3.166	-0.998	-0.995
-0.303	3.166	-0.997	-1.012
-0.121	3.166	-0.993	-0.991
0.062	3.166	-0.987	0.975
0.245	3.166	-0.997	1.015
0.428	3.166	0.998	0.995
0.611	3.166	0.998	0.999
0.793	3.166	0.998	1.006
0.976	3.166	0.998	0.995
1.159	3.166	0.998	1.002
1.342	3.166	0.996	1.011
1.524	3.166	0.985	0.95



Şekil 4.8. $U(x,y)$ ve $V(x,y)$ 'nin $(-K < x < K, y = 3.166)$ 'e göre değişimi.

Tablo 4.8'de bölgenin alt kenarı $(-K < x < K, y = 3.166)$ incelenmiştir. Tablodaki değerler Şekil 4.8'de grafik üzerinde gösterilmiştir. Tablo ve grafik incelendiğinde her iki yöntemle bulunan değerlerin birbirlerine çok yakın oldukları rahatça anlaşılmaktadır.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, Laplace (aynı zamanda Poisson) diferansiyel denkleminin (iç) Dirichlet problemi, dikdörtgen ve elips bölgeler için çözülmüş ve dikdörtgen bölgede (iç) Dirichlet problemine bir uygulama verilerek yöntem pekiştirilmiştir.

Bölüm 2’de, problemin çözümüne ilişkin temel kavramlar olan eliptik fonksiyonlar, eliptik integraller, konform dönüşüm, Riemann dönüşüm teoremi ve Green fonksiyonu hakkında bilgi verilmiştir.

Bölüm 3’de, reel ve kompleks düzlemde, önce Schwarz-Christoffel ve bazı konform dönüşümler kullanılarak, z-düzlemindeki bir dikdörtgen bölgeyi w-düzlemindeki birim çembere dönüştüren fonksiyon eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmiş ve bu dönüşüm fonksiyonu ile Green fonksiyonu arasında bağlantı kurularak dikdörtgen bölge için Dirichlet probleminin çözümü eliptik fonksiyonlara dayandırılmıştır. Daha sonra elipsin üst yarı düzleme dönüşümünü elde etmek için, elipsin içinin çemberin içine dönüşümü ile birim çemberin içinin üst yarı düzleme dönüşümünün bileşkesi alınmıştır. Dönüşüm fonksiyonu eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmiş ve Green fonksiyonu ile arasında bağlantı kurularak elips bölge için Dirichlet probleminin çözümü eliptik fonksiyonlara dayandırılmıştır. Dönüşümlerin çıkarılması şekillerle de desteklenmiştir. Bunlar yapılırken; eliptik fonksiyonlar, eliptik integraller, konform dönüşüm, Riemann dönüşüm teoremi ve Green fonksiyonları ile ilgili temel kavramlardan yararlanılmıştır.

Bölüm 4’de, Dirichlet probleminin eliptik fonksiyonlar cinsinden çözümüne ilişkin bir uygulama verilmiştir. Bu uygulama, değişkenlere ayırma metodu kullanılarak da çözülmüştür. Böylece çıkan sonuçları karşılaştırmak mümkün olmuştur. Karşılaştırma yapılırken, Mathcad bilgisayar paket programından yararlanılmıştır. Bulunan hassas sonuçların ne denli tutarlı olduğu tablo ve grafiklerle de gösterilmiştir.

Bu çalışmada, kullandığımız yöntemin en önemli avantajı, sonucun eliptik fonksiyonlar cinsinden elde edilmesidir çünkü bazı fizik ve mühendislik problemlerinde çözümün eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmesi uygulamada kolaylıklar sağlamaktadır. Bu yöntemin dezavantajı ise, istenilen bölgedeki Laplace (aynı zamanda

Poisson) diferansiyel denkleminin (iç) Dirichlet probleminin çözümü için gerekli olan Green fonksiyonu ile eliptik fonksiyonların integralleri ve türevlerinin bulunmasının zorluğudur. Bu her zaman çok kolay olmayabilir. Bu gibi durumlarda (Bryd, 1954; Cayley, 1961) kaynaklarından yararlanılabilir.

Bundan sonraki çalışmalarda, dikdörtgenin ve elipsin dışı ile üçgen ve çokgen gibi benzer bölgelerdeki Laplace (aynı zamanda Poisson) diferansiyel denkleminin Dirichlet problemi eliptik fonksiyonlar cinsinden çözülerek fizik ve mühendislikteki bu tip problemlerin çözümlerine katkı sağlanabilir.



KAYNAKLAR

- AIYAMA, R., AKUTAGAWA, K. (2002). "The Dirichlet problem at infinity for harmonic map equations arising from constant mean curvature surface in the hyperbolic 3-space," **Calculus of Variations**, [399-428].
- BABUSKA, I., CHELOBUN, J. (2002). "Effects of uncertainties in the domain on the solution of Dirichlet boundary value problems," **Numerische Mathematik**.
- BOAS, R.P. (1987). **Invitation to Complex Analysis**, The Random House, New York.
- BROVAR, V.V., KOPEIKINA, Z.S., PAVLOVA M.V (2001). "Solution of the Dirichlet and Stokes exterior boundary problems for the Earth's ellipsoid," **Journal of Geodesy**, [767-772].
- BRYD, P.F. and FRIEDMAN, M.D. (1954). **Handbook of Elliptic Integrals of Engineers and Physicists**, Springer-Verlag, Berlin.
- CAYLEY, A.(1961). **Elliptic Function**, Dover Pub., Inc., New York.
- CHEN, Z.Q., WILLIAMS, R.J., ZHAO, Z. (1999). "On the existence of positive solutions for semilinear elliptic equations with singular lower order coefficients and Dirichlet boundary conditions," **Mathematische Annalen**, [735-769].
- CHURCHILL, R.V. (1963). **Fourier Series and Boundary Value Problems**, McGraw-Hill Koyakusha.
- CHURCHILL, R.V. **Complex Variables and Applications**, Mc. Graw-Hill Book Company, Inc.
- GARABEDIAN, P.R. (1964). **Partial Differential Equations**, John Wiley and Sons, New York.
- GREENSPAN, D. (1961). **Partial Differential Equations**, McGraw-Hill Book Company.
- HAUSER, A.A. JR. (1971). **Complex Variables With Physical Applications**, Simon and Schuster, New York.
- HILDEBRAND, F.B. (1952). **Methods of Applied Mathematics**, Prentice-Hall, Inc. New Jersey
- HILDEBRAND, F.B.(1976). **Advanced Calculus for Applications**, Prentice-Hall Inc.
- KHOROMSKIJ, B.N.K, SCHMIDT, G. (1998). "A fast interface solver for the biharmonic Dirichlet problem on polygonal domains," **Numerische Mathematik**, [577-596].
- KREIDER, D.L., KULLER, R.G., OSTBERG D.R. (1966). F.W.Perkins, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Ontario.
- LANZARA, F. (1998). "Numerical approximation of eigenvalues and of Green's operator for an elliptic boundary value problem," **Calcolo**, [63-92].
- LEVY, H., LESSMAN, F. (1959). **Finite Difference Equations**.
- LUMER, G., SCHNAUBELT R. (2001). "Time-dependent parabolic problems on non- cylindrical domains with inhomogeneous boundary conditions," **Journal of Evolution Equations**, [291-309].

- MARSDEN, J.E. (1975). **Basic Complex Analysis**, University of California, Berkeley.
- MARSHAKOV, A., WIEGMANN P., ZABRODIN A. (2002). "Integrable Structure of the Dirichlet Boundary Problem in Two Dimensions," **Communications in Mathematical Physics**, [131-153].
- MARTINEC, Z., GRAFAREND E.W. (1997). "Construction of Green's function to the external Dirichlet boundary-value problem for the Laplace equation on an ellipsoid of revolution," **Journal of Geodesy**, [562-570].
- MILNE-THOMSON, L.M. (1950). **Jacobian Elliptic Functions Tables**, Dover Publications, New York.
- MORETTI, G. (1968). **Functions of a Complex Variable**, New Delhi.
- PROTTER, M.H. MORREY JR, C.B. (1964). **Modern Mathematical Analysis**, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. London.
- RAINVILLE, E.D., BEDIENT, P.E. (1969). **Elementary Differential Equations**, MacMillan Company, New York.
- SEZER, M. (1992). "Solution Of Dirichlet Problem In Terms Of Elliptic Functions," **Yıldız Üniversitesi Dergisi**, [1-4].
- SIDOROV, Y.V. FERORYUK, M.V. SHABUNIN, M.I. (1985). **Lectures on the Theory of Functions of Complex Variable**, Mir Pub. (Ing. trans), Moskow.
- SPIEGEL, M.R. (1974). **Complex Variables**, Mc Graw-Hill Company.
- STILLWELL, J. (1989). **Mathematics and Its History**, Springer-Verlag New York.
- SVESHNIKOV, A.G. and TIKHONOV, A.N. (1982). **The Theory of Functions of a Complex Variables**, Mir Pub. (Ing. trans), Moskow.
- VLADIMIROV, V.S. (1984). **Equations of Mathematical Physics**, Mir Pub. (Ing. trans), Moskow.
- WANG, W. (1997). **Inversion formula of Dirichlet polynomials and the approximate functional equation of Dirichlet's L-functions**, *Archiv der Mathematik*, [305-312].