T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
BİLİM DALI MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK PROGRAMININ TEMEL ÖGELERİ ÇERÇEVESİNDE ÖĞRENCİLERİN İSPAT KAVRAMINA YÖNELİK MATEMATİKSEL BİLGİLERİNİ NASIL DÜZENLEDİKLERİNİN SÖYLEM ÇÖZÜMLEMESİ İLE BELİRLENMESİ

Işıkhan UĞUREL

İzmir
2010

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
BİLİM DALI MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK PROGRAMININ TEMEL ÖGELERİ ÇERÇEVESİNDE ÖĞRENCİLERİN İSPAT KAVRAMINA YÖNELİK MATEMATİKSEL BİLGİLERİNİ NASIL DÜZENLEDİKLERİNİN SÖYLEM ÇÖZÜMLEMESİ İLE BELİRLENMESİ

Işıkhan UĞUREL

Danışman
Yrd. Doç. Dr. H. Sevgi MORALI

İzmir
2010

YEMİN

Doktora tezi olarak sunduğum "Ortaöğretim Matematik Programının Temel Ögeleri Çerçevesinde Öğrencilerin İspat Kavramına Yönelik Matematiksel Bilgilerini Nasıl Düzenlediklerinin Söylem Çözümlemesi İle Belirlenmesi" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurulmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynak dizininde gösterilenlerden oluştuğunu, bu eserlere atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

11/06 /2010

Işıkhan UĞUREL

YÜKSEKÖĞRETİM KURULU DOKÜMANTASYON MERKEZİ TEZ VERİ FORMU

Tez No: **Konu No:** **Üniv. Kodu:**

***Not: Bu bölüm merkezimiz tarafından doldurulacaktır.**

Tezin yazarının

Soyadı: UĞUREL **Adı:** Işıkhan

Tezin Türkçe Adı: Ortaöğretim Matematik Programının Temel Ögeleri Çerçevesinde Öğrencilerin İspat Kavramına Yönelik Matematiksel Bilgilerini Nasıl Düzenlediklerinin Söylem Çözümlemesi İle Belirlenmesi.

Tezin Yabancı Dildeki Adı: Determining How Students Arrange Their Mathematical Knowledge about the Concept of Proof in the Frame of the Main Components of the Secondary Mathematics Curriculum with the Discourse Analysis

Tezin yapıldığı

Üniversite: Dokuz Eylül Üniversitesi **Enstitü**: Eğitim Bilimleri Enstitüsü **Yılı**: 2010

Tezin Türü:

1-Yüksek Lisans
2-Doktora (**X**)
3-Sanatta Yeterlilik

Dili: Türkçe
Sayfa sayısı: 222
Referans sayısı: 245

Tez Danışmanının

Unvanı: Yrd. Doç. Dr. **Adı**: H. Sevgi **Soyadı**: MORALI

Türkçe anahtar kelimeler

1. Söylem
2. Söylem Çözümlemesi
3. İspat, İspatlama
4. Sistemik Fonksiyonel Dilbilgisi
5. Matematik Eğitimi

İngilizce anahtar kelimeler

1. Discourse
2. Discourse Analysis
3. Proof, Proving
4. Systemic Functional Grammar
5. Mathematics Education

TEŞEKKÜR

Uzun ve farklı deneyimlerle dolu bir sürecin sonunda ortaya çıkan bu çalışma matematik ve dil arasındaki ilişkilere ve bağlantılara yönelik kişisel merakımdan doğmuş ve bazı evrimler geçirerek bugünkü haline gelmiştir. Başlangıçtan buyana istekle yürüttüğüm bu çalışmanın tamamlanmasında bana destek veren ve yardımlarını esirgemeyen kişilerin katkıları büyüktür.

En başta, var oluşumu sağlayan, öğrenim hayatımın, meslek hayatımın ve aile hayatımın tüm aşamalarında koşulsuz ve sınırsız sevgilerini, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli annem Güler UĞUREL ve babam Yusuf UĞUREL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eşim olmaya karar verip benimle hayatını birleştirdiği ilk günden beri hayatıma kattığı artan sevgi ve anlamın manevi gücü dışında tez çalışmamın her aşamasında gösterdiği sabır ve anlayış için, araştırmama yönelik uzun ve zevkli tartışmalarımız esnasında benimle fikir ve düşünceleri paylaşarak ve onları sonuna kadar savunarak söylem çözümlemesine yönelik öğrenme ve anlama kapasitemin derinleşmesine büyük katkı yaptığı için sevgili eşim Özlem UĞUREL'e çok teşekkür ederim.

Doğumu ile yaşamımıza bambaşka boyutlar, güzellikler ve mutluluk getirerek bu çalışmanın tamamlanmasına yönelik çok büyük bir duygusal güç ve motivasyon sağlayan canım kızım Ela UĞUREL'e babası olma şansını bana verdiği için çok teşekkür ederim.

Akademik anlamda sahip olduğum bilgi, beceri ve davranışlarımın oluşmasında ve şekillenmesinde lisans öğrenimimin ilk yıllarının başlayarak bu güne kadar uzanan süreçte büyük payı olan Buca Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'ndaki sevgili hocalarımın hepsine teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmada yer almayı kabul ederek beni sınıflarında misafir eden ve veri toplama aşamasının tamamında yardımsever ve anlayışlı yaklaşımlarıyla sürecin sağlıklı ve verimli geçmesinde katkıları olan derslerini gözlemlediğim matematik ve geometri öğretmenleri ile sınıftaki 13 öğrenciye çok teşekkür ederim.

Son olarak yaptığım çalışmayı yardımları, görüşleri, önerileri ve eleştirileriyle şekillendiren ve bu alanda bilgi ve araştırma deneyimi edinmemde yardımcı olan danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. H. Sevgi MORALI'ya çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Tablolar Listesi

Şekiller Listesi

Ekler Listesi

ÖZET

Ortaöğretim Matematik Programının Temel Ögeleri Çerçevesinde Öğrencilerin İspat Kavramına Yönelik Matematiksel Bilgilerini Nasıl Düzenlediklerinin Söylem Çözümlemesi İle Belirlenmesi

Işıkhan UĞUREL

Bu araştırmada, ortaöğretim öğrencilerinin ispat kavramına yönelik bilgilerini sınıf içi iletişime dayalı olarak nasıl düzenlediklerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla, öğrencilerin sınıf içi iletişim süreçlerinde var olan söylemlerinden yararlanılmıştır. Nitel araştırma paradigmasına dayalı bir özel durum çalışması olarak tasarlanan bu araştırmanın örneklemi bir özel fen lisesinin 11. sınıfında öğrenim görmekte olan 13 öğrenci ve bu sınıfın matematik ve geometri derslerini yürüten 2 öğretmenden (toplam 15 kişi) oluşmaktadır. Veriler, bahar döneminde yaklaşık üç ay süresince yapılan matematik ve geometri derslerinin video kayıtları ve araştırmacının alan notlarından oluşmaktadır. Yaklaşık üç ay boyunca toplam 53 ders video ile kaydedilmiştir. Araştırmada, özellikle öğretmen-öğrenci arasında var olan sınıf içi sözel söylemlere odaklanılmış ve video ile kaydı yapılan söz konusu söylemler yazıya aktarılarak analizleri gerçekleştirilmiştir. Bu araştırma tasarımı, ele aldığı sorular, veri toplama ve yapılan analiz biçimi itibariyle bir nitel söylem çözümleme çalışmasıdır. Araştırmanın kuramsal çerçevesi, öğrenmeyi ele alış biçimi açısından sosyokültürel yaklaşıma, söylemlerin bağlamsal bir zeminde belli bir bütünlük içerisinde ele alınarak incelenmesi açısından da edimbilime dayanmaktadır. Veriler üzerinde yapılan söylem çözümlemesi için belirlenen kodlama sistemi, Halliday ve Hasan'ın (1989) Sistemik Fonksiyonel Dilbilgisi olarak isimlendirilen çalışmaları çerçevesinde geliştirdikleri *söylemin alanı, söylemin katılımcıları ve söylemin stilini* içeren üçlü modelden oluşmaktadır. Yapılan söylem çözümlemesi sonucunda ortaya çıkan bulgular, öğrencilerin ispata yönelik öğrenmelerinde ve bilgiyi yapılandırmalarında öğretmenleri ile aralarında var olan sınıf içi söylemlerin önemli etkisi olduğunu göstermiştir. Öğrenci ve öğretmen söylemlerinin analizleri aracılığıyla elde edilen bulgular öğrencilerde, ispatın ne olduğuna, ispata yönelik

temel kavramların terimsel ve kavramsal olarak anlamlandırılmasına, ispat yapma yöntemlerine, ispat yapma mekanizmasının neyi içerdiğine ve nasıl uygulandığının algılanmasına ilişkin bazı bilgi eksikliklerinin ve yanılgıların bulunduğunu ve ispat yapma yaklaşımlarının da sınırlılıklar içerdiğini ortaya çıkarmıştır.

Anahtar Sözcükler: Söylem, Söylem Çözümlemesi, İspat, İspatlama, Sistemik Fonksiyonel Dilbilgisi, Matematik Eğitimi

ABSTRACT

Determining How Students Arrange Their Mathematical Knowledge about the Concept of Proof in the Frame of the Main Components of the Secondary Mathematics Curriculum with Discourse Analysis

Işıkhan UĞUREL

The purpose of this study is to determine how secondary school students arrange their mathematical knowledge about the concept of proof on the basis of communication in the classroom. Therefore, the discourse employed by the students in the processes of communication in the classroom has been taken into consideration. The study, which can be described as a specific case study based on the qualitative research paradigm, has a sample of 15 people consisting of 13 eleventh-year students from a private science high school and their mathematics and geometry teachers. The data include the three-month video recordings of both mathematics and geometry classes, and the researcher's field notes. The number of the recorded lessons in this period is 53. The spoken discourse between the teachers and the students has been especially focused on, and the analysis has been realised on the transcription obtained from these video recordings. A detailed analysis has been done by means of a coding system chosen from the relevant literature. It is a qualitative discourse analysis study in terms of its design, questions, style of data collection and analysis. The theoretical frame of the study is based on the socio-cultural learning approach and pragmatics. The coding system is Halliday and Hasan's triadic model developed in the Systemic Functional Grammar and includes the field of discourse, the tenor of discourse and the mode of discourse. The findings have indicated that the classroom discourse has an important effect on the students' learning and constructing knowledge in relation to proof. Using teacher and student talk it has been observed that there are some shortcomings and restrictions about the definition of proof, the meanings of basic terms and concepts of proof, and the perception of the mechanism of proving.

Key Words: Discourse, Discourse Analysis, Proof, Proving, Systemic Functional Linguistics, Mathematics Education.

BÖLÜM I

GİRİŞ

Matematik bireylerde sadece yaratıcı düşünme, problem çözme, sorgulama, yorumlama, soyutlama ve genelleme gibi becerilerinin gelişimini sağlayan bir çalışma alanı değil aynı zamanda güçlü bir iletişim aracıdır. Sahip olduğu kendine has (sözcüksel, sembolik ve simgesel) sistematik yapısı matematiğin uluslararası bir dil formu olarak kabul edilmesini sağlamıştır. Bu dil belki de gerçek anlamda evrensel olma yönü ile var olan tek dildir. Matematiğin dil ile olan çok boyutlu ilişkisi ve kendi dilsel kimliğine yönelik var olan ilgiler sadece matematik alanında değil felsefe, psikoloji, sosyoloji, dilbilim, eğitim bilim ve matematik eğitimi gibi geniş bir disiplin çeşitliliği içerisinde önemli araştırma konularından birini oluşturmuştur. Matematiğin bireylerin ve toplumların gelişimlerindeki artan rolü ve önemi dikkate alındığında bu doğal bir durumdur. Dil ve matematik arasındaki ilişkilerin boyutlandırılarak irdelenmesi hem matematiğin yapısı, güzellikleri ve yaşama etki etmedeki bazı gizemlerini anlama ve yorumlamada, hem de her düzeyde daha nitelikli matematik eğitimi-öğretimi yapabilmede bakış açılarımızın zenginleşmesine ve derinleşmesine olanak sağlamaktadır. Dilin kendi başına varoluşla, düşünmeyle, anlamayla, öğrenmeyle ve bireyin sosyal bir canlı olabilmesiyle ilgili en temel olguların başında geldiği kabul edilmektedir. Matematik öğrenme-öğretme sürecindeki dilin işlevlerinin ve bir formal dilin matematik öğrenmedeki etkilerinin incelenmesi, matematik yapmanın, matematiği anlamanın ve öğrenmenin nasıl gerçekleştiğine ve nasıl daha iyi hale getirilebileceğine, matematiksel düşüncenin mekanizmalarının araştırılmasına yönelik zengin bir kuramsal yaklaşım ve metodoloji çerçevesi sağlamaktadır. Vygotsky konuşma eyleminin temel amacının iletişim kurmak olduğunu ve iletişimi mümkün kılan dilin de bir düşünme aracı olduğunu belirtmiştir (Ergün ve Özsüer, 2006). İletişim çağı olarak adlandırılan bu çağ hem bireysel hem de bireylerin belli sosyal yapılar içerisinde başkalarıyla sağlıklı ve gelişimci bir toplumsal iletişim kurma becerisini gerekli kılmaktadır. Günümüzde iletişime yönelik bakış açılarındaki genişleme ve derinleşme ile oluşan iletişimi yeniden ele alış biçimi, eğitim-öğretim sürecinde de kendini göstermiş ve öğrenme ortamlarında var olan iletişim biçimlerini ve onların öğrenme ve anlama üzerine etkilerini, odaklanılan konuların ön sıralarına taşımıştır. Alan eğitimi literatüründe özellikle matematik eğitimi alanında iletişime yönelik ilgi ve dikkatin hızla arttığı görülmektedir. Hiebert ve ark. (1998) öğrencilerin ancak kendi bilgilerine yönelik ilişkileri ve bağlantıları kurabildiklerinde matematiksel anlamayı gerçekleştirebileceklerini iddia ederek, *iletişimi* söz konusu ilişkisel anlamayı sağlamadaki en önemli anahtar bileşen olarak tanımlamaktadır (aktaran Steele, 2001). Dolayısıyla matematikle dil arasındaki ilişkiler ağı içerisinde matematiksel öğrenme, anlama ve kavramayı iletişim perspektifinden ele almak ve incelemek yararlı ve gerekli hale gelmiştir. İletişimi incelemenin yöntemlerini ve kuramsal kaynağını dil, psikoloji ve sosyoloji gibi disiplinlerin sunduğu geniş bilgi bankasından sağlamak mümkündür. Sosyal bilimler alanı dili ve ona dayalı iletişim sürecini araştırmada, sadece belirli bir disipline ait ayrıntılı bilgiler sunmakla kalmayıp bunun yanı sıra bazı disiplinler arası özgün yaklaşımlardan yararlanılmasına da imkân sağlamaktadır. Bu alanlardan biri de söylem çözümlemesidir. Söylem çözümlemesi (**SÇ**) ikinci bölümde ayrıntılı olarak görülebileceği üzere bir kuramsal çerçeve, bir nitel araştırma yöntemi, belirli adımları ve kendine has sistematiği olan bir araştırma izlencesi, birçok yaklaşımı içine alan disiplinler arası bir bilim/alt disiplin ve kullanılan dili çeşitli açılardan analiz etmeyi mümkün kılan bir takım analitik yaklaşımlar bütünü olarak ifade edilebilir. SÇ'nin sosyal bilimler içerisindeki yaygın kullanımı ve evrimi iletişimi, inceleme alanlarının baş sıralarına yerleştiren ve iletişim kurmayı matematik öğretiminde kazandırılması hedeflenen temel beceriler içerisinde tanımlayan günümüz matematik eğitimi alanında da SÇ'nin kullanılmasını mümkün kılmıştır. Henüz yeni bir alan olmasına karşın söylemi ve onu analiz etmeyi içeren matematik eğitimi çalışmalarının (ikinci bölümde görüleceği üzere) çeşidi ve sayısındaki artışın hızlı olduğu görülmektedir. Ancak bu çalışmalar içerisinde iletişim açısından açıdan okul sınıflarındaki söylemleri ve onların analizleri yoluyla ispat ve ispatlamaya yönelik öğrenmeleri, anlamaları, becerileri vb inceleme konusu yapan çok az araştırmanın bulunduğu görülmektedir. İspat ve ispatlama hem matematiksel düşünmenin (ve tabi ileri matematiksel düşünmenin) geliştirilmesinde hem de matematik yapmada, matematiksel bilginin yapısını, doğasını, tarihsel gelişimini kavramada, matematiksel nesnelerin türlerini, geliştirilme yollarını, bireyler ve toplumlarca ne şekilde paylaşıldığını algılamada merkezi bir öneme sahiptir. Bu bilinç çerçevesinde matematik eğitimindeki reform hareketleri kapsamında okul matematiği içerisinde ispatın daha zengin bir içerikte ve öğretilme biçiminin çok daha geniş ve derinleşen bir yapıda ele alındığı görülmektedir. Reform hareketleri sonrası pek çok matematik öğretim programı, standartlar ve prensipler içerisinde ispatın tüm öğretim kademeleri için öngörülen ve öğretilmesi istenen temel bir alan olarak ele alındığı gözlenmektedir. Benzer şekilde akademik olarak matematik eğitimi literatürü içerisinde de ispat ve ispatlamaya yönelik (sayı ve çeşitlilik açısından) oldukça geniş bir çalışma alanının var olduğu ve bu alanın ilerleyişini artan bir ivme ile sürdürdüğü gözlenmektedir. Bugün matematik eğitimi alanında uluslararası düzeyde sadece ispat ve ispatlamayı konu edinen bilimsel organizasyonların (örn. ICMI Study-19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education-2009) yapılmaya başlaması bunun en önemli göstergelerinden biri olarak kabul edilebilir.

Bu çalışma, ispat ve ispatlamaya yönelik var olan literatür ışığında iletişimi odağa alarak, dilbilimsel bir zeminde bir SÇ uygulamasını gerçekleştirerek gerek ülkemiz gerekse uluslararası düzeyde matematik eğitimi alanında çalışanlara yararlı bilgiler sağlamayı, ispat ve ispatlamaya yönelik araştırma literatüründeki boşluğun doldurulmasına ve özellikle ispat ve ispatlamaya ilişkin ülkemizdeki öğretim anlayışının geliştirilmesine yönelik katkı yapmayı amaçlamaktadır.

Araştırmanın problem durumuna geçmeden önce tez içerisinde yer alan bölümler ve bölümlerin içerdiği konulara ilişkin kısa bir özet sunulacaktır.

Giriş bölümünden sonra ikinci bölümde (ilgili yayınlar ve araştırmalar kısmı) ilk olarak matematik eğitiminde etkili olan çağdaş (iki) öğrenme kuramlarına yönelik bir (bilgi-yorum) özeti sunulmaktadır. Bu bölüm aracılığıyla sosyokültürel kurama ve bu kuramın dili ele alış biçimine yönelik bir giriş yapılmaktadır. Sonraki kısımda dil ile anlam, iletişim ve düşünme kavramları arasındaki bağlantılar ve ilişkilere değinilmektedir. Daha sonra matematik, matematik eğitimi ve dil arasındaki ilişkiler ayrıntılı biçimde tartışılmakta ve tartışmanın son aşamasında SÇ'ye geçiş yapılmaktadır. Bu bölüm ayrıntılı olarak birkaç başlık içerisinde söylem ve SÇ alanında sosyal bilimlere ait (özellikle dilbilim) literatürden elde edilen ayrıntılı bilgileri içermektedir. Bu bölümde sunulan başlıklar; '*söylem ve bağlam*', '*söylem çözümlemesi (nedir?)*', '*SÇ'nin dilbilime bağlı gelişimine kısa bir bakış'* biçiminde sıralanmaktadır. Bu başlıklar altında söylem ve SÇ'ye yönelik sunulan bilgiler ışığında bir sonraki bölümde matematik eğitimi literatüründe söylemin ve SÇ'nin ele alınış biçimi ve yapılan araştırmalara dair genel bir bakış resmedilmektedir. Bu amaçla matematik eğitimi alanında söylemi ve onun analizini içeren araştırmalar beş başlık altında gruplandırılarak sunulmaktadır. Beşinci grupta yer alan araştırmalar hakkında bilgi verilmeden önce bu grubun başlığını oluşturan Sosyal Göstergebilim, ve onun altında Halliday & Hasan (1989) tarafından geliştirilen "Sistemik Fonksiyonel Dilbilgisi'ne [SFD]" yönelik ayrıntılı bilgiler sunulmaktadır. Bunun nedeni bu tez çalışmasında gerekleştirilen SÇ için kodlama çerçevesi olarak SFD'nin seçilmiş olmasıdır. SFD üç bileşenli bir modeldir. Bu bileşenler *söylemin alanı, söylemin katılımcısı* ve *söylemin stilidir*. Söylemin alanı söylemde gerçekleşen şeyin ne olduğu ve söylemi barındıran sosyal eylemin doğası ile ilglidir. Söylemin katılımcısı söylemin oluşmasını ve paylaşımını sağlayan katılımcıların rolleri, statüleri ve ilişkileri içermektedir. Söylemin stili ise söylemin bağlam içerisindeki işlevini ve söylemdeki dil ile gerçekleştirilmek istenen şeyi, dilin rolünü kapsar. Bir sonraki bölümde ispat ve ispatlama konusu ele alınmaktadır. Yazar bu bölümü iki boyutta sunmaktadır. İlk boyut literatürde ispata yönelik yoğunlaşılmış olan temel çalışma konularını ve bu konulara yönelik araştırma bulgularından kısa derlemeleri içermektedir. İkinci boyut ise öğretim programları ve standartlar çerçevesinde okul matematiği içerisinde ispat ve ispatlamanın gelişimini ele alan kısa tarihsel bir panoramayı kapsamaktadır. Bu bölümün bitiminde yazar ülkemizdeki şu an uygulamada olan yeni (2005'de uygulamaya konan) ve bir önceki (1992' de uygulamaya konan) matematik dersi öğretim programları üzerinde yaptığı inceleme çerçevesinde ispat ve ispatlamanın ortaöğretim matematik öğretiminde ne şekilde ele alındığına yönelik bilgileri ve tespitlerini sunmaktadır. Böylece araştırmanın yöntemine kadar olan kısım tamamlanmış olmaktadır. Yöntem bölümünde ise *nitel araştırma paradigması altında bir metodolojik izlence olarak SÇ, araştırmanın örneklemi, veri toplama araç ve yöntemleri* gibi bilgilerin yanında *kuramsal çerçeve* yer almakta olup bu bölümde araştırmanın dayandığı iki kuramsal alana ait bilgiler betimlenmektedir. Bunlardan ilki sosyokültürel yaklaşım, ikincisi ise edimbilimdir.

Araştırmada, sosyokültürel yaklaşım öğrenmeyi ele alış biçimi ve onu geliştirmeye yönelik çabalarda benimsenen düşünceleri, edimbilim ise fonksiyonel dilbilim temelinde yapılan SÇ'nin bağlam ve anlam arasındaki ilişkiye yönelik sunduğu bilgileri içermektedir.

Problem Durumu

Matematik eğitimi alan yazınında iletişime ve matematik ile dil arasındaki etkileşim alanlarına yönelik çok sayıda araştırma olmasına karşın bunların büyük bir kısmının ilköğretim seviyesinde olduğu ve sosyodilbilimsel anlamda özellikle SÇ'yi içeren az sayıda araştırmanın bulunduğu görülmektedir. Var olan sınırlı sayıdaki araştırmada ise matematik sınıflarındaki genel söylemler ele alınmaktadır. Eğitimciler ve araştırmacılar SÇ'nin araştırmacılara çeşitli sınıf içi öğretim metinlerindeki çok kompleks bölümlere hakim olma olanağı sağladığını (Meyer & Turner, 2002) ifade etmektedir. SÇ kabaca, (farklı biçimlerde de olsa) söylemi, işlevi açısından incelemeye dönük yaklaşımların genel bir adlandırması; kullanılan dilin yakından incelenmesidir (Taylor, 2001). Dolayısıyla matematik öğretimi sürecinde var olan söylemlerin analizleri yoluyla matematiksel konu ya da kavramların algılanmasına ve var olan yanılgıların ortaya çıkarılmasına yönelik derinlemesine bilgiler elde etmek mümkündür. Söz konusu bilgiler gerek öğretmen eğitimi gerekse ortaöğretim matematik öğretiminin niteliğinin arttırılmasına da katkı sağlayacaktır. Literatürde matematik ve dil ilişkisine yönelik çok sayıda araştırma bulunmaktadır. Dil ve dile dayalı çalışmaların, özellikle 1990'ların sonundan itibaren, dilin yapısal ve dilbilgisel özelliklerinden daha çok dilin sosyal yapılar içerisindeki kullanımına ve ona dayalı anlam üretme sistemlerine odaklandığı görülmektedir. Bu tür bir yönelim, dilin daha çok iletişimdeki işlevsel fonksiyonları yardımıyla zihinsel yapıları anlama ve incelemeye dönük disiplinler arası çalışma alanlarının doğmasına zemin oluşturmuştur. Bu gelişmelerden etkilenen matematik eğitimi alanında da geçmişte matematiğin formal bir dil formu olarak kendi sembolik, göstergesel ve simgesel yapısını incelemeyi amaçlayan çalışmalar çoğunlukta iken bugün matematik öğrenme-öğretmenin gerçekleştirildiği sosyokültürel ortamlardaki (örn.

sınıf, okul, aile) iletişim sürecinin irdelenmesi popülerleşen bir çalışma alanı haline gelmiştir. Bu alandaki araştırmalar bireylerin sosyal yapılar içerisindeki değişen görevleri, statüleri ve rolleri çerçevesinde matematiksel anlamalarını ve düşünme biçimlerini çok boyutlu analiz etme imkânı sağlamaktadır.

Amaç ve Önem

İletişimin matematik öğretimindeki yeri ve öneminin artması bu alanda yapılan çalışmaların da daha geniş bir alana dağılmasını sağlamıştır. Bu anlamda dile ait bazı temel çalışma alanlarının [bu alanlardan bazıları iletişim, dilbilim (linguistics), anlambilim, (semantics) ve göstergebilimdir (semiotics)] matematik eğitimine yönelik araştırma ve uygulamaya dönük çalışmalarda daha fazla yer aldığı görülmektedir. Literatür incelendiğinde matematikteki ve matematik hakkındaki iletişimi dilbilimsel açıdan ele alan çok az çalışmaya rastlanmakta olup, var olan çalışmaların büyük bir kısmının da ilköğretim düzeyinde olduğu görülmektedir (Huang et al., 2005). Matematik dilinin matematik öğretimi ve öğrenimindeki uygulamalarına yönelik yapılan araştırmaların büyük bir kısmı kelimeler, semboller ve izole özel gramatik form örneklerini merkeze almaktadır (Morgan, 1996'dan aktaran O'Halloran, 2000). Ancak bu durum özellikle söylem ve SÇ'nin matematik eğitimcileri tarafından çalışılan ve ilgi duyulan bir alan olmaya başlaması ile günümüzde giderek değişmektedir. Bu araştırma, matematik eğitimi alanında bir nitel araştırma yöntemi olarak SÇ'nin tanıtılması ve bir uygulama örneğinin sunulmasını içermektedir. Yeni matematik öğretim programı açısından SÇ'nin matematikte çok önemli bir yere ve öneme sahip olan ispat kavramına ve ispatlama becerisine ilişkin derinlemesine bilgiler ve içe bakışlar sağlayacağı öngörülmüştür.

Bu bağlamda, bir lise sınıfındaki iletişim durumlarında görev alan söylemsel karakteristikler yoluyla ortaöğretim öğrencilerinin ispat ve ispatlamaya yönelik bilgilerini zihinlerinde ne şekilde yapılandırdıklarının söylem çözümlemesi ile belirlenmesine çalışılmıştır. Çalışma ülkemizde, matematik eğitimi alanında SÇ'yi bir nitel araştırma yöntemi olarak kullanan ilk araştırmadır. Aynı zamanda bu çalışma, matematik eğitimi alanında SÇ'yi bir ortaöğretim sınıfındaki öğrenciler ve o sınıfın derslerini yürüten iki farklı öğretmen arasındaki söylemlerin analizlerini yapmak üzere kullanması nedeniyle uluslararası literatürde de örneği bulunmayan bir çalışma olma özelliğine sahiptir.

Problem Cümlesi

Ortaöğretim öğrencileri, ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini sınıf içi iletişim örüntüleri yardımıyla nasıl yapılandırmaktadır?

Alt Problemler

Bir ortaöğretim sınıfındaki;

1. Matematik ve geometri derslerinde ispata ve ispatlamaya yönelik iletişim durumlarındaki, *söylemlerinin alanına* [SA] ait genel karakteristikler nelerdir?

2. Matematik ve geometri derslerinde ispata ve ispatlamaya yönelik iletişim durumlarındaki, *söylemlerinin katılımcılarına* [SK] ait genel karakteristikler nelerdir?

3. Matematik ve geometri derslerinde ispata ve ispatlamaya yönelik iletişim durumlarındaki, *söylemlerin stiline* [SS] ait genel karakteristikler nelerdir?

4. İspata ve ispatlamaya yönelik var olan söylemler ve onların bağlamsal özellikleri çerçevesinde, SA, SK ve SS'ye ait karakteristikler, öğrencilerin ispata yönelik anlamalarındaki belirgin noktalara ve bunların oluşmasına ne yönde etki etmektedir?

Sayıltılar

- Araştırmada video kayıtları yoluyla toplanan sınıf içi söylemler, öğrenci ve öğretmenlerin gerçek ve yansız ifadeleridir ve kendi düşüncelerini yansıtmaktadır.
- Öğrencilerin ispat kavramına yönelik bilgi yapılandırmalarını belirlemede 3 aylık süre zarfında ispata ve ispatlamaya yönelik ayrılan süre yeterli veri sağlamıştır.

Sınırlılıklar

- Araştırmada toplanan veriler özel bir fen lisesi sınıfının matematik ve geometri derslerini yürüten iki öğretmen ve o sınıfta bulunan 13 öğrenciden elde edilen söylemler ile sınırlıdır.
- Araştırmada toplanan veriler 3 ay boyunca matematik ve geometri derslerinde yapılan toplam 53 (ders) saatlik video kaydı ve araştırmacı alan notları ile sınırlıdır.

Tanımlar

Bu araştırmada yer alan tanımlar şu şekilde sıralanmaktadır;

Sosyokültürel yaklaşım: Vygotsky'nin psikoloji ve eğitim alanında çok büyük etkileri olan çalışmalarıyla doğmuş, bireylerin yaşamları boyunca sosyal yapılar içerisinde akranları ya da kendinden daha yetkin olan kişilerle iletişim ve paylaşım içerisinde olmaları nedeniyle öğrenmede sosyal etkileşimin ve kültürün önemli bir rolü olduğunu öne süren düşünce sistemidir. Sosyokültürel yaklaşıma göre bireylerin bilişsel yapısı, bulundukları kültür içindeki etkileşimleri gözlenmeksizin anlaşılamaz (Fosnot & Perry, 2007).

Sözce: Sözce, "iki anlamsal boşluk ya da iletişim durağı arasında üretilen tümceler bütünüdür" (Günay, 2010: s.7).

Söylem: (1)Altsüremli (diachronic) ya da eşsüremli (synchronic), kişinin kendisi ile ya da başkaları ile olan, öncelikli olarak sözel ya da herhangi başka bir sembolik sistem aracılığıyla gerçekleşen her türlü özel iletişim durumudur (Sfard ve Kieran 2001: s.47).

(2) Bir şey/konu/durum hakkında bir öznesi (vericisi), bir alıcısı ve bir konusu olan, öznenin kendi değer yargılarını ve güç değerlerini yansıtan, iç ve dış bağlama gönderimde bulunan tutarlı, tümce ötesi bir dilsel birimdir (Günay, 2010).

İletişim: İletişim insanların, duygu, düşünce, bilgi, yargı vb. gibi kavramları, belirli kodlar ve simgeler aracılığıyla anlamlı iletilere dönüştürerek, aralarında kültür birliği taşıdığı veya taşımadığı diğer insanlarla veya çevrelerle paylaştıkları dinamik bir [süreçtir] (Yalçın ve Şengül, 2007: 750).

Bağlam: En genel anlamıyla bağlam "insanlar konuşurken ve yazarken etrafta gerçekleşmekte olan olaylar" (Halliday, 1991:5 'den aktaran Celce-Murcia & Olshtain, 2000: 11) ya da konuşan kişiler tarafından oluşturulan bir evrendir (Zeybek, 2003).

Söylem Çözümleme: Söylem Çözümlemesi kabaca, (farklı biçimlerde de olsa) söylemi, işlevi açısından incelemeye dönük yaklaşımların genel bir adlandırması; kullanılan dilin yakından incelenmesi (Taylor, 2001) ya da Akturan vd (2008) göre söylemi temel alarak günlük metinlerin söylendikleri bağlam içerisinde incelenmesine dayalı bir yaklaşım biçiminde ifade edilebilir.

Eleştirel Söylem Çözümlemesi (ESÇ): Sosyal dünyayı temsil eden ve sosyal dünya tarafından temsil edilen, söylemin yapılandırdığı [ve] söylemin yapılandırılma yollarını betimlemek, yorumlamak ve açıklamak amacıyla sosyal teoriyi ve söylem çözümlemesini bir araya getirme girişimidir (Rogers vd, 2005: 366).

Yazıya Aktarma (Transcription): Bir nitel araştırma yöntemi olarak söylem çözümlemesi gerçekleştirilirken, etkileşimli teyp ya da video kayıtlarının varsa araştırmacı gözlem notlarıyla birlikte yazıya dökülmesi aşamasıdır.

Kodlama: Bir nitel araştırma yöntemi olarak söylem çözümlemesi gerçekleştirilirken, örüntüleri belirlemek üzere yapılan bir tür düzenleme ve kategorileştirmedir (Taylor, 2001). Basit anlamda ise kodlama bir hipotezi test etmek veya bazı olguların olası boyutlarının keşfedilmesi amacıyla veri sağlama işlemidir (Lampert & Ervin-Tripp, 1993). Nitel aarştırma açısından kodlama temalara ulaşma işlemi olarak ifade edilebilir.

Bilgi Çerçevesi: Mohan'ın (1986) tarafından tanımlanan ve tüm bilgilerin kategorize edilmesine yönelik; *sınıflama* (classification), *prensipler* (principles), *değerlendirme* (evaluation), *tanımlama* (description), *dizi/ardışıklık* (sequence) ve *tercih/karar vermedir* (choice) biçiminde altı ortak bilgi yapısını içeren çerçevedir.

Univocal Söylem: Konuşmacının, dinleyicinin kabul etmesi beklentisiyle oluşturduğu, gönderenin alıcıya bir tek mesajı ilettiği iletişim durumudur.

Dialogic Söylem: Konuşmacının gönderdiği belirli bir mesajı dinleyicinin başlangıç olarak kabul ettiği, yeni anlamlar üretmeye dönük ve gönderici ile alıcı arasındaki bir iletim alış-verişine dayalı karşılıklı iletişim durumudur.

Sistemik Fonksiyonel Dil-Bilgisi: Halliday'a göre dil ile ilgili çalışmaların odağında, insanların dili günlük sosyal yaşam içerisinde bir (iletişimsel) amacı gerçekleştirmek üzere nasıl kullandıkları yer almaktadır (Eggins, 2004). Bu düşünce çerçevesinde "temelini sosyal göstergebilimden (social semiotics) alan (s.1)" ve "dili stratejik ve anlam üreten bir kaynak olarak gören betimleyici ve yorumlayıcı, önemli bir çerçeve olarak kabul edilen (s.2)" modeldir (Eggins, 2004).

Edimbilim (Pragmatics): "Edimbilim, bireyin içerisinde konuştuğu ya da yazdığı bağlamla ilgili anlamı inceleyen çalışma alanı" (Paltridge, 2006); "dili anlamaya yönelik temel teşkil eden dil ve bağlam ilişkilerinin incelenmesi" (Levinson, 1983: 21) ya da "tümcelerin (utterance) durumlar içerisinde nasıl anlam kazandıklarının araştırılmasıdır" (Leech, 1983).

İspat: Tümdengelimsel bir argümanın bir ifadenin neden doğru olduğunu diğer matematiksel sonuçları ve/ ya da ifade de yer alan matematiksel yapılara içe bakışları kullanarak gösterilmesidir (Knuth, 2002).

İspat Şeması: Kişinin kendisini ve başkalarını bir matematiksel durumun doğruluğuna ya da yanlışlığına ikna etmek için kullandığı argümanlardır (Harel & Sowder, 1998).

Yaklaşık Öğrenme Eşiği: Bireyin başkalarının yardımı aracılığıyla yapabilecekleri ile onların yardımı olmaksızın yapabilecekleri arasındaki alandır (Tharp & Gallimore, 1988'den aktaran Morrone et. al., 2004). YÖE öğretmenin yardımının öğrencilerin kendi çabalarıyla ulaşamayacakları bir amacı gerçekleştirmelerine veya bir problemi çözmelerine imkân verebilen bir tür yapı iskelesi sürecini içermesi anlamına gelir (Baki, 2006).

Doğal Söylem: Araştırmacının herhangi bir etkisi olmaksızın matematik ya da geometri derslerinde, öğretim sürecinde görev alan, sınıf içi öğrenci-öğrenci ve öğretmen-öğrenci arasındaki iletişim süreçlerinde ispat kavramına ve ispatlamaya yönelik sözel, matematiksel, sembolik ya da bunların kombinasyonları yoluyla oluşmuş söylem türüdür.

Teşvik Edilmiş Söylem: Araştırmacının uygulama öncesinde kendisinin belirlediği ve yazılı biçimde matematik ve geometri öğretmenlerine sunduğu, sınıf içinde öğrencilere yöneltilmesini ve öğrencilerin bu sorular aracılığı ile ispata/ispatlamaya yönelik açıklama yapmaya, tartışmaya ve fikirlerini paylaşmaya teşvik edilmelerinin amaçlandığı bir grup sözel soruya dayalı olarak sınıfta oluşmuş söylem türüdür.

Kısaltmalar

Çalışmada araştırmacı tarafından kullanılan kısaltmalar ve onların açılımları (alfabetik sırayla) aşağıdaki gibidir,

BÇ: Bilgi çerçevesi (Knowledge Framework).

BL: Bildirici söylem,

B-OG: Bazı öğrenciler

BY: Buyurucu söylem

BYD: Öğrenci-öğretmen arasında Başlama-Yanıtlama-Değerlendirme (Initiation-Reply-Evaluation) biçiminde üçlü etkileşimin döngüsü (Mehan, 1979).

BYG: Öğrenci-öğretmen arasında; (öğretmen-in) *başlama* (initiation), (öğrencinin) *yanıt verme* (response) ve (öğretmen-in) *geri bildirim* (feedback) [IRF] biçiminde üçlü etkileşimin döngüsü (te Molder, 2009).

CERME: Conference of European Research in Mathematics Education.

D(S): Dialogic söylem.

DS: Doğal söylem.

ESÇ: Eleştirel Söylem Çözümlemesi (Critical Discourse Analysis).

GO: Geometri öğretmeni.

ICME: International Congress on Mathematics Education.

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

MO: Matematik öğretmeni.

MSD: Matematiksel sözcük dağarcığı

NCSM: National Council of Supervisors of Mathematics.

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics.

OG-X: X Numaralı öğrenci.

OKS: Ortaöğretim Kurumlarına Geçiş Sınavı.

ÖSS: Öğrenci Seçme Sınavı.

PME: Congress of International Group for the Psyschlogy of Mathematics Education.

SA: Söylemin alanı (Field of Discourse).

SÇ: Söylem çözümlemesi.

SD: Soruya dayalı söylem

SFD: Sistemik Fonksiyonel Dil-Bilgisi (Systemic Functional Grammer/Linguistics).

SK: Söylemin katılımcısı (Tenor of Discourse).

SS: Söylemin stili (Mode of Discourse).

TDK: Türk Dil Kurumu

TES: Teşvik edilmiş söylem.

U(S): Univocal söylem.

YÖE: Yaklaşık öğrenme eşiği.

BÖLÜM II
İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR

Öğrenmenin nasıl meydana geldiği ve öğrenme sürecinde zihnin nasıl çalıştığı özellikle eğitim bilimcilerin, bilişsel psikologların, fizyologların, nörologların, bilişsel bilimcilerin uzun zamandır araştırdığı ve gizemini hala koruyan en temel sorulardandır. Yıllar boyunca bilim ve teknolojide yaşanan gelişmeler bu sorulara ve bu soruların türevlerine farklı kuramsal yaklaşımlar ve araştırma biçimleriyle farklı yanıtlar oluşturmuştur. Her çağda ulaşılan bilgi düzeyi ve incelemelerdeki derinleşmeler öğrenme mekanizmasını açıklayan o çağa özgü baskın ve kabul görmüş bazı görüşleri öne çıkarmıştır. Platon'un A*nımsama Kuramı*, Locke'nin A*tomist Modeli*, Watson, Pavlov, Thorndike ve Skinner gibi bilim adamlarının çalışmalarıyla ün salan *Davranışçı Kuram*, Köhler, Wertheimer, Koffka ve Lewin'in çalışmalarıyla ortaya çıkan *Gestalt yaklaşımı* ve sonrasında günümüzde de geniş ölçüde kabul görmeye devam eden ve modern öğrenme yaklaşımları olarak adlandırılan Dewey ve Piaget'nin *oluşturmacılığı/yapılandırmacılığı* ve öğrenmeye Piaget'ten farklı olarak sosyal bir pencereden bakan Vygotsky ve izleyenlerinin *sosyal yapılandırmacılığı* (ayrıntılı bilgiler için bkz Philips & Soltis, 2005) bunlardan bazılarıdır. Piaget, Von Glaserfeld ve onların yolundan gidenler açısından öğrenme kabullenme ve özümseme döngüsüyle tamamlanan öz-düzenleme süreçleri ile yapılandırılan bilişsel gelişimdir. Ancak Vygotsky, Leont'ev, Bauersfeld gibi bilişsel kuramcılar ve eğitimciler ise öğrenme sosyal etkileşimlere ve kültürel etkinliklere dayalı öznel bir yeniden yapılandırmadır (Cobb, 2007). Birinci yaklaşımı benimseyenler bilişsel kuramcılar olarak adlandırılırken, ikinci yaklaşımı benimseyenler ise sosyokültürel kuramcılar olarak isimlendirilmektedir. Öğrenmenin açıklanmasında farklı kuramların var olması; farklı kuramcıların, düşünürlerin öğrenmeye farklı öncelik ve merkezlerde yaklaşmasına, yaşamda farklı öğrenme biçimlerinin olmasına ve disiplinler (matematik, fen, coğrafya gibi) açısından da öğrenmenin farklılıklar içermesine bağlı olarak doğal bir durumdur. Bu nedenle bilginin oluşturulma yolları ve öğrenme üzerine yapılan çalışmalarda, etkileşimsel bir perspektiften yaklaşımlarda bulunmak gerekli hale gelmiştir. Başka bir ifadeyle, bilginin doğası, yapısı ve edinilme biçimlerini ele alan epistemolojik temeller, özellikle psikolojideki düşünsel ve kuramsal yaklaşımlar ve diğer disiplinlerdeki katkılarıyla onlara bağlı olarak oluşturulan öğrenme kuramları, belli bir alana (disipline) özgü bilginin ve öğrenmelerin incelenmesinde etkileşimli ve çok boyutlu bir bakış açısını ortaya çıkarmaktadır. Bu nedenle eğitim alanında bugün pek çok disiplin söz konusu etkileşimsel perspektifte kendine özgü, araştırma ve inceleme yollarını oluşturmuştur. Bu disiplinlerden birisi de matematik eğitimidir. Matematik eğitiminde ele alınan temel konuların başında da matematiksel bilgilerin nasıl öğrenildiği ya da edinildiği gelmektedir. Genel araştırma literatüründe iki temel alan olan nicel ve nitel araştırma paradigmaları yardımıyla çok çeşitli biçimlerde, adı geçen soruya yanıt bulunmaya çalışılmıştır. Günümüzde sosyal bilimlerde (sosyoloji, antropoloji, psikoloji, dilbilim ve eğitim bilimleri) özellikle disiplinler arası paylaşımın yoğun olduğu bir zeminde, yaşanan ilerlemeler belki de fen bilimleri eğitimi içerisinde en çok matematik eğitimi alanında uygulama alanı bulmaktadır. Bunun nedeni matematiğin birey ve toplum hayatındaki artan yeri ve öneminin bir sonucu olarak öğretiminin de daha iyi ve nitelikli hale getirilmesi gereksinimi olarak ifade edilebilir. Son birkaç on yılda uluslararası alanda matematik eğitiminde reform hareketleri olarak nitelendirilen yaklaşımların ve değişimlerin ana çizgisi, bugünün gelişmişlik ve çağdaşlık düzeyine uygun ve geleceğinkinin nasıl olacağına ipucu sunan matematik öğrenme biçimlerini inşa edebilmektir. Ülkemizde de söz konusu reform hareketlerinin yoğun etkileri görülmektedir. İlköğretim birinci sınıftan ortaöğretim on ikinci sınıfına kadar tüm kademelerde matematik dersi öğretim programlarının yeniden yapılandırılması, ders kitaplarının ve yardımcı diğer kitapların biçim ve içeriklerinde değişiklikler yapılması, matematik öğretmeni yetiştirmeden sorumlu olan eğitim fakültelerinin lisans programlarında yapılan iyileştirmeler ve Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] tarafından matematik öğretmenlerinde bulunması gereken özellikleri ortaya koyan Özel Alan Yeterlilikleri'nin belirlenmesi bunlardan bazılarıdır. Matematik eğitiminde gerek ülkemizde gerekse dünyada yaşanan reform hareketlerinin kuramsal temelini ve bağlamını oluşturan en baskın felsefi düşünce sistemi yapılandırmacılıktır. Yapılandırmacılık üzerine çalışan bilim insanları ve düşünürlerinin genel anlamda hem fikir oldukları temel prensipler olmakla birlikte ayrıştıkları önemli hususlar da bulunmaktadır. Bu ayrışımlar zaman içerisinde bilişsel yapılandırmacılık ve sosyal yapılandırmacılık adı altında farklı iki ana akımı (Cobb, 1994) doğurmuştur. Ancak bu ana akımların dışında radikal, psikolojik, etkileşimci, yüklemcil, eleştirel, bağlamsal, kültürel, gelişimci, muhafazakâr, tepkisel yapılandırmacılık gibi alt akımları da (Şimşek, 2004) bulunmaktadır. Bunlar içerisinde daha yaygın bilinen radikal yapılandırmacılık yine bilişsel yapılandırmacılık içerisinde ele alınmaktadır. Yukarıda adı geçen her iki ana akımın da matematik eğitiminde kabul gördüğü ve teori, prensipler ve uygulama pratikleri olarak yer bulduğu gözlenmektedir. Matematik eğitimi üzerinde önceleri özellikle bilişsel yapılandırmacılığın etkisinden söz etmek mümkündür. Öğretim programlarının düzenlenmesi ve özellikle ilköğretim kademelerindeki öğretilecek matematiksel içeriğin nasıl olması gerektiğine yönelik çalışmalarda Piaget'in bilişsel gelişim basamaklarının büyük katkıları olmuştur. Sonraları sosyal yapılandırmacılığın da, tamamen bilişsel yapılandırmacılığın yerine değil ancak onunla birlikte ve bazı noktalarda ona baskınlık biçimde matematik eğitimine katkıları ve öğretimi üzerinde etkileri oluşmaya, yaygınlaşmaya başlamıştır. Bu çalışmanın öğrenme perspektifleri açısından kuramsal temelleri sosyokültürel* yaklaşıma dayanmaktadır.

Sosyal yapılandırmacılık özellikle Vygotsky'nin çalışmalarıyla ortaya çıkmış olup, öğrenmenin sosyal ve kültürel bir çevrede sosyal etkileşimlere dayalı olarak oluşturulan bilgiler üzerinde gerçekleştiği fikrini savunmaktadır. Öğrenmenin sosyal bir ortamda gerçekleştiğinin farkına varan Vygotsky, Piaget'nin aksine öğrendiğimiz çoğu şeyi başkalarından öğrendiğimize dikkat çekmektedir (Philips, & Soltis, 2005). Bauersfeld "öğrenmenin toplumsal etkileşim içinde anlamın müzakere[si] yoluyla toplumsal araçların ve modellerin öznel yeniden yapılandırma[sı]yla 'karakterize edilebildiğini' vurgulamaktadır" (1988: 39 dan aktaran Cobb, 2007). Vygotsky'nin ayrıca, "öğrenmede sosyal etkileşimin ve dilin de önemli yer tuttuğunu öne [sürmesi]" (Özden, 2003: 59) ve ölümünden sonra 1934 yılında basılan ve en önemli çalışmalarından biri olarak kabul edilen *Düşünce ve Dil* adlı kitabının yayınlanması öğrenme sürecinin araştırılmasında o süreçte var olan dilin incelenmesini daha sık başvurulan bir yöntem haline getirmiştir.

---

* Sosyokültürel yaklaşım bu çalışmanın kuramsal çerçeve kısmında ayrıntılandırılarak tartışılmaktadır.

Vygotsky'nin dil gelişimi üzerine kurduğu teori, ilk kez hem Piaget'nin geliştirdiği genetik epistemolojiyi göz önüne alması hem de çocuğun bilişsel gelişimini eğitimle ve kendisini kuşatan kültürle ilişkilendirerek açıklama çabası (Erdener, 2009) nedeniyle çok ses getirmiştir.

Bu araştırmanın, bir ortaöğretim matematik sınıfındaki iletişim süreçlerinde görev alan dile dayalı söylemlerin incelemesine yönelik olması nedeniyle izleyen bölümde dil, dil-iletişim, dil-düşünce, dil-anlam ilişkilerine kısaca değinilmekte ve sonrasında matematik eğitimi ve dilin etkileşim alanlarına yönelik bilgilere yer verilmektedir.

Dil ve Anlam, İletişim, Düşünme Kavramları Arasındaki İlişkiler

Dil insanın varoluşundan bu yana onunla birlikte sürekli gelişim içerisinde olan ve bu yönü ile canlı bir yapı ya da sistem olarak nitelendirilebilen bir olgudur. İnsanlar dil aracılığıyla ortak bir bilgi alanı (ve aynı zamanda kültür alanı) meydana getirerek yine dil aracılıyla bu alanın nesiller arasında aktarımını sağlarlar (Gündoğan, 2002). Bu yönü ile dil bir anlatma ve anlaşma yöntemi (Vardar, 2001) olarak bireyin, toplulukların ve toplumların var olmasında ve onların geliştirdikleri kültürlerin karakteristiklerinde de en önemli ögedir. Dil sosyal bir araçtır ve insanların gerçekleştirdiği iletişimin büyük bir kısmı ve öğrenmenin pek çok türü dil olmaksızın meydana gelemez (Philips & Soltis, 2005). İletişimde ise temel etken dil ve ona ait yapılar yardımıyla paylaşımda bulunma dürtüsüdür. İnsanın doğası gereği sosyal bir varlık olduğunu ortaya koyma açısından iletişim kavramının anlamı önemlidir. İletişim iki taraflı bir etkileşim süreci olarak görüldüğünde mekanizma olarak (konuşan/yazan/anlatan) bir vericinin belirli kanallarla gönderdiği iletileri, (dinleyen/okuyan) alıcının duyuları yardımıyla algılaması ve yaşantısına dayalı olarak bu algıyı yorumlaması (Sever, 1998) biçiminde tanımlanabilir. Daha genel anlamda bakıldığında ise,

> İletişim insanların, duygu, düşünce, bilgi, yargı vb. gibi kavramları, belirli kodlar ve simgeler aracılığıyla anlamlı iletilere dönüştürerek, aralarında kültür birliği taşıdığı veya taşımadığı diğer insanlarla veya çevrelerle paylaştıkları dinamik bir [süreçtir] (Yalçın ve Şengül, 2007: 750).

Bu süreçteki sembollerin, simgelerin ve kodların ana kaynağını dil oluşturmaktadır.

> İletişim insanoğlu için dış dünyayı yorumlayarak bireysel varlıkların farkına varmalarına, bir biyolojik varlıklar yığını olmaktan kurtulup belli bir kültürün ve toplumun üyesi olmalarına (sosyalleşmelerine) ve içinde yaşamış oldukları toplumdaki ilişkilerini düzenlemelerine yardımcı olan vazgeçilmesi imkânsız bir yaşamsal zorunluluktur (Yalçın ve Şengül, 2007: 749-50).

Ancak özünde iletişim kurmamızı sağlayan şey işaretler (jestler, mimikler, özel kodlar, ve genellikle kelimeler) değil onların kullanımları konusunda vardığımız anlaşmadır. Yani işaretler kendi başlarına değil onların kullanımlarına yönelik sosyal anlaşmamız açısından bir anlam taşımaktadır (Wilson, 2002).

Düşünce ve dil ilişkisine bakıldığında ise ortaya çıkan görüşler şöyle özetlenebilir; "Belirli bir düzen içerisinde düşünebilme ve bu düşünceleri diğerleri ile paylaşma arzusu, dil denilen soyut iletişim düzeneği ile olabilmektedir" (Günay, 2004: 9). Genel bir tanımlama yapmak gerekirse;

> Dil sözlü ve yazılı olarak iletişimde kullandığımız, doğduğumuzda hazır bularak edinmeye başladığımız, doğrudan doğruya insana özgü, çok güçlü, büyülü bir düzendir, düşünme ve düşünüleni aktarma dizgesidir (Aksan, 1999: 13).

Yine Günay'a göre dilin toplumsal ve iletişim amacıyla var olan bir olgu olarak sadece kişiler arasında değil bireyin kendisi ile iletişiminde de [düşünme eylemi sonucu oluşan] 'düşünce' olarak yer aldığı söylenebilir. Gündoğan (2009), kültür kavramına indirgediği tanımlamasında dili; (daha çok kavramsal düzeyde) bir düşünce biçiminin dışa vurulduğu, o düşünme biçiminin somutlaştırıldığı, başka özneler için bir düşünme konusu haline getirildiği kültürel kalıp olarak ifade etmektedir. Vardar, dil-düşünme ilişkisine yaklaşımını şu ifadelerle belirtmektedir,

> Dil, düşünme eylemi ve düşünce açısından ele alındığında insanı insan yapan her şeyin büyük ölçüde dilde yer aldığı ya da dile yansıdığı görülür. Gerçekten de, dil bireyin bilincini oluşturan, benliğini biçimlendiren temeldir; bilincin köklerine, bilinçaltının derinliklerine uzanan başlıca insansal işlevdir. Düşünce, us, bilgi, buluş insansal anlamda ancak dille olanak kazanır. … Düşüncenin, tüm boyutlarına ulaşabilmesi için dil gereklidir; kendisine belli bir biçim verecek anlatım kalıbı bulunmayan yerde düşünce de gelişemez (2001: 13).

Vygotsky'nin teorisinde sosyallikten bireyselliğe doğru giden bir çizgide çocuğun konuşma biçimleri sosyal konuşma, benmerkezci konuşma ve içsel konuşma olarak 3 aşamalı olarak ele alınmaktadır. Böylece bir yetişkinin son aşamadaki içsel konuşma durumu ise kişinin kendi kendine düşünmesi olarak nitelendirilmektedir (Erdener, 2009). Felsefi açıdan bakıldığında Ayık (2006), anlam, varlık ve düşünme etkileşimini ele alarak şunu ifade etmektedir; Varlık, zihin ve dilin üç temel dayanak oluşturduğu düşünce, varlığı zihnileştirerek bir dille ifade etmedir. 21. yüzyıl felsefi akımlarından olan mantıksal atomculuğun en önemli ismi Wittgenstein'a göre ise felsefeye ait sorunların çoğunu çözmeye yeterli olan dil, düşüncelerimizle, dış dünyanın ortak bir modeli veya görüntüsüdür ve dil ile dünya aynı mantıksal yapıyı paylaşır (Turgut, 2000). Görüldüğü üzere dilin varoluşun soyut ama en işlevsel ögesi olması nedeniyle hem düşünsel anlamada hem de günlük yaşam pratiklerimizdeki yeri ve önemi çok büyüktür ve yukarıdaki bilgiler sonrasında şu söylenebilir ki; öğrenme dil olmaksızın tam anlamıyla gerçekleşmesi mümkün olmayan şeylerin başındadır.

Matematik, Matematik Eğitimi ve Dil İlişkisi

Matematik bilindiği gibi sadece bireylerde yaratıcı düşünme, problem çözme, sorgulama, yorumlama, soyutlama, genelleme, vb becerilerinin gelişimini sağlayan bir çalışma alanı değil aynı zamanda bunların bütününden oluşan güçlü bir iletişim aracı olarak görülmektedir. Matematik ve dil birbirine sıkı sıkıya bağlıdır ve birini diğerinden ayırmaya çalışmak bir hatadır (Ellerton & Clements, 1991). Sahip olduğu kendine has sistematik yapısı matematiğin uluslararası bir "dil formu (Bullock, 1998)" olarak kabul edilmesini sağlamıştır. Yeni Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda matematik, "soyut düşüncelerimizi sistematik bilgi olarak ifade edebilmemizi sağlayan formal bir dil" (MEB, 2005: 13) biçiminde tanımlanmaktadır. Benzer şekilde Adams (2003), matematik "insanların; iletişim kurmak, problem çözmek, eğlenmek-dinlenmek için ve de sanatsal ve mekanik çalışmalar yaratmak için kullandıkları bir dildir" (s. 786) ifadesini kullanırken; Umay (2002) eğer dil, bir toplumdaki insanların ürettikleri belli anlamlar içeren sözcükler ve onların belirli kurallar yardımıyla tanımlanan çelişik olmayan sıralanışlarıyla oluşan birimlerce anlam kazanan, yaşayan ve gelişen bir sistem olarak tanımlanacak olursa matematiğinde bir dil olarak kabul edilebileceğini ima etmektedir. Genellikle matematiğin ne olduğunu açıklamaya yönelik yaklaşımlarda dil metaforu yardımıyla yapılan tanımlamalara sıkça rastlanmaktadır. Ancak matematiğin tam anlamıyla tıpkı doğal-formal diller gibi bir dil olduğunu öne sürmek yerine onu doğal bir dile yaklaştıran (dilin bir formu olmasını sağlayan) temel özelliklerinden söz etmek matematik eğitimi açısından daha yararlı bir yaklaşım olacaktır. Bu noktada Wakefield'in (2000), dil ve matematiğin paylaştığı ve matematiğe dilsel kimlik kazandıran özellikler sıralamasına bakmak konuya bakış açısını zenginleştirecektir. Dil ve matematikte,

- Soyutlamalar (sözel ve yazılı sembollerin sunduğu fikir ve imgeler) iletişim için kullanılır.
- Semboller ve kurallar belirli bir formdadır ve tutarlıdır.
- İfadeler (expressions) doğrusal ve birbirini izleyen (seri) biçimdedir.
- Anlama, pratik yaparak artar.
- Başarı için semboller ve kuralların hafızaya alınması gerekir.
- Çıraklık aşamasındaki öğrenenler için çevirmeler (translations) ve yorumlamalar gereklidir.
- Anlam, sembollerin sıralanışından etkilenir.
- İletişim kodlama/şifreme ve kodların/şifrelerin çözülmesini gerektirir.
- Sezgi, anlayış ve "düşünmeksizin konuşma" akıcılığa eşlik eder.
- Çocukluktan gelen deneyimler ileriye dönük gelişmenin temelini oluşturur.
- İfadeler için olasılıklar sonsuzdur (s.272-273).

Bu özellikler sadece matematiğin bir doğal dile benzerliğini gösteren dayanakları ortaya koymakla kalmayıp aynı zamanda onun öğrenilmesine yönelik dil öğrenme açısından bazı hususlara da gönderimde bulunmaktadır. Wakefield aynı çalışmada Chomsky ve McNeill'in düşüncelerinden yararlanarak dilin öğrenilmesinin yanında edinimsel (acquisition) yönüne ve bu yönle matematiğin ilişkisine dair görüşlerine de yer vermektedir. "Hem dil hem de matematik, uygulamaların ve adaptasyonların, öğretimi çok geride bıraktıkları bir noktada, açıkça doğuştan getirilen bir niteliğe sahiptir" (s. 273). Bu nitelik örneğin okulöncesi dönemde çocukların, azlık-çokluk, eşitlik, toplama, çıkarma gibi kavramları anlamlandırabilmeleri, ayrıca bizlerin sayıların temel özelliklerini anlamamızda (teklik ve çokluk gibi) ve gruplamalar ve sıralamalar yardımıyla sınıflandırmalar yapabilmemizde bu gibi anlamlandırmaların katkısının olması insanoğlunun doğuştan gelen bazı *matematik edinim araçlarına* sahip olduğunu düşündürmektedir. Pek çok araştırma ve incelemeye dayalı olarak insanoğlunun *dil edinim araçlarına* sahip olduğu zaten bilindiğine göre edinimsel stratejiler açısından da matematik ve dil önemli ortaklıklar içermektedir (Wakefield, 2000). Tüm bunlar matematiğin dilsel kimlik kazanmasında oldukça önemli noktalar olarak görülebilir. Ancak matematiğin tam anlamıyla bir dil olarak görülmesi yerine metaforik bir bağdaştırmaya imkân sağlayarak aslında bir dil formu olarak ele alınması düşüncesi zihnimizin bir köşesinde daima barınmalıdır. Çünkü matematik sadece soyutlamaya ait içselleştirmeden dolayı değil, doğrudan gözlemlerle deneyimlediğimiz karmaşıklıklardan tamamen ayrılmasından dolayı ve de kendine has bir söz dizimine ve gramatik yapıya sahip olmasıyla diğer dillerden farklıdır (Bullock, 1994). Buraya kadar değinilen hususlar göz önüne alınarak şunu ifade etmek mümkündür; matematik belki de gerçek anlamda evrensel olma yönü ile var olan tek ve en güçlü dil formudur. Bu önermenin ikna ediciliğine yönelik en temel dayanak, tüm doğal dillerin kendine özgü kelime yapıları, söz dizim özellikleri, gramatik yapısı ve anlamsal zenginliği bulunmasına karşın tüm dillerde matematiksel nesneler ve onların ifade ettikleri (özellikle sembolik, morfolojik açıdan) anlamların aynı olmasıdır. Tümüyle insan zihninin ürünü olan matematiğin dilsel kimliğini daha ileri taşıyarak, bir dil olmanın ötesinde insanoğlunun ya da onun kullandığı dilin anlamsal yetersizliklerinden kaçınmada düşünmenin bir türü (modu) olarak görenler de bulunmaktadır (Barwell, 2008). Bu gibi düşüncelerden yola çıkarak geçmişten günümüze değin felsefeciler ve mantıkçıklar için matematik ve onun doğasına yönelik çalışmalarda doğal dilin yanında matematiksel dil de bir inceleme konusu ve aracı olagelmiştir. Örneğin, matematiğin ve matematiksel bilginin doğasına yönelik felsefi yaklaşımlar üç temelle ele alındığında ki bunlar; sezgicilik (intuitionism), mantıkçılık (logicism) ve yapısalcılık (formalism) biçiminde ifade edilebilir, Hilbert gibi formalistlerin temel düşüncesi matematiğin kalbinde semboller ve işlemlerin bulunduğudur (Gupta, 1980). Felsefenin dışında doğal-formal dilleri konu edinen dilbilim, göstergebilim (semiotics), anlambilim (semantics) gibi disiplinler açısından da matematik [sembolik ve işaretsel yanı ve onlara bağlı sözdizimsel (syntax) karakteristikleri ve gramatik yapısı ile] farklı bir ilgi alanı oluşturmuştur. Kimi zaman Leonard Bloomfield gibi felsefi ve dilbilimsel alanı birleştirerek matematik ve dil üzerine çalışmalar yapan önemli isimler de olmuştur (ayrıntılar için bkz. Tomalin, 2004).

Matematiğin geniş bir zeminde ve disiplinsel çeşitlilik içerisindeki dil ile olan etkileşim alanlarına *matematik eğitimi alanının* kayıtsız kalması mümkün olmamıştır. Aksine en başta belirtildiği üzere sosyal bilimlerdeki bilgi ve bilimsel anlayıştaki bazı değişimler, teknolojik ilerlemeler ve araştırmalardaki paradigmasal ve biçimsel gelişmeler ve onlara bağlı olarak disiplinler arası sinerjiye dayalı çalışmaların daha fazla üretilmesi ve önemsenmesi matematik eğitimi alanının dile bakışını oldukça etkilemiştir. Dilsel faktörlerin matematik öğrenmedeki etkileri üzerine yapılan çalışmalar 1950'lere kadar uzanmakla birlikte doğal dil, formal matematik dili ve matematik öğrenme arasındaki ilişkilerin sistematik bir biçimde incelenmeye başlaması ancak 1970'lerin ortalarına doğru gerçekleşmiştir (Ellerton & Clements, 1991). O dönem ve sonrasında yapılan çalışmalar göz önüne alınarak matematik ve dilin etkileşim sahalarının matematik eğitimi alanına yansımalarında matematik, dil ve matematik eğitimi çerçevesinde (üçlü) bir bakışın geliştirildiği görülmektedir. Matematik öğrenme ve öğretme belki diğer konulardan farklı olarak daha fazla dile dayalı bir eylemdir (Barwell, 2008). Her şeyden önce matematik öğretimi sınıf içerisinde öğretmen ve öğrencilerin doğal bir ana dil (ya da ikinci dil) yoluyla kurdukları diyaloglar ve iletişime dayalı gerçekleşen bir süreçtir. Öğrenciler matematiksel fikirleri, nesneleri, sembolleri ve cümle yapılarını dilin sözlü ve yazılı formlarını kullanarak tanır ve öğrenirler. Bu nedenle hem bir dil olarak matematik hem de bir doğal/günlük dilin matematik yapma ve öğrenme üzerindeki etkileri önemli araştırma alanları haline gelmiştir. Bunun en önemli göstergesi, matematik eğitimi alanında CERME (Conference of European Research in Mathematics Education), ICME (International Congress on Mathematics Education) ve PME (Congress of International Group for the Psyschlogy of Mathematics Education) gibi çok önemli uluslararası bilimsel organizasyonlarda matematik ve dil ilişkilerini ele alan çalışma/tartışma gruplarının kurulmuş olmasıdır. Matematik ve dil arasındaki ilişkinin üç seviyesi olduğunu öne süren Pimm (1987) bunları: *dilin matematiği*, *matematiğin dili* ve *bir dil olarak matematik* biçiminde sıralamaktadır. Matematik eğitimi literatüründe ise matematik ve dil etkileşimi altındaki incelemelerin; *bir dil olarak matematiği* (ya da doğal dilin yanında ikinci bir dil olarak matematiği) *öğrenme*, *dildeki temel becerilerin* (okuma, yazma, konuşma gibi) *matematik öğrenmedeki karşılıkları ve uygulanışları*, *dilin yapısal özelliklerinin matematik öğretimindeki karşılıkları ve uygulanışları* gibi ana başlıklarla çalışma alanları oluşturduğu ve bu alanlara giderek artan bir ilginin olduğu görülmektedir (örn. Warren 2006; Barwell 2005; Barwell et al 2005; Yushau & Bokhari 2005;

O’Halloran 2000; Austin & Howson 1979; Bagchi & Wells 1998; Neville-Barton & Barton 2005; Street 2005; Adams 2003; Freitag 1997; Okazaki 2006). Özellikle 1970 ve 80’lerde matematik öğrenmeye etki eden dilsel faktörleri tanımlamaya yönelik yapılan yayınlarda çok büyük bir artış olmuştur (Ellerton & Clements, 1991). Benzer şekilde 70’lerin sonlarından 90’lara kadar dilsel beceriler içerisinde özellikle yazma ve yazma aktiviteleri üzerine matematik eğitimi alanında büyük bir ilginin olduğu ve bu ilginin günümüzde de devam ettiği görülmektedir (bkz. Uğurel, Tekin ve Moralı, 2008; Atasoy, 2005). Son zamanlarda matematik ve dil üzerine yapılan çalışmaların yönelimlerini ve geldiği noktayı anlamada CERME-4’deki 8. çalışma grubu olan ‘matematik ve dil’ grubunun editörleri tarafından kaleme alınan genel özete bakmak oldukça yararlı olacaktır. Bu özette organizasyonda sunulan bildirilerin yukarıda değinilen hususlar üzerinde dağılımı ve konulara yönelik açıklamaların yanında bazı tespitlerde bulunulmaktadır. Bunlardan biri; matematiksel dil üzerine yapılan yakın zamanlı araştırmaların matematiksel dilin özelliklerinin sadece söz dizimi (syntax), formal anlambilim (semantics) ya da terminoloji (lexicon) ile bağlantılı olmayıp kullanımla da ilintili olduğunu ortaya çıkardığıdır. Matematiksel dil ile ilgili geçmişte var olan katı formal bakış açısının yanında bugün matematik yapma ve öğrenmede kullanılan dilin fonksiyonlarının da dikkate alınmaya başladığına işaret edilmektedir (Duval, Ferrari, Høines ve Morgan, 2005). İşte bu noktada matematik eğitimi açısından dile dayalı bakış açısında göreceli olarak daha yeni ve popülerleşen bir çalışma alanı tanımlanabilmektedir. Bu alan özellikle çağdaş dilbilimden elde edinilen bilgilere dayanan, söylem (discourse) ve söylemin analiz edilmesini kapsayan yaklaşımları içermektedir ve kimi literatür kaynaklarında söylemsel yaklaşımlar/eğilimler (discursive moves) olarak da isimlendirilmektedir. Matematik eğitimi araştırmalarının büyük bir kısmı geçmişte kelimeler, semboller ve izole özel gramatik form örneklerini merkeze almaktayken (Morgan’dan aktaran O’Halloran, 2000), bugün ***söylem*** ve ***söylem çözümlemesinin*** (**SÇ**) matematik eğitimcilerinin popüler çalışma alanlarından biri olmaya başlamasıyla inceleme sahası giderek genişlemektedir. Aslında matematik eğitimi alanının söylem ve SÇ ile tanışıklığı yaklaşık 30 yıl öncesine uzanmasına karşın söz konusu popülariteyi doğuran asıl şey bulunduğumuz çağda iletişime ve söyleme yüklenen anlam ve önemin artması, bunun eğitim-öğretime yansımaları ve söylemi analiz etmedeki yaklaşımların hızla gelişmiş olmasıdır. Cazden & Beck (2003), 20. yüzyılın son on yılında sınıf söyleminin niteliğinin, okul reformu tartışmalarında öncelikli odak haline gelmesinin temel nedenlerini şöyle açıklamaktadır;

> Eğitim ekonomisti olan Murnane ve Levy' göre (1996), *yüksek maaşlı işlerin gerektirdiği de dahil, yeni temel beceriler; hem sözel hem de yazılı olarak etkili iletişim kurabilme becerisi ve farklı geçmişleri olan insanlarla gruplar içerisinde birlikte çalışabilme becerisidir* (s.32). Toplumdaki demografik ve teknolojik değişimler aynı becerileri demokratik ve toplumsal yaşama etkili biçiminde katılım için de gerekli kılmıştır. Sonuç olarak bugün okullar sağlıklı bir ekonomi için sadece bireysel insan sermayesini değil aynı zamanda sağlıklı bir toplum için sosyal sermayenin de yaratılması görevini yüklenmiştir. Aynı zamanda bilginin elde edilmesi kitaplardan ve öğretmenlerden dinamik olmayan enformasyonların pasif biçimde alınmasından, öğrenciler arasındaki tartışmalar yoluyla işbirlikli bir yapılandırmaya dayalı dinamik bir anlamaya doğru değişmektedir. Eğitimin iletişim becerisi üzerindeki yeni vurgusu bu yeteneği geliştirmek için sınıf etkileşimlerinin dramatik bir şekilde değişimini gerektirmektedir. Öğretim programlarındaki standartlar öğrenmede bilgiler (fact) ve işlemsel uygulamalar (procedures) üzerindeki vurgulara daha az yer vermekte ve öğrenme ve yapma için gerekli stratejiler üzerinde daha fazla durmaktadır. Sınıf söyleminin, öğretmenlerin test benzeri sorular sordukları ve öğrencilerin test benzeri kısa cevaplar verdikleri geleneksel örüntüsü yerini öğretmenlerin teşvik edici ve yüksek düzeyde düşünmeyi destekleyici tartışmalara imkan sağlayan sorular yönelttikleri biçime bırakmaktadır (s. 165).

Cazden & Beck'in öğretim programlarındaki anlayış değişikliğine yönelik ifadelerini matematik öğretimi açısından çeşitli biçimlerde örneklendirmek mümkündür. Örneğin NCTM'in okul matematiği ile ilgili oluşturdukları prensipler ve standartlarında da, matematik öğretme ve öğrenmede iletişim kurmanın önemli bir amaç olduğu, öğretim süreçlerinin anaokulundan liseye kadar tüm öğrencilerin matematiksel düşünmelerini iletişim aracılığıyla düzenleme ve pekiştirmelerine imkân tanıması ve matematiksel düşünceleri aracılığıyla akranları, öğretmenleri ve diğer kişilerle iletişim kurabilmeleri gerektiği (NCTM, 2000) vurgulanmıştır. NCSM'nin (National Council of Supervisors of Mathematics) başarılı biçimde matematik öğretimi ve öğrenimi yapma için gerekli gördüğü 12 bileşen içerisinde de "matematiksel fikirler ile iletişim" yer almaktadır (Ellerton & Clarkson, 1996). Güney Afrika 2005 matematik öğretim programında dilin matematik öğrenmede hayati bir rolü olduğuna vurgu yapılarak içerikteki 9. kazanımda ise doğrudan şu ifade edilmektedir, "Öğrenenler, matematiksel fikirler, kavramlar, genellemeler ve düşünce süreçleriyle ilgili iletişim kurabilmek amacıyla matematiksel dili kullanabilmelidirler" (Department of Education 1997a dan aktaran Setati, 2005: 77). İsveç Ulusal Eğitim Ajansı tarafından ortaöğretim düzeyi için yazılmış olan öğretim programında öğrencilerin gruplar içerisinde çalışma ve matematiksel iletişim kurma yeteneklerine vurgu yapıldığı (Ryve, 2004) görülmektedir. Kharing, Hamaguchi ve Ohtani (2007), Japon matematik öğretim programında doğrudan iletişime yönelik prensipler ya da öneriler bulunmamasına karşın Japon matematik eğitiminin derinlemesine öğrenilmesi durumunda matematiksel iletişimin çok güçlü bir şekilde geliştirildiğini ve vurgulandığını ifade etmektedir. Özellikle gözlem, uyarlama ve deneye dayalı matematik derslerinde öğrencilerin problemleri çözmede gruplar içerisinde işbirlikli bir biçimde çalıştıkları ve kendi çözümlerini açıklayarak paylaştıkları aktivitelerin matematiksel iletişimi oldukça iyi bir şekilde sağladığını belirtmektedirler. Vietnam'daki öğretim programı reformu ile matematik öğrenmedeki değişen yaklaşımı ve bu yaklaşımda iletişimin merkezi yerini Vui, (2007: 2) aşağıdaki tablo ile özetlemektedir.

Tablo 1

Vietnam'daki Geleneksel Matematik Öğretim Programı ve Yeni Matematik Öğretim Programı Reformunun Karşılaştırılması

Geleneksel Programın Destekledikleri	**Yeni Programın Destekledikleri**
Formüllerin ve bilgilerin hatırlanması	Matematiksel kavramların anlaşılması ve formüllerin türetilmesi
Algoritmaların işlemsel bilgisine odaklanma	*Düşünceler ve açıklamalarla iletişim kurma, problem çözme sürecine ve araştırmaya odaklanma*
Matematikte temel becerilerin ve işlemlerin öğretimi	Matematiksel fikirlerin algılanması ve matematiksel düşünmenin gelişiminde öğrencilere yardımcı olacak daha fazla aktif katılımlı aktiviteler
Öğrenciler çalışma kitapları ve ev ödevlerini tamamlamak için bağımsız olarak çalışır. Öğrenciler matematiksel kavramlar hakkında konuşmaya alışık değildir.	*Öğrenciler matematiksel kavramlar hakkında düşünür, tartışır, genişletir, ayrıntılandırır, sözelleştirir, yazar, dinler, okur ve araştırma yapar*
Ders kitapları öğretmenin net açıklamalarını ve sınıf kontrolünü yönlendirir	*İletişim, katılım, yorumlama ve anlamların tartışılmasına yöneliktir ve fark gözetmeksizin tüm sınıf üyelerini içerir*
Verilen bilgiler olgular/gerçekler (fact), algoritmalardır ve genellikle öğrenciler beklenen verilen bu bilgiler kümesini tanımlamak ve tekrarlamaktır	*Öğrenciler matematiği okuma, yazma, tartışma, ayrıntılandırma, düşünme ve araştırma yoluyla doğal olarak öğrenir*
Öğrencilerin bağımsız uygulama yapmaları	Öğrenciler gruplar içerisinde işbirlikli ve bireysel olarak çalışabilmelidir

Tayvan matematik öğretim programı açısından iletişim konusunu ele alan Lin, Shann ve Lin (2007), ise 2003 yılında düzenlenen öğretim programının temelde 4 konu çerçevesinde kategorize edildiğini ve bu 4 konuda yer alan 9 hedefin iletişime yönelik olduğunu ancak bunun yeterince açık ve anlaşılır biçimde sunulmadığını ifade etmektedir. Temel önerileri ise öncelikli olarak yazma yoluyla iletişimin öğretim programında yer alması yönündedir. Benzer şekilde Singapur (Har, 2007), Peru (Miyagui, 2007), Filipinler (Ulep, 2007) ve Çin (Wang, 2007) öğretim programlarının da matematik öğretiminde matematiksel iletişimi vurguladığı görülmektedir. Bunların dışında matematik eğitiminde dilsel becerilerden biri olan yazmanın doğrudan ya da dolaylı olarak iletişim becerisi altında ele alındığı standartlar ve öğretim programları da bulunmaktadır. Örneğin,

> İngiltere ve Wales'in Ulusal Programı (National Curriculum for England and Wales), Amerika Müfredat ve Değerlendirme Standartları (Curriculum and Evaluation Standards in USA), ve Avusturalya Okulları Ulusal Matematik Bildirisi (National Statement on Mathematics for Australian Schools) (Ntenza, 2006: 321-22).

Bu bilgilerin tümü dikkate alınarak, ulusal ve uluslararası standartlar ile pek çok ülkede matematik öğretim programlarının yeniden yapılandırılması ya da gözden geçirilmeleri sonrası iletişimin ve dilin daha merkezi ve işlevsel bir konumda görüldüğü ve öneminin gittikçe arttığı ifade edilebilir. Bu çerçevede ülkemizdeki duruma bakılacak olursa, köklü biçimde değişikliğe uğrayarak yeniden geliştirilen ve 2005-2006 yılında uygulamaya konulan matematik dersi öğretim programlarında da iletişimin merkezi bir yeri olduğu ve matematik öğrenmede iletişim kurmanın bir gereklilik oluşturduğunun açıkça vurgulandığı görülmektedir. Programın kavramsal yapısını gösteren şemada (Şekil-1) iletişim altı temel öğrenme alanından biri olarak yer almaktadır.

Ayrıca lise matematik öğretim programının geliştirmeyi amaçladığı dört beceriden biri iletişim kurma olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla iletişimin hem bir öğrenme alanı hem de kazandırılması istenen temel bir beceri olarak programın merkezi bileşenlerinden birini oluşturduğunu söylemek mümkündür. Öğretim programın metninde bu beceriye yönelik yapılan açıklamaların bazıları şöyledir,

> İletişim, öğrencilerin sezgiye dayalı bilgilerle soyut matematik dili ve sembolleri arasında köprü kurmada önemli bir rol oynar. Aynı zamanda iletişim, matematiksel düşüncelerin fiziksel, resim, grafik, sembolik, sözel ve zihinsel temsilleri arasında önemli bağlar kurmasında anahtar rol oynar. … Öğrencilerin

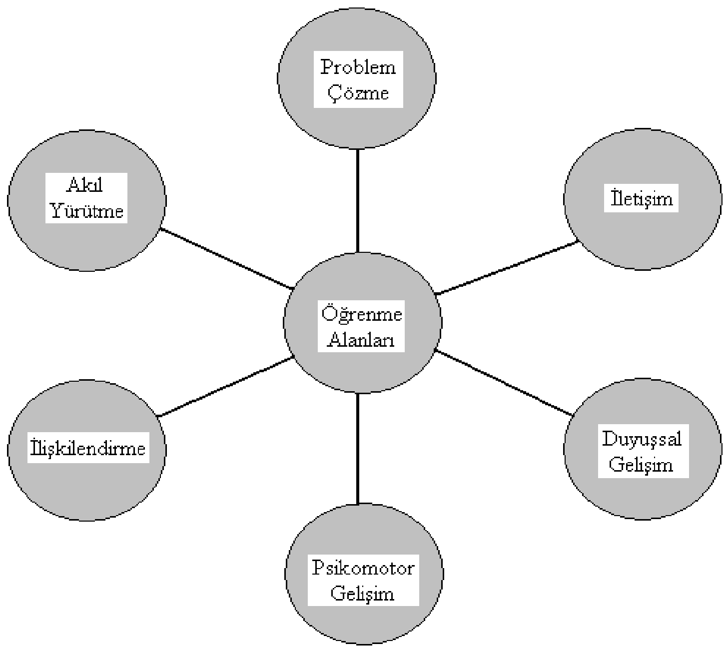
matematiğe dayalı iletişim becerilerini geliştirmesi için, sınıf ortamında düşüncelerini akranlarıyla rahatça paylaşabilmeleri gerekir. … İletişim becerisinin kazanılabilmesi için öğrencilerde aşağıdaki becerilerin geliştirilmesi hedeflenmiştir:

- Somut model, şekil, resim, grafik, tablo gibi temsil biçimlerini kullanarak matematiksel düşünceleri ifade edebilme,
- Matematik ve problemler hakkındaki düşüncelerini açık bir şekilde sözlü ve yazılı ifade edebilme,
- Günlük dili, matematiğe ait dil ve sembollerle ilişkilendirebilme,
- Matematik hakkında konuşma, yazma, tartışma ve okumanın önemini fark edebilme (s. 15-16).

İletişim kurmak, öğrencilerin bildiklerini yeniden gözden geçirmeye, toparlamaya ve yapılandırmaya yöneltecektir. İletişim, bir rapor veya hikâyenin hazırlanıp sınıfta sunulması, bir matematik probleminin kurulması, bir problemin çözümünün anlatılması gibi farklı biçimlerde olabilir. İletişim, öğrencilerin öğretmen tarafından daha iyi değerlendirilmesine de yardımcı olacaktır (s. 21).

Şekil 1

Matematik Programının Kavramsal Yapısı



(MEB, 2005: 11)

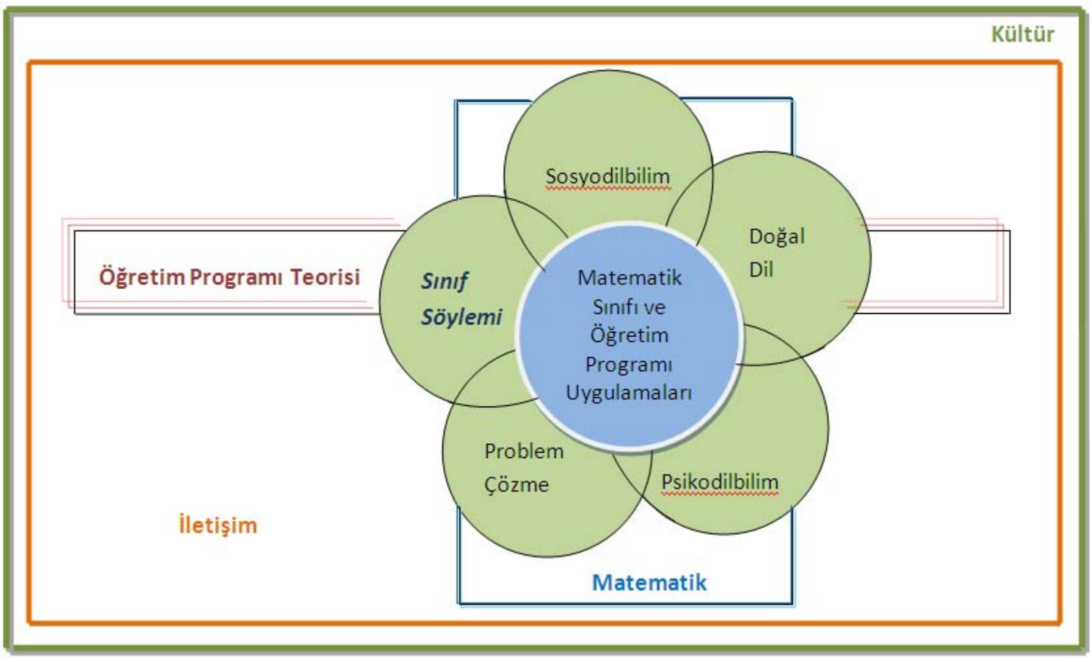
Cazden & Beck'in (2003) eğitim alanında iletişime yönelik bakış açısının değişmesi ve iletişimin öneminin daha da artması ile reform hareketlerinde *sınıf söyleminin* odak haline geldiğine yönelik düşüncesinin matematik eğitimcileri ve program geliştiricilerinin de ortak görüşü haline geldiği görülmektedir. Sierpinska (2005), son 20 yılda matematik eğiminin dile yönelik uğraşı alanlarında (minimum) üç temel yaygın teorik yaklaşım olduğunu belirtirken bunlardan üçüncüsünü '*söylem olarak dil*' biçiminde adlandırmıştır. Dil ve matematik eğitimi arasındaki ilişkilere yönelik 1980-90 arası araştırmalardaki boyutları ve çalışmaların genel yapısına bakışı anlamada Ellerton & Clements'in (1991) matematik ve dil arasındaki arayüz olarak isimlendirdikleri teorik şema (Şekil-2) incelenebilir. Bu şemada kültür-iletişim ve matematik arasındaki etkileşimler içerisinde sınıf söyleminin ayrı bir boyutu meydana getirdiği görülmektedir. Konuya dair daha yakın zamanlı görüşü yansıtan Sfard'ın (2001) sözleri ise şu şekildedir,

> Matematik eğitimi alanında söylem terimi bugünlerde herkesin dilindedir. Söylemin özellikle araştırma makalelerinde, öğretmen yetiştirme kurslarında, program niteliği taşıyan belgelerde öğretimsel politikaları belirlemek üzere kullanıldığı görülmektedir (s. 13).

Benzer şekilde hem matematik eğitimi hem de matematik eğitimcileri açısından söylemin ve onun incelenmesine yönelik ilgi ve dikkatin giderek arttığı açıkça ifade eden pek çok çalışmaya rastlamak mümkündür (Sfard & Kieran, 2001; Knuth & Peressini, 2001; Truxaw & De Franco, 2004).

Şekil 2

Matematik ve Dil Arasındaki Arayüz



Ellerton & Clement (1991: 19)

Bu noktada matematik eğitimi literatürü açısından söyleme ve SÇ'ne yönelik yaklaşımları daha yakından incelemeden önce dil (özellikle dilbilim) kaynaklarından yararlanarak bu iki kavrama yönelik genel yaklaşımları betimleme yoluna gidilecektir.

Söylem ve Bağlam

Dijk, sözcük olarak söylemin kökeninin Batı'da 2000 yıl kadar eskiye uzandığını ifade etmektedir, sözcüğün kökeninde tartışma, konuşma ve koşuşturma anlamına gelen 'discursus' sözcüğü yer almaktadır (Kocaman, 2003). "Türkçede ise söylem terimi ilk kez Türkçe Sözlüğün genişletilmiş 7. baskısında" (s. 4) görülmektedir. Söylem gerek akademik alanda gerekse günlük yaşamda çok farklı anlamlarla kullanılabilmektedir. Örneğin, Türk Dil Kurumu [TDK] resmi sitesinde yer alan sözlüklerde söylem, 1)söyleyiş, sesletim, telaffuz, 2)kalıplaşmış, klişeleşmiş söz, ifade, 3)bir veya birçok cümleden oluşan, başı ve sonu olan bildiri, tez, 4)bir şey bildirirken konuşanın ağzından çıkan sözlerin bütünü gibi karşılıklarla tanımlanmaktadır (TDK, 2010). Webster sözlüğünde ise söylem, 1)sistematik düşünmenin kapasitesi; rasyonelliği 2)düşüncelerin özellikle konuşma ile sözel aktarımları/değiş tokuşu, 3)bir konu üzerindeki düşüncenin formal sistematik ve genişletilmiş ifadesi/anlatımı (Sierpinska, 2005) şeklinde ortaya konulmaktadır. Günay (2010), anlamsal çeşitlilik açısından benzer bir durumun 1960-70'li yılların dilbilim çalışmalarında da var olduğunu belirterek Jean Dubois'in söylem tanımını örneklemektedir. Dubois söylemi, tümceye eşit ya da ondan daha büyük başı ve sonu olan bir dilsel birim olarak tanımlamıştır. Günlük kullanımda ise söyleme yüklenen anlamlardaki çeşitliliği; felsefe, görüş açısı, öğreti, ideoloji, anlatım biçimi, bakış açısı, dil, sav, görüş gibi ayrımlarda sıralayan Kocaman, (2003) bu ayrımlara Tablo-2'deki gibi örnekler (s. 5-6) sunmaktadır. [*orijinal metinde örnek ifadeler ve söylemin anlamları tablo ile verilmemiştir*]

Söylem tek bir cümleden daha uzun olan sözlü ya da yazılı dilin her türlü grubuna yönelik kullanılmaktadır (Cazden & Beck, 2003) ve "terim olarak söylem, hem dilbilimsel formun (yapının) hem de sosyal iletişimsel pratiklerin mantıksal yorumunu içermektedir" (Hicks, 1996: 51).

Tablo 2

Söylemin Günlük Kullanımdaki Bazı Anlamsal Karşılıklarına Örnekler

Örnek İfade	Söylemin Anlamı
Platon bu diyalogunda ***söylem*** *sanatının (retorik, belagat) ahlaksal ve siyasal gücünü … ele alır.*	Sözbilim, etkili söz söyleme sanatı. (Bu örnek sözcüğün tarihsel boyutunu yansıtan ilk anlamını örneklemektedir.)
[A yaklaşımını benimseyenlerin] ***söylemlerini*** *[X]Partisi kullanmaktadır.*	Anlatım biçimi, felsefe, görüş açısı, öğreti.
Marksist ***söylemde*** *diğer söylemlerden ödünç alınan kavramlara, bakış açılarına yer yoktur.*	İdeoloji, öğreti, kavramsal dizge.
Greimas kuramla uygulamayı birlikte sürdürür … değişik ***söylem*** *türleri, özellikle yazınsal söylem konusunda en ilginç çözümleme ve betimleme örneklerini verir.*	Sözlü, yazılı anlatım türü, iletişim değerli birim.
Nasıl olsa dilsel, yani toplumsal düzlemde değil, sözsel yani bireysel düzlemde yer alan bir değişikliktir yaptığım, kendi ***söylemim****, kendime mal ettiğim dilin sınırları içinde kalır.*	Bireydil (idiolect), anlatım biçimi, biçem.
… eğer gerçeklik kullandığımız ***söylem*** *yansıtılmakla kalmayıp bilakis oluşturuluyorsa, kullandığımız* ***söylemi*** *bilmek bir yana gerçekliğin kendisini nasıl bileceğiz?...*	Dil, bakış açısı, anlatım biçimi.

Foucault söylem ile bilgiyi temsil etmek için dil kullanımını sağlayan ifade biçimini kastetmektedir (Atay, 2007) "Söylem çalışması [dile ait] yapıyı da kapsayan ama onun ötesine geçen, özellikle bağlamı, işlevi, doğal iletişim koşullarını öne çıkaran bir yönelimi yansıtır" (Kocaman, 2003: 3). Bu bakış açısı söylemin kullanılan dil ve davranışlarla ilgili olduğuna ve kişinin yaptıkları ile söyledikleri arasındaki ilişkileri (Atay, 2007) de içerdiğine yönelik gönderim olarak algılanabilir. Potter ve Wetherell'e göre söylem "sözlü etkileşimin tüm formları (resmi ve resmi olmayan) ve her çeşit yazılı metin olarak ifade edilmektedir" (Potter & Wetherell, 1987). Cook ve Schiffrin'in yaklaşımına göre ise dilin,

(1) dil kurallarının nasıl işlediğini anlamak için çalışılan ya da dil öğretmek (okuma, yazma vb) amacı ile soyutlanan ve

(2) iletişim kurmak için kullanılan ve dolayısıyla da tutarlı bir bağlamda karşılaşılan şeklinde iki kategoride ele alınması durumunda, ikinci kategoride yer alan tipine söylem denir (Cook & Schiffrin den aktaran Tehrani & Yeganeh, 1999). Aynı zamanda Schiffrin fonksiyonel (işlevselci) açıdan söylemi ele alarak onu belirli fonksiyonların gerçekleştirilmesi ile oluşan bir sistem olarak görmektedir ki bu sistem konuşmanın sosyal ve kültürel olarak organize edilmiş bir biçimi (Erton, 2000) olarak algılanmaktadır. Kaplan ve Grabe (2002) ise söylemin kaynağını oluşturan bağlam açısından söylemi iki kategoriye ayırmıştır. Bunlar, sözlü söylem

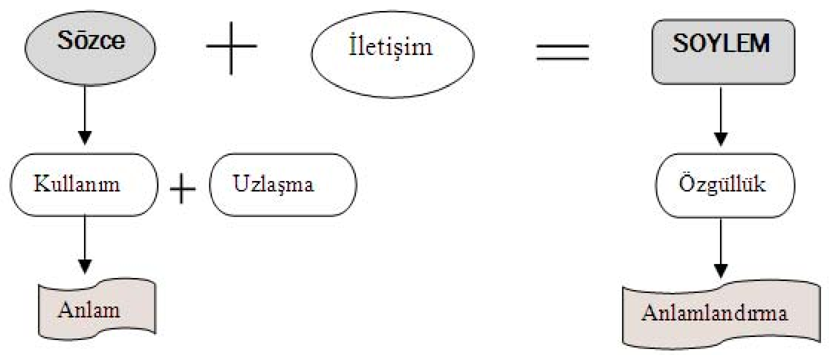
(multiple-source dialogic) ve yazılı söylem (single-source monologic) olup ilk kategorideki anlamı ile söylem bir grup içerisinde katılımcıların konuşmaları, tartışmaları, jest ve mimikleri gibi unsurları da kapsamaktadır (aktaran Atay, 2007). Söyleme yönelik daha spesifik biçimde tanımlamalar da bulunmaktadır. Örneğin, Sfard ve Kieran (2001) yaptıkları çalışmada söyleme yükledikleri anlamı,

> Altsüremli (diachronic) ya da eşsüremli (synchronic), kişinin kendisi ile ya da başkaları ile olan, öncelikli olarak sözel ya da herhangi başka bir sembolik sistem aracılığıyla gerçekleşen her türlü özel iletişim durumu (s.47),

biçiminde ifade ederken; Günay (2010), bir şey/konu/durum hakkında bir öznesi (vericisi), bir alıcısı ve bir konusu olan, öznenin kendi değer yargılarını ve güç değerlerini yansıtan, iç ve dış bağlama gönderimde bulunan tutarlı, tümce ötesi bir dilsel birim olarak nitelendirmektedir. Günay çalışmasında aynı zamanda sözce teriminden yararlanarak Maingueneau tarafından şekle dökülen sözce ile söylem arasındaki ilişki betimlemesine yer vermektedir. Sözce, "iki anlamsal boşluk ya da iletişim durağı arasında üretilen tümceler bütünü" (s.7) olarak tanımlandığında ortaya çıkan bu ilişkinin çizgisel modeli Şekil-3 deki (s.8) gibidir.

Şekil 3

Sözce ve Söylem Arasındaki İlişki



(Günay, 2010: 8)

Söyleme yüklenen anlamsal zenginlikler bir yandan bu terimin kavranmasını güçleştirirken diğer yandan kullanım ve kapsam alanını arttırmaktadır. Bu nedenle söylem ve onu çözümlemeye yönelik araştırmalarda söylemin ne anlamda ve hangi kapsamda inceleme olgusu yapıldığının betimlenmesi yapılan çalışmanın amacı ve bulgularını anlamada bir gereklilik oluşturmaktadır. Ayrıca göz önünde bulundurulması gereken temel nokta söylemin; bir metni oluşturan kişilerin, metnin kendisinin, metnin içinde yer aldığı bağlamın ve toplumsal durumun birlikte etkileşimi sonucu oluşan, devingen bir süreç olduğudur (Zeybek, 2003).

Bu doğrultuda buraya kadar ortaya konan bilgiler ışığında bu araştırmada söylemin ele alınış biçimi; *sosyo-kültürel bir yapıda, bir bağlam içerisinde, iletişim amaçlı kullanılan tümce ötesi dilsel bir form* biçiminde *olup, söylemin kullanımdaki sınırları ise Günay'ın çalışmasında yer alan şematik gösterimindeki* (Şekil-3) *gibi kabul edilmiştir*

SÇ'ye yönelik bilgilere geçmeden önce *bağlam* kavramına yönelik bazı kısa bilgilere değinmek söylem ve SÇ'nin anlaşılırlığını ve bağlam ile olan etkileşimi betimlemede katkı sağlayacaktır.

Bağlam

En genel anlamıyla bağlam "insanlar konuşurken ve yazarken etrafta gerçekleşmekte olan olaylar" (Halliday, 1991:5 'den aktaran Celce-Murcia & Olshtain, 2000: 11) ya da konuşan kişiler tarafından üretilen bir evren (Zeybek, 2003) biçiminde ifade edilebilir.

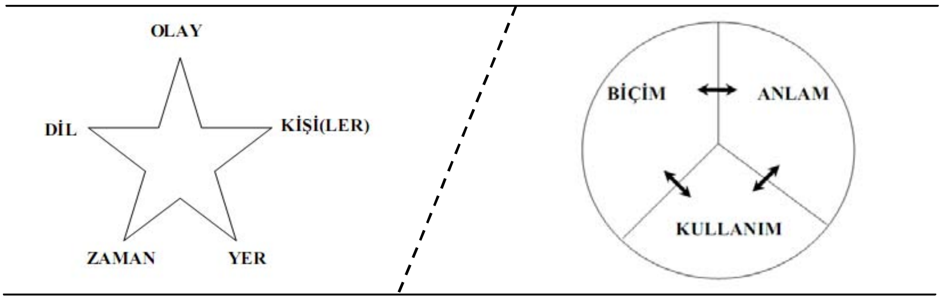
"Söylem dilbilimcileri dilsel seçimlerin rastgele yapılmadığını aksine sistematik bir şekilde bağlamsal faktörler tarafından belirlendiğine inanırlar" (He, 2002:4). Bağlamın SÇ'de oldukça önemli bir etkiye sahip olduğunu belirten Zhang & Liu (2005), bağlamın dilbilimsel zeminde ve dilbilimsel olmayan zeminde olmak üzere iki kategoride ele alınabileceğini öne sürmektedir. Dilbilimsel zeminde bağlam; daha önce ve/veya sonra oluşmuş kelime, ifade ve hatta tümce ya da metnin yer aldığı dilbilimsel ögeler ya da içerikler ile ilgiliyken dilbilimsel olmayan zeminde ise bağlam, dilbilimsel ögenin içinde kullanıldığı daha geniş bir sosyal durumla ilgilidir. Bu açıdan söylemi oluşturan şeyin dil ile dil dışı bağlamın etkileşimi (Kocaman, 2003) olduğu söylenebilir. Bağlam üzerinde yapılan SÇ, bir etkileşim durumundaki dilbilimsel ve bilişsel seçimleri kapsar (Celce-Murcia & Olshtain, 2000). Biçim ve kurallardan oluşan dilbilgisel yapıların iletişimde bir anlam ifade etmesi için uygun bir bağlamda kullanılmasının gerekliliğine vurgu yapan Cem, (2005) bu görüşünü Larsen-Freeman'ın (2001) dilbilgisi şemasından kullanarak şu şekilde açmaktadır, herhangi bir dilbilgisel yapının *biçim, anlam* ve *kullanım* olarak üzere üç boyutu vardır.

> "*Anlam* boyutu dilbilgisel yapının ne anlama geldiğini ifade ederken *kullanım* ise bu yapının hangi bağlamlarda, kimler tarafından nerelerde kullanıldığını ve bu bağlamlara yönelik ön varsayımları göstermektedir" (s. 11).

Ayrıca Cem'in makalesinde örnek olarak sunduğu cümlelere yönelik durumsal bağlamları oluştururken sıraladığı bağlam bileşenleri ise; dil, olay, zaman, yer ve kişi(ler) (s. 16) biçimindedir.

Şekil 4

Bağlamın Bileşenleri ve Larsen-Freeman'ın Dilbilgisi Şeması



Bu bileşenleri daha ayrıntılı ve sistematik biçimde ele alan bir model ise dilbilimin konuşma etnografisi olarak bilinen bir alt dalından ortaya çıkmış olup bu model SPEAKING akronimisi (Hymes, 1974 den aktaran He, 2002) ile bağlamın kapsamını açıklamaktadır. Bu akronimdeki harflerin anlamları şu şekilde verilmektedir; **S**ituation: (setting) durum, yer; **P**articipants: mesajı veren ve alan, katılımcılar; **E**nds: (goals and outcomes) amaçlar ve ortaya çıkan sonuçlar; **A**ct sequence: mesaj içeriği ve şekli; **K**ey: (tone, manner) tonlama ve davranış; **I**nstrumentalities: (forms of speech) konuşma biçimleri; **N**orms: etkileşim normları ve yorumlama normları; **G**enres: (types of text) metin türleri. Bağlamı açıklamaya yönelik yaklaşımlar, bağlamın içerdiği özellikleri ya da bileşenleri ele adığı gibi bağlamı çeşitlendiren bir sınıflandırma çerçevesinde de karşımıza çıkabilir. Bu duruma Goodwin & Duranti'nin bağlam sınıflandırması örnek gösterilebilir. Onlara göre bağlam dört türe ayrılabilir. Bunlar;

> 1) *yer, durum* (fiziksel ve etkileşimsel bağlam),
> 2) *davranışsal çevre* (sözel olmayan ve kinetik bağlam),
> 3) *dil* (co-text: 'bir metnin öncesindeki ve sonrasındaki diğer metinler' ve dilin dönüşlü kullanımı),
> 4) *ekstradurumsal* (sosyal, politik, kültürel ve benzeri) (1992: 6-8) bağlamdır.

Tüm bu niteliklerinin ve türlerinin yanı sıra bağlamın anlaşılmasında göz önünde bulundurulması gereken noktalardan biri de bağlamın durağan değil dinamik bir yapıda olmasıdır (May, 1993). Bir etkileşim ya da eylem anındaki gerçekliğin farklı bağlamlar çerçevesinde oluşan farklı yanları, aynı söylemin farklı biçimlerde yorumlanabilmesine (Holloway, 1997) de olanak sağlar.

Dilsel bir birimin iletişim amaçlı kullanımında dilbilgisel açıdan bakılsın ya da bakılmasın bir bağlama gereksinim olduğu görülmektedir. Çakır (2004) anlam-bağlam ilişkisine daha üst bir bakışla "anlam ancak ve ancak bir bağlamda var olabilir" (s.248) demektedir ve bu görüşünü daha ileri taşıyarak "toplumsal iletişimi mümkün kılan boyutların aslında dilsel olmayıp, ortak dilsel biçimlere kaynaklık eden bağlamsal ortaklıklar" (s.248) olduğunu belirtmektedir. Bu düşünce iletişim amacıyla kullanılan dildeki sözcüklerin sözcük anlamları, mecaz anlamları, metaforik kullanımları ve değişmiş/farklılaşmış anlamlarının tümü ile oluşan ve anlama kompleks bir nitelik yükleyen durumların, insanlarca nasıl algılanabildiği, yorumlanabildiği ve kullanılabildiği düşünüldüğünde cevaplardan birinin bağlam olmasıyla da desteklenebilir. Dolayısı ile anlamı inceleme konusu yapan ve buna bağlı olarak düşünme ve öğrenmeyi araştıran çalışmalarda dikkate alınması gereken önemli unsurlardan birinin de bağlam olduğu ortaya çıkmaktadır.

Söylem Çözümlemesi (SÇ)

"Söylemi incelemenin temel nedeni insan iletişimini bütünlüğü içinde kavramaktır" (Kocaman, 2003: 10). Söylem çözümlemesi kabaca, (farklı biçimlerde de olsa) söylemi, işlevi açısından incelemeye dönük yaklaşımların genel bir adlandırması; kullanılan dilin yakından incelenmesi (Taylor, 2001) ya da Akturan vd (2008) göre söylemi temel alarak günlük metinlerin söylendikleri bağlam içerisinde incelenmesine dayalı bir yaklaşım biçiminde ifade edilebilir. Holloway (1997), söylem analizcilerinin bir etkileşim ya da eylem anında yapılandırılan sosyal gerçeklik ve onun meydana gelme yolları ile ilgilendiklerini ifade etmektedir. SÇ özellikle "son 20 yıl içinde sosyal yapılar içerisindeki öğrenmenin incelenmesiyle ilgilenenler için önemli bir teorik bakış açısı haline gelmiştir" (Gee & Green, 1998: 119).

Söylemin çözümlemesini cazip ve ilgi çekici kılan pek çok unsurun (ve aynı zamanda zor hale getiren) ana düşüncesi, J. Austin in 'tümceler eylemlerdir' ifadesini temel alan; dil, eylem ve bilginin birbirinden ayrılmaz olduğunu kabul eden anlayıştır (Stubbs, 1983). İnsanların konuşma biçimleri [özellikle sosyal yapısalcı söylem çözümlemecileri açısından] dünyayı, kimliklerimizi ve sosyal ilişkilerimizi yansız (nötr) bir şekilde yansıtmaz aksine onların yaratılmasında ve değiştirilmesinde aktif rol oynar (Philips & Jørgensen, 2002).

> Söylem insan deneyimlerini yansıtır ve aynı zamanda da bu deneyimlerin önemli kısımlarını kurar. Bu nedenle SÇ, söylemin etkilediği veya söylem tarafından kurulan insani deneyimin herhangi bir parçasıyla ilgili olabilir (Punch, 2005 den aktaran Atay, 2007: 172).

Ancak SÇ'ye yönelik bu tür genel adlandırmaları özel ve net bir kalıba sokmak çok güçtür. Yani söylemde olduğu gibi SÇ'de de herkesçe kabul görmüş bir tanım ya da yaklaşıma ulaşmak mümkün görünmemektedir. Bu durum hem terim olarak söylemin biçim (sözlü, yazılı, sembolik, işaretsel vb) ve anlam (akademik ve günlük kullanım) olarak zengin bir çeşitlikte olması hem de söylemi analiz etmede kuramsal açıdan farklı perspektiflerin bulunmasından ileri gelmektedir. Bu sebeplere ayrıca, bir alan olarak SÇ'nin kökeninin felsefe, sosyoloji, dilbilim ve edebiyat teorisi gibi branşlara dayanması (Wood & Kroger, 2000), SÇ'yi kullandığını ifade eden [bazı] araştırmaların iyi raporlaştırılamaması (Cheek, 2004) ve net açık bir uygulama izlencesi sunamaması gibi diğer unsurlar da eklenebilir. SÇ'nin gerçekleştirildiği farklı disiplinlerde ya da disiplinler arası yaklaşımlarda farklı kuramsal çerçeveler ve analiz süreçleri bulunmaktadır ve bunların daha iyi/kötü, işlevsel/değil vb biçimlerde karşılaştırılması da doğru bir yaklaşım değildir. SÇ de yararlanılan bazı teorik perspektifler ve analitik yaklaşımlar: *söz eylem teorisi* (speech act theory), *etkileşimsel sosyodilbilim* (interactional sociolinguistics), *iletişim etnografisi* (ethnnography of communication), *edimbilim* (pragmatics), *konuşma analizi* (conversation analysis), *çeşitlilik analizi* (variation analysis) (Schiffrin, 1994) ve içerik analizi (content analysis) (Bilgin, 2000) biçiminde sıralanabilir. Her yaklaşım o alanda çalışan araştırmacılarca kendi felsefi temelinde ve söylemi incelemedeki amacını ve ortaya attığı soruları yanıtlamadaki yöntemsel geleneklerinde işlevsel ve tutarlı olarak görülmektedir. Bu nedenle SÇ oldukça çok anlam içeren ve net bir tanıma ya da kurallar zincirine sokulamayan bir alandır (Stubbs, 1983). Bu ifadesine karşın Stubbs, aynı zamanda SÇ'nin en genel anlamda sosyal bir bağlam içerisinde kullanılan dile ve özellikle konuşmacılar arasındaki etkileşime ve diyaloga ilişkin bir yaklaşım olduğunu ifade etmektedir. Benzer şekilde,

> Foucault yaklaşımı SÇ'yi dili kelimelerin, cümlelerin ve dilsel özelliklerin ötesinde ele alan; dikkatleri dilin kullanma biçimine, ne için kullanıldığına ve dilin içinde kullanıldığı sosyal bağlama [indirgemektedir.] (Atay, 2007: 169).

Ayrıca Stubbs, (1983) SÇ'nin ele aldığı konuları şu şekilde özetlemektedir; (a) SÇ cümle ve ifadelerin ötesindeki kullanılan dili ele alır, (b) SÇ dil ve toplum arasındaki karşılıklı ilişkileri ele alır, (c) SÇ günlük iletişimin etkileşimli diyalog şeklindeki özelliklerini ele alır.

SÇ'nin Dilbilime Bağlı Gelişim Sürecine Kısa Bir Bakış

Gerçekte SÇ'nin tüm türleri eğitim dışındaki alanlardan doğmuştur ve onların pek çoğu bir şekilde dilbilimle ilişkilidir (Rogers vd, 2005). Dolayısıyla söylemin analiz biçiminde geçmişten bugüne değin bir genişleme (çeşitlilik) olmasında diğer disiplinlerin de etkisi olmakla birlikte başat rol dilbilime aittir denebilir.

Dilbilimciler başlangıçta dile iki farklı yaklaşım geliştirmişlerdir. İlk grup dil bilgisini vurgularken diğer grup, dile ait bilgileri bireyler tarafından belirli amaçları gerçekleştirmek üzere belli bir iletişim ortamındaki doğal kullanımı ile ilgilenmişlerdir. İlk gruptaki dilbilimciler formalist, ikinci gruptakiler ise fonksiyonalist/işlevselci olarak anılmaktadır. Yapısalcı yaklaşımda dilin gramatik özellikleri yani formal yönleri ele alınmaktayken fonksiyonel çalışmalarda ise dilin nasıl kullanıldığı inceleme konusudur (Erton, 2000). Formalistler (örneğin Chomsky) dili öncelikle zihinsel bir olgu olarak ele alma eğilimindeyken, fonksiyonalistler (örneğin Halliday) ise dili öncelikli olarak toplumsal bir olgu olarak görme eğilimindedir (Leech 1983). Fonksiyonel yaklaşımın temel varsayımına göre dil anlam üretmenin kaynağıdır (Huang & Normandia, 2007). 1930 ve sonrasında dilbilimcilerin dile yaklaşımı ağırlıklı olarak yapısalcı iken 1980 ve sonrası ise anlamın dilbilimin iki farklı [semantik (anlambilim) ve pragmatik (edimbilim)] alanında ele alınmasıyla fonksiyonel çalışmaların arttığı görülmektedir. Anlambilimin odağı kelime ya da cümlelerin anlamıdır. Söylemler sözcük ve cümlelerin dilbilimsel anlamlarıyla ilişkilendirilerek açıklanmaya çalışılır (Akturan vd, 2008). Anlambilim sadece dilbilgisel bilgiden elde edilen anlama odaklanır (Peccei, 1999). Edimbilimde ise, belirli durumlara ve dilin kullanıcılarına gönderimle, kullanımdaki anlam ele alınır (Thomas, 1995). Anlambilim bir ifadenin anlamına odaklanırken edimbilim onun işlevini ele almaktadır (van Dijk 1981 den aktaran Çakır, 2004). İki alan arasındaki farkı Leech (1983) şöyle ortaya koyar; anlambilim " *X ne anlama gelir*" sorusu ile ilgilenirken, edimbilim "*X ile birey neyi kastediyor*" sorusu ile ilgilenir. Morris'in açıklamasından yararlanarak Çakır (2004) sözdizim (syntax), anlambilim (semantics) ve edimbilime (pragmatics) yönelik trafik lambaları üzerinde şu örneği vermektedir,

> Üç rengin sırasını ve düzenini **syntax** (kırmızı > sarı > yeşil); her bir rengin anlamını **semantics** (kırmızı "dur", sarı "hazır ol", yeşil "geç"); ve kişinin her bir rengi gördüğünde sergilediği davranışı **pragmatics** (kırmızıda durur ya da başka bir şey yapar, sarıda hazır olur ya da başka bir şey yapar ve yeşilde geçer ya da başka bir şey yapar) inceler (s. 246).

İngilizce'de tümcenin (ya da cümlenin) dilbilim açısından yapı, anlam, söylem ile arasındaki ilişkiyi ele alış biçimlerine yönelik yaklaşımları yukarıda söz edilen iki paradigma (yapısalcı ve fonksiyonalist) ile ilişkilendirilerek aşağıdaki gibi bir şekil (Şekil-5) oluşturulabilir.

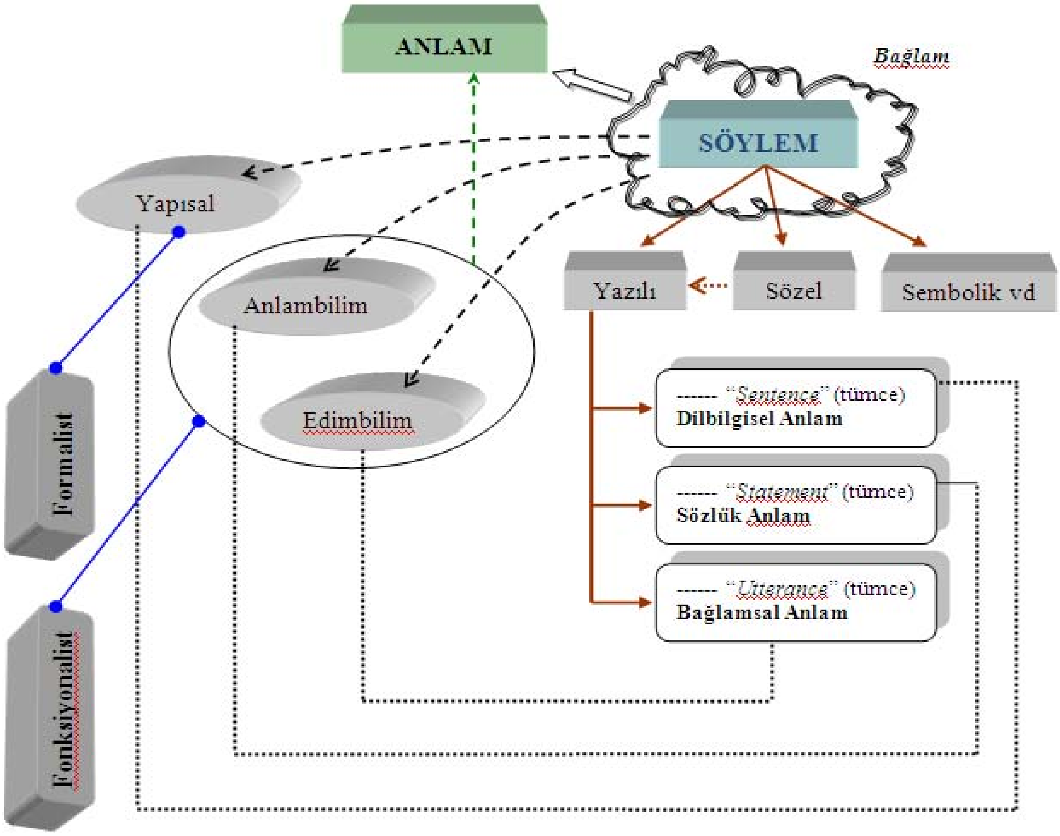
Verilen bilgiler ışığında şunu söylemek mümkündür; söylemi analiz etmeyi hedef alan çalışmalarda temelde yapısalcı ve fonksiyonalist olarak adlandırılan iki temel paradigmadan birinin benimsenmesinin yanında bu iki paradigma altında belirli bir kuramsal çerçeveye de (sözeylem teorisi, konuşma analizi, içerik analizi, pragmatik vb) gereksinim doğmaktadır. Böylece SÇ'nin muğlâk ve belirsiz gibi nitelendirmeler ile net bir tanıma sokulmayan genel yapısı olmasına karşın bir SÇ araştırmasının tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilip raporlaştırılmasında daha açık ve tutarlı bilgilere ve örneklere ulaşmak mümkün olabilmektedir.

SÇ'nin Kısa Tarihçesi

İngilizce'de terim olarak söylem çözümlemesini (aynı zamanda başlığını) kullanan ilk çalışma 1952 yılında Zellig Harris tarafından gerçekleştirilmiştir. Ayrıca Amerika'daki ilk dilbilim bölümünü kuran Harris gerçek kullanımdaki düzenlilikleri inceleyerek dil üretimindeki genel prensipleri belirlemeye çalışmıştır (te Molder, 2009) ve "dilin birimlerini incelemede, tümce boyutunu aşan bir sözcenin varlığını sezinleyen ilk dilbilimcidir" (Günay, 2010: 16). Sonraları 70'li yıllara kadar yapılan çalışmalarda da daha çok yapısal yaklaşımların hâkim olduğu görülmektedir. SÇ'nin ilk yılları olan o dönemde daha çok işaret bilim (semiotics) ve Fransız yapısalcılığının hâkim olduğu görülmektedir (McCarthy, 1991).

Şekil 5

Dilbilimsel Açıdan Söylem-Anlam-Tümce İlişkisi



Sonrasında SÇ örneklerinin sadece dile ait formal yapıları ve özel söylem türleri (masal, hikaye, vb) değil aynı anda dilin günlük doğal kullanımlarını da inceleme konusu yapmaya başladığı görülmektedir. Bu geçiş sürecinde felsefeci Austin'in öncülüğünde oluşan sözeylem kuramının etkisi olmuştur (Kocaman, 2003). O dönemin önemli çalışmalardan birisi de 1975'de dilbilimci Sinclair ve Coulthard tarafından yapılan (Potter, 2004) ve eğitim alanı için de söylemlerin bir inceleme alanı olmasını sağlayan sınıf içerisindeki etkileşimlerin incelenmesi araştırmasıdır. Bugün bile hem eğitimin diğer alanlarında hem de matematik eğitiminde araştırmalara zemin oluşturan bu yaklaşımda Sinclair ve Coulthard bir sınıftaki öğretim sürecinde var olan etkileşimi ayrıntılı olarak betimleyen bir çerçeve sunmuştur. Bu çerçevede öğrenci-öğretmen arasında; (öğretmen-in) *başlama* (initiation), (öğrencinin) *yanıt verme* (response) ve (öğretmen-in) *geri bildirim* (feedback) [BYG] biçiminde üçlü bir etkileşimin var olduğu (te Molder, 2009) ve bu döngünün pek çok sınıfta yaygın biçimde yer aldığı ifade edilmektedir. Sinclair ve Coulthard'ın çalışmasında öncelikli odakları söylemin alanının tanımlanması ve bunun söylemin doğası hakkında daha fazla şeyin anlaşılması için bir inceleme konusu oluşturmasıdır. Ancak onların araştırmasındaki söylemin incelenmesi eğitimsel ya da pedagojik amaçlarla değil dilbilimsel bir incelemedir (Chiristie, 2005). Sinclair ve Coulthard'ın öne çıktığı 1970 ve 80'lerde sınıf söylemi ve onun analizine yönelik çalışmaları kitabında ayrıntılı olarak ele alan Chiristie ayrıca şu bilgilere de yer vermektedir;

'Aslında Sinclair ve Coulthard'dan önce Bellack vd (1966), Flanders (1970), Barnes (1971) ve sonrasında Barnes & Todd (1977) sınıf söylemi üzerine incelemeler yapmıştır. Üstelik onların amacı tamamen sınıftaki etkinliklerin geliştirilmesi ve anlaşılması amacına yönelik bir bakışla sınıftaki etkinliğinin incelenmesinde konuşmaların doğasına odaklanmaktır. Bu nedenle bu çalışmalar Sinclair ve Coulthard'ın aksine doğrudan eğitimsel ve pedagojik amaçlara hizmet etmiştir. Dönemin eğitimsel açıdan söyleme yönelik oldukça önemli ve ses getiren bir diğer araştırması ise 1979 yılında Hugh Mehan'ın etnografik yaklaşımla gerçekleştirdiği sınıftaki öğrenme ve öğretmenin nasıl yapılandığını ele alan [Learning Lessons: Social Organization in the Classroom adlı klasikleşmiş] çalışmasıdır' (Chiristie, 2005).

Bu çalışmada Mehan sınıf söyleminin günlük konuşmadan ayrılan yanını ortaya çıkaran ve etkileşimin yapısını betimleyen Başlama-Yanıtlama-Değerlendirme (Initiation-Reply-Evaluation [BYD]) sürecini tüm ayrıntıları ile açıklamaktadır. Özellikle bu sıralı dizisel üçlü düzenin devam etmesinde değerlendirme aşamasını önemli bulan Mehan bu aşamayı öğretmenin, öğrencinin yanıtını doğru ya da yanlış olarak değerlendirmesine göre tamamlanan/biten ya da devam eden bir şekil aldığını ortaya çıkarmıştır (bkz. Mehan, 1979).

70 ve 80'lerde SÇ çalışmalarında önemli etki oluşturan diğer bir kişi ise dile fonksiyonel yaklaşımı ile tanınan İngiliz söylem analizcisi M. K. A. Halliday'dir

(McCarthy, 1991). Fonksiyonel yaklaşım özellikle dilin sosyal fonksiyonları ve iletişim üzerine odaklanarak, dilin gramatik özelliklerini onun nasıl kullanıldığına dikkate alarak açıklama çabasındadır. Doğal olarak bu yaklaşım bir bilgi sistemi olan dilin psikolojik sunumu ile daha az ilgilenerek daha çok dilin kullanımına önem veren bir anlayışı yansıtmaktadır (Evans & Green, 2006). Sonrasında özellikle 90'lı yıllarda Halliday ve meslektaşlarının (örn. Martin, 1992; Halliday, 1994; Matthiessen, 1995; Martin, Matthiessen & Painter, 1997; Halliday & Matthiessen, 1999) çalışmaları ile derinleşen bu yaklaşım 'sistematik fonksiyonal gramer' adını almış ve dilin analizine yönelik çalışmalarda önemli bir alan haline gelmiştir.

Dilbilim dışında temelini sosyal yapılar içerisindeki konuşmaların incelenmesindeki sosyolojik bir yaklaşım sunan Dell Hymes'in çalışması ve dönemin dilbilimci filozofları olan Austin (1962), Searle, (1969) ve Grice'in (1975) yaklaşımlarının oluşturduğu, dilin sosyal bir eylem olarak incelenmesi anlayışı (McCarthy, 1991), SÇ'nin sosyoloji, sosyalpsikoloji, sosyodilbilim gibi alanlar içinde bir çalışma alanı olmasına katkı sağlamıştır. 90'lı yıllarda söylemsel psikoloji (discursive psychology) alanı sosyal yapılandırmacılığın (social constructionism) bir dalı ve SÇ'nin önemli bir uygulama sahası olarak kendini göstermiştir. Kökeni Wittgenstein felsefesine uzanan söylemsel psikoloji özellikle Potter & Wetherell, 1987; Edwards & Potter, 1992; Potter, Edwards & Wetherell, 1993 çalışmalarıyla geliştirilmiştir. Bu alan çalışanları SÇ'yi psikolojik konulara uygulayarak, özellikle bilgi ve gerçekliğin nasıl yapılandırıldığı ile ilgilenmektedir (Edwards, 1997). Söylemsel psikolojiye göre dil yalnızca deneyimleri açıklamaz ayrıca deneyimleri ve öznel psikolojik gerçekliği de oluşturur (Philips& Jørgensen, 2002). İnsanlar bir konudaki düşüncelerini sunduklarında sadece zihinsel bir durumu ifade etmeyip sosyal bir eylemi de gerçekleştirirler (örn. suçlama, iltifat etme gibi). Dolayısı ile söylemlerin ele alınması ile sosyal eylemlerin araştırılması yapılabilmektedir.

Amerikan çalışmalarının SÇ alanındaki dominant eğilimi ise, belirli bir grup içerisindeki bireylerin doğal ortamlarındaki iletişim biçimlerinin yakından gözlenmesine yönelik bir yaklaşım olan etnometodoloji alanındadır ve bu yaklaşımın en temel uygulama alanı konuşma analizidir (McCarthy, 1991). Konuşma analizi 1960'larda Harvey Sacks ve arkadaşlarının çalışmaları ile doğmuştur. Başlangıçta günlük, sıradan konuşmalar üzerine yapılan incelemelerden ortaya çıkmış olup sonrasında genişleyerek, yapılandırılmış ve düzenli konuşma durumlarında da (örn. mahkemedeki konuşmalar) uygulanmaya başlamıştır. Sacks'ın ilk çalışmalarına bağlı olarak etkileşim anındaki konuşmanın incelenmesinde başlangıçta iki anahtar kavram ortaya çıkmıştır. Bunlar kategorizasyon ve sıralı organizasyondur. İlk kavram etkileşimle sınırlı olmayıp pratik mantık/akıl yürütme ile ilgiliyken, ikinci kavram özellikle etkileşimdeki konuşma (talk-in-interaction) ile ilgilidir (ten Have, 2007). Konuşma analizinde temel amaç yapısal olarak iyi organize edildiği varsayımı altında sosyal etkileşimde düzenli uygulamalar ya da eylemlerdeki örüntülerin ortaya çıkarılmasıdır. Sosyal eylemler konuşma, jestler, mimikler ya da nesne kullanımını içermektedir (Woodruff & Aoki, 2004). Konuşanların konuşmadaki ses akış düzeyi, konuşmada sırayı nasıl belirledikleri, birbirlerinin konuşmalarını ne zaman ve nasıl kestikleri gibi hususlar konuşma analizinin inceleme konusudur (Goodwin, 1981; Zeybek, 2003). Konuşma analizinin düzene ve yapıya verdiği önemin bir diğer göstergesi farklı konuşmacıların söylediği ard arda gelen iki sözceyi ifade eden 'bitişik çift' (adjacency pair) kavramıdır. Bu kavram, sözceler sıralı biçimde (birinci, ikinci gibi) düzenlendiğinde önceki sözcenin sonrakini gerektirdiğini ortaya koyar (Zeybek, 2003). Bitişikliğin önemi konuşmanın bağlantısını doğrudan (başka bir şeye gereksinim duymadan) sağlamasından ileri gelir (Sacks, 1971 den aktaran Zeybek, 2003).

SÇ'nin 1990'lar ve sonrasındaki son dönem gelişiminde ise Eleştirel Söylem Çözümlemesi [ESÇ] (Critical Discourse Analysis) adlı yeni bir alanın öne çıkmaya başladığı görülmektedir. Bu alanın öncüleri Frankfurt Okulu, Foucault ve Bakhtin'in çalışmalarından etkilenmiştir. Faucault çalışmalarında gerçeklik sorgulamasını toplumsal kuramlar çerçevesinde ele alarak güç ve iktidar arasındaki ilişkiyi irdelemeye (Büyükkantarcıoğlu, 2001'den aktaran Günay, 2010) girişmiştir. Böylece, Faucault söylemin, bilgi ve anlamın oluşturucu olduğuna ve kendi içerisinde temel bir güç oluşturduğuna vurgu yapmış ve SÇ alanına güç ögesini tanıtmıştır (te Molder, 2009). Ona göre söylem ve söylemin temelinde yatan bilgi ve düşünceye tarihsel, kültürel ve ideolojik bir bakışla (Doltaş, 2003) yaklaşılmalıdır. 1990'ların başında farklı akademik geçmişlerden gelen bir grup araştırmacının (ki bunlar Fairclough, Kress, van Dijk, van Leeuwen ve Wodak'tır) bir sempozyumdaki iki günlük tartışma ve çalışmaları sonrası oluşan disiplinler arası yaklaşım ESÇ'nin gelişimine (van Dijk 2001'den aktaran Rogers ve ark, 2005) önemli katkı yapmıştır. Ancak ESÇ'nin özellikle Norman Fairclough'un çalışmalarından doğduğu ve bu alanın teorik bir çerçeve olarak gelişmesindeki en özenli ve gayretli girişimi de Fairclough'un gerçekleştirdiği (Blommaert & Bulcaen, 2000) benimsenmiş bir görüştür.

> ESÇ, sosyal dünyayı temsil eden ve sosyal dünya tarafından temsil edilen, söylemin yapılandırdığı [ve] söylemin yapılandırılma yollarını betimlemek, yorumlamak ve açıklamak amacıyla sosyal teoriyi ve söylem çözümlemesini bir araya getirme girişimidir (Rogers vd, 2005: 366), ve

ESÇ,

> Bireyi imgesel evreninden koparıp simgesel düzeni benimsemeye koşullayan güç ilişkileri, değerler, ideolojiler, kimlik tanımlamaları gibi çeşitli toplumsal olguların dilsel kurgulamalar yoluyla yansımasını [belirleyebilmeyi] (Van Dijk, 2001 den aktaran Akturan vd, 2008: 30) sağlar.

Bu alanın çalışanları daha çok ırkçılık, cinsiyet ayrımcılığı (te Molder, 2009), feminizm ve politika gibi sosyal konulara yönelmiştir. Fairclough ve Wodak, ESÇ için sekiz temel prensip ortaya koymuştur (Rogers, 2004). Bunlar;

- ESÇ sosyal problemlere yöneliktir,
- Güç ilişkileri söylemseldir,
- Söylem toplum ve kültürü oluşturur,
- Söylem ideolojik iş yapar,
- Söylem tarihseldir,
- Sosyobilişsel yaklaşım metinler ve toplum arasındaki, onlara aracılık eden ilişkileri anlamayı gerektirir,
- SÇ yorumlayıcı ve açıklayıcıdır ve sistematik bir yöntem kullanır,
- ESÇ sosyal olarak kararlı bilimsel bir programdır (s.2), biçiminde sıralanmaktadır.

ESÇ "toplumsal değerlerin dili/söylemi belirlediğini öne sürer; ama dilin bu değerleri etkileme gücünü önemsemez" (Kocaman, 2003: 11).

Matematik Eğitimi Literatüründen Söylem ve Söylem Çözümleme Yaklaşımlarına Genel Bir Bakış

“Söylem çözümlemesinin en önemli avantajlarından biri araştırmacılara çeşitli sınıf içi öğretim metinlerindeki çok kompleks bölümlere hakim olma olanağı sağlamasıdır” (Meyer & Turner, 2002). “Söylem çözümlemesi ile sınıf içinde kullanılan söylemin ne kadar zekice ve derin olabileceği ve bu anlamda matematiksel anlamayı sağlamada ne kadar zengin ve yararlı olabileceği” (Seeger, 2001) ifade edilmektedir. Bu nedenle yakın zamanda matematik eğitiminde söylem ve sosyal perspektiflere çok yoğun bir ilginin olduğu görülmektedir (Barwell, 2003; Sfard, 2001; Morgan, 2006). Bu ilginin temel nedeni söylemin incelenmesi ile matematik sınıflarındaki öğrenme, anlama ve iletişimin yapısına yönelik çok yönlü ve derinlemesine incelemelerin yapılabilmesi ve alternatif bakışların sağlanabilmesidir. Matematik eğitimi ile söylem ve SÇ’nin tanışıklığı yaklaşık 30 yıl öncesine kadar uzanmaktadır. 1979 yılında Austin ve Howson’un ‘dil ve matematik eğitimi’ üzerine inceleme çalışması bu alandaki ilk örneklerden biri olarak görülebilir (Barwell, 2008; Pimm, 2004). Sonraları Halliday tarafından literatüre kazandırılan ‘matematiksel sözcük dağarcığı’ [MSD] (mathematical register) tanımlaması sonucu bu konuyu inceleme alanı yapan SÇ çalışmaları yaygınlaşmaya başlamıştır.

O yıllardan bu yana matematik eğitimcileri matematik sınıflarındaki söylemlerin; türü, yapısı, doğası, görevleri, öğrenme ve anlamadaki rolleri ve etkileri gibi konularda çok çeşitli araştırmaları gerçekleştirmiştir. David Pimm’in 1987 yılında matematik eğitimi alanına [daha ayrıntılı biçimde] SÇ’yi tanıtmasından (Wagner, 2007) sonra hem yapısal hem de fonksiyonel açıdan farklı çalışmaların gerçekleştirildiği görülmektedir. Bunlardan bazılarını Wagner (2007, s.32) şu şekilde sıralamaktadır;

> “**Sözlüksel** (sözbilimsel) ve **gramatik** özellikler açıdan yapılan çalışmalar: C. Bills, 2002; L. Bills, 2000; Gerofsky, 2004; Herbel-Eisenmann, in press; Morgan, 1998; Phillips, 2002; Rowland, 2000; Weingrad, 1998. **Göstergebilim** (semiotics) Duval, 1999 ve Radford, 2002; **Genre** Gerofsky, 2004; Pimm & Wagner, 2003; **Yorumlayıcı postyapısalcılık** (poststructuralist hermeneutics) Brown, 2001; **Konuşma analizi** (conversation analysis) Barwell, 2003 ve **Sosyokültürel yapı-çevre** (sociocultural milieux) Cobb, Yackel, & Wood, 1992.

Yukarıdaki sıralanan ve diğer araştırmaların ayrıntılı ve etkileşimsel bir yapıda irdelenerek söylem ve SÇ’ye yönelik genel akademik inceleme mekanizmasının betimlenmesi başka bir çalışma konusunu oluşturmaktadır. Ancak bu çalışmada alana yaptıkları katkı, taşıdıkları özgünlük ve diğer araştırmalardaki etkileri temel alınarak seçilen bir dizi önemli araştırmadan oluşturulan gruplama ile bir özetleme yapma yoluna gidilmektedir. Bu tür bir gruplama yoluyla; konunun karmaşık bir yapıda sunulmasının önüne geçmek, bu çalışmada kullanılan kodlamaları ve bunlara bağlı analizlerin nasıl yapıldığının örneklerini gösterebilmek, yapılan bu çalışmanın içeriğinin ve çalışmada kullanılan kodlamaların daha iyi algılanmasına katkı yapmak ve ülkemizde SÇ alanında çalışmak yapmak isteyen diğer eğitimci ve araştırmacılara konuya giriş niteliğinde temel bir bilgi zemini sağlamak amaçlanmaktadır.

Özetleme için oluşturulan gruplamada 5 başlık yer almaktadır. Bunlar;

(**I**) *İletişimin Bir Türü Olarak Düşünmenin İncelenmesinde SÇ: Odaksal ve Zihinsel İşlev Analizi,*
[Sfard (2000); Sfard ve Kieran (2001)]

(**II**) *Sosyomatematiksel Normlar ve Söylem,*
[Yackel ve Cobb (1996); Wood, Cobb ve Yackel (1993); Cobb, Wood, Yackel & McNeal (1992)]

(**III**) *Dilin Sosyalleştirilmesi Bağlamında Bir Sınıftaki Bilgi Yapılarına Yönelik Söylemsel Analizler,*
[Huang & Normandia, 2007; Huang, Normandia & Greer, (2005)]

(**IV**) *Anlamda Fonksiyonel İkilik Yaklaşımı,*
[Truxaw, Gorgievski, DeFranco, 2008; Casa & DeFranco, 2005; Blanton, Berenson & Norwood, 2001; Knuth & Peressini (2001); Peressini & Knuth (1998)]

(**V**) *Matematik Sınıflarındaki Söylemlerin Halliday'in Sosyal Göstergebilim Çalışmalarına Dayalı İncelemesi,*
[Thornton & Reynolds'un (2006); Atweh, Bleicher, Cooper, (1998)]

Gruplama sürecinde bu çalışmaların seçilmesinde özellikle sınıf söyleminin karakteristiklerini belirlemede ve yorumlamada (II. grup hariç) belirli bir özel kodlama sisteminin nasıl kullanılacağının örneklenmiş olması temel etkendir. Aşağıdaki bölümde özetlemede seçilen çalışmalar numaralandırıldığı şekliyle 5 grup altında sunulmakta ve her bir grupta yer alan çalışmaların genel bir derlemesini aracılığıyla o grubun temel özellikleri ortaya konulmaktadır.

I- İletişimin Bir Türü Olarak Düşünmenin İncelenmesinde SÇ: *Odaksal* ve *Zihinsel İşlev Analizi*

Düşünme ve iletişim kurma arasındaki ilişkiye geleneksel çizgiden farklı bir pencereden bakan Sfard, (2000) iletişimi bir alıcı ve verici arasındaki kodlanmış bir bilginin iletilmesinden öte, düşünmenin bir türü olarak gören bir anlayışın temsilcileri arasındadır. Bu bağlamda insanın bilişsel süreçlerine yönelik içe bakışlar sağlamada iletişimi/söylemi incelemenin önemini vurgulayan Sfard matematikle ilişkili çok sayıda SÇ çalışması olmasına karşın bunların çoğunun sınıftaki matematiksel pratiklerde oluşan kurallar ya da normlar üzerine olduğunu ancak matematiksel konuların öğretimini doğrudan ele alan SÇ çalışmalarının çok az yapıldığını, matematiksel nesnelere ilişkin çalışmaların ise hiç yapılmadığını ifade etmektedir. Birinin düşünmesinin kendisi ile iletişimi olduğu kabul edilirse buradan hareketle bir kişinin düşünme mekanizmalarının incelenmesinde kendisi ve diğer bireylerle olan iletişim durumlarının incelenmesinin yararlı olacağı belirten Sfard, araştırmasının amacını "iletişimin bir örneği olarak düşünmenin kavramsallaştırılmasının insana ait bilişsel süreçlere yararlı içe bakışlar sağladığını göstermek" (2000: 297) şeklinde ifade etmektedir. Matematik öğretiminde nesne (örn. sayı, küme) ve süreç ilişkisine yönelik bu araştırmasında Sfard yedinci sınıf matematik dersinde istatistiksel düşünme becerisine dayalı bir problem çözme uygulamasından elde edilen söylemleri analiz etmektedir. Yapılan çalışmada söylemlerin incelenmesi için *odaksal (focal) analiz* adı verilen bir analiz yöntemi geliştirilmiştir. Odaksal analizin temelinde Sfard'ın iletişim kavramına bakış açısı ve iletişimi etkili, başarılı kılan şeyin ne olduğuna verdiği yanıt yer almaktadır. Ona göre iletişim; konuşanın karşısındakinin belli bir şekilde düşünmesini, davranması ya da hissetmesini sağlamak amacıyla gerçekleştirdiği bir eylemdir. İletişim sürecindeki iki tarafın beklentileri ya da niyetleri açısından ortak olan söylemsel karakteristikler iletişimin etkili olup olmamasındaki temel unsurlardır. Söz konusu karakteristikler aynı ise ya da aynı biçimde algılanıyorsa iletişim başarılı olarak görülebilir (Sfard, 2000). Bir sözel iletişimin etkililiği, barındırdığı söylemlerin odağının niteliğine bağlıdır. Söylemlere ait söz konusu odaklar üç grupta sunulmaktadır. Bunlar; 1)*dile getirilen/telaffuz edilen (pronounced) odak*, 2)*kastedilen/niyet edilen (intended) odak* ve 3)*katılım gösterilen (attended) odaktır*. Bunlardan ilki topluluğa, gruba ait ortak olanı, ikincisi özel, bireysel olanı ve üçüncüsü ise diğer iki odağa aracılık eden, birinden diğerine geçişi sağlayan kategorileri göstermektedir. Sfard araştırmasında öğrenciler arasındaki söylemleri bu üç odak türü açısından yaptığı transkripten seçtiği örnekler üzerinde tablolaştırarak tartışmakta ve iletişimin başarı ve başarısız yanlarını ortaya koymaya çalışmaktadır.

Sfard & Kieran, (2001) tarafından gerçekleştirilen bir diğer araştırmada ise *odaksal analizi* tamamlayıcı ikinci bir analiz yöntemi tanımlanmaktadır. İletişimin başarısı ve başarısızlığını ortaya koymada odaksal analizin yararlı bir araç olmakla birlikte bunun nedenleri konusunda ipuçları sağlayamadığını belirten araştırmacılar *zihinsel işlev (preoccupational) analizi* adını verdikleri ikinci bir analiz türünü tanıtmakta ve uygulamaktadır. *Odaksal analiz* matematiksel konular düzeyinde öğrencilerin konuşmaları ile ilgili detaylı bir bilgi sunmakta ve böylece iletişimin etkililiğini ölçmeyi mümkün kılmaktadır. Bu yaklaşım ayrıca meta-mesajlar ile yönlendirilen *zihinsel işlev analizi* ile tamamlanabilmektedir. *Odaksal analiz* konuşmacının nesne/araç seviyesindeki (object-level) söylemsel hareketlerini parçalara ayırarak inceleme amacı güder. *Zihinsel işlev analizi* ise odaksal analizi tamamlamak için konuşma eylemini gerçekleştiren katılımcıların iletişimin farklı kanalları (örn. özel, kişilerarası/karşılıklı) arasında ve farklı seviyelerinde (nesne seviyesi, meta seviye) nasıl hareket ettiklerini belirleme amacındadır. *Zihinsel işlev analizi* iletişimi, iki temel bileşen çerçevesinde (kişisel ve kişilerarası) doğal biçimiyle, olduğu gibi ortaya koymayı sağlayabilmektedir. Sfard & Kieran (2001) yaptıkları bu araştırmada 7. sınıftaki (13 yaş grubundaki) iki öğrencinin (Ari ve Gur) aralarındaki söylemleri ele almaktadır. Söylemin yukarıda bahsedilen iletişim tanımı altında Sfard & Kieran tarafından kabul edilen tanımı ise;

> Altsüremli (diachronic) ya da eşsüremli (synchronic), kişinin kendisi ile ya da başkaları ile olan, öncelikli olarak sözel ya da herhangi başka bir sembolik sistem aracılığıyla gerçekleşen her türlü özel iletişim durumu (s.47) biçimindedir.

Başarı seviyeleri birbirine yakın olan bu iki öğrencinin "gün ışığı" başlıklı bir matematiksel öğrenme etkinliği sürecince etkinlik kapsamında sorulan sorulara yanıt bulmak için yaptıkları konuşmalar ve aralarındaki tartışmalar transkript edilerek çözümlemesi yapılmıştır. Ari ve Gur'un karşılıklı olarak anlaşmalarına açıkça engel olan şeyin ne olduğu araştırılmıştır. Yazarların bu tür analizleri yapmada kullandıkları temel araç ise *etkileşimsel akış diyagramıdır* (interactivity flowchart). Sfard & Kiearan'a göre iletişimde yer alan konuşmalar meta-söylemsel amaçları açısından iki türe ayrılabilir. Birincisi konuşanın karşısındakinin iletişime yönelik daveti niteliğinde olan önceki söylediklerine yönelik tepkisi/yanıtı (re-active), ikincisi ise karşısındakini iletişim kurmaya yönelten, ondan bir istekte bulunmaya yönelik davettir (pro-active). Reactive önceki söylemler ile ilişkili iken proactive yeni bir durumun ortaya konmasını amaçlar. Bu tür bir ikili ayrım söylemleri hâlihazırda söylenenler ve henüz söylenmemiş olanlar biçiminde de ikiye ayırmaya imkân sağlamaktadır. Reactive ve proactive yapıdaki karşılıklı konuşmalardaki ard arda söylemler, konuşanlar arasındaki meta-düzey amaçları resmeden oklar yardımıyla bir çizgisel grafiğe dökülebilmektedir. Söz konusu oklar meta-düzeyleri temsil eden metaforlardır. Akış diyagramı ile konuşmadaki görünen ve görünmeyen işaretler bir düzen içerisinde betimlenebilmektedir. Bu *etkileşimsel akış diyagramında* yer alan temel oklar ve anlamları şöyledir;

⟶ Nesne-seviye, konuşmacı tepki cümlesi ya da diğer konuşmacı yanıtlama cümlesi (*Object-level, re-or proactive utterance*)

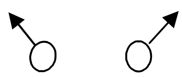
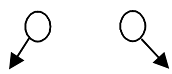
⋯⋯→ Meta-seviye, konuşmacı tepki cümlesi ya da diğer konuşmacı yanıtlama cümlesi (*Meta-level, re- or proactive utterance*)

– · – → Kararsız kalınan doğa (Undecided nature).

Diyagramdaki okların yönleri açısından da ifade ettikleri bazı anlamlar bulunmaktadır. Bu anlamlar Tablo 3'deki gibidir (s. 60).

Tablo 3

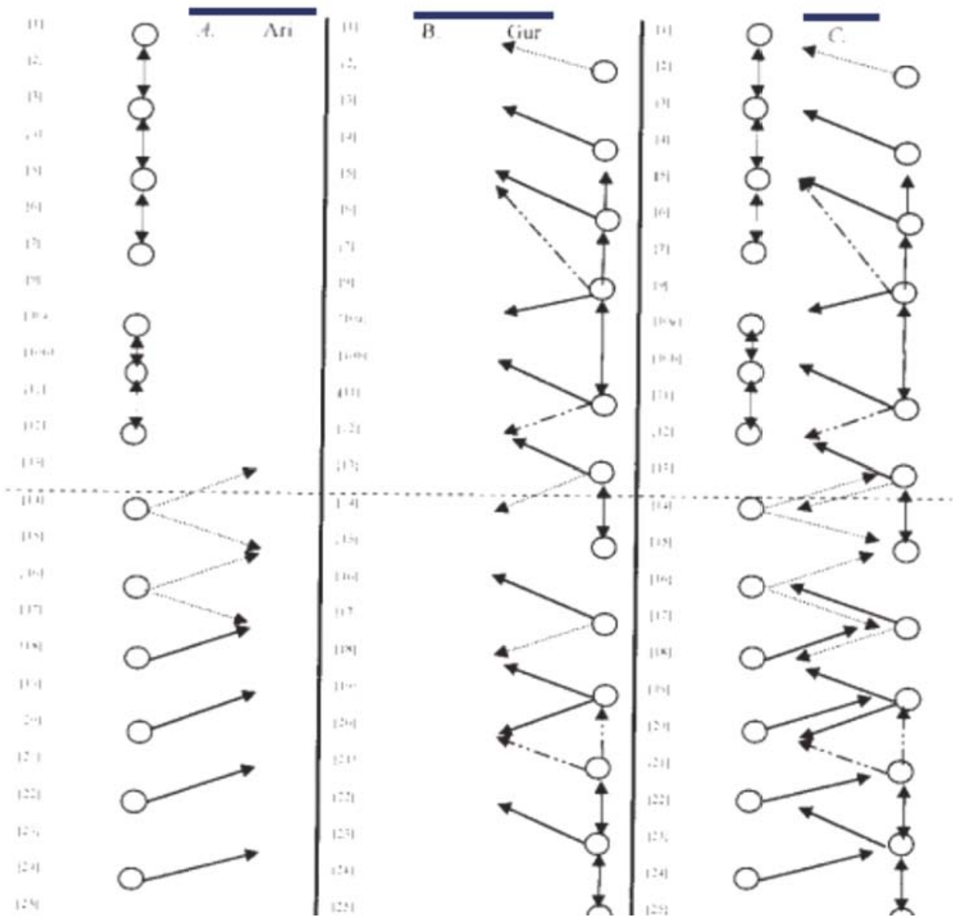
Etkileşimsel Akış Diyagramı Sembolleri

İletişim Kanalı Cümle türü	Kişisel-Özel	Kişilerarası
Re-active		
Pro-active		

Sfard ve Kieran'ın Ari ve Gur'un günışığı adlı etkinlikte aralarında geçen 49 cümleden oluşan konuşmalarında yer alan söylemler için çizdikleri etkileşimsel akış diyagramının bir kısmı aşağıdaki (Şekil 6) gibidir. Bu diyagramdaki ilk sütun Ari'nin, ikinci sütun Gur'un iletişim sürecindeki durumunun bireysel yönünü, üçüncü sütun ise ikisinin hem bireysel hem de karşılıklı durumunu betimlemektedir. Araştırmacıların bu diyagram aracılığıyla yaptıkları analizin sonuncunda iki öğrencinin çok farklı iletişimsel davranışlara sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Bulgular Ari'nin diyagramda da görüldüğü üzere iletişimde daha fazla bireysel ve re-active yapıda bir söylemsel karakteristiğe sahip olduğu, Gur ile iletişimden kaçınma eğiliminde olduğu ve bununda iletişimin etkili olmasında bir engel oluşturduğunu ortaya koymuştur. Gur ise daha fazla pro-active yapıda ve karşılıklı iletişime dönük söylemsel karakteristiğe sahiptir. İletişimin genelinde her iki öğrenci içinde ortak olan temel sonuç söylemlerin genellikle nesne seviyesinde gerçekleştiği biçimindedir.

Şekil 6

Ari ve Gur'un Günışığı Etkinliğindeki Söylemlerine Yönelik Etkileşimsel Akış Diyagramı



II- Sosyomatematiksel Normlar ve Söylem

Yackel ve Cobb (1996), ilköğretim birinci kademe matematik derslerindeki sınıf yaşamını ve sınıfta var olan kültürel ve sosyal normları incelemişlerdir. Bu incelemelerde öğrencilerin özel matematiksel inanış ve değerlerini nasıl geliştirdiklerini ve matematiksel yetenek ve entellektüel özerkliklerini nasıl ilerlettiklerini araştırmışlardır. Çalışmalarını özellikle yapılandırmacılık felsefesi üzerinde gerçekleştiren yazarlar teorik çerçevelerini etnometodoloji (ehtnomethodology) ve sembolik etkileşimselcilikten (symbolic interactionalism) yararlanarak genişletmişlerdir. Yazarlar özellikle sosyal normların yanında bir sınıftaki sosyomatematiksel normların varlığı ve işleyişine yönelik bulguları ile matematik eğitimi alanında oldukça dikkat çeken çalışmalar ortaya koymuştur. Başlangıç araştırmalarında sınıf içi mikro-kültürleri oluşturan sosyal normların gelişimlerinin öğretmenlerce başlatılması ve sürdürülmesine yönelik analizleri ortaya koymuşlardır. Ancak bu analizlerin ve beliren sosyal normların matematik sınıflarına özgü değil tüm genel sınıf yapıları için uygulanabilir olduğunu ifade eden yazarlar sonraki çalışmalarında sosyomatematiksel normlar olarak adlandırdıkları sınıf dinamiklerini betimlemekte ve analiz etmektedirler. Onlara göre farklı toplumlarda (farklı sosyal yapılar anlamında) sınıf içindeki söylemler de farklılaşabilir. Yackel ve Cobb inceledikleri sosyomatematiksel normların sınıf söylemini düzenlemeyi ve hem öğretmen hem de öğrenci için sınıfta oluşan öğrenme fırsatlarını etkilediğini ifade etmektedir. Bir başka çalışmalarında (bkz. Wood, Cobb, Yackel, 1993) özellikle odaklandıkları şey söylemlerin taşıdığı anlamlar ve bu anlamların nasıl kurulup söylemsel ilerlemeler üzerinde inşa edildiğidir. Söylem analizini, anlamları (understandings) araştırma bağlamında gerçekleştiren yazarlar incelemelerini problem çözümleri üzerine öğrencilerin küçük grup çalışmalarında ya da tüm sınıf bazındaki tartışmalar üzerinde yapılandırmıştır. Odaklandıkları temel noktalar ise etkileşim örüntüleri, iletişimsel söylemin doğası ve ortak paylaşılan anlamlardır. Özetle Wood, Yackel ve Cobb'un çalışmalarında psikolojik ve ağırlıklı olarak sosyolojik bir zeminde ilköğretim birinci kademe öğrencilerinin sınıf içi matematiksel öğrenmelerinin ele alındığı ve yapılandırmacılık bağlamında sosyomatematiksel normlar çerçevesinde söylemin incelendiği ve sınıf yaşamını yansıtmadaki rolleri açısından analiz edildiği söylenebilir.

III- Dilin Sosyalleştirilmesi Bağlamında Bir Sınıftaki Bilgi Yapılarına Yönelik Söylemsel Analizler

'Dilin sosyalleştirilmesi' kavramının, matematik konularının öğrenimi ile matematik dilinin edinimi arasındaki ilişkiye yönelik yararlı içe bakışlar sağladığını belirten Huang, Normandia & Greer (2005) çalışmalarını Ochs'un 1988 ortaya koyduğu (dil ve eylemin birbirlerini karşılıklı olarak etkilediği varsayımına dayanan) dilin sosyalleştirilmesi yaklaşımı üzerinde temellendirmektedir. Ochs'un fikirleri daha sonra fonksiyonel dilbilim çalışmalarına da (örn. Halliday, 1994; Martin, 1992; Mohan, 1986) kaynak sağlamıştır (Huang vd, 2005).

Yazarlar matematik eğitimi literatüründeki bir eksikliği ve dolayısı ile araştırmalarının önemini ortaya çıkaran şu sözleri ifade etmektedir; "matematik sınıflarındaki konuşmaların söylemsel özellikleri ile belirli matematik konularının çeşitli yönleri arasındaki bağıntıların sistematik analizi yapılmamıştır" (sy.36). Bu doğrultuda Huang vd'nin çalışmalarında ortaya koyduğu aktivite modeli aşağıdaki gibidir;

$$\left.\begin{array}{l}\text{Matematiğin dili}\\ \text{Matematik için dil}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{sınıf aktivitesi} \Leftrightarrow \text{sosyomatematiksel bilgi}$$

Bu modelden yola çıkarak yazarlar Mohan'ın (1986) tanımladığı *bilgi çerçevesini* [BÇ] (knowledge framework) araştırmalarının kuramsal çerçevesi ve aynı zamanda verilerin analizindeki kodlama basamakları olarak belirlemişlerdir. Mohan bir antropolog olan B. Malinowski'nin (1935) çalışması ve bilişsel psikoloji araştırmaları üzerindeki çalışmaları ile (1991, 1990, 1989, 1986 yıllarındaki) *bilgi yapıları* fikrini geliştirmiştir (Grant, 1995). Mohan kendi ifadesinde sosyal pratikler/eylemler içerisindeki bilgi yapılarının dile fonksiyonel dilbilim perspektifindeki yaklaşım içerisinde konumlandığını dile getirmektedir (Mohan, 2007). Ona göre tüm bilgiler altı ortak bilgi yapısı altında kategorize edilebilirler (Grant, 1995). Bunlar *sınıflama, prensipler, değerlendirme, tanımlama, dizi/ardışıklık* ve *tercih/karar vermedir*. Okullardaki çalışmaların tipik bir bölümü sistematik bir şekilde sosyal pratiklerin ve bilgi yapılarının entegrasyonuna sahiptir (Mohan, 2007). BÇ teorik ve uygulamaya dönük yanların kombinasyonu olarak, her türlü sosyal eylemde, örneğin ikinci dereceden bir denklemden ikinci derece parabolün formülünün nasıl elde edileceğinin açıklanması etkinliğinde, görülebilir (Huang & Normandia, 2007). Dolayısıyla BÇ öğrenme etkinliklerine, söylemlerin ve sosyal pratiklerin analizi yoluyla, bir bakış sağlamaktadır (Huang vd, 2005). Çerçevedeki teorik yanlar Mohan tarafından genel seviyede olanlar, uygulama/pratik yanlar ise özel seviyede olanlar şeklinde ikiye ayrılmıştır. Bu ayrımlarda yer alan bilgi yapıları aşağıdaki gibidir;

<u>Teorik yöndeki alt kategoriler</u>	<u>Uygulama yönündeki alt kategoriler</u>
sınıflama (classification)	tanımlama (description)
prensipler/kurallar (principles)	dizi/ardışıklık (sequence)
değerlendirme (evaluation)	tercih/karar verme (choice)

Tanımlama, dizi ve tercih bir etkinlikte yer alan eylemi, *sınıflama, prensipler* ve *değerlendirme* ise etkinliğin altında yatan teorik içeriği ya da ön bilgileri (Grant, 1995) kapsamaktadır. Teorik yöndekiler uygulamaya yönelik olanlara nazaran daha çok bilişsel olan kategorileri içermektedir (Huang & Normandia, 2007). Huang vd'nin araştırması matematik eğitimi alanında matematik konuları ve dil arasındaki bağlantılar üzerine BÇ'ye dayalı olarak SÇ yapılan ilk araştırmadır. Daha önce Early, Thew & Wakefield (1986) sosyal araştırmalar ve fen müfredatı üzerine yaptıkları analiz çalışmasında düşünme becerileri ve amaçlarını bilgi yapılarına uygulanabilir bir formda tanımlamışlardır (Grant, 1995). Huang ve arkadaşlarının araştırması bir özel lisede görev yapan Bayan G ve sınıfındaki 25 öğrenci ile aralarındaki söylemleri ele almaktadır. Üç ay boyunca bu sınıftaki matematik dersleri gözlenmiş, derslerin ses ve video kayıtları toplanmış, ders planları, resmi ve resmi olmayan görüşmeler yapılarak veriler elde edilmiştir. Araştırmada Bayan G'nin ve öğrencilerin söylemlerindeki bilgi yapıları araştırılmış ve var olan bilgi yapılarını ne derece benzerlikle matematik konuları üzerine yansıtabildikleri belirlenmeye çalışılmıştır. Araştırmacılar söylemlerin çözümlenmesinde Mohan'ın tanımladığı bilgi yapılarını doğrudan kodlama kategorileri olarak kullanmışlardır. Bu kategorilerdeki bazı alt kategorileri ise;

sınıflama: tanımlar, kavramlar arasındaki ilişkiler, taksonomik ilişkiler,
prensipler: etki-tepki, normlar, stratejiler,
değerlendirme: standartlar, amaçlar,
tanımlama: bağlam ve karakteristikler,
dizi: süreç, rutinler,
tercih: alternatifler, çözümlemelerdeki dilemmalar,

biçiminde ortaya koymuşlardır. Araştırmanın bulgularını transkript edilen metin örnekleri (9 adet vignette) üzerinde sunan ve bunları yorumlayan yazarlar üç temel sonuca ulaşmışlardır. Bunlar; 1-matematik konularına yönelik öğretmen söylemlerinde altı bilgi yapısının tümünün bulunduğu, 2-öğrenci söylemlerinde ise sadece düşük seviyedeki bilgi yapılarına (uygulamaya yönelik alt kategoriler) rastlandığı ve 3-öğretmenin sıklıkla öğrencilerini yüksek seviyedeki bilgi yapılarına (teorik yöndeki) doğru yöneltmesi, ilerletmeye çalışmasına karşın bu girişimlerinin genellikle başarısız olduğu ve öğrencilerin bu seviyedeki bilgi yapılarına ulaşamadıklarıdır.

Tablo 4

Huang ve ark. nın Araştırmasındaki 14/03/2003 Tarihli Metin Bölümü-1

Tanımlama		**Kodlama**
Ög	En basit parabol nedir?	*Sınıflama* farklı türler
Ör	$y=x^2$	
Ög	Standart formu nedir?	*Sınıflama*: formlardan biri
Ör	$y=ax^2+bx+c$	
Ög	Tepe noktasına göre olan formu nedir?	
Ör	$y=a(x-h)^2+k$	
Ög	Standart form için simetri eksenini nasıl bulabiliriz?	*Prensipler*: ….. ise ….. dir uygulaması
Ör	x= -b/2a	
Ög	Tepe noktasına göre olan form için	
Ör	x=h	
Ög	Daha sonra ne yapabiliriz? Tepe noktasını bul. Standart formu kullanarak tepe noktasını nasıl bulabiliriz?	*Dizi*: gerçekleştirme için adımlar
Ör	(-b/2a, f(-b/2a)).	
Ög	Tepe noktası formu için?	
Ör	(h,k)	
Ög	Şimdi y noktasını bilmeye ihtiyacımız var. Standart formu kullanabilir misin?	
Ör	Bu c	
Ög	Evet, standart forma bak, x=0 olduğunda y=c dir. Tepe noktasına bağlı form için ne dersin?	
Ör	x=0 için	
Ög	Sonraki adım nedir?	
Ör	x noktasını bulmak	
Ög	Nasıl?	*Prensipler*: … mek için
Ör	y=0 diyelim	
Ög	Sonra? Son adım nedir?	*Dizi*
Ör	Denklemi çözmek	

Ög: Öğretmen, Ör: Öğrenci

(Huang vd, 2005: 40)

Yukarıda sözü edilen metin bölümlerinden (vignettes) seçilen bir örnek Tablo-4'deki gibidir.

Huang ve Normandia'nın diğer (2007) çalışmasında ise bu kez yazılı söylemlerin analizi gerçekleştirilmiştir. Matematik öğrenmede ve öğretmede dilin kullanım formlarından biri olan yazmanın önemli bir role sahip olduğunu belirten yazarlar matematikte yazma üzerinde yeterince araştırma olmadığına da dikkat çekmektedir. Bu bağlamda yazarlar öğrencilerin yazılarındaki belirli matematik konularına yönelik kavramsal anlama ve işlemsel bilgiye yönelik (o bilgilerle birleşen, eşlik eden) iletişimde kullanılan belirli dilsel özellikleri araştırmışlardır. Önceki çalışmalarında (Huang vd, 2005), teorik anlama ve işlemsel bilgiye yönelik bilgi yapılarının öğretmen söylemlerinde zengin bir çeşitlilikte bulunmasına karşın öğrenci söylemlerinde çoğunlukla uygulamaya yönelik bilgi yapılarının yer aldığını bulan yazarlar bu çalışmada ise öğrencilerin matematikteki yazmalarında da benzer bir durumun olup olmadığını incelemiştir. Kuramsal yapısı fonksiyonel dilbilim ve onun altında Mohan'ın BÇ üzerine kurulan bu araştırma ise önceki çalışmanın verilerine bağlı olarak yazmaya gönüllü olan 11 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Ancak makalede özel olarak seçilen iki öğrencinin (Jenna ve Deanna) bir etkinlikteki (parabole yönelik ikinci derece denklemin formülünün türetilmesi) yazılı söylemleri çözümlemelerine ve çıkan sonuçlara yer verilmektedir. Sınıfın matematik öğretmeni ikinci dereceden denklemlerin köklerinin bulunmasına yönelik formülü elde etmeyi içeren etkinliğe yönelik öğrenci yazılarındaki matematiksel içeriği dikkate alarak puanlı bir değerlendirme yapmıştır. Bu iki öğrenci ise bu değerlendirme (en düşük not Deanna 45 puan, en yüksek ise Jenna 49 puan) çerçevesinde seçilmiştir. Huang ve Normandia'nın yazılı söylemler üzerindeki çok yönlü analizi anlamsal ve dilbilimsel özellikler açısından iki öğrenci arasındaki dilsel farklılıkların matematik konularına yönelik içeriğin yazılı söylemler üzerinde yapılandırılmasında da kendini gösterdiğini ortaya koymuştur. Jenna'nın yazısında *prensipler* bilgi yapısında toplam 30, Deanna'nınkinde ise 16 örnek görülmüştür. Benzer şekilde farklı yapılardaki dilbilimsel araçların toplamında da Jenna (65), Deanna'dan (51) daha fazla kullanımda bulunmuştur. Anlamsal ilişkiler açısından (semantic relations) Jenna'nın sadece işlemsel rutinleri değil bunların neden-sonuç ilişkilerini kurabildiği ve hedef-sonuç ilişkilerini adım adım gösterebildiğini ancak Deanna'nın daha çok sözel açıklamalar yoluyla rutin işlemsel zincirlere dayalı bir teorik açıklama yapma eğiliminde olduğu görülmüştür. Tüm (11 kişi) öğrenciler dikkate alındığında ise sözel söylemlerin aksine yazılı söylemlerde daha fazla bilişsel düzey içeren (yani teorik yöndeki kategori kapsayan) bilgi yapılarına rastlandığı ifade edilmiştir. 11 öğrencinin hepsinin yazılı metinlerinde *sınıflama, prensipler ve değerlendirme* bilgi yapıları gözlenmiştir.

Ulaşılan temel sonuç ise kavramsal anlama ve işlemsel bilgi için belirli özel dilbilimsel özelliklerin kullanımının gerekli olduğu ve bu özelliklerin eksikliğinin anlamsal ilişkilerin kurulmasını (negatif) etkileyebildiğidir (Huang & Normandia, 2007).

IV- Anlamda Fonksiyonel İkilik Yaklaşımı

Yuri Lotman (1988) tüm metinlerin (metin=text: sözel ifade/cümleler, yazılı parçalar/bölümler ya da resimler) fonksiyonları yardımıyla iki gruba ayrılabileceğini ifade etmiştir (Knuth & Peressini, 2001). Bunlar; "bir mesajın maksimum seviyede doğrulukla iletimini üretmek" ve "iletim aracılığı ile yeni mesajın yaratılmasını sağlamaktır" (Lotman, 2000: 60 dan aktaran Truxaw, 2004). Bu fonksiyonlardan ilki kısaca '*anlamı taşımak/iletmek*', ikincisi ise '*anlamı oluşturmak*' biçiminde ifade edilmektedir. Wertsch 1991'deki çalışmasında Lotman'ın fonksiyonel ikilik (functional dualism) yaklaşımından yararlanarak bu iki gruba yönelik sırasıyla* '*univocal*' ve '*dialogic*' terimlerini kullanmış (Knuth & Peressini, 2001) ve sonrasında literatürde bu şekilde kabul edilip kullanılmasına kaynak sağlamıştır. Bu iki söylem türünün grafiksel gösterimini Şekil-7 deki gibi ortaya koymak mümkündür. Univocal söylem [**U(S)**] konuşmacının, dinleyicinin kabul etmesi beklentisiyle oluşturduğu iletişim durumunu karakterize ederken dialogic söylem [**D(S)**] ise konuşmacının gönderdiği belirli bir mesajı dinleyicinin başlangıç olarak kabul ettiği karşılıklı iletişim durumunu (Knuth & Peressini, 2001) betimler. Yani U(S) gönderenin alıcıya bir tek mesajı ilettiği bir iletim modelini temsil ederken D(S) ise yeni anlamlar üretme ile ilişkidir ve gönderici ile alıcı arasındaki bir iletim alış-verişine (Wertsch &Toma, 1995) gönderimde bulunur.

---

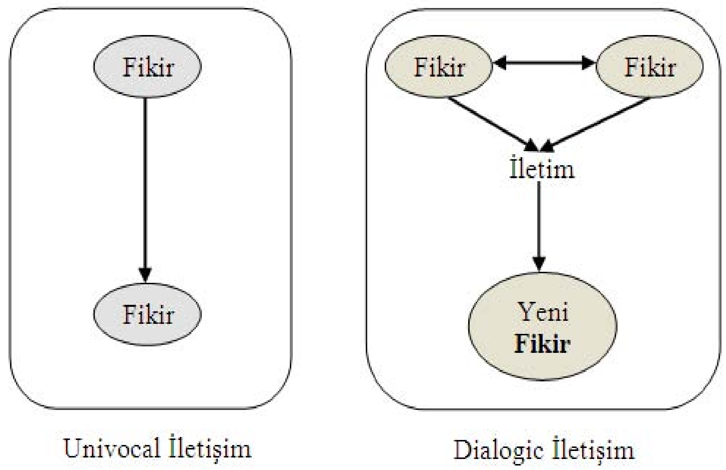
* Bu çalışmada söylemin bu iki türü için anlam kayması ya da azalmasına sebeb olunmaması ve uygun nitelikte tam Türkçe karşılık bulunamadığı için İngilizce'de ki orijinal terimler olan *univocal* ve *dialogic* terimleri kullanılacaktır.

U(S) kabul edilen, kodlanan ya da depolanan söylem biçimini, D(S) ise iletişime katılanlardan birinin sorgulaması, geçerli kılması ya da hatta reddetmesi yoluyla aktif bir şekilde yorumlama yaptığı söylem türünü ifade eder (Blanton, Berenson & Norwood, 2001).

Lotman, diyalogu bir düşünme aracı olarak görmektedir, bu nedenle D(S) bu araç yoluyla anlamların üretilebileceği söylem türünü (Knuth & Peressini, 2001) temsil etmektedir. Truxwa, Gorgievski & DeFranco (2008), U(S)'nin iletimin bir yönden diğer yöne tek taraflı akışını temsil ettiğini vurgulamak için onu tanımlamada '*kanal'* metaforunu kullanmıştır.

Şekil 7

Univocal ve Dialogic İletişimin Grafik Gösterimi



(Truxaw, 2004: 31)

Wertsch & Toma (1995) Tokyo'da bir ilköğretim beşinci sınıfındaki fen derslerinde öğretmen-öğrenci ve öğrenci-öğrenci arasındaki etkileşimleri inceleyerek var olan söylemleri adı geçen iki fonksiyon (univocal, dialogic) açısından çözümlemişlerdir. Böylece sınıf içi iletişim süreçlerindeki söylemlerin incelenmesinde önemli bir kapı aralamış ve sonrasında bu alanda pek çok çalışmanın yapılması (matematik eğitimindeki bazı çalışmalar: Peressini ve Knuth (1998); Knuth ve Peressini (2001); Blanton, Berenson & Norwood, 2001; Blanton, 2002; Gallos, 2003; Truxaw & DeFranco, 2004; Casa & DeFranco, 2005; Truxaw & DeFranco, 2007; Truxaw, Gorgievski & DeFranco, 2008; Olson & Truxaw, 2009 biçiminde örneklenebilir) sağlanmıştır.

Matematik eğitimi alanında bu konuda öncü çalışmalardan biri Peressini & Knuth'in (1998) görevdeki öğretmenler için bir profesyonel gelişim projesi altında soyut matematik konularının ortaokul müfredatına entegre edilmesi projesi kapsamında gerçekleştirilmiştir. Araştırmada projeye katılımcı 40 öğretmenden George adında üç yıllık deneyime sahip bir matematik öğretmeninin hem bir öğretmen hem de yaz aylarında profesyonel gelişim grubu içinde fakültedeki derslerde bir matematik eğitimi öğrencisi olarak söylemleri ele alınmıştır. Soyut matematik konularına yönelik fakültedeki yaz çalışmalarındaki öğrendikleri, edindikleri bilgileri kendi sınıfında öğrencilerine nasıl yansıttığı ve bu süreçte söylemlerinin doğası ve rolü fonksiyonel ikilik çerçevesinde incelenmiştir. Özelikle odaklanılan şey George'nin hem kendi sınıfındaki hem de fakültedeki öğrenci olduğu derslerdeki soyut matematik konularına yönelik söylemlerdeki benzerlikler ve farklılıklardır. Ulaşılan temel sonuç George'nin kendi sınıfında öğrencileri ile olan söylemlerinin ağırlıklı olarak U(S) formunda olduğudur. George kendi sınıfında öğrencilerini dinlerken D(S) biçiminde bir dinleme eğilimindeyken konuşurken U(S)'e doğru kaymaktadır. Hem fakültedeki yaz derslerindeki akademisyenin hem de George'un kendi sınıflarında öğrencilerini dinlenmeye dönük eğilimi D(S) biçiminde olup bu nokta fakülte ve okul arasındaki söylemler açısından temel benzerlik olarak görülmüştür. Ancak fakültedeki derslerde öğretmen-öğrenci konuşmalarının da D(S) biçiminde yapılabilmesine karşın George'nin sınıfında konuşmaların George'nin U(S)'ye dönmesi ve öğrencileri ile iletişiminde büyük oranda U(S)'e sahip olması temel farklılık olarak ortaya çıkmıştır.

Matematik eğitimi alanındaki öncü nitelikteki ikinci bir çalışma yine Knuth & Peressini (2001) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada ise yazarlar reform temelli matematik öğretiminin görevdeki matematik öğretmenlerince daha iyi anlaşılması ve uygulanmasına yönelik bir profesyonel gelişim projesinde katılımcı olan yedinci sınıf matematik öğretmeni Bayan Bee'nin sınıfındaki bir etkinlik esnasında öğrencileri ile arasındaki söylemlerini veri olarak sunmaktadır. Özellikle öğretmenlerin profesyonel gelişim çalışmalarında onları kendi sınıflarında anlamlı söylemleri kullanmaya yönelik teşvik edilmelerine vurgu yapan yazarlar, Bayan Bee'nin söylemlerinin yer aldığı matematiksel diyalogları analiz ederek yorumlamıştır. Çalışmada öğretmenin öğrencilerine yaptırdığı grup çalışmasına dayalı bir etkinlik süresince öğrencileri ile olan diyaloglarının anlamı *taşıma* ve *oluşturma* ayrımında neden *univocal* bir yapıda olduğunu ayrıntılı olarak ortaya konmaktadır. Sonrasında Knuth ve Peressini aynı transkript metni üzerinde aynı etkinliğin yapısal bir dönüşümle nasıl D(S) biçiminde gerçekleştirilebileceğini de örneklemektedir.

Bir diğer çalışma ise matematik eğitiminde reform hareketlerindeki merkezi eksenlerden birinin söylemler olduğu ve söylemler aracılığı ile öğrencilerin matematiksel düşüncelerinin araştırılabileceği düşüncesine dayalı olarak Blanton, Berenson & Norwood (2001) tarafından öğretmen adayları üzerinde gerçekleştirilen bir araştırmadır. Sınıf söylemi ve matematik öğretme ve öğrenme arasındaki bağlantılara yakından bakmayı amaçlayan bu çalışmada uygulama okullarındaki staj döneminde olan ilköğretim ikinci kademe matematik öğretmen adaylarından birinin (Mary Ann) uygulama okulundaki sınıfında (7. Sınıf) var olan söylemlerin doğası, bunlardan hareketle o öğretmen adayının gelişimi hakkında nasıl çıkarım yapılabileceği ve söylemler aracılığıyla öğretmen adayının gelişim sürecine nasıl aracılık edilebileceği ele alınmaktadır. Mary Ann'in öğretim uygulamalarına yönelik gözlemler ve yapılan derinlemesine görüşmeler ile ortaya çıkan öncül bulgular sınıf içi söylemlerin doğasının univocal fonksiyonda olduğunu ortaya çıkarmıştır. Mary Ann sınıftaki söylemlerde daha otoriter ve kendi beklentileri yönünde yönlendirici bir roldedir. Ancak zamanla ders anlatımlarında özellikle problem çözme etkinliklerinde Mary Ann'in gelişimi ve bunu sınıf söylemine yansıtması dialogic yapıyı da barındıracak bir şekle dönüşmüştür. Söylemlerin genel dağılımda U(S) ve D(S)'yi birlikte barındırmakta ve D(S)'nin ilk zamanlara göre daha fazla ve tekrarlı örüntüsel bir bir yapıda kullanılmaya başladığı görülmüştür. Bu dönüşümde araştırmacıların Mary Ann'in kendisiyle yaptığı görüşmelerin ve sınıftaki öğrenci davranışlarını gözlemlemesinin etkisi olmuştur. Bir bakıma sınıf söylemi de Mary Ann'ın öğretim stratejilerinin değişmesinde etki oluşturmuştur. Sonuçta bir matematik öğretmen adayının staj uygulama dönemindeki deneyimleriyle hem kendi hem de sınıfındaki öğrencilerin söylemlerinin yapısı ve kullanılma biçiminin önemini fark ederek bunu nasıl yöneteceğine yönelik bir gelişim sürecine girerek pedagojik yaklaşımını iyileştirmiş ve bunu U(S) den U(S) + D(S) ye geçiş olarak öğretim ortamına yansıtmıştır.

Söylemin analizinde fonksiyonel ikilik yaklaşımından çok sayıda araştırmasında yararlanarak bu alanda öne çıkan bir başka araştırmacı ise Mary P. Truxaw'dur. Truxaw (2004), kendi doktora tez çalışması ve sonrasında meslektaşlarıyla birlikte gerçekleştirdiği diğer çalışmalarında (örn. Truxaw & DeFranco, 2004; Truxaw, 2005; Truxaw & DeFranco, 2005; Truxaw & DeFranco, 2007; Truxaw, Gorgievski & DeFranco, 2008) U(S)-D(S) ayrımından yola çıkarak ilköğretim matematik sınıflarında anlama (meaning) aracılık eden bir araç olarak sınıf söyleminin akışına yönelik bir model geliştirmeyi ve buna bağlı bir teori inşa etmeyi amaçlamıştır. Bu model farklı bileşenleri içeren 4 temel kısımdan oluşmaktadır. Bunlar;

-- Söylemin fonksiyonunu belirlemede *univocal*, *dialogic* ayrımı,
-- Sınıftaki söylem yapılarını belirlemede araştırma literatürden yararlanarak *tek kişilik sözel eylem* (move), *etkileşim* (exchange), *sıralı* (sequence) ve *üst bölüm* (episod) yapıları,
-- Sosyodilbilim literatüründen yararlanarak grup tartışmalarındaki konuşmaların türlerini belirlemede *tekil konuşma* (monologic talk), *yönlendirici/destekleyici konuşma* (leading talk), *keşfedici konuşma* (exploratory talk) ve *doğrulayıcı-açıklayıcı konuşma* (accountable talk) formları,
-- Söylemlere yönelik akışı belirlemede sözel ölçmenin etkisine ve rehberliğine yönelik, *durağan/pasif ölçme* (inert assessment [IA]) ve *oluşturmacı/üretimsel ölçme* (generative assessment [GA]) kategorileri biçimindedir.

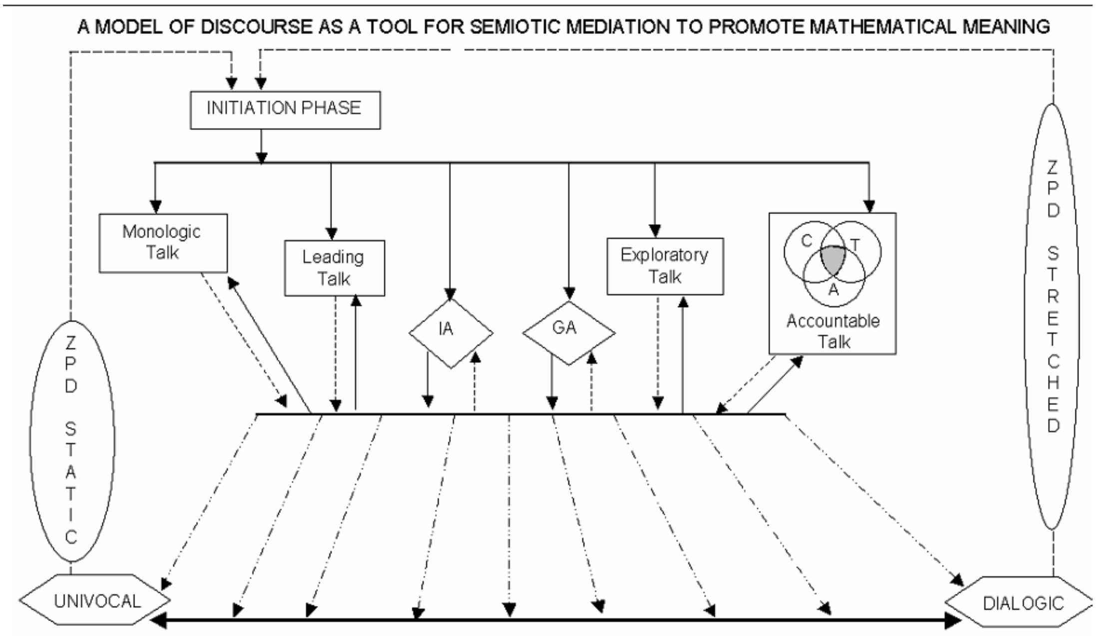
Truxaw ve meslektaşları bu bileşenleri kullanarak matematik sınıflarındaki söylemlerin akışını betimleyen bazı haritalamaların ve grafiklemelerin yapılabileceğini (Şekil-8.a ve 8.b) ve onlar aracılığıyla matematik öğrenme-öğretme sürecine daha yakından bakılabileceğini göstermeye çalışmıştır.

Bu model çerçevesinde Truxaw & DeFranco, 2007'deki araştırmasında 35 yıllık deneyime sahip 8. sınıfta matematik öğretmenliği yapan Bay Larson'un öğrencileri ile iletişim süreçlerindeki söylemlerini incelemiştir. Larson'un sınıfına yönelik bu incelemede U(S) ve D(S)'nin karışımı olan bir tümevarımsal öğretim stratejisi içeren modelin (inductive teaching-learning model) nasıl uygulandığı betimlenmektedir. Bir cebir dersindeki etkinlikten yola çıkılarak Bay Larson'un söylemleri U(S)-D(S) bağlamında nasıl yönettiği mercek altına alınmıştır. Elde edilen bulgular Bay Larson'un sınıfındaki söylemlerin ağırlıklı olarak *dialogic* formda oluşmasını ve ilerlemesini sağladığını göstermiştir.

Şekil 8

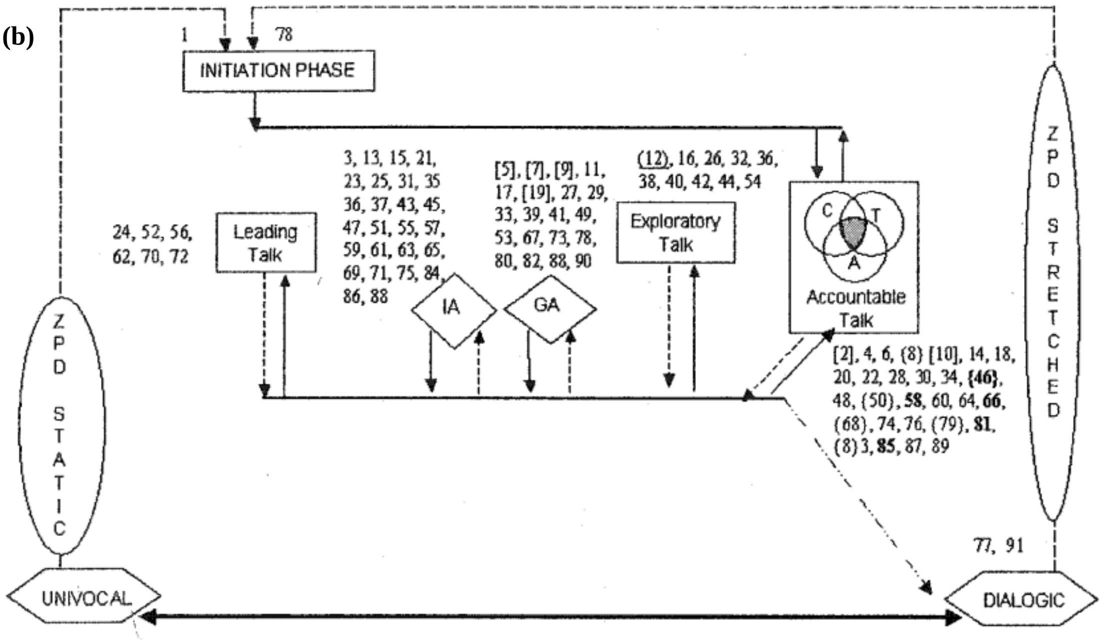
Anlama Aracılık Eden Sınıf Söyleminin Modelli (a) ve Modelin Uygulandığı Bir Örnek (b)

(a)



(Truxaw, 2004: 114)

(b)



(Truxaw, 2004: 146)

Bir açık uçlu problem durumunu sunarak etkinliğe başlayan Larson, problem üzerinde ilerledikçe akıl yürütme sürecini genişleterek uygun, keşfedici ve araştırmaya yönelten ek soruları sormuş, öğrencilerin kendi fikirlerini açıklamalarına ve bunu yaparken fikirlerinin doğruluğu ya da yanlışlığını da sorgulamalarına zemin hazırlamış, varılan sonuçları öğrencilerce geliştirilen bazı hipotezlere indirgeyerek matematiksel zeminde tartışmaya rehberlik etmiş ve öğrencilere verdiği cevaplarda onları daha fazla düşünme ve paylaşımda bulunmalarına teşvik etmiştir. Bu nedenle bu etkinlikteki söylemlerin genel fonksiyonu *dialogictir*. Aynı zamanda Bay Larson'un yönetimindeki zengin söylemsel çeşitlilik onun hem *univocal* hem de *dialogic* söylemleri bir arada uygun biçimde kullanmasını ve buna bağlı olarak yeni kavramların geliştirilmesini ve yeni anlamların oluşumunu sağladığını göstermiştir.

V- Matematik Sınıflarındaki Söylemin Halliday'in *Sistemik Fonksiyonel Dil-Bilgisi Modeline* Dayalı İncelenmesi (*Field, Tenor & Mode of Discourse*)

Bu tez çalışmasında kullanılan kodlama sistemi ve bu kodlama temelinde yapılan SÇ bütünüyle Halliday & Hasan'ın (1989) üç bileşenli modeline dayanmaktadır. Bu nedenle bu bölüm ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur.

İngiliz SÇ'si dilbilimci M.A.K. Halliday'in dile fonksiyonel yaklaşımından büyük ölçüde etkilenmiştir. Halliday'in çizdiği çerçeve dilin sosyal fonksiyonlarına vurgu yapar (McCarthy, 1991). Halliday'a göre dil ile ilgili çalışmaların odağında insanların dili günlük sosyal yaşam içerisinde bir (iletişimsel) amacı gerçekleştirmek üzere nasıl kullandıkları yer almaktadır (Eggins, 2004). Halliday'ın dile yönelik bu bakışı *Sistemik Fonksiyonel Dil-Bilgisi* [SFD] (Systemic Functional Grammer/Linguistics) adıyla büyük etki uyandırmış bir dil bilgisi modelinin oluşmasını sağlamıştır (Fawcett, 2000). "Temelini sosyal göstergebilimden (social semiotics) alan bu model (s.1)", "dili stratejik ve anlam üreten bir kaynak olarak gören betimleyici ve yorumlayıcı, önemli bir çerçeve olarak kabul edilmektedir (s.2)" (Eggins, 2004). Sosyal göstergebilim insanların anlam sistemlerini ne şekilde yapılandırdıklarına odaklanan ve anlamı sosyal etkileşim kanalıyla üretilen aktif bir süreç olarak (Chapman, 2003) ele alan bir yaklaşımdır. SFD öncelikle dili bir kurallar sistemi olarak değil anlamın bir kaynağı olarak betimler; SFD ikinci olarak anlamın tartışıldığı temel birim olarak cümleleri değil metinleri ele alır, başka bir deyişle dilbilgisine söylemin gerçekleştirilmesi olarak yaklaşır; üçüncü olarak SFD metinler ve bağlamlar arasındaki (metinler ve onların gerçekleştirdikleri sosyal pratikleri arasındaki) ortak ilişkileri inceler (Halliday & Martin, 1993). Buradan yola çıkarak sistemik dilbilimciler dil ile ilgili dört ana teorik iddiayı öne sürmektedir;

> 1-Dil kullanımı fonksiyoneldir,
> 2-Dilin fonksiyonu anlamlar üretmektir,
> 3-Bu anlamlar, içerisinde değiş-tokuş edildikleri kültürel ve sosyal bağlamlardan etkilenirler,
> 4-Dili kullanma süreci göstergebilimsel bir süreçtir (bağlama uygun seçim yaparak anlam oluşturma sürecidir) (Eggins, 2004: 3).

Sosyal göstergebilimin odağında anlamın oluşturulduğu/yaratıldığı düşüncesi yer almaktadır. Başka bir değişle anlamlar, nesneler veya somut gerçekler olarak varlık göstermezler, bir göstergeler (işaretler) sistemleri aracılığıyla yapılandırılırlar (Chapman, 2003). Kavram olarak gösterge ise; "insanların her zaman ve her yerde kendilerini, kendilerine ve başkalarına karşı yansıtmakta kullandıkları simgesel biçimlerdir" (Günay, 2004: 56). Gösterge başka bir şeyi temsil etmek için var olan fiziksel bazı şeyler (things) olarak açıklanabilir. Bir tablo ya da fotoğraf, trafik işaretleri, jest ve mimikler, renkler, müzik, yazılı veya sözlü bir kelimeler gösterge örnekleri olarak verilebilir.

> Ferdinand de Saussure (1957) bir dilbilimsel göstergeyi/işareti (sign) gösteren (signifier) ve gösterilenden (signified) oluşan iki yönlü bir varlık olarak tanımlamaktadır. Bir gösteren göstergenin materyal (fiziksel nesne) yönünü oluştururken, gösterilen ise materyal sembol ile bağlantılı zihinsel kavramdır. Örneğin … ağaç kelimesi hem /a/, /ğ/, /a/, /ç/ materyal seslerden hem de bizim ağaç diye bahsedilen şey ile ilgili zihinsel kavramımızdan oluşur (aktaran Francis, Yu, Francis & McCrory, 2009).

Sosyal göstergebilimin temelinde gösterge ile gösterilen (temsil ettiği fiziksel nesne) arasındaki anlam üretmeye dayalı saf dilbilimsel olmayan ilişkinin incelenmesi yer almaktadır (Chapman, 2003). Sosyal göstergebilimim bir diğer katkısı da kendi içerisinde *bağlamın* kavramsallaştırılmasına yöneliktir (Morgan, 2006). Sosyal göstergebilim açısından bağlam sadece iletişim olayının gerçekleştiği anlık/durumsal bağlamı değil aynı zamanda o bağlamı da içine alan daha geniş yapıdaki kültürel bağlama da gönderimde bulunur. Her bir bağlamsal durum izole olarak değil sosyogöstergesel değişkenlerden oluşturulan göstergesel yapıların bir örneği olarak ele alınabilir (Morgan, 2006). Söz konusu değişkenler söylemin ***alanı*** (field of discourse) [**SA**], ***katılımcısı*** (tenor of discourse) [**SK**] ve söylemin ***stili*** (mode of discourse) [**SS**] olarak adlandırılmaktadır. Bu kavramlar aslında Halliday &

Hasan (1989) tarafından söylemin incelenmesine ve yorumlanmasına yönelik geliştirilmiş olan bir modelin üç bileşenini (Atweh, Bleicher & Cooper, 1998) oluşturmaktadır ki bu üç bileşen sosyal bağlamın üç yönünü betimler.

1-Söylemin Alanı (SA): Söylemde neyin olup bittiğiyle ve gerçekleşiyor olan sosyal eylemin doğasıyla ilgilidir (Atweh et. al. 1998). Başka bir değişle SA kullanılan dilin ne hakkında olduğunu, katılımcının ne tür bir deneyimi dile getirdiğini ve dil aracılığıyla neyin olup bittiğini kapsar (Benson ve Greaves, 1981). SA, bulaşık yıkamaktan parlamentodaki tartışmalara kadar farklı her türdeki sosyal eylemle ilgili olabilir (Renkema, 2004). Bir metin SA açısından analiz edilirken incelenilecek şeylerin başında *sözcüksel ögeler (lexical items)* gelmektedir (Mechura, 2005).

Sözcüksel ögeler: Bir söylem (=metin) ne ile ilgili olduğu, o söylemin içerisinde yer alan sözcüklerin incelenmesiyle kolayca anlaşılabilir. Sadece söylemdeki belirli bir sözcük türüne bakılarak bile bu inceleme yapılabilir. Bir söylem SA açısından incelemeye girişildiğinde sözcüksel ögelere yönelik iki temel soruya cevap verilmeye çalışılır (Mechura, 2005).

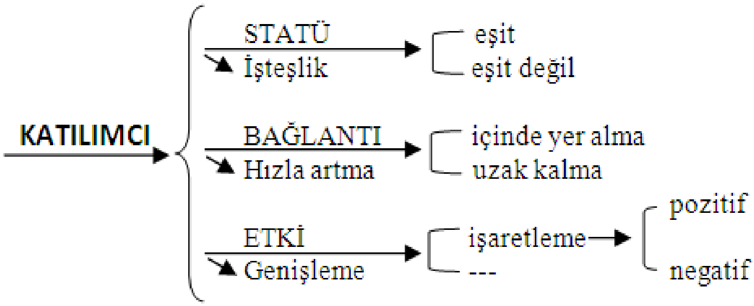
a- *Söylem içerisindeki sözcükler hangi çalışma alanına girmektedir?*
b- *Söylem içerisindeki sözcükler genel kitle ve o alandaki uzman kitle tarafından ne kadar iyi bilinmektedir?*

Bu sorulardan ilki söylemdeki *anlamsal* (semantic) alanlara, ikincisi ise *uzmanlaşmaya* (specialization) yönelik incelemeleri içerir. *Anlamsal* alanlar için söylemdeki belirli kelimelere (örn. isimler) ya da söyleme ait sözlüğe (söylemin içinden araştırmacı tarafından oluşturan sözlük/liste) bakılabilir. Söylemlerin sözcüksel ögeler açısından *uzmanlaşmaya* yönelik incelenmesi yapılırken, araştırmacının sezgileri, oluşturduğu sözlük/liste ya da söylemin ait olduğu çalışma alanındaki külliyattan (corpus research) yararlanılabilir (Mechura, 2005).

2-Söylemin Katılımcısı (SK): Söylemde kimin yer aldığı, katılımcıların doğası, statüleri ve rolleri ile ilgilidir (Atweh et. al. 1998). “ SK, katılımcılar arasında var olan rol ilişkilerinin türleri hakkında ipuçları sağlar” (Renkema, 2004: 46). Renkema, SK’nin hem katılımcıların konuşma türlerini hem de içerisinde yer aldıkları sosyal yapıdaki ilişkilerinin bir bütününü açıklamada görev aldığını ifade etmektedir. Bir söylemde SK açısından var olan temel boyutların anlaşılması için O'Halloran'ın (2005) [Martin'den (1992) uyarlayarak] ortaya koyduğu Şekil-9 ile incelenebilir.

Şekil 9

Söylemin Katılımcısına Yönelik Boyutlar



(O'Halloran, 2005: 90)

Söz konusu şema temel alınarak SK açısından bir söylem analizi yapılırken nelerin incelenebileceğine yönelik bilgileri ayrıntılandırmada Mechura'ın (2005) kılavuzundan yararlanılabilir. Mechura bir söylemin SK açısından analizinde iki temel boyutu sunmaktadır. Bunlar ***i)****göreceli statüler (relative status)* ve ***ii)****sosyal mesafedir (social distance)*. Göreceli statüler, katılımcıların statü olarak eşit düzeyde olup olmadıklarını ya da aralarında bir miktar eşitliğin bulunup bulunmadığına karar vermede dikkate alınırken, sosyal mesafe ise katılımcılar arasındaki yakınlık ya da resmiyetin belirlenmesinde kullanılmaktadır.

i) Göreceli statüler: Bir söylemi katılımcıların statüleri açısından analiz etmek amaçlandığında göz önünde bulundurulması gereken hususlar şu şekilde sıralanabilir (Mechura, 2005);

-- *Konuşma eylemleri (speech acts);*

Bunlar 'açıklama' şeklinde olan ya da bir 'ricayı/talebi' ortaya koyan eylemlerdir. Açıklama şeklinde olan ifadeler *bildirici* (declerative) (örn. Cem bu kahveyi yaptı) ya da *soruya dayalı* (örn. Kahve yapmamı ister misiniz ?) olabilir. Rica ya da talebi ortaya koyan ifadeler ise *sorgulayıcı* (örn. Bu kahveyi kim yaptı?) ya da *buyurucu* (örn. Kahve yap) nitelikte olabilir.

-- *Konuşmadaki sıra döngüsünün yönetimi (turn management);*

Konuşmada kimin konuşacağına kimin karar verdiğini ve kim(ler)in diğerlerinden daha güçlü durumda olduğunu belirlemeye yöneliktir.

-- *Hitap etmede kullanılan terimler (terms of address);*

Kullanımda mevcut olan terimlerin neler olduğunu ve bunları kim(ler)in kullanmakta olduğunu belirlemeye yöneliktir.

-- *Ölçme ve değerlendirme (assessment and evaluation);*

Yargılamalar yapan ya da değerlendirmelerde bulunan kişilerden hangilerinin kendi yetenekleri içerisinde diğerlerinden daha üstün durumda ya da daha becerikli olduğunu belirlemeye yöneliktir.

-- *Konu seçimi (topic choice);*

Konuşmanın konusunu belirlemede ya da değiştirmede katılımcılar içerisinde kim(ler)in diğerlerine göre daha üstün/baskın olduğunu belirlemeye yöneliktir.

ii) Sosyal mesafe: Katılımcılar arasındaki sosyal mesafenin derecesi genellikle gayri resmi (informal) dilin var olup olmadığına bakılarak saptanabilir. Bu amaçla konuşma içerisinde yer alan günlük kullanıma özgü kelimelerin, lehçelerin, terimlerin, kısaltmaların, konuşurken bazı eksik kelimelerin dinleyen tarafından doldurulmasına yönelik verilen/bırakılan boşlukların nasıl kullanıldığına bakılabilir (Mechura, 2005).

3-Söylemin Stili (SS): "Söylemin stili iletişimdeki dilin oynadığı rol [ve] katılımcıların bir durum içerisinde dili neyi gerçekleştirmek üzere kullandıkları ile ilgilidir" (Atweh et. al. 1998: 66). SS bir söylemin nasıl oluşturulduğu ve nasıl iletildiğine yönelik sorulara yanıt bulmayı sağlar (Mechura, 2005). SS'nin yanıtladığı sorular; söylemin organizasyonu nasıldır?, söylemin bağlam içerisindeki işlevi nedir ve söylem tarafından gerçekleştirilen şey nedir?, biçiminde (Renkema, 2004) sıralanabilir. Ayrıca SS, "katılımcıların [belirli iletişim eylemlerini] kullanılan dilin nüansları aracılığıyla nasıl gerçekleştirdiklerini yorumlamak şeklinde de tanımlanabilir" (Atweh et. al. 1998: 66). Halliday, (1989) SS'nin bir söylemin sembolik organizasyonu ile ilgili olduğunu ve iletişimin gerçekleştiği kanalı (sözlü, yazılı ya da bunların kombinasyonu) ve söylemin ikna edici (persuasive), açıklayıcı (expository), öğretici (didactic) vb kategoriler biçiminde gerçekleştirdiği belagat (ing: rhetoric, güzel söz söyleme sanatı) stilini de içerdiğini ifade etmektedir (aktaran Fries & Gregory, 1995). Mechura (2005) SS'nin iki ekseni bulunan bir model çerçevesinde ele alınabileceği belirterek buları sözlü/yazılı eksen ve eylem/yansıtma ekseni olarak ifade etmektedir. Sözlü söylemler katılımcılar arasındaki yüksek düzeydeki etkileşime dayalı iken yazılı söylemlerde benzer bir durum bulunmamaktadır. Söylemin sahip olduğu interaktiflik açısından incelenmesi yapılırken dikkate alınabilecek noktalar, ‘ilgiyi canlı tutan kelimelerden’, ‘tereddüt ifadelerine’ kadar uzanan geniş bir yelpazeye dağılmaktadır. Farklı araştırmalarda araştırmanın özelliğine göre farklı noktalara öncelik verildiği görülmektedir. Bu çalışmada ele alınan söylemin yapısı, içeriği ve tipi dikkate alınarak analizi yapılacak olan noktalar *1)destekleyici geri bildirimler* (Mechura, 2005) ve *2) soru ifadeleridir* (Atweh et. al. 1998).

1-Destekleyici geri bildirimler: Destekleyici geri bildirimler iletişim içinde olan katılımcıların iletişimi sürdürmek ve anlık dönütler vermek amacıyla kullandıkları sözcükler ve o sözcüklere yüklenen anlamları içermektedir. Bu tip ifadeler ‘doğru’, ‘tamam’, ‘gerçekten’ (Mechura, 2005) biçiminde örneklenebilir.

2-Soru ifadeleri: Yüz yüze etkileşime dayalı bir söylem içerisinde interaktifliği sağlayan önemli unsurlardan birisi de sorulardır. Sorular hem iletişimin şekline ve yönüne hem de katılımcılar arasındaki anlam alış-verişlerinin düzeyine etki eden önemli dilsel yapılardan biridir. Sorular aynı zamanda iletişimde görev alan söylemlerin doğasını anlamada da anahtar göstergelerdir. Soruların niteliği söylemler aracılığı ile oluşturulan anlamların derinliğini etkileyen unsurlardandır.

Aşağıdaki bölümde matematik eğitimi alanında göstergebilime yönelik var olan bakışı betimleyen kısa bilgilere ve Halliday ve Hasan (1989) tarafından ortaya konan üç bileşenli modeli kullanan araştırmalara ilişkin açıklamalara yer verilmektedir.

Matematik eğitimcilerinin dil ve matematik ilişkisine yönelik artan ilgi alanları içerisinde, dilin matematik öğrenme ve öğretmedeki rolü, önemi ve iletişim durumlarındaki söylemlerin incelenmesi yaklaşımları altında sosyal göstergebilimden de yararlandıkları görülmektedir. Morgan (2006) bu konuda şunu ifade etmektedir; Halliday’in sosyal göstergebilim teorisi sadece matematiksel pratikleri ve matematik öğrenme ve öğretme pratiklerini araştırmada bir takım güçlü yollar sunmakla kalmaz ayrıca öğrenme ve öğretme konusunda yardımcı olabilecek matematiksel pratikler içerisindeki dil kullanımlarına yönelik bilgi üretmemize de yardımcı olur. Matematik öğrenme ve dil üzerine bir bakış açısı geliştirmede sosyal göstergebilim, görünürde birbirinden ayrı gibi gözüken *biliş, dilbilim, sosyal (etkileşim)* ve *bağlam* biçiminde sıralanan dört yapının birbiri ile nasıl çok kompleks ve karşılıklı ilişki içerisinde olduğunu ortaya koymaktadır (Chapman, 1993). Matematiğin, göstergebilimsel bir alan olduğunda birleşen çok sayıda araştırma bulunmaktadır (örn. Radford, Schubring & Seeger, 2008; O'Halloran, 2004; Straber, 2004; Marks & Mousley, 1990). Dolayısıyla matematik öğretiminde sembolik, görsel ve dilsel göstergelerin rolleri, öğrenmedeki etkileri ve matematiksel anlamayı sağlamadaki aracı rolleri/görevlerine yönelik araştırmalarda göstergebilim ve sosyal göstergebilim yaklaşımlarından yararlanmak olanaklı olmuştur. Ancak literatürde sosyal göstergebilim açısından yapılan çalışmalar görece olarak daha azdır. Bunlar içerisinde matematik eğitimi literatüründe Halliday ve Hasan'ın (1989) söylemin *alanı*, *katılımcısı* ve *stiline* dayalı modelini kullanan çalışmaların daha da az olduğu görülmektedir. Az sayıdaki bu araştırma örnekleri içerisinde, yapılan bu tez çalışmasına teorik ve pratik açıdan katkı sağlayan alandaki iki araştırmayı sunmanın yararlı olacağı düşünülmüştür. Bunlardan ilki Atweh, Bleicher & Cooper'ın (1998) diğeri Thornton & Reynolds'un (2006) araştırmalarıdır.

Atweh vd, öğretmenlerin matematik öğretimi sürecinde öğrencilerinin yeteneklerine ve beklentilerine yönelik inanışlarının, öğrencilerinin cinsiyet ve sosyoekonomik durumuna bağlı olarak sınıf içi söylemlerine nasıl yansıdığını incelemiştir. Bu amaçla biri sadece kızların, diğeri sadece erkeklerin öğrenim gördüğü ve sosyoekonomik açıdan da birbirinden farklı olan (kızların okulu düşük erkeklerin ki ise yüksek sosyoekonomik düzeyde olan) iki lise belirlenmiştir. Her iki liseden aynı ders kitabını ve matematik konusunu işleyen birer 9. sınıf seçilmiş ve o sınıfların matematik öğretmenleri seçilen konuyu (fonksiyonlar, doğrusal denklemler ve grafik çizimi) öğrettiği 10 ders boyunca gözlenmiştir. Her iki matematik öğretmeninin de özellikle sınıf içi söylemlerine odaklanılmış ve elde edilen söylemler Halliday ve Hasan'ın modelindeki üç bileşen (SA, SK, SS) çerçevesinde analiz edilmiştir. Erkek okulundaki matematik öğretmeni iyi eğitim almış, alanında uzman ve deneyimlidir ve okulun matematik başarısı ve üniversiteye öğrenci gönderme oranı (%80) da yüksektir. Kız okulundaki öğretmenin uzmanlığı bulunmamakta ve matematik dışındaki dersleri de yürütmektedir. Okulun başarısı da düşük seviyededir. Atweh vd her iki öğretmenin de öğretmen merkezli, soru-cevaba dayalı bir öğretim yaptığını ve aynı ders kitabını kullandığını ancak buna karşın sınıf içi etkileşime yakından bakıldığında bazı farklılıkları bulunduğunu belirtmektedir. Söz konusu bu farklılıklar öğretmenlerin, öğrencilerinin yetenek ve beklentilerine yönelik inanışlarından kaynaklandığı ifade edilmektedir. Atweh vd (1998) makalelerinde her iki öğretmenin söylemlerinden bazı kesitler (örn. fonksiyon kavramına giriş yaptığı ya da eşitsizliklerde grafik çizimi yapılan dersler gibi) sunarak sonrasında bu söylemlerin *alanı* (field), *katılımcı*sı (tenor) ve *stili* (mod) açısından benzerliklerini ve farklılıklarını betimlemektedir. SA, SK ve SS açısından iki öğretmen arasındaki benzerlikler ve farklılıkların tamamı araştırmacıların sınıf içi gözlemlerine ve sunulan söylem kesitlerindeki genel özelliklere dayalı sözel açıklamalar biçiminde sunulmaktadır.

--SA açısından ortaya çıkan temel bulgu, erkek okulundaki öğretmenin matematiksel tanımları, kuralları ve özellikleri daha katı, formal ve matematiksel dili kullanmaya-geliştirmeye dayalı biçimde sunduğu, öğrencileriyle olan diyaloglarında da bu tavrını devam ettirdiği, rutin bol egzersizler, problem çözümleri yaptırdığı ve matematiksel içeriğe bağlı kaldığı, ancak kız okulunda öğretmenin daha az formal bir dil kullandığı, tanımların ve kavramların kitabi anlamlarından çok günlük kullanımdaki örneklemelere dayalı çağrışımsal ve hatırlaması kolay biçimde sunduğu ve öğrencilerin tanımları sezgisel biçimde anlamalarına yardımcı olduğu ve öğrencilerin matematiksel dile katı biçimde bağlı olmaksızın içeriğin biraz daha kolay ve geniş zamana dayalı olarak sunulduğudur.

--SK açısından iki sınıfın benzerlik ve farklılıklarına gelindiğinde ise bulgular aşağıdaki gibi özetlenebilir. Her iki öğretmenin de öğretim biçimi tüm sınıfa yönelik bilgi aktarımı biçimindedir ve öğrencilerin fikirlerini geliştirmelerinde öğretmenin yönelttiği sorular yardımcı olmaktadır. İki sınıfta da öğrenciler örneklere kitaptan çalışmaktadır. Bu benzerliklerin yanında erkek okulundaki öğretmenin, sınıfta oluşturduğu atmosferin daha çok bir meydan savaşı niteliğinde olması ve diyaloglarında sıkça düzeyli iğnelemeler (küçümseyici olmayan) yapıyor olması, öğrencilerinin çalışmalarında ve öğrenmelerinde kendisinin (bireysel ve bağımsız şekilde) kontrol sahibi olmasına gayret etmesi, ancak kız okulundaki öğretmenin öğrencilere daha esnek, anlayışlı ve kibar biçimde davranması, hata yaptıklarında ya da sıkıntı yaşadıklarında yardımcı olan bir tavır sergilemesi, öğrencileriyle diyaloglarında ciddi ve resmi olması, iğneleme yapmaması temel farklılıkları oluşturmaktadır. Matematiksel açıdan erkek okulu öğretmenin daha soyut, kesinliğe dayalı bir sunum biçimini ve matematiğin kendi kuralları ve sistemi içerisinde bir dil kullanımını ve iletişim biçimini tercih ederken, kız okulundaki öğretmenin daha az resmi, soyut kuralların sunumu yerine matematiksel açıdan ne yapılacağı ve nasıl yapılacağı üzerinde duran ve bunu hatırlaması kolay basit formlarda sunan bir eğilimde olması, SK açısından diğer bir farklılığı oluşturmaktadır.

--Dil kullanımındaki farklılıkları içeren son bileşen olan SS açısından benzerlik ve farklılıklar ortaya konulurken aynı problem grubu üzerinde verilen ve hem yazılı hem de sözlü sunum bölümleri olan ödevlerden elde edilen söylem kesitleri sunulmaktadır. Erkek okulunda sınıf içi iletişimde konuşmadaki kontrolü sağlamada dört söylem stratejisi yer almaktadır. Bunlar paralel gramatik oluşum, anahtar kelimelere vurgu, tonlama ve konuşan kişinin sözünü kesmedir. Erkek sınıfında öğretmen ve öğrenci arasındaki diyaloglarda sık sık karşılıklı söz kesme, özellikle öğretmen tarafından konuşma esnasında yapılan vurgulamaların ve tonlamaların bulunduğu ve bunların öğrenciler üzerinde kuşku ve bir tür meydan okuma hissi yarattığı, konuşmaların daha çok tartışma vari bir biçimde gerçekleştiği, ancak kız okulunda ise öğretmen ve öğrencilerin birbirlerini kesmeden daha esnek bir biçimde dinlediği, öğrencilerin sorulan sorulara kısa ve basit yanıtlar vermede kendilerini rahat hissettiği, konuşmaların tartışma ortamından uzak olduğu, öğretmenin anahtar sözcükler ve tonlamalara daha az başvurduğu, konuşanların daha geniş konuşma sürelerine sahip olduğu ifade edilmiştir.

Thornton & Reynolds (2006) tarafından yapılan ikinci araştırma da ise Sistemik Fonksiyonel Dilbilgisini içeren eleştirel söylem çözümlemesi [ESÇ] gerçekleştirilmiştir. Araştırmada Avustralya’da bir 8. sınıfın (bir) matematik dersindeki söylemleri Fairclough’un (1992) ESÇ için sunduğu üç boyutlu çerçevesi kullanılarak analiz edilmiştir. Bu çerçevenin ilk boyutunu söylemin bir metin olarak ele alınması içermektedir. Thornton ve Reynolds bu ilk boyuta yönelik analizlerinde

Halliday ve Hasan'ın üç bileşenli (SA, SK, SS) modelinden yararlanmıştır. Sınıfın öğretmeni olan Noemi ve öğrencileri arasındaki iletişim atmosferinin arkadaşça, rahat ve verimli çalışmaya uygun bir yapıda olduğu ifade edilmiştir. Gözlenen dersin konusu y=ax+b biçimindeki denklemde a'nın değişimine bağlı incelemeler, eğimin bulunması ve grafik çizimini kapsamaktadır. Bu derse ait SA için şu bulgular ifade edilmiştir,

--SA'nın küçük farklı yönelimler içermekle birlikte açıkça matematik olduğu belirtilmiştir. Noemi konuşmanın organize edilmesine aracılık eden ve öğrencilerini düşünmeye yönlendiren bir tavırdadır. Sınıftaki söylemler geleneksel sınıflardaki problem çözme uygulamalarında var olan materyal süreçlerden daha çok zihinsel süreçlere yöneliktir ve konuşmalardaki baskın ifadeler "bence/ benim düşünceme göre" biçimindedir. Sınıfta genel tartışmalar yer almaktadır ve bu tartışmalarda öğrencilerin hem kendileri hem de diğerlerine yönelik sorgulamaları yaygın biçimde görülmektedir. Noemi'nin sınıfındaki söylemin özelliği geleneksel yapıdaki sınıflarda var olan yeniden üretimsel (reproductive) biçimde değil oluşturmacı (generative) niteliktedir.

--Dilin kişiler arasındaki fonksiyonuna yönelik olan SK açısından Noemi'nin sınıfına bakıldığında, sınıfta karşılıklı olarak yüksek düzeyde desteklemenin bulunduğu (örn. hadi/devam et Carly gibi ifadeler ve alkışlamanın olması), öğrencilerin öğretmeninden kendini doğrulamasını beklemek yerine kendi kendini doğrulamalarına sıkça rastlandığı, söylemlerde öğrencilerin nispeten eşit güç ilişkilerinin ve bilgi birikimlerinin ortaklaşa bir biçimde oluşturulmasıyla matematiksel olarak yetkili ve özgür oldukları gözlenmiştir.

--SS, sonuçların kesinliğine ilişkindir ve bunu bir uyum içinde gerçekleştirir. Noemi'nin sınıfında söylemler öğrencilerin kendilerininkini başkalarının söyledikleri üzerine inşa ettiği açık bir akış biçimine sahiptir. Öğrencilerin söylemleri TIMSS 1999 da yer alan diğer verilerle kıyaslandığında daha uzun (5-6 kelimeden fazla) ve muğlâk bir cümle yapısına sahiptir. Bununla kastedilen matematiksel dilin belli belirsiz, sembollerin titizce kullanılmadığıdır (örn. eğer y=3x ise ve x=1 ise o zaman y de 3 olacaktır gibi bir ifade yerine o 1 idiyse oda 3 olabilir gibi kullanılması). Ancak bu tür iletişim şekli öğrenme ve kavramaya pozitif etki yapmaktadır. Noemi bu duruma bilinçli olarak izin vermekte ve 'anlamın' oluşmasında olumlu bir etki yaratmaktadır. Noemi öğrencilerine doğru dil kullanımına yönelik bir müdahalede bulunmamakta ve öğrencilerin söylediklerine de (daha fazla) açıklık getirmemektedir. Matematiğin net ve kesin bir yapıda sunulmaması öğrencilerin matematiksel bilgilerin kişisel ve sosyal olarak algılamalarına imkân sağlamakta ve böylece bilgiler daha ulaşılabilir, yapılabilir bir görünüm kazanmaktadır.

Bu iki araştırmada matematik sınıflarındaki söylemler yoluyla iletişimde var olan anlam sistemlerine yönelik ayrıntılı bakışlar sunulmuştur.

Öğrencilerin birbirleriyle ve öğretmenleriyle olan sınıf içi diyaloglarında matematiksel bilgileri öğrenmelerine, anlamalarına, edinmelerine ve onlara yönelik yanılgılarına dair açık ve örtük şekilde pek çok bilgi yer almaktadır. Bu bilgilerin ortaya çıkarılması ve iyi analiz edilmesi matematik öğretiminin niteliğini arttırma da önemli katkılar sağlayacaktır. Bu çalışma bu amacı gerçekleştirmeye yönelik bir araştırmayı örneklemektedir. İzleyen bölümde matematik eğitiminde ispat ve ispatlamaya yönelik literatüre dayalı bilgilere yer verilmektedir.

Matematik Eğitiminde İspat ve İspatlama

İspat matematik ve matematik eğitiminin merkezinde ve en önemli kavramlardan biri olarak görülmektedir (Ball vd, 2002; Knuth, 2002; Lee, 2002; Padraig & McLoughlin, 2002). İleri matematiğin belirleyici özelliği ispata vurgu yapmasıdır (Houston, 2010) ve ileri matematik alanında her matematikçi için ispat yapma oldukça önemli bir beceridir (Weber, 2001). Euclid'in Elementler adlı çalışmasından bu yana ispat belirli evrimlerle formal matematiğin gelişiminde büyük rol oynamıştır. "Bazılarına kanaatine göre, matematik oyununun adı ispattır; ispat yoksa matematikte yoktur" (Davis & Hersh, 2002: 174). Eski Yunan medeniyetinden insanoğluna kalan en olağanüstü miraslardan birisi ispattır (Harel & Sowder, 2007). Matematikçinin yaptığı işe dair öz bir tanımlama yapmak gerektiğinde şu ifade edilebilir; "matematikçi, sayılar ve geometrik konfigurasyonlar gibi soyut nesnelere ilişkin şeyleri, onların ilişkilerini ve genelleştirmelerini ispatlayan kişidir" (Garnier & Taylor, 1996: 3). İspat geleneğinin temeli Öklid'in Elementler adlı çalışmasına dayanmaktadır (Almeida, 2003).

> Euclid geometrisi, apaçık olduğu varsayılan birkaç fikirden başlayıp az sayıda kesin matematiksel ve mantıksal işlem kuralı temelinde giderek artan karmaşıklıkta bir çıkarsamalar dokusu inşa eder. … bu çıkarsama süreci ispat olarak adlandırılır (Davis & Hersh, 2002: 26).

Bugünkü anlamda tümdengelimsel ispat anlayışının gelişimi ise 19. yy ünlü matematikçi Gauss ve sonrasında Abel, Bolzano, Cauchy, Lagrange ve Weierstrass'ın çalışmaları ile sağlanmıştır. (Kline, 1980 den aktaran Almeida, 2003). Matematiğin tarihsel gelişimi ile paralel olarak ispatın kavramsal anlamı ve ispat yapma yollarında da bazı değişimler meydana gelmiştir. Örneğin geçmişte bilgisayarlar yardımıyla yapılan bir ispattan söz etmek mümkün değil iken bugün bu tür ispatlar (örneğin dört renk teoremi) kabul görmektedir. Matematik toplumunda ispat sıkça tartışılan konulardan biri olmuştur (Healy & Hoyles, 2000; Hanna, 2000). Hanna vd (2009) göre bugünün profesyonel matematik alanı ispatın farklı anlamlarına sahiptir.

> Örneğin; aksiyomatik formal bir gösterim sunmak; sadece beş tane Platonik katı cismin var olduğunun ispatında olduğu gibi, fiziksel kavramları kullanmak; sembolik hesaplamaların kullanıldığı bir modelden sonuçlar çıkarmak ya da deneysel matematik alanında bilgisayarları kullanmak (s. 1-XIX).

İspatın kurumsal anlamındaki farklılıklar onun ele alındığı bağlamsal farklılıklardan da kaynaklanmaktadır. Recio & Godino, (2001) anlam farklılıklarına zemin oluşturan bu bağlamları; *günlük yaşam, deneysel bilimler, profesyonel matematik, mantık ve matematiğin temelleri* olarak sıralamaktadır. Söz konusu anlamsal farklılıkların yanında ispatın rolü ve fonksiyonları açısından da matematikçilerin ve matematik eğitimcilerinin farklı yaklaşımlar sundukları görülmektedir. Örneğin Bell (1976, 1979) ispatın taşıdığı anlamları, fonksiyonlarına gönderimde bulunarak şu şekilde sınıflandırmaktadır;

1-*gerçekleme ya da doğrulama*; örneğin bir önermenin doğruluğuna ilişkin,
2-*açıklama*; örneğin bir önermenin neden doğru (ya da yanlış) olduna yönelik bir anlayışı taşıma,
3-*sistematikleştirme*; tümdengelimsel aksiyomatik bir sistem, temel kavramlar ve teoremler içerisinde sonuçların organize edilmesi (aktaran Galbraith, 1981:1).

Benzer şekilde De Villiers, (1990) ispatın fonksiyonlarını aşağıdaki dört başlıkta sıralamaktadır.

1- İfadenin doğrulanması,
2- İfadenin açıklanması,
3- İfadenin doğruluğunun iletişimi ve ifadenin başkalarına açıklanması,
4- Tümdengelimsel bir sistem içerisinde ifadenin sistematize edilmesidir (aktaran Almeida 2000). Başka bir bakış açısını da Hanna (1990), şöyle ifade etmektedir; matematikçiler için ispatı değerli kılan şey ispatın sadece sonuçların doğruluğunu göstermesinden ziyade, gerekli matematiksel ilişkileri ortaya çıkarmasıdır. Buradakilerin dışında ispatların matematikçilerce kullanılma amaçlarına, Resnik'in açıklamalarından yararlanarak, iki yenisi de eklenebilir. '(1)Matematikçilerin ispat yardımıyla sadece yeni sonuçları göstermeyi değil kimi zaman, önceki sonuçların alternatif gösterimlerini (bazen önceki gösterimden daha basit ya da ekonomik bir gösterimle, kimi zaman da matematiğin farklı bir alanından elde edilen bilgiler yardımıyla) yapmayı da amaçlamaktadır. (2)Ayrıca ispatlar sistematik olmayan bir biçimde elde edilmiş olan önceki sonuçlar için aksiyomatik gösterimlerin türetilmesini ya da o ana kadar var olan aksiyomatik bir sistemin yeniden teorize edilmesi de sağlar' (1992). İspatın söylemsel açıdan da rolü bulunmaktadır. Sfard'a (2000) göre ispat kişinin kendisi ile gerçekleştirdiği ve diğer bireylerle olan söylemsel (söylem Sfard'ın ele aldığı biçimde algılandığında) pratiklerin bir parçası olarak ifade edilebilir. Kişinin kendisi ile olan söylemsel eylemi bir ispatı yapma

çabasını, diğerleri ile olan söylemsel eylemi ise ispatlar yoluyla diğer bireylerle yapılan iletişimi içermektedir. Bu ayrım Harel & Sowder'in (1998) kişinin ispat ile kendisini şüphelerden arındırması, ikna etmesi (ascertaining) ve başkalarının şüphelerini ortadan kaldırması, ikna etmesi (persuading) biçiminde ikili ayrımına paralel olarak düşünülebilir. İspatın anlamı, amacı ve fonksiyonlarına yönelik farklı perspektiflerden yapılan farklı açıklamalar ispatın ne olduğu (tanımı) konusunda da kendini göstermektedir. Örneğin Nolt, Rohatyn & Varzi (1998), ispatı genel anlamda geçerli çıkarım kuralları aracılığıyla hipotezlerden sonuçlar türetme biçiminde tanımlarken; Knuth (2002), tümdengelimsel bir argümanın bir ifadenin neden doğru olduğunu diğer matematiksel sonuçları ve/ ya da ifadede yer alan matematiksel yapılara içe bakışları kullanarak gösterilmesi olarak kabul etmektedir. Columbia Ansiklopedisinde ispat; her biri bir aksiyom ya da önceki önermelerden mantıksal çıkarım kurallarından biriyle elde edilen sonlu önermeler dizisi (aktaran Raman, 2002) biçiminde tanımlanırken, Movshovitz-Hadar (2001) ise birinin başkalarını (ya da sıklıkla kendisini) bir ifadenin doğruluğuna ikna etmek için sunduğu bir argüman (Aktaran Raman, 2002) ifadesini kullanmaktadır. Benzer biçimde buradaki ve diğer tanımlardaki farklı yaklaşımları [Lee'nin (2002) çalışmasından yararlanarak] matematik tarihi içerisinde de görmek mümkündür. 'Örneğin matematiksel nesnelerin soyut varlıklar olarak, her türlü insan aktivitesinden bağımsız ve değiştirilmez bir doğaya sahip oldukları düşüncesine dayanan Platonist yaklaşım açısından ispat, aksiyom ve postülatlardan, mükemmel bir kesinlikle açıklanan (tanımlanan) tanımlardan ve daha önce türetilmiş teoremlerden geçerli çıkarımlar yapılarak bir teoremin türetilmesidir. Platonizmi reddeden Nagel (1950) ise '2 ile 1'in toplamının 3 ettiği' gibi argumanların gerçek dünyaya ait algısal deneyimler ve doğrudan gözlemlerden elde edilen tümevarımsal genellemeler olduğunu, dolayısıyla matematiksel ispatın tümdengelimsel olmayıp aksine tümevarımsal bir süreç olduğunu iddia etmiştir. Whitehead & Russell (1935) ise sembolik mantıktan yararlanarak, tümdengelimin, sembolik ifadeler üzerinde yapılan formal prosedural işlemler olduğunu ve buna bağlı olarak ispatın, sembolik mantık içerisindeki geçerli bir türetim olarak gösterilen bir muhakeme süreci anlamı taşıdığını ifade etmiştir' (Lee, 2002).

İspat, yapıları ve değişkenleri belirlemek, varsayımları tanımlamak ve mantıksal argümanları (her birini ayrı ayrı ve önemsiz olmayan) organize etmek gibi bir grup zihinsel alışkanlıklara (Ball vd, 2002) dayalı bir süreçtir ve yukarıda değinildiği üzere pek çok role ve fonksiyona sahiptir. İspat matematiksel bilginin garantisini sağlar ve matematik yapma ve anlamada temel bir aktivitedir (Almeida, 2000). İspat aynı zamanda sosyal ve kültürel bir eylemdir (Hanna, 1983). İspatların geçerliliği ancak belirli bir yetkin matematik zümresi tarafından kabul edilmesi ile mümkündür ve bu zümrenin sosyal paylaşımları sonucunda formal olarak var olabilir. Dolayısıyla hangi anlamda ele alınırsa alınsın matematiğin yapısı ve gelişimi açısından ispatın taşıdığı önem ve sahip olduğu rol oldukça fazladır (Hanna, vd, 2009; Schoenfeld, 1994). Bu nedenle ispat ve ispatlamaya yönelik çalışmalar matematik eğitimi alanında merkezi bileşenlerden ve temel araştırma alanlarından birini oluşturmaktadır.

Matematik eğitimi alanının ispatı ve ispatlamayı ele alış biçimini farklı biçimlerde ortaya koymak mümkündür. Örneğin litaratürde en çok yoğunlaşılan konular açısından inceleme yapılabilceği gibi, öğretim programları ve uluslararası prensipler ve standartlardaki değişimler çerçevesinde belli (yeri ve önemine yönelik gelişimsel) zaman dilimlerine göre ispat ve ispatlamaya yönelik bakış açılarına da odaklanılabilir. İlk kategoriden bakıldığında, literatürde ispat ve ispatlamaya yönelik yoğun olarak araştırılan konuları, *(1)ispatın tarihsel gelişimi, kökeni, rolü ve fonksiyonları* (örn. Hanna, 1995; Hersh, 1993; de Villiers, 1990 (bkz. Almeida, 2000); Schoenfeld, 1994), *(2)ispata yönelik (öğrenci, öğretmen, öğretmen adayı) tutum, inanç ve görüşler* (örn. Morselli, 2008; Moralı, Uğurel, Türnüklü & Yeşildere, 2006; Knuth, 2002; Segal, 2000; Mingus & Grassl, 1999; Chazan, 1993), *(3)ispatlama sürecinde yaşanan sıkıntılar ve karşılaşılan güçlükler* (örn. Weber & Alcock, 2004; Weber, 2001; Moore, 1994; Martin & Harel, 1989; Balacheff, 1988; Selden & Selden, 1987) ve *(4)öğrencilerin ispatları yapmada kullandıkları, sahip oldukları ispat şemaları* (örn. Balacheff, 1988; Harel & Sowder, 1998; Sowder & Harel, 1998). Tüm bu başlıklara yönelik araştırmaların sayısı giderek artmakta ve derinleşmektedir. Söz konusu her bir başlık altında yer alan araştırmalara yönelik geniş derlemeler, karşılıklı etkileşimsel analizler ya da tematik incelemeler yapmak mümkündür ancak bu tür eğilim bu (tez) çalışmanın kapsamı dışındadır. Ancak bu başlıklar bütüncül olarak ele alındığı bazı temel bulguları/sonuçları ortaya koymak yararlı olacaktır.

Literatürdeki araştırmaların en temel sonuçlarından biri öğrencilerin ilköğretimden lisans düzeyine kadar ispatları okuma/algılama, anlamada ve yapmada önemli ölçüde güçlük yaşadıklarını ve bu durumun çok çeşitli sebeplere dayandığını ortaya koymaktadır. Bu sebeplerin başlıcaları: yetersiz bilişsel gelişim düzeyi, matematiksel notasyondan kaynaklanan yetersizlikler, sosyomatematiksel normlar (ispat ve ispatlamaya farklı kademe ve bağlamlarda yüklenen farklı anlamların bulunması), kavramsal anlamadaki zayıflık ve etkisiz ispat stratejilerine sahip olma (Weber, 2001; Weber, 2003); matematik öğretim programlarında (örn. British National Curriculum), özellikle ortaöğretim düzeyinde NCTM prensip ve standartlarında ispatlara yeterince yer ve önem verilmemesi (Hanna, 2000); ispata nereden başlanacağını bilememe, kavram tanımı, kavram imajı ve kavram kullanımı arasındaki uyuşmazlık ve eksiklikler (Moore, 1994); profesyonel matematikçilerin ispatlama yaklaşımlarındaki genel adımlar (sezgi, deneme-yanılma, spekülasyon, varsayım, ispatlama) ile okul matematiğinde, özellikle lisans düzeyinde, ispatların sunuluş biçimi (tanım, teorem, ispat) arasındaki uyuşmazlık ve boşluklar (Almeida, 2000); öğrencilerin ispatların özel (private) ve genel (public) anlamları, yönleri arasındaki bağlantıları kuramaması (Raman, 2002) biçiminde sıralanabilir.

Literatürdeki bir grup çalışmada öğrencilerin ispat yapmadaki yaklaşımlarının bütüncül analizlerine dayalı olarak belirli örüntüsel ve baskın özellikler göz önünde bulundurularak, sahip oldukları ispat yapma şemalarına (karakteristik yaklaşım biçimleri) yönelik farklı sınıflandırmalar ortaya konmuştur. Bu alandaki öncü yaklaşımlardan biri Balacheff'in (1988) çalışmasıdır. Balaceff ispatlamada üç düzey tanımlamıştır. Bunlar *1)pragmatik ispat* (pragmatic proof), *2)zihinsel ispat* (intellectual proof) ve *3)gösterimdir* (demonstration). En alt seviye olan *1)pragmatik ispat* sahip olunan kaynakların belirli eylem ya da gösterim durumlarını kapsar ve iki tür ispatı içerir. Bu türler *1.a)saf deneyselcilik* (naive empiricism) ve *1.b)kritik deneyimdir* (crucial experiment). *Saf deneyselcilik* belli sayıda durumdan elde edilen kanıtların temelinde ifadenin/önermenin gerçeklenmesidir. *Kritik deneyim* ise ifadenin tipik/belirli bir durum içerisinde doğrulanarak gösterilmesi yoluyla gerçeklenmesidir. Bir üst kategori olan *2)zihinsel ispat* ise eylem durumunu içermez ve belirli özelliklerin formülasyonlarına ve onlar arasındaki ilişkilere bağlıdır bu düzeyde de iki ispat türü bulunmaktadır. Bunlar *2.a)belirleyici-kapsamlı örnek* (generic example) ve *2.b)düşünce deneyidir* (thought experiment). *Belirleyici örnek ispatı* bir ifadenin/önermenin belirleyici örneğe ilişkin matematiğin yapısal özelliklerinden yararlanılarak yapılan gerçeklemedir. *Düşünce deneyi ispatı* ise bir ifadenin örneklerden ve kişilerden bağımsız olarak matematiğin yapısal özellikleri aracılığıyla gerçeklenmesidir. En üst düzey olan *3)gösterim* ise bir teori çerçevesinde organize edilmesi zorunlu olan ya da bir topluluk tarafından kabul gören bilgilerin kullanıldığı ispatlardır.

Balacheff'in çalışmasından daha ayrıntılı ve geniş ölçüde kabul görmüş olan bir diğer sınıflama ise Harel & Sowder'in (1998) ispat şemalarıdır. Uzun süreli gözlem ve Harel'in verdiği derslerdeki kişisel deneyime dayalı olarak sunulan ispat şemalarının her kategorisi bir bilişsel basamak, zihinsel yetenek ve öğrencilerin matematiksel gelişimlerini ortaya koymaktadır. Sunulan ispat şemaları üç kategori ve onların alt kategorilerinden oluşmaktadır. Bu kategroiler; *1-dışşal ikna ispat şeması* (external conviction proof scheme), *2-deneysel ispat şemaları* (empirical proof schemes) ve *3-analitik ispat şemalarıdır* (analytical proof schemes).

<u>1-Dışsal İkna İspat Şeması:</u> Öğrencilerin problemleri çözmede sadece formülleri uyguladığı, rutin kuralları ezberlediği, öğretmenleri ya da kitapları otorite olarak algılayıp bilginin tek kaynağı olduğu duurumlarda kendilerini ve başkalarını ikna etme yolları bu ispat şemasına girmektedir. Bu kategori altında üç alt kategori tanımlanmıştır.

<u>*1.1-Otoriter İspat Şeması (Authoritarian Proof Scheme):*</u> Öğrencilerin ikna olmak için sadece temel kaynaklar olarak kitaplarda görünenleri ve öğretmenler tarafından söylenenleri temel aldığı kategoridir.

<u>*1.2-Ritüel İspat Şeması (Ritual Proof Scheme):*</u> Öğrencilerin ifadelerin ispatlarında ispatların doğruluğundan ziyade görünüşüne, biçimine dikkat ederek ikna oldukları kategoridir. Doğrulamaların ancak matematiksel notasyonlar yardımıyla, sembolik ifadeler ve hesaplara dayalı olarak gerçekleştirilmesi ile yapılabileceğine olan inançları onları bu şemaya sokmaktadır.

1.3-Sembolik İspat Şeması (Symbolic Proof Scheme): İkna olmanın ispattaki sembolik muhakemelere dayalı olduğu ve ilk anlamları kavramaksızın çözüm yapma yaklaşımlarına hakim olduğu kategoridir.

2-Deneysel İspat Şemaları: Tahminlerin fiziksel gerçeklere ve duyulara ilişkin deneylere başvurarak onaylandığı, kabul ya da red edildiği şemadır. Bu grupta iki alt kategori bulunmaktadır.

2.1-Tümevarımsal İspat Şeması (Inductive Proof Scheme): Öğrencilerin bir varsayımın doğruluğuna yönelik kendi kendine yaptıkları araştırmalarda bazı özel durumlardaki tahminlerini ya da özel örneklemelerini nicel değerlendirmelerle başkalarını ikna etmede yeterli gördükleri şemadır.

2.2-Algısal İspat Şeması (Perceptual Proof Scheme): Kavramsal gözlemler ilk öğrenilen zihinsel görüntülerin/gösterimlerin anlamlarıyla yapılır. Bu gösterimler çoğunlukla yetersizdir ve tümdengelimsel değildir. Öğrencilerin ikna etmede bu görüntülere dayalı çıkarımlarına başvurduğu ispatlama yaklaşımları bu şemada yer alır.

3-Analitik İspat Şemaları: Tahminlerin doğruluğunun mantıksal tümdengelimsel anlamlarla ispatlandığı şemalardır. Bu şemada da iki alt kategori yer almaktadır.

3.1-Dönüşümsel İspat Şeması (Transformational Proof Scheme): Öğrencinin amaca yönelik ve beklenen zihinsel işlemler uyguladığı, tahminlerinin ve onlara dayalı çıkarımlarının genellenebilir nitelikle olduğu ve iknanın tümdengelimsel bir yapıda gerçekleştiği şemadır.

3.2 Aksiyomatik İspat Şeması (Axiomatic Proof Schee): Öğrencinin matematiksel doğrulamanın tanımsız terimler ve aksyomlarla başlayacağını anladığı bunlar arasındaki farkları kavrayabildiği şemadır.

Balaceff, Harel ve Sowder'in sınıflamalarına ilaveten Tall'un (1998) gösterimsel farklılıklara dikkat ederek ortaya koyduğu boyutlandırmasından da söz edilebilir. Ona göre ispat yapma yaklaşımları *uygulamalı* (enactive), *görsel* (visual), *cebirsel* (algebraic) ve *resmi/formal* (formal) olarak kategorize edilebilir.

Uygulamalı ispat en alt seviyedeki ispatları içermektedir. Bu ispat bir ifadenin doğruluğunu göstermek için fiziksel bir eylemi gerekli kılmaktadır. Aynı zamanda sözel ya da görsel ögeleri de barındırabilen bu türün en önemli özelliği fiziksel eylemi içermesidir. İki kenarının uzunluğu eşit olan üçgenin taban açılarının da eşit olacağını ispatlamada bir kağıttan yapılan ikizkenar üçgenin simetri ekseninden ikiye katlanarak üst üste gelen taban açılarının ölçüsünün aynı olduğunun gösterilmesi bu ispat türüne bir örnektir.

Görsel ispat ise uygulamalı ispatı da barındıran, (sözel desteklemeyi de içerebilen) görsel ögeler yoluyla argümanların doğrulanmasını içerir. Sözsüz ispatlar (proof without words) bu ispat türüne örnek verilebilir.

Cebirsel ispat: Aritmetik ifadelerin genel notasyonları ile yapılan ispatlardır. Bu tür ispatlarda uygun cebirsel gösterimler ve manipulasyonlardan yararlanılır. Ardışık iki tek sayının toplamının 4'ün bir katı olduğunun 2n+1 ve 2n+3 cebirsel ifadelerinin toplama yoluyla 4n+4 olarak yazılarak doğruluğunun gösterilmesi bu tür ispata bir örnektir.

Formal ispat: Tümevarımsal biçimde yapılan klasik matematiksel ispatlardır.

Matematik eğitimi literatürünün ispat ve ispatlamaya yönelik bakışını yukarıdaki başlıklandırmaların dışında ikinci bir biçimde de ele almak mümkündür. Söz konusu bu ikinci yaklaşım, öğretim programları ve uluslararası prensipler ve standartlardaki değişimler çerçevesinde belli (yeri ve önemine yönelik gelişimsel) zaman dilimlerine göre ispat ve ispatlamaya yönelik bakış açılarını kapsamaktadır. İspatın tüm kademelerde (ilk, orta ve yüksek öğretim) matematik öğretiminin merkezinde yer alması gerektiği (Ball vd, 2002; Schoenfeld, 1994), görüşü kabul görmekle birlikte bunun nasıl ve ne şekilde gerçekleştileceği otoritelerce tartışma konusu olmuştur. Amerika başta olmak pek çok ülkede öğretim programları ya da okul matematiğindeki reform hareketlerinde ispat ve ispatlamaya yönelik farklı zamanlarda farklı yaklaşımlar sergilenmiştir. Örneğin 1950 ve 60'lardaki Amerika ortaöğretim müfredat reformundaki en belirgin nokta, öğretime ivme kazandırılması ve mekanik becerilerden ziyade kavramsal öğrenmeye vurgu yapılmasıdır (Hanna, 1983). Bu yeni öğretim programına kümeler teorisi, aksiyomatik yapı, sayı sistemleri gibi konular da eklenmiş ve program ağırlıklı olarak matematiğe yönelik formalist bakışı yansıtmaktadır. Dolayısıyla bu bakış çerçevesinde o dönem öğretim programında ele alınan ispat türü de formal (rigorous) matematiksel ispattır.

Programda aksiyomatik yöntem ve formal ispat tüm matematik konularının ve matematiksel düşünmenin merkezine yerleştirilmiştir. Bunda, o dönemde modern matematik olarak adlandırılan teorik matematiğin yapısının daha soyut, aksiyomatik ve formal bir biçime dönüşmüş olması ve o yönde hızla ilerlemeye devam etmesinin de büyük etkisi olmuştur. Bu yaklaşım sadece Amerika'da değil pek çok ülkede benzer biçimde gelişmiş ve matematiğin ortaöğretimde daha soyut, matematiksel notasyona dayalı, tümdengelimsel sistemde ve sadece geometride değil diğer matematik derslerini de kapsayacak biçimde uygulandığı görülmüştür (van der Blij vd, 1980 den aktaran Hanna, 1983). Ancak öğretim programındaki bu yaklaşım fazlaca eleştiriler almış ve özellikle pedagojik açısıdan bazı çevrelerce (Hanna'nında dahil olduğu) yanlış ve sakıncalı bulunmuştur (Hanna, 1983). Sonraki birkaç on yıl içinde okul matematiğindeki gelişmeler, matematik eğitimi alanındaki araştırmalar ve farklı öğretim uygulamalarının sonuçlarının değerlendirilmesi 80 ve 90'lı yıllarda öğretim programalarında ispat ve ispatlamaya bakışın değiştiğini göstermektedir. Bu yeni durumda ise öğretim programları ve NCTM'in (1989 daki) prensip ve standartları çerçevesinde ispatın okul matematiği (secondary curriculum) içerisindeki yeri ve öneminin azaldığına vurgu yapılmaktadır. Hanna, 2000 yılındaki çalışmasını bu konu üzerinde yapılandırarak söz konusu azalmanın üç ana nedeni şöyle sıralamıştır; 1)NCTM'in prensip ve standartlarından temellenen, ispat sadece eğitimlerine daha ileri düzeyde (post-secondary education) devam etmek isteyen öğrencilere açıkça öğretilmelidir düşüncesi, 2)bazı eğitimcilerin görüşüne göre akıl yürütme ve doğrulama becerilerinin geliştirilmesinde bulgusal/keşifsel (heuristic) tekniklerin ispattan daha yararlı olması nedeniyle tümdengelimsel ispatın öğretiminin artık gerekli olmadığı, 3)dinamik özelliklerle donatılmış yazılımların giderek artan kullanımları, matematiksel doğrulamaya dinamik görsel bir yaklaşımı desteklemek üzere sınıf içerisinde tümdengelimsel ispattan vazgeçilebileceği düşüncesinin doğmuş olması. Bu üç neden içerisinde özellikle NCTM'in 1989 yılında yayınlanan müfredat ve değerlendirme standartları ile 1991 yılında yayınlanan profesyonel öğretim standartlarında ispatı ve öğretimini ele alış biçimi daha etkili olduğu ifade edilebilir. Örneğin 9. standartta, 9-12. sınıflar matematik öğretim programının, tüm öğrencilerin varsayımları oluşturma ve test etmeleri, karşıt örnekleri (counteraxamples) formüle etmeleri, mantıksal argümanları izlemeleri ve bu argümanların geçerliliğine karar vermeleri ve basit, geçerli argümanları oluşturabilmelerinin yer alması gerektiği açıkca ifade edilirken devamında ayrıca kolej eğitimi alma niyetinde olan öğrencilerin matematiksel ifadeler için dolaylı ispat ya da matematiksel tümevarım içerecek biçimde ispat yapabilecekleri belirtilmektedir. Yine 14. standartta da sadece kolej eğitimi alma niyetindeki öğrencilerin çeşitli matematiksel yapılar içerisindeki basit teoremleri ispatlayacakları ifade edilmektedir (Hanna, 2000). Hanna, o dönemde İngiltere'de de benzer bir eğilimin bulunduğunu ve bazı eğitimcilerin ispatın okul matematiğindeki gerekliliğine yönelik negatif düşünceleri dile getirdiklerine ancak bu görüşe ciddi matematik çevrelerinin tepki gösterdiğine de değinmektedir. İspatın okul matematiğinde özellikle Öklid geometrisi içerisinde sınırlı kalması ve matematikte yeterince yer almaması Amerika'da da benzer tepkilerin ve eleştirilerin oluşmasına neden olmuştur. Örneğin Wu (1996) ispatın geometri dışındaki alanda çok az bulunmasının matematikteki ispatın doğasının yanlış tanınmasına neden olduğunu dile getirirmektedir (aktaran Knuth, 2002). Tüm bu eleştiriler bir sonraki ve son dönem olarak adlandırılabilecek olan 2000'lerde öğretim programları ve NCTM'nin prensip ve standartları açısından ispat ve ispatlamanın yeniden ele alınması ve öğretim biçiminin değerlendirilmesine zemin oluşturmuştur. NCTM'nin 2000 standartlarında ispatın statüsünün bir önceki standartlara göre önemli ölçüde yükseldiği (Knuth, 2002) görülmektedir. Bu yeni yaklaşımda sadece ispatın içerikteki yerinin arttırılmasına değil ispatın matematik öğretimindeki rolü ve önemi açısından da önemli vurgulamalara rastlanmaktadır. NCTM'nin 2000 dokümanında *içerik* (6 adet) ve *süreç* (4 adet) başlıkları altında iki grup standart bulunmaktadır. Standartlar anlamaya, bilgiye ve becerilere yönelik çerçeve sunmaktadır. Süreç standartları okul öncesinden 12. sınıfa kadar olan seviyede, içerik (matematik) bilgisinin edinilmesine ve kullanılmasına yönelik esaslara işaret etmektedir ve tüm seviyeler (seviyeler 4 grupta toplanmış olup bunlar: okulöncesi--2. sınıf; 3. sınıf--5. sınıf; 6. Sınıf--8. sınıf ve 9. Sınıf--12. sınıfdır) için aynı olup sadece 4 seviye grubuna göre kapsamı ve uygulama hedefleri değişmektedir. Söz konusu süreç standartları; 1-problem çözme, 2-muhakeme ve ispat (reasoning and proof), 3-bağlantılar (connection) ve 4-gösterimlerdir (representation). Görüldüğü üzere ispat 4 temel süreç standardından birini oluşturmakta ve okul öncesinden 12. sınıfa kadar tüm seviyeler için gerekli görülmektedir. Muhakeme ve ispata yönelik yapılan ayrıntılı açıklamalar aşağıdaki şekilde özetlenmektedir,

> Öğretim programları okul öncesinden 12. sınıfa kadar tüm öğrenciler için şu hususları olanaklı kılmalıdır:
> -- muhakeme ve ispatın matematiğin temel bir yönü olduğunun farkına varma,
> -- matematiksel varsayımları oluşturma ve araştırma,
> -- matematiksel argümanları ve ispatları geliştirme ve değerlendirme,
> -- çeşitli muhakeme türlerini ve ispat yöntemlerini seçme ve kullanma (NCTM, 2000: 56).

Öğretim programları açısından ülkemizdeki duruma bakıldığında da bir önceki (1992 programı) ve şu an uygulamada (2005 programı) olan iki programda ispat ve ispatlamanın ele alınış biçiminde birtakım farklılıklar olduğu görülmektedir. Önceki Ortaöğretim Matematik Dersi Programları (1992) kitabı incelendiğinde lise 'matematik öğretiminin genel amaçları' (10 adet) içerisinde ispata yönelik şu ifadeler yer almaktadır;

> *Amaç-2:* Doğru düşünme kurallarını öğrenme. İspat kavramını algılatma. İspat edilebilen bilimsel sonuçlar ile dogmalar arasındaki farkı kavratma. Her alanda varılan yargıların ve hükümlerin ispat edilebilir nitelikte olmasının gereğini ve önemini kavratma.
> *Amaç-3:* Geometrik kavramlardan ve modellerden hareketle aksiyomların gerekliliği algılatma.
> *Amaç-9:* Karşılaşılan problemlerin çözümünde [öğrencilerin] yerine göre; analiz ve sentez, tümden gelim, tümevarım, özelleştirme ve genelleştirme yollarını kullanma alışkanlığını edinmelerini sağlama (s. 10-11).

Buradaki amaçların dışında ayrıca Lise I. Sınıf Matematik Dersi Programı, ilk ünitesi olan Mantık konusuna yönelik belirlenen iki amaç içerisinde de şu davranışlara ve açıklamalara yer verilmektedirr;

> *Amaç-3*
> *Davranış-12:* Tanım, aksiyom, teorem, ispat kavramlarını açıklama.
> *Davranış-13:* Teoremlerin ispat yöntemlerini açıklama [doğrudan, olmayana ergi (dolaylı), tümevarım, tümdengelim, deneme, aksine örnek verme].
> *Amaç-4*
> *Davranış-11:* Verilen bir aksiyom ile teoremi karşılaştırma.
> *Davranış-12:* Verilen bir teoremin hipotezi ve hükmünü söyleme ve yazma.
> *Davranış-13:* Verilen basit bir teoremi doğrudan ve olmayana ergi yöntemi ile ispatlama (x=3 ise 2x+4=10 v.b.).
>
> *Açıklamalar:* … yakın çevreden örneklerle önerme kavramı, önermelerin denkliği ve değili verilecek. Bileşik önermelere ait özelikler doğruluk tabloları ile ispatlanacak. Matematikte tanımın önemi vurgulanacak. Teorem, bir teoremin hipotez ve hükmü açıklanacak. Aksiyomla teorem arasındaki farklar belirlenecek. Bir problemde veya

> teoremde ispatın varlığı ve önemi açıklanacak. Basit örneklerle çeşitli ispat yöntemleri kavratılacak (s. 18,19).

Yukarıda sıralanan amaçlar, davranışlar, açıklamalar dikkate alındığında ve diğer matematik konularına yönelik amaç ve davranışlar da incelendiğinde şu gözlemleri ifade etmek mümkündür;

Programda ispat ve ispat yapmaya genel anlamda bir değinme olmasına karşın ayrıntılandırmanın yapılmadığı, ispatlara sadece matematikte mantık konusu içerisinde yer verildiği onun dışında yalnızca geometri konularında aksiyomlara ve temel teoremlere değinildiği görülmektedir. İspat yapmaya yönelik vurgu temel tanımlara, ispatın ana yapısına ve ispat yapma yöntemlerine dair bilgi edindirmeye yönelik olup ispat yapma uygulamalarına çok az yer verildiği görülmektedir. Matematik öğretiminin genel amaçlarında (amaç-2) kavramsal olarak ispat, matematiksel (formal) ispattan ziyade bilimsel ispat ya da doğrulama biçiminde ele alınmaktadır. Mantık ünitesi içerisinde önermeler konusu ayrıntılı biçimde verilirken önermeler mantığı açısından tümdengelimsel doğrulamaya değinilmemektedir. Aksiyomatik sistemin verilişinde de geometri temel alınmış olup matematikte aksiyomatik yapılara örnek sunulmamıştır. Geometri konuları içerisinde değinilen aksiyom ve teoremlere yönelik davranışlarda ise daha çok söyleme ve yazma ya da gösterme üzerinde durulmuştur. Ancak gösterme davranışının doğrulama, muhakeme etme ya da ispatlamadan çok örnekleme biçiminde olduğu algılanmaktadır. Programın genelinde amaç ve davranışlar içerisinde, temel teoremler dışında herhangi bir teoreme ya da ispatına yönelik ifadelere rastlanmamakta ve verilen eşitliklerin, formüllerin ve genellemelerin çoğu kez sadece örneklendirilmesi üzerinde durulmakta, doğrulanmasına değinilmemektedir.

2005 yılında yürürlüğe giren ve şu an tüm ortaöğretim sınıflarında uygulaması zorunlu olan yeni matematik öğretim programına bakıldığında ise hemen giriş kısmında matematiksel çalışmanın esasları ortaya konulurken ispata değinildiği görülmektedir.

> Matematiksel çalışmanın esasları aşağıdaki gibi özetlenebilir.
> -- Mantıksal ilişkileri bulmak ve bu ilişkileri anlamak,
> -- Bulunan bu ilişkileri sınıflandırmak ve bu ilişkilerin doğruluğunu kanıtlamak,
> -- Doğruluğu kanıtlanan bu ilişkileri genellemek ve hayata taşıyıp uygulayabilmek.

> Yukarıdaki maddeler, matematikçilerin başarılarını öne çıkartan ve matematiğin ilgi alanını açık biçimde aydınlatan ifadelerdir (MEB, 2005: 4).
>
> Matematiksel çalışma, kavram ve kavramsal yapıların oluşturulmasına, bu yapı içinde sınıflandırma ve genellemeye yönelik çalışmaları kapsar. Bu sınıflandırma ve genelleme yaklaşımı tümden gelim ve tüme varım düşünme sürecinin ifadesidir (s. 6).

Ayrıca programda matematik ve matematik eğitiminin genel bir çerçevesi sunulurken *genelleme* ve *kesinlik* özellikleri kısaca açıklanmakta ve matematiğin kavramlara ve kavramsal ilişkilere bağlı mantıksal yapısına ve muhakemeye dayalı olma özelliğine değinilmektedir. Programda yer alan matematik eğitiminin genel amaçlarına bakıldığında on beş amaç içerisinde doğrudan ispat ve ispatlamayı içeren bir madde olmamakla birlikte iki amaç içerisinde şu ifadelere yer verilmektedir,

> *Amaç-3:* Tüme varım ve tümden gelim ile ilgili çıkarımlar yapabilecektir.
> *Amaç-4:* Matematiksel problemleri çözme süreci içinde, kendi matematiksel düşünce ve akıl yürütmelerini ifade edebilecektir.

Ayrıca matematik derslerinin anlatımındaki genel, **Tanım → Teorem → İspat → Uygulamalar ve Test** biçimindeki anlayıştan **Problem→Keşfetme→Hipotez Kurma→Doğrulama→Genelleme→İlişkilendirme** biçiminde öğrenci merkezli, keşfetmeye, öğrencinin kendi bilişsel gelişimini sağlamasına ve akranları ile iletişim kurarak, bilgiyi kendi öğrenme yaşantısı yoluyla yapılandırmasına yönelik bir anlayış değişikliğine vurgu yapılmaktadır. Programda içeriğin verilişi öğrenme ve alt öğrenme alanları üzerinde yapılandırılmış ve her alt öğrenme alanına yönelik kazanımlar, etkinlik örnekleri ve açıklamalar sunulmuştur. İspat ile ilk kez eski öğretim programında olduğu gibi mantık öğrenme alanında karşılaşılmaktadır. İspat yöntemleri bir alt öğrenme alanı olarak verilmiş olup iki kazanımı içermektedir. Programda yer aldığı biçimiyle (s.77) ispat alt öğrenme alanının kazanımları, etkinlik örnekleri ve açıklamaları için Tablo-5 incelenebilir. Yeni matematik öğretim programına yönelik verilen bilgiler ve programın tümü etkinlikler çerçevesinde incelendiğinde ispat ve ispatlamaya yönelik şu gözlemler ifade edilebilir;

Yeni öğretim programında ispat ve ispatlamaya, giriş bölümünde yapılan değinmeler ve içerikteki etkinlikler açısından bakılacak olursa eski programa nazaran biraz daha fazla yer verildiği söylenebilir. Özellikle matematiksel çalışmanın esasları ve matematik dersinin işlenişinde ki anlayış değişikliği muhakeme, doğrulama ve ispatların gerekliliği ve anlamını kavrama açısından oldukça yararlıdır. Ancak giriş bölümünde ifade edilen noktalara içerikte yeterince yer verilemediği görülmektedir. Örneğin bazı genellemelerin, formüllerin, eşitliklerin elde edilmesine yönelik etkinlikler sunulmamış bu tür uygulamaları öğretmenlerin yapması istenmiştir. Öğrencilerin genelleme, formülize etme, doğrulama ve ispatlama becerileri verilen ifadelere yönelik sınırlı örneklemeleri yaparak bu örnekler üzerinden yaptıkları çıkarımlarla geliştirmeleri amaçlanmıştır. Örneğin bağıntı ve fonksiyonlarda A kümesinden B kümesine tanımlı bağıntı sayısı, fonksiyon sayısı, birebir fonksiyon sayısını veren ilişkileri verilen örnekler sonrasında genel bir formüle ulaştırmada, polinomlarla ilgili bazı özeliklerin belirlenmesinde, ikinci derece denklemlerde diskriminant ve kökleri veren formüllerin elde edilmesinde, denklemlerde kökler ve katsayılar arasındaki ilişkilerin ifade edilmesinde genelleştirilmiş soyutlanan ifadelerin sunumu öğretmenlere bırakılmış öğrencilere sınırlı (çoğu kez sayısal) örneklemeler yaptırılması önerilmiştir.

Yeni programın içeriğinde etkinlikler kısmında az da olsa ispatlama egzersizlerine yer verilmesi [örn. $\sqrt{2}$ nin irrasyonel olduğunun gösterilmesi (s. 101), x ve y aynı işaretli olmamak kaydıyla $x<y$ iken $1/x > 1/y$ eşitsizliğinin var olduğunun doğrulanması (s.102) ve aritmetik ortalamanın geormetrik ortalamadan büyük ya da eşit olabileceği önermesinin doğru olduğunun gösterilmesi (s. 109) ve denklemler ve özdeşliklere yönelik sözsüz ispatlardan (s. 121-128) yararlanılması] önceki öğretim programına göre daha fazla somut uygulamaların bulunduğunun örnekleridir.

Sonuç olarak her iki öğretim programında da muhakeme, ispat ve ispatlamaya yönelik yaklaşımların kısıtlı olduğu ve yürürlükteki öğretim programında bu noktaların geliştirilmesi gerektiği söylenebilir. Matematiksel çalışmanın esasları etkinliklerin içeriklerine tam anlamıyla yansıtılamamıştır. İspatların ve ispatlamanın açıklama, doğrulama, iletişim kurma ve sistematize etme gibi fonksiyonları olduğu ve ancak bu fonksiyonlar yardımıyla matematik yapma, matematiksel öğrenmeyi ve anlamayı geliştirmenin tam anlamı ile mümkün olabileceği daha fazla sezdirilmelidir. Bu veriliş biçimleriyle ispat daha çok mantık konusu/öğrenme alanı içerisinde bir ünite/konu gibi ya da daha çok geometrinin uğraşı alanı içerisindeymiş gibi algılanabilir ve matematiğin bütünündeki yeri ve öneminin fark edilmesi güçleşebilir. Aksiyomatik bir yapının ne olduğu, neleri içerdiği ve mantıksal akıl yürütmedeki rolü ve öneminin algılanmasında bütüncül bir yaklaşımın sergilenmesi açısından aksiyomatik sistemin geometride olduğu gibi matematikte de var olabileceği örneklenmelidir, bu tür örnekler programda görülmemektedir.

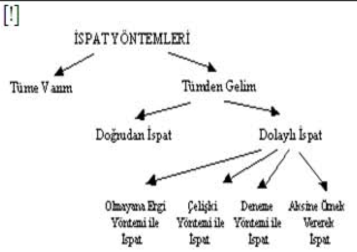
Tablo 5

İspat Yöntemleri Alt Öğrenme Alanı İçeriği

9. SINIF ÖĞRETİM PROGRAMI

ÖĞRENME ALANI: MANTIK 1.BÖLÜM: MANTIK

<table>
<tr><th>ALT ÖĞRENME ALANI</th><th>KAZANIMLAR</th><th>ETKİNLİK ÖRNEKLERİ</th><th>AÇIKLAMALAR</th></tr>
<tr><td rowspan="2">İSPAT YÖNTEMLERİ</td><td>1. Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir.</td><td>Bir teoremin verilen kısmına hipotez, ispatlanacak olan kısmına hüküm denildiği belirtilir.
"İki çift sayının çarpımı çift sayıdır." teoreminin hipotez ve hükmünü belirlemeleri istenir.

Hipotez (p): "a ve b çift sayıdır."
Hüküm (q): "a.b çift sayıdır."
Teorem $(p \Rightarrow q)$: "a ve b çift sayı ise a.b çift sayıdır."</td><td>[!] Aksiyomile teorem arasındaki farkınüzerinde durulur.</td></tr>
<tr><td>2. İspat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapar.</td><td>• "İki tek sayının toplamı çift sayıdır." önermesi doğrudan ispat yöntemiyle ispat ettirilir.
• "Bir doğal sayının karesi çift ise kendisi de çifttir." önermesi olmayana ergi metodu ile ispat ettirilir.
• $x \in R$ olmak üzere, $(5x+3=23) \Rightarrow (3x+7 \neq 32)$ olduğu çelişki metodu ile ispat ettirilir.
• $A=\{4,5,6,7\}$ kümesi veriliyor. "Her $x \in A$ için $x^2 < 11x-24$" önermesi deneme yöntemiyle ispat ettirilir.
• "Her asal sayı tek sayıdır." önermesinin yanlışlığı aksine örnek vererek ispat ettirilir.</td><td>[!]


İspat yöntemleri yukarıdaki şema ile verilir. Sadece doğrudan ve dolaylı ispat yöntemleri açıklanır.

"$x \neq 3$ ise $5x-2 \neq 13$ dür." önermesini olmayana ergi metoduyla ispat ediniz.

Tek sayıların karesinin de tek sayı olduğunu ispat ediniz. (Yol Gösterme: Tek sayılar $n \in Z$ olmak üzere $2n+1$ şeklinde yazılabilir.)</td></tr>
</table>

Sınıf İçi Etkinlik [!] Uyarı İç İlişkilendirme Diğer Derslerle Bağlantılar Ölçme ve Değerlendirme 77

Ayrıca öğrencilerin ispatları ve ispat yapmayı sadece matematikçiler ya da matematik öğretmeni gibi (dışsal) bir otoritenin anlayabileceği, yapabileceği ve onlardan öğrenilmesi gerektiği düşüncesinden sıyrılması onların çok daha fazla ispatla haşır neşir olmasıyla mümkün olabilir. Ancak öğretim programlarında basit ya da çeşitli biçimlerde ispat yapmayı öngören örneklere yeterince yer ayrılamadığı söylenebilir.

İspat ve ispatlamaya yönelik matematik eğitimi literatürü, öğretim programları ve prensipler ve standartlar açısından buraya kadar sunulan bilgilere dayalı olarak araştırma literatüründe ispat ve ispatlamaya yönelik oldukça zengin bir alanın oluştuğu ve bu alanın çok boyutlu biçimde genişlemeye devam ettiğini söylemek mümkündür. Metodolojik açıdan kimi zaman çoktan seçmeli araçlarla veri toplanırken (örn. McCrone & Martin, 2002; Martin & McCrone, 2001; Healy & Hoyles, 1998) kimi zamanda açık uçlu problemler ya da ispat sorularının (örn. Ko & Knuth, 2009; Knuth & Elliot, 1997) kullanıldığı görülmektedir. Ancak bu geniş ve ayrıntılı araştırma ağı içerisinde söylemsel yaklaşımlardan ya da SÇ'den yararlanılan çalışmaların son derece sınırlı olduğu (örn. Golzy, 2008; Cirillo, 2008; Martin, McCrone, Bower & Dindyal, 2005) görülmektedir. Uluslararası prensipler, standartlar ve öğretim programı çerçevesinde muhakeme ve ispata giderek daha fazla yer ayrıldığı ve bu kavramların matematik öğrenmedeki artan öneminin vurgulandığı görülmektedir. Bu çerçevede ispatları okuma, anlama ve yapmada sorunların tespit edilmesi ve daha iyi uygulamaların gerçekleştirilebilmesi için öğrencilerin bu süreçlerdeki düşünme ve davranışlarının farklı yöntem ve yaklaşımlarla derinlemesine incelenmesi de yararlı olacaktır. Bu çerçevede bu çalışma ile literatüre bu tür bir katkının yapılması temel amaçlardan biridir. Bizce büyük bir değişim süreci içinde olan ülkemizdeki matematik öğrenme öğretme anlayışı içerisinde muhakeme ve ispatın öğretiminde de dünyadaki gelişime paralel bir yaklaşımın geliştilmesi oldukça önemli bir husustur. Öğretim programımız incelendiğinde bu tür bir gelişime gereksinim olduğu da gözlenmektedir. Dolayısıyla ülkemiz öğrencilerinin ispata yönelik bilgi, tutum, beceri ve davranışlarının araştırılması söz konusu gelişime yönelik planlamalara önemli ön veriler sağlayacaktır. Öğrencilerin ispat, muhakeme ve matematiksel doğrulamaya yönelik öğrenmelerinin, anlamalarının ve yaşadıkları sıkıntıların araştırmasında ve ispatlama becerilerinin geliştirilmesinde iletişim süreçlerinde rol oynayan söylemler ve onların analizleri yoluyla daha ayrıntılı bilgilere ve derin içe bakışlara ulaşılabileceği ve bu yolla yukarıdaki amaçlara ulaşmada katkı yapılabilceği düşünülmektedir. Gee & Green'e göre (1998) söylem, bilginin nasıl yapılandırıldığı ve paylaşıldığını karakterize etmenin bir yolunu sunar. Buradan hareketle bu araştırmada ortaöğretim öğrencilerinin ispata yönelik matematiksel bilgilerini nasıl yapılandırdıklarını incelemek için sınıf içi söylemleri temel alınarak bir SÇ gerçekleştirilmeye çalışılmıştır. Bir sonraki bölümde yapılan araştırmanın yöntemine dair ayrıntılı bilgilere yer verilmiştir.

BÖLÜM III
YÖNTEM

Araştırmanın Modeli

Bu çalışma yapılan araştırmanın amacı, problemleri, araştırma tasarımı, veri toplama biçimi ve verilerin analizinde yararlanılan yaklaşımlar açısından bir nitel araştırmadır. Nitel araştırma,

> Pek çok disiplinin (sosyoloji, antropoloji, felsefe, psikoloji, dilbilim gibi) etkisiyle gelişmiş ve güçlü kuramsal temelleri olan bir alandır. Tüm bu disiplinlerde ortak olan tema insan davranışını, içinde bulunduğu ortam içinde ve çok yönlü olarak anlamaya çalışmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2000: 18).

Baş ve Akturan (2008), ise nitel araştırmayı betimlerken modern yaklaşıma dayalı araştırmalarda tek bir gerçeklik yerine farklı gruplar için farklı gerçekliklerin var olabileceğini ve olayların dışarıdan izlenmesi yerine konuya incelenilen grupların perspektifinden yaklaşılmaya çalışıldığını ve doğal olarak elde edilen bulguların evrensel nitelikler taşımak yerine sadece (araştırma grubu) belli özellikleri taşıyan gruplar için geçerli sayıldığını ifade etmektedir. Bu çalışma genel itibariyle nitel araştırma paradigmasına göre geliştirilmiş olup bu paradigma altında seçilen araştırma yöntemi ise söylem çözümlemesidir. Bu araştırmanın metodolojik çerçevesi ve uygulama şekli ilerleyen kısımda *Nitel Araştırma Paradigması Altında Bir Metodolojik İzlence Olarak Söylem Çözümleme* başlığı altında verilen adımlara birebir bağlı kalınarak gerçekleştirilmiştir.

Aşağıdaki bölümlerde araştırmanın kuramsal çerçevesine, metodolojik izlence olarak SÇ'ye ait bilgilere, araştırmanın örneklemine, veri toplama biçimi ve araçlarına, transkripsiyon, veri çözümleme teknikleri ve analiz aşamasında kullanılan kodlamaya yönelik açıklamalara yer verilmektedir.

Kuramsal Çerçeve

Bu çalışmanın kuramsal çerçevesi iki boyuttan oluşmaktadır. Çalışmada ortaöğretim öğrencilerinin ispata yönelik bilgi yapılandırma süreçleri, sınıf içerisindeki öğretmenleri ve birbirleri ile gerçekleşen etkileşimlerden oluşan mikro-kültürel yapı açısından ele alınması nedeniyle ilk boyutta öğrenmeye yönelik bir kuramsal çerçeve olan sosyokültürel yaklaşım temel alınmaktadır. Öte yandan bilgi yapılandırma süreçlerinde rol alan etkileşimleri incelemede bir yöntem ve aynı zamanda bir araç olarak dile dayalı söylem yapıları ele alındığı için sosyokültürel yaklaşımın felsefesi ile örtüşen, bu araştırmanın ele aldığı problemlere yanıt oluşturmada destekleyici ve onları analiz etmede doğrudan bilgi sağlayan bir dilbilimsel perspektife de ihtiyaç duyulmuştur. Kuramsal çerçevenin ikinci boyutunu oluşturan bu perspektif fonksiyonel dilbilim bağlamında *Edimbilim*dir (pragmatics).

-- Sosyokültürel Yaklaşım

Sosyokültürel yaklaşım ilk bölümde de değinildiği gibi Vygotsky'nin psikoloji ve eğitim alanında çok büyük etkileri olan çalışmalarıyla doğmuş bir düşünce sistemidir. Vygotsky çalışmalarında birkaç genetik alan ile ilgilenmiş olmasına karşın çalışmalarının çoğunu tek bir alan üzerinde gerçekleştirmiştir. Onun ilgisi insanın zihinsel fonksiyonunun kendi filogenetik (phylogenetic) kökeninde nasıl ortaya çıktığı ve sosyokültürel tarih çerçevesinde nasıl değiştiği (Wertsch & Toma, 1995) hakkındadır. Bu yaklaşıma göre öğrenmede sosyal etkileşimin ve kültürün önemli bir rolü vardır. Bireyler yaşamları boyunca sosyal yapılar içerisinde akranları ya da kendinden daha yetkin olan kişilerle iletişim ve paylaşım içerisindedir. Söz konusu iletişim ve paylaşımda merkezi bileşen dildir. Dil kendi doğası gereği sosyal canlı bir mekanizma olması nedeniyle kendisinin yer aldığı yaşamsal ve zihinsel her sürece de sosyal bir bağlam sağlamaktadır. Bu düşünce sisteminin tasvir ettiği yapılandırma süreci, bir grup içerisinde tüm fikirlerin eşdeğer statüde yer aldığı bir anlama ve öğrenmeye (Şimşek, 2004) işaret etmektedir. Sosyokültürel yaklaşıma göre bireylerin bilişsel yapısı, bulundukları kültür içindeki etkileşimleri gözlenmeksizin anlaşılamaz (Fosnot & Perry, 2007). Çünkü "öğrenme bireyin yaşadığı toplumsal ve kültürel doku içerisinde gerçekleştirdiği bilinçli bir etkinliktir" (Ağlagül, 2009: 39). "Bu yaklaşımın temel iddiası, zihinsel işlevin kültürel, tarihsel ve resmi (institutional) bağlamlara bağlı olarak durumsallaştığıdır" (Wertsch & Toma, 1995: 159). Bireylerin etkileşimlere ve deneyimlerine dayalı olarak oluşturdukları bilgiler, zihinsel bir özdüzenleme sonrasında içselleştirilerek öznel bir forma dönüşür. Durmuş, şunu ifade etmektedir;

> Bizim oluşturduğumuz bilgi; önceden ne bildiğimize, ne gibi deneyimler geçirdiğimize, bu deneyimleri bilgi yapımıza nasıl organize ettiğimize ve bu deneyimler hakkında bizim neye inandığımıza bağlıdır. Dünya görüşümüz,

> bizim deneyimlerimiz yorumlamamız ile oluşur. Bununla birlikte, gerçek, ne tamamen bizim öznel dünyamızda ne de tamamen bizim dışımızdadır (2001: 6).

Bu nedenle, bu yaklaşımda aslında tam anlamıyla nesnel gerçekliğe sahip bir bilgiden söz etmek zordur. Ancak nesnellik bireylerin üyesi oldukları mikro ve dolayısıyla onların birleşiminden oluşan makro kültürlerde uzlaşarak oluşturdukları kültürel bilgi açısından ele alınmaktadır. Bunu eğitim açısından bir sınıf bazında ele alacak olursak Bauersfeld'in ortaya koyduğu 'müzakere' kavramına Newman vd'nin (1989) nasıl bir anlam yüklediğine bakmak yararlı olacaktır. Onlara göre müzakere "öğretmen ve öğrencilerinin birbirlerinin katkılarını arttırarak birlikte davrandıkları ve kullandıkları karşılıklı bir uyumlandırma sürecidir" (aktaran Cobb, 2007: 48). Dolayısı ile bireylere/öğrencilere belirli bir bilgi kümesini aktarmak ve onu öğrenmelerini beklemek çok anlamlı bir çaba değildir. Aksine öğrenme sürecinde öğrenenlere kendi bilgilerini yapılandırmalarına sosyo-iletişimsel bir zeminde fırsatlar sağlanmalıdır. Böylece öğrenenler öğrenme sürecinde aktif birer aktör olarak hem kendilerinin hem de akranlarının öğrenmelerinden sorumlu oldukları bir sosyal grupta belli bir alana özgü (matematik gibi) bilgiyi inşa edebilirler. Tüm ifade edilenlerin ışığında sosyokültürel yaklaşım açısından öğrenme genel anlamıyla bir kültürleşme süreci olarak tanımlanabilir. Sosyokültürel yaklaşım üzerine daha pek çok ilave açıklamalar ve yorumlamalar getirmek mümkündür. Ancak genede son noktada bu yaklaşım onu ortaya çıkaranların eğilimleri ve deneyimlerine dayalı bir konu olması nedeniyle kesin olarak tanımlanması mümkün olmayan bir (Ernest, 1994 den aktaran Blanton, 1998) düşünce sistemidir. Bu nedenle sosyokültürel yaklaşımın temel felsefesini anlamada çekirdek nokta olan Vygotsky'nin ortaya koyduğu temel kavramlara ve onların ilişkilerine bakmak daha yararlı olacaktır. Bu nedenle izleyen kısımda söz konusu kavramlar özetlenerek ele alınmaktadır.

Vygotsky'nin kuramındaki belirleyici dayanaklar; *anlamlandırma, bilişsel gelişim araçları* ve *yakınsak gelişim alanıdır* [ya da YÖE: yaklaşık öğrenme eşiği] (Zone of Proximal Development) (Bağcı-Kılıç 2001 den aktaran Bukova-Güzel, 2006).

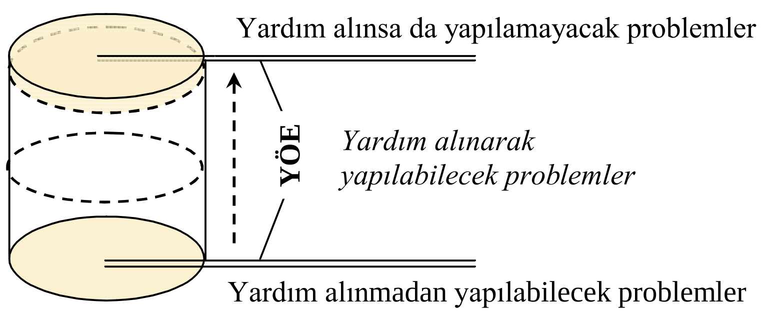
<u>Anlamlandırma:</u> Kişinin bilgiyi anlamlandırmasında içinde yaşadığı toplum ve kültür etkilidir. Kişinin içinde bulunduğu kültür ve kendini saran çevresi onun olayları anlamlandırmasına yardımcı olarak bilgi oluşturmasını sağlar (Özden, 2003).

<u>Bilişsel Gelişim Araçları:</u> Bireyin bilişsel gelişimini sağlayan bazı önemli araçlar vardır. Bunlar; dil, kültür ve bireyin çevresindeki onun için önemli kişilerdir. "Dil, yüksek öğrenme biçimlerini, problem çözme ve yeni yeteneklerin kazanımını olanaklı kılan en üst düzey psikolojik araçtır" (Philips & Soltis, 2005: 59). Vygotsky dil gibi psikolojik araçların insanoğlunun doğal yetenek ve becerilerinin yüksek zihinsel fonksiyonlara dönüşmesiyle insan davranışlarına rehberlik etmek için görev yaptığına inanmaktaydı (1986: XXV den aktaran Blanton, 2002).

<u>Yaklaşık Öğrenme Eşiği:</u> Bireyin, YÖE içerisinde daha yetenekli/bilgili biri tarafından yönlendirilmiş yardımla (scaffholding) gelişimi kolaylaştırılabilir. YÖE bireyin diğerlerinin yardımı aracılığıyla yapabilecekleri ile diğerlerinin yardımı olmaksızın yapabilecekleri arasındaki alandır (Tharp & Gallimore, 1988'den aktaran Morrone et. al., 2004). Bu alan yüksekliği sürekli artan silindire benzer. Bireyin problem çözme becerisi geliştikçe öğrenme eşiğinde de yukarıya doğru bir genişleme olur. Silindirin tabanında yardım almadan yapılabilecek/çözülebilecek problemler, tavanında ise yardım alınsa bile yapılamayacak problem yer alır. Bu iki uç arasında ise bireyin yönlendirilmiş yardım alarak çözebileceği problemler bulunur. Silindir modelinden (Şekil-10) anlaşılacağı üzere bireyin bilişsel gelişimi sınırsız bir çizgide yaşamı boyunca sürer. Öğretim açısından ise YÖE öğretmenin yardımının öğrencilerin kendi çabalarıyla ulaşamayacakları bir amacı gerçekleştirmelerine veya bir problemi çözmelerine imkân verebilen bir tür yapı iskelesi (scaffholding) sürecini içermesi anlamına gelir (Baki, 2006).

Şekil 10

Yaklaşık Öğrenme Eşiği



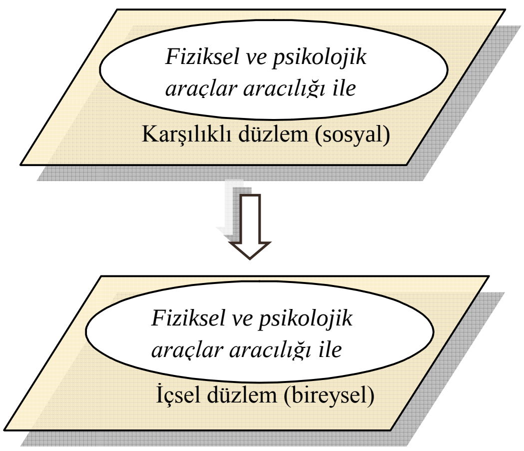
Vygotsky'nin kuramındaki gelişim ile ilgili ana noktalardan bir diğeri ise *kültürel gelişmenin genel kalıtımsal yasası*dır (Genetic Law of Cultural Development). Vygotksy'nin zihnin sosyal yapılanmasındaki inanışına dayanan bu yasa, bir bireyin yüksek zihinsel fonksiyonlarının *karşılıklı (ya da ara) bir düzlem üzerinde* (intramental plane) sosyal bir alan içerisinde ya da insanlar arasında oluştuğunu öne sürer. Yüksek zihinsel fonksiyonların içselleştirilmesi, o halde, içsel zihinsel bir düzleme göre (intramental plane) daha düşük zihinsel fonksiyonların genetik dönüşüm (transformation) sürecidir (Blanton, 1998: 10). Bu dönüşüm (ya da içselleştirme) aracılığıyla dıştan gelen bir işlem (operation) içsel olarak yeniden yapılandırılır (Blanton, Berenson & Norwood, 2001).

Vygotsky karşılıklı düzleme sosyal, içsel düzleme ise psikolojik düzlem adlandırmasını yapar ve sosyal düzlemi bireyler arası karşılıklı psikolojik bir kategori, içsel düzlemi ise bireyde var olan içsel psikolojik bir kategori olarak ele almıştır. Zihinsel fonksiyonlar (örneğin hafıza ve düşünme gibi) hem karşılıklı düzlem hem de içsel düzlemde ortaya çıkarlar (Wertsch & Toma, 1995). Bunu Leont'ev şöyle ifade etmektedir;

> Zamanla ve diğerleriyle sosyal etkileşim ile tekrarlanan deneyimler aracılığıyla öğrenme birey tarafından içselleştirilir ve sosyal olan psikolojik olana dönüşür. Bu daha önce var olan, bilincin içsel düzlemine dışsal bir aktivitenin aktarımı olmayan diyalektik bir süreçtir (Leont'ev, 1981: 57).

Şekil 11

Yüksek Zihinsel Fonksiyon: Vygotsky'nin Kültürel Gelişmenin Genel Kalıtımsal Yasası



Blanton, (1998: 11)

Vygotsky'nin kuramında yer alan yukarıdaki ana hususlara dayalı olarak onun açısından bilginin ortaya konuluşunda üç temel sonuçtan söz etmek mümkündür (Aydın, 2007). Bunlar,

> -Bilgi, kültürel bir anlama sahiptir ve onun yapılandırılmasında kültür işlevseldir.
> -Kültürce yapılandırılan anlam çocuklar tarafından yetişkinlerle etkileşimle içselleştirilir.
> -Bilgi, dil ve sembollerle ifade edilir ve dil öğrenimi bilginin yapılandırılmasında etkindir.
> -İnsan gerçeklikle doğrudan temas edememekte, o, dil ve kültür aracılığıyla yapılandırılmaktadır (s. 17-18).

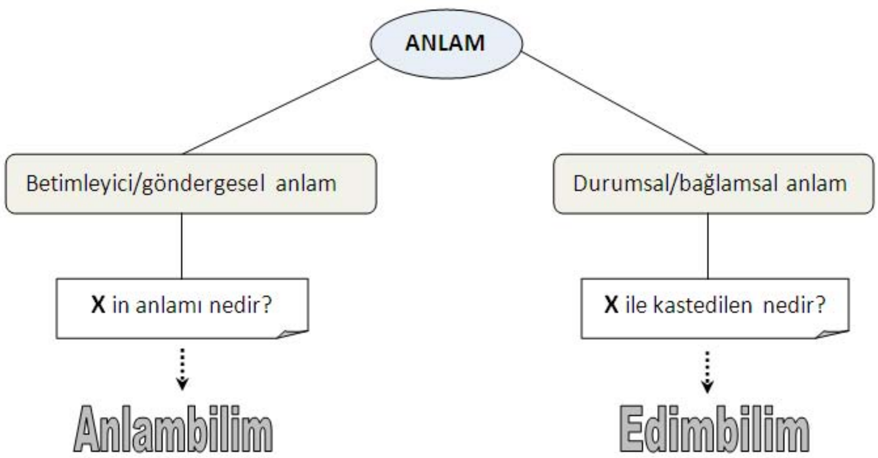
Vygotsky'e atfedilen bu sonuçların, diğer sosyokültürel yaklaşımcıların görüş ve çalışmaları da (özellikle Bakhtin, 1981, 1986) dikkate alınarak, bu yaklaşımın genel odağının sosyal yapıların (bireysel) bilişe nasıl etki ettiğinin incelenmesi olduğunu (Zack & Graves, 2001) söylemek mümkündür. Kotsopoulos (2008), literatürden yararlanarak kendi perspektifinden sosyokültürel yaklaşıma yönelik dört anahtar noktayı (her bir noktaya yönelik o noktada yer alan araştırmacıları ve onların çalışmalarını da sıralayarak) matematik eğitimi açısından şu şekilde ifade etmektedir; (1)Bilgi bir yeniden yapılandırmadır, (2) Öğrenenler kendileriyle ve matematiksel nesneler ile ilgili bilgiyi insanlarla, etkinliklerle ve kültürel araçlarla olan etkileşimleri aracılığıyla yapılandırırlar, (3)Bireyler sosyal ortamlardaki dilbilimsel kodlara ulaşabilme yetenekleri aracılığıyla sosyal rollerini içselleştirirler, (4)Bireyler sosyal ve kültürel aktarım aracılığıyla katılım gösterme veya öğrenme yeteneklerini etkileyen belirli kazançlar veya statü özellikleriyle söyleme giriş yaparlar.

-- Edimbilim (Pragmatics)

Pragmatik kelimesi Yunanca pragma kelimesinden türemiştir ve pragmatik günlük kullanımda pratik ya da realistik anlamında bir kullanıma sahiptir (Cameron, 2001). Edimbilim dilbilim açısından kaynağını dilbilimci Austin ve Grice'nin çalışmalarında bulur ve dilin iletişimsel kullanımına odaklanmaktadır (Larrazabal & Korta, 2002). Genel anlamda edimbilim, dilin etkilerini ve sözceleme durumlarını ele alır (Günay, 2010). Terimsel olarak "edimbilim bireyin içerisinde konuştuğu ya da yazdığı bağlamla ilgili anlamı inceleyen çalışma alanı" (Paltridge, 2006); "dili anlamaya yönelik temel teşkil eden dil ve bağlam ilişkilerinin incelenmesi" (Levinson, 1983: 21) ya da "tümcelerin (utterance) durumlar içerisinde nasıl anlam kazandıklarının araştırılması" (Leech, 1983: X) biçiminde tanımlanabilir. Edimbilim dile ait yorumlamaların gerçek dünya bilgisiyle nasıl ilişkili olduğuyla ilgilenir ve kelimelerin sözlüksel anlamlarından ziyade insanların söyledikleri ile neyi kastettiklerine odaklanır (Paltridge, 2006). Ancak edimbilimin anlamı ele alış biçimi anlambilimden farklıdır. Anlambilim sadece dilbilgisel bilgiden elde edilen anlama odaklanırken (Peccei, 1999), edimbilimde ise, belirli durumlara ve dilin kullanıcılarına gönderimle, kullanımdaki anlam ele alınır (Thomas, 1995). Başka bir değişle anlambilim sadece dilbilimsel bilgiden elde edilen anlama yoğunlaşırken, edimbilim ise anlamın tek başına dilbilimsel bilgi aracılığıyla tahmin edilemeyecek yönlerine yoğunlaşır, dolayısıyla da fiziksel ve sosyal dünyaya ait bilgileri de göz önünde bulundurur (Peccei, 1999). Günay (2010) şunu ifade etmektedir; anlambilim bir açıdan tümce içi anlamı ele alırken edimbilim ise tümcenin söyleme dönüştürülmesini konu edinmektedir. Literatürdeki benzer vurgulamalara dayanarak Çakır (2004), şunu ifade etmektedir; "anlambilim, anlamın soyut bir biçimde zihinde oluşumu ve nesne ile onun simgesel tasarımı arasındaki ilişki üzerinde [dururken], edimbilim ise bağlamdaki ya da kullanımdaki anlamı" merkeze almaktadır (s.246). Anlambilim ve edimbilim ayrımını aşağıdaki şekil (Şekil-12) ile de özetlemek mümkündür.

Şekil 12

Anlamın, Anlambilim ve Edimbilim Ayrımında Görsel Tasviri



Aschenbrenner (2009/10: 29)

Ancak anlambilim ve edimbilim her ikisi de dil aracılığıyla anlamın aktarımı ile ilgili olduklarından birbirlerinden bağımsız değil, birbirlerini tamamlayan çalışma alanları olarak (Dascal 1984; Saeed, 1997) görülebilir. Herhangi bir tümcenin anlambilimsel ve edimbilimsel anlamlarına aşağıdaki gibi örnekler verilebilir,

- "*Gelse ne olur*?" ifadesi

Anlambilimsel açıdan: "Eğer gelirse ne olma ihtimali var?" (ihtimal sorgulama)
Edimbilimsel açıdan: "Gelmesini diliyorum" (serzeniş yüklü istek, dilek) ya da "Geleceği varsa göreceği de var" (meydan okuma) anlamlarına gelebilir (Çakır, 2004: 250).

- A: Çimleri biçmek için eve zamanında dönebileceğini düşünüyor musun?
  B: *Şey, deneyeceğim ancak bu hafta A-14 de yol çalışması var.*

Anlambilimsel açıdan: B kişisinin soruya verdiği yanıt, B'nin eve zamanında gitmek için çabalayacağını ve güzergâhı üzerindeki A-14 yolunda bir yol çalışması olduğunu ifade etmektedir. Bu nedenle eve zamanında ulaşıp ulaşamayacağı konusunda da kendine güvenmemektedir.
Edimbilimsel açıdan: B kişisinin özellikle söylediği "*şey*" kelimesi dikkate alınırsa anlama yeni bir boyut eklenebilir. B kişisi biraz kaçamak cevap vererek A kişisinin istediği/beklediği yönde bir anlam üretmemektedir (Brockway, 1981 den aktaran Rowland, 2002:1), söz konusu eyleme yönelik isteksizlik/gönülsüzlük sezinlenebilir.

Edimbilimin kaynağını Austin ve meslektaşlarının 1960'larda ortaya koyduğu çalışmalar oluşturmaktadır ve dilin işlevini ele alan bu çalışmalar sözeylem teorisini doğurmuştur. Bu teori açısından tümceler sadece belirli bir anlam içermekle kalmayıp bir güce de sahiptir. Yani onlar sadece belirli şeyler hakkında değil onların yapılıp edilmesine de ilişkindir (Wood & Kroger, 2000).

> Bu yaklaşım tümcelerin salt yapısal bir birim değil, bir eylem oldukları gerçeğinin altını çizer. Başka bir anlatımla dildeki sözceler, söylenenlere, kullanıldıkları bağlama, dinleyen ve söyleyenin amacına, beklentilerine, varsayımlarına göre anlamlandırılabilir (Kocaman, 2003: 3).

Sözeylem teorisi altında dilde, iletişimin üç yönü öne çıkmaktadır. Bunlar *düzsöz* (locutionary act), *edimsöz* (illocutionary act) ve *etkisöz* (perlocutionary act) dür (Lijuan, Wenhong & Weigang, 2007). Sadock (2004), Austin'in yaptığı bu üçlü ayrımı şöyle açıklamaktadır;

- *Düzsöz*, konuşma eylemleridir, konuşmayı oluşturmada yer verilen (belirli sesleri üretme, belirli kelimeleri kullanma ve bu kelimeleri belirli bir dilin gramatik kuralları ile uyumlu biçimde kullanma) eylemlerdir.
- *Edimsöz*, konuşma esnasında belli bir amaçla (uyarma, önerme, hatırlatma, tehdit vb) gerçekleştirilen eylemlerdir.
- *Etkisöz* ise konuşma aracılığıyla gerçekleştirilen edimsözün dinleyen ya da okuyan üzerindeki etkisidir.

Bu kuramın en fazla üzerinde durduğu eylem çeşidi ise edimsözdür (Doğan, 2003). Wood & Kroger (2000), bu üçlü ayrımlardan yola çıkarak SÇ'deki vurgunun konuşma ile yapılan ve başarılan şey üzerine olduğunu belirtmektedir.

Çalışmalarıyla edimbilime kaynaklık eden diğer önemli kişi olan Grice ise anlamın iki temel ayrıma tabi tutulabileceğini öne sürmektedir. Bunlar doğal ve doğal olmayan anlamdır. Doğal anlam cümlelerin anlambilimsel ya da gerçek durumsal anlamı iken, doğal olmayan anlam ise edimbilimsel anlamdır (Rowland, 2002). Özetle edimbilim, bir iletişim ortamındaki konuşmaları içinde bulunduğu bağlamsal özellikleri de dikkate alarak yorumlayan ancak anlambilimsel anlamı tamamıyla dışlamayan onun tamamlayıcısı ya da kapsayıcısı biçiminde kabul edilebilecek dilbilimin bir dalıdır. Bu dalın ele aldığı konular ise:

- Sözcelerin yorumlanması,
- Konuşanların sözeylemleri nasıl kullanıp anladıkları,
- Tümce yapılarının konuşan ve dinleyen arasındaki ilişkiden nasıl etkilendiği (Rihard, 1992'den aktaran Uslu, 2005: 35) biçiminde özetlenebilir.

Bu çalışmada edimbilimden elde edilen bilgiler yardımıyla öğretmen söylemlerinin nasıl oluşturulduğu, iletişimde nasıl kullanıldığı ve bunların öğrencilerin anlamaları üzerindeki etkileri ele alınmaktadır. Sözcelerin yorumlanmasında özellikle örüntüsel özelliklere odaklanılarak öğretmenlerin ispatlamaya yönelik gizli ya da açık biçimde öğrencilere ilettiği mesajlar ve bunların öğrenci söylemlerine yansımaları ortaya konmaya çalışılmıştır. DS'lerde ispata dair söylemlerin içerdiği hem sözel hem de matematiksel dilin işlevleri analiz edilirken, TES'ler yardımıyla da öğrenci söylemlerindeki yansımalar betimlenmeye çalışılmaktadır.

Nitel Araştırma Paradigması Altında Bir Metodolojik İzlence Olarak Söylem Çözümleme

SÇ kimi zaman söylemin analizlerindeki farklı uygulamaları (sözeylem teorisi, konuşma çözümlemesi gibi) içerebilen kullanışlı bir (şemsiye) terim iken kimi zaman ise bütünüyle ayrıntılandırılmış analitik bir durumla ilgilenmek/uğraşmak biçiminde bir anlama bürünmektedir (Potter, 2009). SÇ söylem hakkında (teorik ve metodolojik elementler ile) düşünme yollarını ve veri olarak (metodolojik elementler ile) söylemi işleme yollarını içerir (Wood & Kroger, 2000). Bu bakış açılarının ikinci kategorileri açısından, söylemi analiz etmedeki farklı teorik ve pratik yaklaşımlara rağmen asgari müşterekte temel bazı adımların yer aldığı bir metodolojinin ortaya konabileceği görüşü ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda SÇ genellikle araştırma paradigmaları içerisinde önemli bir araştırma yöntemi olarak ifade edilmektedir. Akturan vd göre postmodernizmin bir ürünü olan,

> SÇ, metin veya konuşma biçiminde kullanılan dilin detaylı olarak analiz edilmesidir. Bu analiz bir proje, söylem veya araştırma metodunun arkasındaki ontolojik ve epistemolojik çıkarımlara ulaşmayı sağlayan bir araştırma yöntemidir (2008: 25).

Frohmann (1994) şunu ifade etmektedir; nitel yöntemler giderek artan bir şekilde, verilerin teoriye bağlı olarak açıklanması, analiz edilmesi ve yorumlanmasının açık-anlaşılır yolları olarak görülmeye başlamıştır; bu yaklaşımlardan birisi de SÇ'dir (aktaran Talja, 1999). Benzer şekilde Cheek (2004) SÇ'nin özellikle son on yılda nitel araştırma içerisinde giderek artan bir üne sahip olduğunu ifade etmektedir. Literatürde SÇ'yi nitel araştırma yöntemi olarak ele alan çok sayıda çalışmaya rastlamak mümkündür (örn. Harper 2006; Baş ve Akturan 2008; Yüksel, Mil ve Bilim 2007; Potter 2009; Holloway, 1997; Chapman, 2003; Willing, 2003; Parker, 1994). SÇ'yi nicel araştırma karakteristikleri ile kullanan deneysel çalışmalar çok az sayıda olup, nicel nitelikteki yaklaşımlarda odak, meydana gelenlerin ne sıklıkta olduğunda, nitel yapıdaki araştırmalarda ise meydana gelenler üzerinde neden ve nasıl sorularına yanıt bulunmasındadır (Lazaraton, 2002). Bu düşünce paralelinde bir nitel araştırma yöntemi olarak SÇ için en genel anlamda aşağıdaki gibi belli adımları içeren bir metodolojik izlence oluşturabilmek mümkündür. Elbette söz konusu bu izlence kesin, değişmez ve tek doğru biçiminde tanımlanamaz ve SÇ'nin çeşitleri ve SÇ'ye yönelik teorik yaklaşımlar açısından farklılaşarak, gelişerek ya da uyarlanarak ortaya konabilir. Bu izlence oluşturulurken özellikle literatürdeki yaklaşımların temel, anlaşılır ve uygulanabilir özelliklerine ve matematik eğitimi alanındaki çalışmaların veri örneklerine ve onların çözümlenme biçimlerine odaklanılmıştır. Bu izlence oluşturulurken aşağıda adı geçen aşamaları en uygun biçimde değindiğine inanılan 3 çalışma (Wood & Kroger, 2000; Wetherell, Taylor ve Yates, 2001 ve Potter & Wetherell, 1987) temel kaynak olarak kullanılmıştır.

SÇ'nin Amacı

Söylem çözümlemesinin verileri kategorilerle belirlenmiş olgular değil, sıklığa dayanan düzenliliklerdir (Brown & Yule, 1986). Dolayısıyla, elde edilen verilerdeki düzenlilikler, örüntüler keşfedilerek etkileşimli bir şekilde yorumlanmaya çalışılır. Söylem analizinde bireysel ve bireyler arasında geçen farklı tür ve düzeydeki söylemler analiz edilir, anlam alış-verişlerinin ayrıntıları üzerinde durulur. SÇ, ele alınan problemlere yönelik kesin çözümler sunmayı değil probleme yukarıdan bakan, daha kavrayıcı bir bakışla probleme ilişkin derin algılamaya imkân sağlar (Akturan vd, 2008).

SÇ araştırmalarında hem dilin kendisi hem de belli bir konunun incelenmesi için dilin kaynak olarak kullanıldığı yaklaşımlar bulunmaktadır. Yine SÇ gerçekleştirilen araştırmalarda iletişimdeki içeriğe ya da sürece (ya da her ikisine birden) odaklanılabilmektedir. Geleneksel araştırmalarda öne sürülen iddialar/hipotezler belli sayıdaki değişkenler arasındaki istatistiksel ilişkiler hakkında ifadeler içerirken, söylem çözümlemesinde ise iddialar değişkenlerle ilgili değildir ve belirli bir [katı] düzen içerisinde yapılandırılmazlar (Wood & Kroger, 2000). "SÇ'de ana amaç, anlamlandırma ya da yorumlamadır" (Akturan vd, 208: 32). SÇ'ye yönelik çalışmalarda ele alınan soruların/problemlerin şekillenmesi ve son halini alması verinin elde edilip (Taylor, 2001), ön incelemesinin gerçekleştirilmesine kadar sürebilir. Dolayısıyla araştırma sorularını başlangıçta çok katı bir sistemde ve değişmez bir yapıda görme eğiliminde olmamak yararlıdır. Söylem çözümleyicilerin amacı katılımcıların kullandıkları dili betimlemekten öte bu dil aracılığıyla katılımcıların etkileşimlerine dayalı yorumlamalara ulaşabilmektir.

Bu çalışmada SÇ ortaöğretim düzeyinde ispat ve ispatlamaya yönelik sınıf içi iletişim durumlarının incelenmesi amacıyla kullanılmaktadır. Öğrenci ve öğretmenler arasındaki iletişim sürecinde oluşan sözel söylemler hem kullanılan dil hem de onların oluşturduğu anlam alış-verişleri açısından incelenmektedir. Ancak dil açısından yapılan inceleme yapısal değil işlevsel özelliklere yöneliktir.

SÇ Araştırmasının Aşamaları

Bir SÇ araştırmasında genel adımları aşağıdaki biçimde oluşturmak mümkündür. Bu adımlar çerçevesinde yapılan bu araştırmaya yönelik bilgiler izleyen bölümde ayrıntılı biçimde sunulmaktadır.

Örneklem seçimi

Söylem analizinde, örneklem seçimi geleneksel araştırma yöntemlerinden farklılık göstermektedir. Araştırmacı, sıradan sayılan durumların, olguların temsil niteliğindeki örneklerini inceden inceye bütün ayrıntılarıyla analiz etmeyi amaçlar. Bu nedenle genelde örneklem sayısı küçük gruplar olarak karşımıza çıkmaktadır (matematik eğitimi araştırmalarından bazı örnekler: Huang et al, (2005) [25 kişi]; Huang & Normandia, (2007) [12 kişi]; Kieran, (2001) [12 kişi]; Ryve, (2006) [12 kişi]; Nathan & Knuth, (2003) [10 kişi] biçiminde sıralanabilir). SÇ'yi bir nitel araştırma yöntemi olarak ele alan araştırmacıların genellikle çok küçük bir örneklem grubunda çalıştıklarını (Wetherell ve ark, 2001; Taylor, 2001) görülmektedir. Söylem analizinin başarısı, örneklem ölçüsü değildir. Örneklem, büyüklükten ziyade spesifik araştırma sorularıyla ilgilidir. Söylem analizi çalışmalarında örneklem rastgele olarak seçilemez (Lemke, 1998b). Her söylem durumu tektir ve söylem durumları araştırmacı tarafından araştırmanın özel amaçlarına, belirlenen kriterlere (Lemke, 1998b), araştırmanın problemleri ve hedef aldığı söylem biçimi gibi etkenlere göre düzenlendiğinden bunlar örneklem seçiminde dikkate alınması gereken noktalardır. Örneklem seçimindeki bir diğer konu örneklemin homojen ya da heterojenliğine ilişkindir. Bu konuda Wood & Kroger (2000), şunu ifade etmektedir; söylem analizcileri için önemli olan örneklemin heterojenliğinden ziyade katılımcıların bir anlamda aynı olmaları yanında söylemin farklı versiyonlarını yeterince sunabilecek nitelikte olmalarıdır. Elliot, (1996) SÇ araştırmalarında ilgilenilen şeyin örneklemdeki kişilerin kendilerinden ziyade iletişimde kullandıkları dil olduğunu belirtmektedir ve bu nedenle de örneklemin belirlenmesinde kişilere göre değil incelenecek olan söyleme yönelik bir büyüklüğün esas alındığına (aktaran Akturan vd, 2008) dikkat çekilmektedir.

Kayıt ve belgelerin toplanması

Söylem analizi vasıtasıyla gerçekleştirilen araştırmaların önemli avantajlarından biri (büyük oranda) araştırmacının etkisi ve yönlendirmesi dışında, araştırmacının üretmediği ve doğal kayıt ve belgelere dayalı olmasıdır. Bu yönü ile doğal ortamdaki anlık ve doğaçlama gelişen söylemlerin elde edilmesi ve onlar aracılığı ile seçilen konulara yönelik bilgi ve düşüncelerin belirlenmesi mümkün olabilmektedir. Araştırmalarda veri olarak toplanan söylemler yazılı ya da sözel olarak, hem doğal biçimde oluşmuş hem de araştırmacının etkisiyle üretilmiş şekilde elde edilebilmektedir. Özellikle görüşme yoluyla yapılan SÇ'ler etki ile oluşturulmuş söylemlere, sosyal gruplar içerisindeki iletişim durumlarına müdahale olmaksızın yapılan ses ve video kayıtları ise doğal söylemlere örnek verilebilir. Genellikle araştırmacılar SÇ'nin doğal söylemler üzerinde yapılması gerektiğinde daha fazla fikir birliği içerisindedir (örn. Wood & Kroger, 2000). Ancak Wood & Kroger, yaratılmış söylem (invented discourse) olarak adlandırdıkları araştırmacı tarafından üretilen veri türünün de; önceki araştırmaları değerlendirmek, teorik bir bakış veya argüman oluşturmak, analize yardımcı olmak veya deneysel bir iddiayı desteklemek için kullanılabileceğine işaret etmektedir. SÇ araştırmalarında sözel söylemlerle ilgilenildiği gibi sözel olmayan verilerle de ilgilenilmektedir. Özellikle psikoloji araştırmalarında inançların, tutumların, duyguların belirlenmesinde bu tür veriler önemli görülmektedir. Söylemi ele alan çalışmalarda ilgi duyulan söylemsel özelliklerin sistematik değişimlerinin ortaya çıkarılması normalde araştırmanın sonuna kadar tamamlanamayacak bir süreçtir, bu nedenle analizi desteklemek için kullanılacak olan çok sayıda (yazılı ve sözlü) söylem koleksiyonları geniş ölçülerde toplanır (Lemke, 1998b). Örneklem gruplarının az sayıda bireyden oluşturulması yönündeki eğilimde bu geniş veri gruplarını incelemeyi zorlaştıracak daha geniş yığınlar olmaktan kurtarma çabasıdır.

Yazıya dökme (Transcription)

Etkileşimli teyp, video kayıtlarının varsa araştırmacı gözlem notlarıyla birlikte yazıya dökülmesi aşamasıdır. Bu süreç verileri tekrar tekrar incelemeyi zorunlu kılan analizin biçimlenmesi için gereklidir. Yazıya aktarma sözlü söylem üzerine yapılan araştırmalarda merkezi bir role sahiptir (Edwards, 1993) ve araştırmalardaki veri toplamanın en önemli aşamasıdır (Wetherell ve ark, 2001). Ancak Hutchby & Wooffitt'in (1998) belirttiği üzere transkripsiyonlar bir veri değildir, veri toplanan video ya da ses kayıtlarının kendisidir (aktaran Wood & Kroger, 2000). Konuşma içeren araştırmalarda yazıya aktarma konuşmanın bir dokümana dönüşmesi (Taylor, 2001), bir nevi cisimleşmesi sürecidir. Yazıya dökme kelimelerin sayfalara dökülmesinden öte, yapılandırıcı bir faaliyettir. Yazıya dökme olmaksızın SÇ yapılamayacağını Lemke şöyle ifade eder; konuşulan dil asla doğrudan analiz edilemez hatta konuşulan dilin video ve ses kayıtları alınsa bile bunlar üzerinden yazıya dökerek aktarımları yapılmaksızın yine analizleri gerçekleştirilemez (1998b). Bu aşama genellikle uzun süren, zor ve dağınık bir süreçtir. Allwright & Bailey, (1991) kendi tecrübelerine dayalı olarak, katılımcıların çok olduğu (örneğin bir okul sınıfı gibi) araştırmalarda kayıtlı verinin bir saatlik kısmının yazıya aktarılmasının yirmi saati bulabileceğini ifade etmektedir. Araştırmanın kapsamı ve ele aldığı sorulara bağlı olarak konuşma esnasındaki pek çok durumun (jestler, mimikler, vurgulamalar, tonlamalar, vücut dili, konuşmaların kesilmesi, önceki durumlara atıflar, konuşmacının aynı zamanda bazı araçların kullanılması, aynı anda yapılan konuşmalar, göz hareketleri, yönlendirmeler, vb) anlamlandırılması ve tutarlılıkla yazıya aktarılması gerekebilir ve bu süreç sabır, dikkat ve titizlik gerektirmektedir. Araştırmacılar yazıya aktarmada ne tür bilgiyi barındıracaklarını, kullanmak için hangi kategorileri tanımlayacaklarını ve aktarımı (transcript) yazılı ve görsel olarak nasıl göstereceklerini (Edwards, 2003) belirlemelidir. Literatürde pek çok yazıya aktarma biçimi ile karşılaşılmaktadır ve bunlar doğal olarak temel alınan kuramsal yaklaşımdan söylem içerisinde incelenecek olan temalara kadar pek çok unsura bağlı olarak gerçekleştirilmektedir. Yazıya aktarma açık uçlu bir süreçtir (Edwards, 2003) ve bu süreçteki farklılıklar, incelenen etkileşim sürecindeki farklı özellikleri (Bondarouk & Ruël, 2004) odağa alır. Yazıya aktarma aynı zamanda sözlü söylemin sonradan başka biçimlerde veya farklı kuramsal açılardan analizinin yapılabilmesi ya da başka araştırmacılarca incelenebilmesi için de önem taşımaktadır. SÇ araştırmalarında yazıya aktarma tamamlandıktan ve hatta ilk kodlamalar yapıldıktan sonra bile oluşan metinlerin önemli ve temel kısımlarının tekrar tekrar okunması kaçınılmaz bir süreçtir (Potter & Wetherel, 1987). Bu nedenle yazıya aktarma sadece araştırmanın bir bölümü değil tamamını ilgilendiren ve büyük ölçüde şekillendiren bir aşamadır. Yazıya aktarmadaki önemli noktalardan bazıları; etkileşim sürecinin kendi doğallığını yeterince yansıtabilmesi, iletişimin derinliklerine inme şansı sağlaması, belirli bir sistematik içerisinde açık, anlaşılır ve takip edilebilir nitelikte olması ve iletişim esnasındaki bağlamları algılamaya olanak sağlayacak bir yapıda olması biçiminde sıralanabilir. Yazıya aktarma sürecinde araştırmacıya yardımcı olabilecek bazı soruları Taylor, şöyle sıralamaktadır;

-A-
1) Kaç konuşmacı var?
2) Transkript standart yazılı metinlerden ne şekilde farklıdır?
3) Konuşulan kelimelere ek olarak transkript hangi ayrıntıları içerir?
4) Transkripti anlamak için ne tür ekstra bilgilere ihtiyaç duyulur?
-B-
1) Transkript hangi açılardan konuşmanın doğal bir kaydı olmaktan çok bir yapı niteliğindedir?
2) Transkript, kullanılan SÇ'nin şekli hakkında ne gösterir? (2001: 29)

Bu sorulardan A grubu transkripsiyonun kendi sürecine (pratiklerine), B grubu ise bunun altındaki teorik yaklaşımlarla ilişkilidir.

Özetle "yazıya aktarma ile ilgili en önemli nokta [bu sürecin] işitsel veya görsel bilgilerin basit bir şekilde kâğıda aktarma yoluyla bir kaydının oluşturulmasına yönelik teknik bir konu değil, teorik ve analitik bir aktivite" (Wood ve Kroger, 2000: 84) olduğunun fark edilmesidir.

Kodlama

Amaç, yığınlar içinde sıkışıp kalmış hantal söylem yapısını bir araya getirebilecek parçalar arasına girebilmektir. Bu süreci Taylor (2001) örüntüleri belirlemek üzere yapılan bir tür düzenleme ve kategorileştirme şeklinde tanımlamaktadır. Basit anlamda kodlama bir hipotezi test etmek veya bazı olguların olası boyutlarının keşfedilmesi amacıyla veri sağlama (Lampert & Ervin-Tripp, 1993) işlemidir. Potter, (2009) şunu ifade etmektedir; SÇ araştırmalarında kodlama diğer araştırma türlerinden (örn. gömülü teori ya da klasik içerik analizi gibi) farklılaşarak analize yönelik bir temel esası (özü) oluşturmaktadır. Kodlama araştırmanın ayrı bir aşaması değildir aksine incelenecek verinin araştırmacıya ulaşmasından başlayıp bulguların raporlaştırılmasına dek devam eden bir süreçtir. Edwards & Lampert (1993), söyleme yönelik araştırmalarda kodlama için temelde iki aşama olduğundan söz eder. İlk aşama, analiz için metinlerin nasıl bölüneceğine (parçalanacağına) karar vermek, ikincisi ise bu bölümlerin nasıl açıklanacağını belirlemektir. Belli bir araştırmada söylemlerin analizine yönelik kodlama(lar) araştırmacının kendisi tarafından çalışmasına özgü geliştirilebileceği gibi belli bir teorik çerçeveye dayanan ya da başka bir araştırmada kullanılandan yararlanma biçiminde de olabilmektedir. Kodlamadaki bu ayrımı ayrıntılı olarak ele alan Lampert & Ervin-Tripp'e (1993) göre bir kodlama sistemi bazı teorilere dayalı olduğunda yukarıdan aşağıya, eldeki ham verilere dayalı olduğunda ise aşağıdan yukarıya bir yol izler. Yukarıdan aşağı olanda araştırmacılar kodlamanın kategorilerini oluşturmada rehberlik amacıyla iyi yapılandırılmış teorik bir çerçeveye başvururlar. Söz konusu teorik çerçeve araştırmacıya sadece çalışılan dilsel birim üzerindeki kodlamaya uygun en iyi taksonomiyi sunmakla kalmayıp verilerin irdelenmesi ve yorumlandırılmasında da yol göstericidir.

Araştırmacı tarafından özgün kodlamanın geliştirilmediği bu tür çalışmalarda uygulanacak olan kodlama(lar) doğrudan başka kuramsal yaklaşımlar ya da deneysel çalışmalardan alınabildiği gibi bunların bazı uyarlamaları şeklinde de kullanılabildiği görülmektedir. Diğer yaklaşımda ise araştırmacı ele aldığı problemler çerçevesinde topladığı veri üzerinde özgün bir kodlama geliştirebilir. Bu tür bir çalışmada kodlamanın mantığı ve içeriği yansıtmadaki niteliği oldukça önemlidir ve kodlamanın geliştirilmesinde yine belli bir kuramsal çerçevenin temel prensiplerine ihtiyaç duyulmaktadır. (Örneğin matematik eğitimi alanında Huang et al, 2005 çalışmalarında kullandıkları kodlamayı Mohan'ın (2001) bilgi yapılarını temel alarak teorik yaklaşımını birebir uygulayarak gerçekleştirirken, Sfard ve Kieran, 2001 ise kendi özgün kodlamalarını kullanmışlardır.)

Analiz

Bu aşama veriler aracılığıyla uzun çalışma periyotlarını ve veriye çok sayıda yeniden (geri dönüp) bakmayı gerektiren bir aşamayı (Taylor, 2001) kapsar. SÇ terimi genel olarak, araştırmacıların sınıf söylemi kavramını, sınıftaki bireysel iletişim grupları aracılığı ile işleyen süreç olarak ele aldıklarında, bu süreçlerin ve belirlenen yapıların farklı yollarla çözümlenmesi (Sherin, 2002) biçiminde ifade edilebilir. Analiz tekrar tekrar dikkatli okumaya dayanır. Genel olanla değil, metinlerin ayrıntısı ile ilgilenilir ve geliştirilen bir kodlama çerçevesinde yapılır. Veriler karşılaştırılarak yorumlanır. SÇ "metinlere [ve] özel bir zihinsel çerçeveye belirli bir uyum sağlama gerektirir" (Wood & Kroger, 2000: 91). SÇ'de analizin yapısını etkileyen bazı noktalardan söz etmek mümkündür. Bu aşama aslında söylem çözümleme ya da söylem analizi çalışmasının bütünsel yaklaşımından ayrı, bağımsız bir aşama değildir aksine bu süreç transkripsiyon ve bir ölçüde verilerin tanımlanması ve seçimini de kapsar (Taylor, 2001).

Örneğin SÇ, ağırlıklı olarak betimleme amacını mı gütmektedir yoksa yorumlamaya mı yönelmektedir; analiz mikro düzeyde mi (örn. iki kişi arasında ya da metnin belli bir kısmı üzerine), makro düzeyde mi (bir grup birey ya da metnin tümü) gerçekleştirilmek istenmektedir; incelenen söylemlerde dilbilimsel açıdan belli bir özel birime (örn. bağlaçlar, zamirler ya da soru ifadeleri) odaklanılmakta mıdır; eldeki veri kümesinde belli bir söylem tipine (örn. akademik söylem, politik söylem, gayri resmi (informal) söylem) odaklanılmakta mıdır; söylemsel karakteristikler dominantlık açısından mı, örüntüsel açıdan mı yorumlanacaktır; söylemi çevreleyen bağlam ne şekilde ele alınmaktadır?

SÇ'deki analiz sürecini kendi içerisinde aşamalandıran bazı yaklaşımlar da bulunmaktadır. Örneğin Akturan vd, (2008) analizin *okuma/sınıflandırma, yorumlama* ve *yapılandırma* biçimde aşamalandırılabileceğini belirtmiştir. Yorumlama, "söylemdeki sözcük anlamları sözcük içerisindeki parçalara ayrılması ve bunların anlamlandırılmasını içermektedir" (s. 33). Yorumlama aşamasında amaç sadece sözcüklerin anlamlarının ortaya çıkarılması değil beraberinde sözcüklerin ya da sözcük gruplarının söylemdeki işlevlerinin de belirlenmesidir. Yapılandırma ise "parçalara ayrılan sözcüklerin anlamları cümleler içerisinde önerilenler doğrultusunda yeniden [düzenlenmesidir]" (s.34). Bu aşamada yorumlama aşamasından elde edilen anlamlandırmaların ve ilk algılamaların söylemin belli grupları ya da bütünü içerisinde stratejik bir yaklaşımla yeniden yapılandırılması yapılmaya çalışılır. Belli bir sözcük ya da sözcük grubu anlamlandırılırken önceki ve sonraki ifadelerde ve sözcük ya da ifadedeki gönderimler (örn. 'O kadın' ifadesinde 'O' nun neyi içerdiği ya da 'ancak' kelimesinin neye işaret ettiği gibi) dikkate alınır (Akturan vd, 2008).

Raporlaştırma

Raporlaştırma aşaması elde edilen bulguların sunumundan çok daha fazlasını içeren SÇ sürecinde yapılan uygulamaların kendi içerisinde doğrulanmasını ve onaylanmasını kapsar (Potter & Wetherell, 1987).

SÇ'de Geçerlik

Söylem analizinde geçerlik diğer araştırmalardaki anlamından farklılaşan bir şekilde ifade edilmektedir. Örneğin Gee, (1999) geçerlik için şunları ifade eder; söylem çözümlemesinde geçerlik asla bir kerelik ya da herkes için var olan bir olgu değildir ve alandaki çalışmalar arttıkça artan ya da azalan bir yapıya sahiptir. Söylem analizinde geçerlik için gerekli olan dört öge aşağıdaki gibidir,

I) Yakınsama (Convergence): Söylem çözümlemesi analizin başında ileri sürülen problemlere ikna edici ve tutarlı çözümler önerdiği ölçüde geçerlidir,

II) Uzlaşma (Agreement): Tek bir analizci tarafından öne sürülen çıkarımları daha çok analizci destekleyici bir tutumda olursa söylemle bağlantılı problemlere yönelik önerilen çözümler daha tatmin edici olur.

III) Kapsam (Coverage): Bir söylem analizinden elde edilen çıkarımlar sadece üzerinde çalışılan durumu değil önce ya da sonra ortaya çıkan benzer durumları da anlamlandırmada yardımcı oluyorsa daha geçerli sayılır.

IV) Dilbilimsel Ayrıntılar (Linguistics Details): Herhangi bir dilin dilbilimsel ögeleri, çeşitli iletişim fonksiyonları gerçekleştirmede önemli rol oynarlar. Yapılar ve işlevler arasındaki bu durağan ilişkilerin sonucu olarak dilbilimsel araçlara dayalı olarak yapılan analiz daha geçerlidir. Ancak bu ögeler geçerliliği tam olarak garanti etmeyebilir. Bu durum, bir çalışmanın (sosyal gruplarda) ortaya çıkabilecek tüm sorulara tek başına yanıt veremeyebileceğinden kaynaklanır.

Araştırmanın Örneklemi

Bu çalışmanın ele aldığı konunun, bir sınıftaki söylemler aracılığı ile ispat kavramına yönelik bilgilerin nasıl yapılandırıldığı/düzenlendiğini kapsaması nedeniyle örneklem olarak seçilecek sınıfta ispata yeterince yer verilmesi temel beklentiyi oluşturmuştur. Bu kapsamda İzmir ilindeki Meslek, Düz/Normal, Anadolu ve Fen liselerinde görev yapan matematik öğretmenleri ile bazı ön görüşmeler yapılarak teoremlere ve ispata ne ölçüde yer verdikleri ve öğrencilerin bu konulardaki genel tutumu üzerine bilgi toplanmıştır. Bu bilgiler sonrasında ispat ve ispatlamaya en fazla Fen Liselerinde yer verildiği görülmüş olup bu nedenle araştırmanın yapılacağı örneklemin bir Fen Lisesi sınıfı olarak seçilmesine karar verilmiştir. Bu karar sonrasında bu çalışmanın bir SÇ olması ve önceki bölümde de değinildiği üzere SÇ'ye dayalı araştırmalarda genellikle küçük gruplardan meydana gelen örneklemlerle çalışılması nedeniyle seçimde hedef Fen Lisesi sınıfında çok sayıda öğrenci bulunmaması ve sınıf içi iletişimin olabildiğince sağlıklı olarak kurulabildiği ve bunu doğru biçimde kaydetmenin mümkün olduğu bir ortamın var olması ön koşul olarak belirmiştir. Bu koşullar çerçevesinde İzmir ilindeki bazı Fen Liselerindeki yöneticiler ve matematik öğretmenleri ile yüz yüze görüşmeler yapılarak edinilen izlenimler sonrasında merkez ilçelerden birinde bulunan özel bir Fen Lisesinin bu araştırma için uygun okul olduğuna karar verilmiştir. İlgili okulun okul idaresi ve matematik öğretmenleri ile yapılan ayrıntılı görüşmelerde okulda hem matematik hem de geometri derslerinde, öğretim programının ve ÖSS hazırlık çalışmalarının elverdiği ölçüde ispatlara yer verildiği ve ispat yaptırıldığı ifade edilmiştir. Öğrencilerin dokuzuncu sınıfta Fen Lisesi kısmına seçilirken, Ortaöğretim Kurumlarına Geçiş Sınav (OKS) Puanı ve okuldaki matematik öğretmenleri zümresi ve okul idaresi tarafından yapılan bir ön elemenin dikkate alındığı ve sınıflar oluşturulurken önceden net bir öğrenci sayısı belirlenmeyip sınıfların şartları sağlayan öğrencilerden oluşturulduğu ifade edilmiştir. Ayrıca özellikle 11. sınıfta bazı öğrencilerin uluslararası matematik olimpiyatları ve Tübitak proje çalışmalarına yönelik özel hazırlık gruplarında yer aldıkları ve bazı akademisyenlerden destekleyici seminerler aldıkları bu nedenle ispatlara kısmen aşina oldukları da belirtilmiştir.

Ayrıca kendisine yapılacak olan çalışmanın amacı ve kapsamı hakkında bilgi verilen okuldaki matematik öğretmenleri zümre başkanı Bayan Ayşe 11-Fen sınıfında aşağı yukarı aynı (başarı) seviyede olan 13 öğrencinin bulunduğunu ve bu sınıftaki öğrencilerin iletişime açık ve derse katılımda istekli olduklarını belirtmesi üzerine araştırmada bu sınıfın örneklem grubu olarak seçilmesine karar verilmiştir. Bu sınıfın matematik derslerini Ayşe Hanım, geometri derslerini ise Ahmet Bey (her iki öğretmenin de gerçek isimleri yerine takma isimler kullanılmıştır) yürütmektedir. İspata yönelik sınıf içi söylemlerin toplanmasında her iki dersin de izlenmesi ve öğrencilerin öğretmenleri ile olan iletişimlerinin gözlenmesi amaçlandığından çalışmanın örneklemi bu sınıftaki 13 öğrenci ve sınıfın derslerini yürüten (bir matematik ve bir geometri öğretmeni) 2 öğretmenle birlikte 15 kişiden oluşmuştur.

Her iki öğretmende Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden mezun olmuş ve kısa sürelerle özel dershanelerde çalışmışlardır. Ayşe Hanım aynı zamanda öğretmen okulu mezunudur ve yaklaşık 30 yıl farklı devlet liselerinde görev yapmıştır. En son görev yeri bir devlet Anadolu Lisesi'dir. Emekliliği ardından araştırmanın yapılacağı özel okulda çalışmaya başlamış olup bu okulda yaklaşık 9 yıldır bulunmakta ve zümre başkanlığı görevini yürütmektedir. Ahmet Bey matematik bölümünden mezun olduktan sonra önce kısa süre bir şirkette çalışmış ardından özel bir dershanede görev yapmış ve sonrasında bu özel okulun öğretim kadrosuna katılmıştır. Kendisinin Tezsiz Yüksek Lisans derecesi bulunmaktadır ve bu özel okulda yaklaşık 5 yıldır görev yapmaktadır. Ahmet Bey aynı zamanda okulun Tübitak Matematik Projelerine yönelik öğrenci çalışmalarından sorumlu öğretmenidir. Örneklem grubu öğrencileri 12 erkek ve 1 kızdan oluşmaktadır. Veri toplama aşamasından önce öğrencilere araştırmacı tarafından hazırlanan bir kişisel bilgi formu (Ek-1) uygulanmıştır. Bu formdan elde edilen bilgiler aşağıdaki gibi özetlenebilir. Öğrencilerin ilköğretim ikinci (6-8. sınıflar) kademeden mezun olma not ortalamaları 4.80 ile 5.00 arasında dağılmaktadır ve tümü hem bu okulda hem de gittikleri özel dershanelerde burslu statüde öğrenim görmektedir. Öğrencilerin OKS sınavındaki matematik net sayıları ise (25 soruda) bir öğrenci hariç 22 ve üzerindedir. Öğrencilerden 9'unun anne ve babası üniversite mezunu olup sosyoekonomik açıdan da orta/üst grup içerisinde yer almaktadır. İleriye dönük mesleki kariyer tercihleri sorulduğunda 4 kişi tıp, 9 kişi ise mühendislik alanlarında eğitim almak istediklerini belirtmiştir. En sevdikleri dersleri sıralamaları istendiğinde ise 11 öğrenci matematik ve geometriyi, 2 öğrenci ise biyoloji ve kimyayı ilk iki sırada belirtmiştir. Ayrıca bu sınıftaki 3 öğrencinin Tübitak Ortaöğretim Öğrencileri Arası Matematik Proje Yarışmalarında ilk üçte Türkiye dereceleri bulunmaktadır.

Araştırma öncesinde okul müdürü, öğretmenler ve öğrencilere araştırmacı tarafından araştırmanın amacı, kapsamı ve nasıl yürütüleceğine yönelik ayrıntılı açıklamalar yapılmış ve sorularına yanıt verilmiştir. Sonrasında okul müdürü, matematik, geometri öğretmenleri ve öğrencilerin velilerinden, verilerin video kaydı ile toplanması ve sonrasında ilgili verilerin yalnızca akademik amaçlı kullanılmasına yönelik gerekli izni almak için yazılı bir metin (Ek-2) hazırlanmış ve kendilerine takdim edilmiştir. Adı geçen herkesin onaylı izni alındıktan sonra uygulamanın Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı bir okulda gerçekleştirilecek olması nedeniyle ve ilgili yönetmelikler gereğince İzmir İl Milli Eğitim Müdürlüğü'ne de söz konusu okulda araştırma yapılabilmesi için gerekli resmi iznin verilmesine yönelik başvuru yapılmıştır. Bu izin belgesi (Ek-3) de alındıktan sonra araştırmada veri toplama aşamasına geçilmiştir.

Veri Toplama Biçimi ve Araçları

Araştırma için seçilen 11-Fen sınıfının haftada 5 saat matematik ve 3 saat geometri dersi bulunmaktadır. Her iki öğretmen de haftanın bir saatini tamamen ÖSS'ye yönelik uygulamalara yer verdiği ve bu derslerde ispatlara ve teorik konu anlatımlarına hiç yer vermediklerini belirterek araştırmacının bunların dışındaki diğer derslerini gözlemlemesinin daha uygun olacağını ifade etmiştir. Araştırmanın verilerini, ortaöğretim öğrencilerinin matematik ve geometri derslerindeki sınıf içi bireysel ve karşılıklı (öğrenci-öğrenci, öğretmen-öğrenci) sözel söylemleri oluşturmaktadır. Söylemler sınıf içi video kayıtları yoluyla toplanmıştır. Yıldırım ve Şimşek (2000), nitel araştırmalardaki verileri genel olarak üç grupta 1-çevresel veriler, 2-süreçle ilgili veriler ve 3-algılara ilişkin veriler olarak ifade eder ve 2. grubu "araştırma sürecinde neler olup bittiğini ve bu olanların araştırma grubunu nasıl etkilediğine ilişkindir" (s.19) biçiminde tanımlamaktadır. Bu nedenle toplanan veriler "süreçle ilgili veriler" olarak nitelendirilebilir. Ayrıca süreçle ilgili verileri oluşturan söylemler oluşturulmalarındaki etki ve bağlam açısından da *doğal söylemler* [DS] ve *teşvik edilmiş söylemler* [TES] biçiminde iki kategori altında irdelenmiştir. **DS**, araştırmacının herhangi bir etkisi olmaksızın matematik ya da geometri derslerinde, öğretim sürecinde görev alan, sınıf içi öğrenci-öğrenci ve öğretmen-öğrenci arasındaki iletişim süreçlerinde ispat kavramına ve ispatlamaya yönelik sözel, matematiksel, sembolik ya da bunların kombinasyonları yoluyla oluşmuş söylemleri ifade etmektedir. **TES** ise araştırmacının uygulama öncesinde kendisinin belirlediği ve yazılı biçimde matematik ve geometri öğretmenlerine sunduğu, sınıf içinde öğrencilere yöneltilmesini ve öğrencilerin bu sorular aracılığı ile ispata/ispatlamaya yönelik açıklama yapmaya, tartışmaya ve fikirlerini paylaşmaya teşvik edilmelerinin amaçlandığı bir grup sözel soruya dayalı olarak sınıfta oluşmuş söylemleri kapsamaktadır. TES'lerin iki amacı bulunmaktadır. Birincisi DS'lerin analiz edilmesinde ve yorumlanmasında destekleyici ve bakış açısını derinleştirici bir zemin oluşturmak, ikincisi ise derslerde ispata yönelik bir konuşma ve tartışma ortamının oluşma şansını arttırarak öğrencilerin iletişim kurmalarını ve fikirlerini söylemleri yoluyla açığa çıkarmalarına ortam sağlamaktır. TES'ler için yanıtlarının sözel biçimde verilmesi amaçlanan ispat ve ispatlamaya yönelik 25 adet soru oluşturulmuştur (bkz. Ek-4). Ancak bu soruların tamamının sorulması yerine öğretmenlerce seçilen ve uygun bulunan soruların öğrencilere yöneltilmesi istenmiştir. Araştırmacı öğretmenlere soruların cevaplarını vermemiş ve cevaplara yönelik herhangi bir bilgi ya da açıklama da sunmamıştır. Bu sorular ispata yönelik var olan zengin araştırma literatürü ve araştırmacının uygulama öncesi sınıf içi gözlemleri dikkate alınarak geliştirilmiştir. TES'e yönelik soru uygulamalarının sonlarına doğru Ayşe Hanım araştırmacıya anlatılmakta olan konuların planlamasının önünde gittiğini ve ek bir uygulama yapmanın mümkün olduğunu ifade ederek anlatılmakta olan konuların dışında bir önerme ya da teoremin sınıfta öğrencilerce tartışılarak yapılabileceğini önermiştir. Bu teklif araştırmaya ek veri sağlaması nedeniyle kabul edilmiş ve araştırmacı kendi belirlediği bir teoremi (*İki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır*) Ayşe Hanım'a iletmiştir. Araştırmacı bu teoremi, ifadesinin basit ve anlaşılır olması, az sayıda öncül kullanımını gerektirmesi, daha önce bu ve benzer tarzda bir ispatın sınıfta yapılmamış olması ve özgün bir düşünme tarzını gerektirmesi nedeniyle seçmiştir. Temel amaç ispatın tam doğrulukla yapılmasından çok ispatlamada ortaya çıkabilecek düşünme biçimlerini incelemektir. İlgili teorem Ayşe Hanım tarafından öğrencilerin kendilerine dağıtılan kâğıtlar üzerinde ispat yapmaları ve bu süreçte düşüncelerini sesli biçimde ifade etmeleri istenerek (26 Mayısta) sınıfta uygulanmıştır. Dolayısıyla diğerlerinden farklı olarak TES-6'ya ait transkript metni bu ispata yönelik söylemlerden oluşmaktadır.

TES'ler için hazırlanan sözel soruların hangi öğretmen tarafından ne şekilde ve nasıl bir yapıda (bireysel mi, grup tartışmaları şeklinde mi, tek tek sorularak mı yoksa iki üç soru aynı anda yöneltilerek mi, sadece öğrencilerin yanıtlaması ile mi, yoksa öğretmenlerin de kendi yanıtlarını ortaya koyacakları biçimde mi, düzenli olarak her dersin ya da her haftanın belli bir dersinin başında ya da sonunda mı yoksa müfredatın işlenişine ve tamamen öğretmenlerin uygun bulduğu zamanlarda mı, …) yöneltileceğine yönelik tüm kararlar ve tercihler öğretmenlere bırakmıştır. Böylece TES'lerin oluşmasında belirlenen sorular yardımıyla ortaya çıkacak olan söylemlerin içeriği ve yönüne yönelik bir teşvik etme olması dışında diğer tüm süreçlerin olabildiğince doğal olarak oluşmasına imkân sağlanmaya çalışılmıştır. Başka bir değişle TES'lerin olabildiğince öğrenci ve öğretmenlerin meydana getirdiği sınıf mikro kültüründe var olan sosyal yapılar aracılıyla paylaşılan sınıf içi normlara bağlı olarak oluşması ve iletişimde rol almalarının sağlanması amaçlanmıştır. Wood & Kroger (2000) SÇ'de yaratılmış söylem (invented discourse) olarak adlandırdıkları, araştırmacı tarafından üretilen veri türünün de; önceki araştırmaları değerlendirmek, teorik bir bakış veya argüman oluşturmak, analize yardımcı olmak veya deneysel bir iddiayı desteklemek için kullanılabileceğine işaret etmektedir. Dolayısıyla TES'ler yaratılmış söylem kategorisinde değerlendirilebilir. Matematik eğitimi araştırma literatüründe bu tür bir söylem grubunu kullanan başka bir çalışma ile karşılaşılmamıştır. Dolayısıyla bu araştırma hem DS hem de TES biçiminde iki tür söylemi etkileşimli biçimde ele alıp irdeleyen ilk çalışmadır.

Veriler eğitim öğretim yılının ikinci döneminde Mart ve Mayıs ayları arasındaki yaklaşık üç aylık zaman diliminde toplanmıştır. Araştırmacı tüm derslerde gözlemci olarak bulunmuş, derslerde bir taraftan derslerin video kayıtlarını yaparken diğer yandan alan notlarını oluşturmuştur. Üç aylık zaman dilimi süresince araştırmacı toplamda (32 matematik, 21 geometri) 53 dersi gözlemlemiş ve video ile kaydetmiştir. Bu derslerin 18'inde ispat ve ispatlamaya yönelik söylemler ile karşılaşılmıştır. DS'ler içerisinde geçen tüm ispatlar (23 tane) Ek-5'te verilmektedir. Söz konusu 18 dersin 13'ü matematik ve 5'i geometridir. 13 matematik dersinden 7 tanesinde sadece DS, 4 tanesinde sadece TES ve iki tanesinde (DS-9/TES-1 ve DS-10/TES-2) hem doğal hem de teşvik edilmiş söylem türleri bulunmaktadır. Bu iki ders 33. ve 37. derslerdir. Bu derslerde Ayşe Hanım önce TES'ler için hazırlanan sorulardan seçtiklerini yöneltmiş sonra arta kalan zamanda konu anlatımına devam etmiştir. Bu nedenle bu iki derste hem DS hem de TES ortaya çıkmıştır. Geometride ise ispata yönelik söylemlerin bulunduğu 5 dersten 4'ü DS, 1 tanesi TES biçimindedir. Bu bilgileri Tablo-6 ve Şekil-13 deki gibi özetlenebilir.

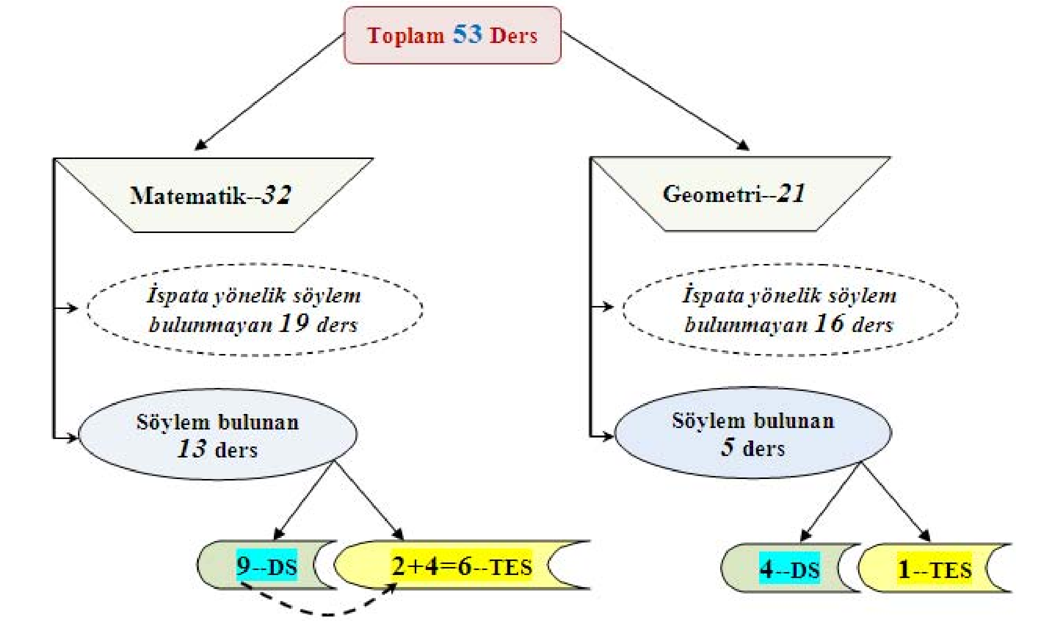
Tablo 6

Derslerin Söylem Türlerine Göre Zamansal Dağılımı

DS /TES	Kayıttaki Sıralama	Tarih	Ders	Saat
DS-1	1-1	3 Mart-Pazartesi	Matematik	3. Saat
DS-2	2-3	4 Mart-Salı	Geometri	1. Saat
DS-3	3-4	4 Mart -Salı	Geometri	2. Saat
DS-4	4-6	5 Mart-Çarşamba	Matematik	2. Saat
DS-5	5-8	10 Mart-Pazartesi	Matematik	4. Saat
DS-6	6-11	17 Mart-Pazartesi	Matematik	3. Saat
DS-7	7-25	8 Nisan-Salı	Geometri	1. Saat
DS-8	8-29	16 Nisan-Çarşamba	Matematik	1. Saat
DS-9 TES-1	9-33	28 Nisan-Pazartesi	Matematik	3. Saat
DS-10 TES-2	10-37	30 Nisan-Çarşamba	Matematik	1. Saat
DS-11	11-38	30 Nisan-Çarşamba	Matematik	2. Saat
TES-3	12-41	7 Mayıs-Çarşamba	Matematik	1. Saat
TES-4	13-43	12 Mayıs-Pazartesi	Matematik	3. Saat
DS-12	14-46	13 Mayıs-Salı	Geometri	2. Saat
TES-5	15-47	14 Mayıs-Çarşamba	Matematik	1. Saat
DS-13	16-48	14 Mayıs-Çarşamba	Matematik	2. Saat
TES-6	17-50	26 Mayıs-Pazartesi	Matematik	4. Saat
TES-7	18-51	27 Mayıs-Salı	Geometri	1. Saat

Şekil 13

Derslerin İspat İçermesine ve Söylem Türlerine Göre Sayısal Dağılımı

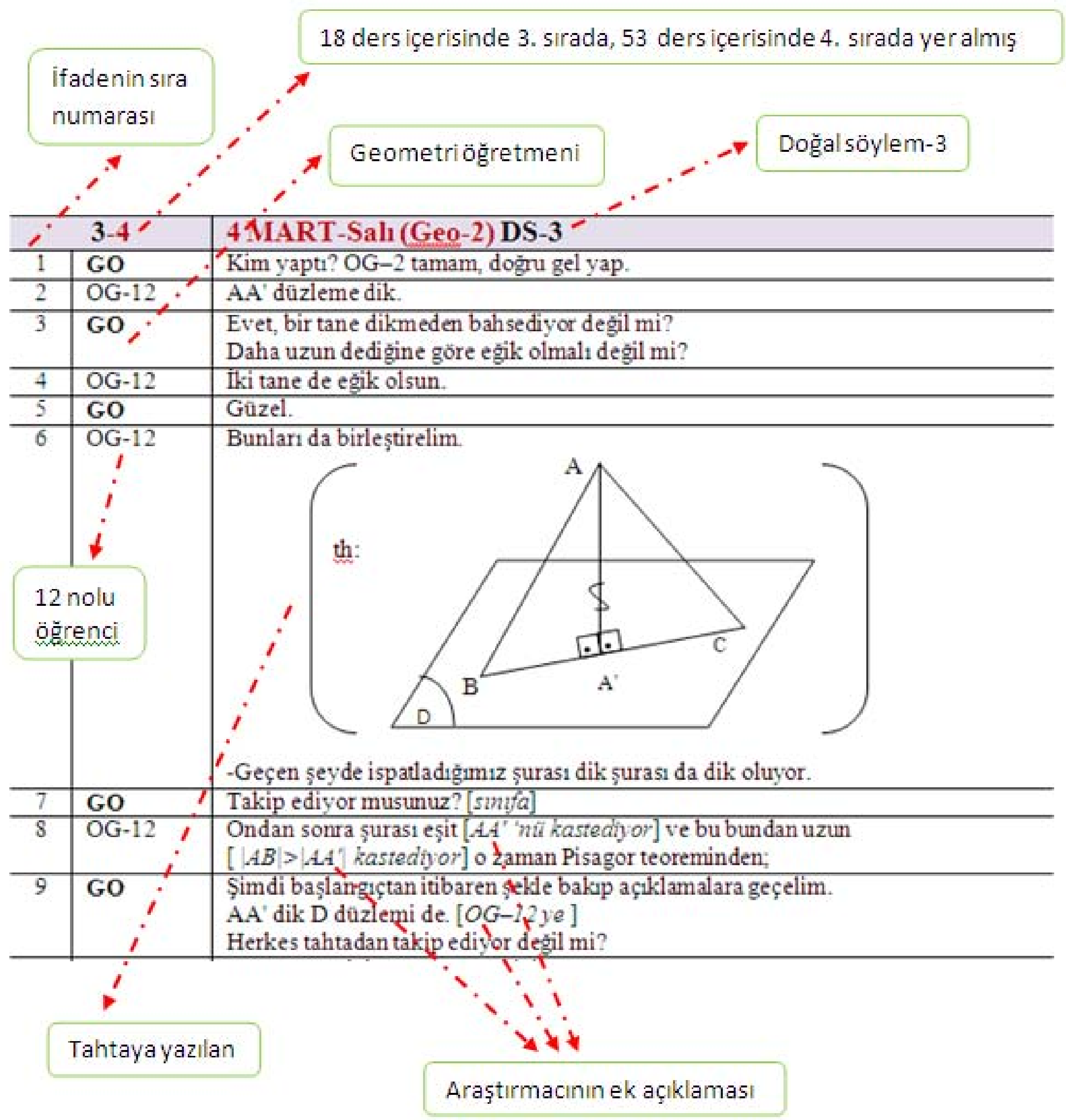


Yazıya Aktarma (Transkripsiyon)

Araştırmada veri toplama aşaması tamamlandıktan sonra transkripsiyon (yazıya aktarma) aşamasına geçilmiştir. Bu aşamada araştırmacı ispata yönelik söylemlerin bulunduğu 18 derse ait video kayıtlarını tek tek yazıya aktarmıştır. Transkripsiyon sürecinin başında araştırmacı öncelikle literatür bilgileri, alt problemleri ve kullanacağı kodlamalar ışığında kayıtların hangi içerik ve formda yazılacağına yönelik bir ön çalışma yapmıştır. Ön çalışmada araştırmacı video kayıtlarını 2-3 kez baştan sona izlemiş ve gözlemleri doğrultusunda notlar almıştır. Bu araştırmada sınıf içi iletişim durumlarındaki jestler, mimikler, tonlamalar ve konuşmalar arasında geçen duraksama süreleri dikkate alınmayacak ve dilbilgisi açısından teorik bir inceleme yapılmayacaktır. İspata yönelik bilgilerin ne şekilde yapılandırıldığı araştırılırken sınıf içerisinde yer alan resmi, resmi olmayan, yazılı (tahtada), sözlü, sembolik, monolog ya da diyalog biçimindeki tüm söylemler veri grubunu oluşturacaktır. Bu nedenle yazım aşamasında kullanılmak üzere sıralı düz akış biçimine karar verilmiştir. Araştırmacı bu formatta uygun olarak 2 yazım taslağı geliştirmiştir. Bu taslaklar danışman öğretim üyesi ve bir diğer alan uzmanına video kayıtlarındaki içeriğin transkript metnine aktarımında uygunluk açısından görüşlerini almak üzere sunulmuş ve geri bildirimleri doğrultusunda (bazı eklemeler yapılarak) ikinci taslağın daha uygun olduğuna karar verilmiştir. Belirlenen sıralı düz akış biçiminde her sözlü ifade numaralandırılarak ve kime ait olduğunun görülebilmesi için kişiler (**MO**: matematik öğretmeni, **GO** geometri öğrenmeni, OG-X: X nolu öğrenci ve B-OG: bazı öğrenciler biçiminde) kodlanarak ifade edilmiştir. İfadelere konuşmalardaki öncelik-sonralık sırasına, her ifadenin konuşmadaki sıra dönüşüne ve söylemsel özellik taşımasına dikkat edilerek numara verilmiştir.

Şekil 14

Transkript Metninden Örnek Bir Kesit



	3-4	4 MART-Salı (Geo-2) DS-3
1	**GO**	Kim yaptı? OG–2 tamam, doğru gel yap.
2	OG-12	AA' düzleme dik.
3	**GO**	Evet, bir tane dikmeden bahsediyor değil mi? Daha uzun dediğine göre eğik olmalı değil mi?
4	OG-12	İki tane de eğik olsun.
5	**GO**	Güzel.
6	OG-12	Bunları da birleştirelim. -Geçen şeyde ispatladığımız şurası dik şurası da dik oluyor.
7	**GO**	Takip ediyor musunuz? [*sınıfa*]
8	OG-12	Ondan sonra şurası eşit [*AA' 'nü kastediyor*] ve bu bundan uzun [*|AB|>|AA'| kastediyor*] o zaman Pisagor teoreminden;
9	**GO**	Şimdi başlangıçtan itibaren şekle bakıp açıklamalara geçelim. AA' dik D düzlemi de. [*OG–12 ye*] Herkes tahtadan takip ediyor değil mi?

Ayrıca derslerde öğretmen ya da öğrenciler tarafından tahtaya yazılan bölümler transkript metninde "th:" biçiminde ve parantez içerisinde yazılmış, gerekli olan yerlerde de araştırmacının alan notları çerçevesinde söylemlerin daha iyi anlaşılması için köşeli parantez içerisinde ve italik biçimde ek açıklamalara yer verilmiştir. Bir transkript metninde seçilen dersin 53 ders içerisinde kaçıncı sırada olduğu, ispatı içeren 18 ders içerisindeki sırası, video kaydının yapıldığı tarih, dersin türü (matematik, geometri) ve saati ile içerdiği söylem türüne göre DS ya da TES gibi bilgilerde gösterilmiştir. Burada açıklanan bilgilerin daha iyi anlaşılması amacıyla bir transkript metninden seçilen kısa bir bölüm Şekil-14'de açıklamalarıyla birlikte sunulmuştur.

Veri Çözümleme Teknikleri ve Kullanılan Kodlama Sistemi

Video kayıtlarının yazıya aktarımı tamamlandıktan sonra transkript metni bir kaç kez baştan sona okunmuş ve metnin analiz için belirli bölümlere ayrılabilir olup olmadığına bakılmıştır. İnceleme sonrasında 18 dersi içeren 77 sayfalık metnin (Ek-6) söylemsel açıdan hem örüntüsel incelemeye hem de mikro düzeyde örneklendirmelerle, söylem-anlam ilişkisine yönelik incelemeye uygun olduğu görülmüştür. Bu nedenle analiz aşamasında söylemlerin iki boyutta incelenmesine karar verilmiştir. İlk boyut matematik ve geometri derslerindeki öğrenci-öğretmen arasındaki iletişim durumlarında var olan, ispata yönelik söylemlerin genel karakteristiklerinin belirlenmesini ve bu karakteristiklerin ne tür bir örüntüsel yapıya sahip olduğunun ortaya konmasını içermektedir. İkinci boyut ise ispat ve ispatlamaya yönelik söylemlerdeki anlam-bağlam ilişkisine ve bu ilişkinin bilgi yapılandırma üzerindeki etkisine yönelik bir incelemeyi kapsamaktadır. Bu iki boyut aracılığıyla öğrencilerin ispata yönelik bilgilerini nasıl yapılandırdıklarına söylemler çerçevesinde bütüncül bir bakış sağlayabilmek amaçlanmaktadır. Yapılan bu araştırma sosyokültürel zeminde ve edimbilimsel bir yaklaşımla gerçekleştirilen bir söylem çözümleme çalışmasıdır. Dolayısıyla hem söylemin oluştuğu ve kullanıldığı dile dayalı matematiksel ortam hem de o ortamdaki kişilerin görevleri, rolleri, ilişkileri ve etkileşim biçimleri odaklanılan iki temel ögeyi oluşturmaktadır. Bir sosyokültürel yapı niteliği taşıyan sınıfın içerisinde meydana gelen etkileşimlerde görev alan dilin ve o dilin içinde yer aldığı bağlamın özellikleri çerçevesinde ispata yönelik söylemleri analiz etmek için Halliday & Hasan (1989) tarafından geliştirilmiş olan üç bileşenli (söylemin ***alanı*** (field of discourse) [**SA**], ***katılımcısı*** (tenor of discourse) [**SK**] ve söylemin ***stili*** (mode of discourse) [**SS**]) model kodlama, analiz ve yorumlama çerçevesi olarak belirlenmiştir. Söz konusu modele ilişkin bilgiler önceki bölümde ayrıntılı olarak sunulmuştur.

Aşağıdaki bölümde literatürdeki çalışmalardan da yararlanılarak ele alınan alt problemler çerçevesinde ortaya çıkan bulgular ve onlara dayalı yorumlara yer verilmektedir.

Birinci alt problemde ispat ve ispatlamaya yönelik söylemlerin alanına ait genel gözlemler ve söylemsel karateristikler ele alınmaktadır. Söz konusu karakteristikler literatürde yer alan iki sorudan yararlanılarak *sözcüksel ögelerin* incelenmesi ile gerçekleştirilmektedir. Bu sorular; *'söylem içerisindeki sözcükler hangi çalışma alanına girmektedir' ve 'söylem içerisindeki sözcükler genel kitle [öğrenciler] ve o alandaki uzman kitle [öğretmenler]tarafından ne kadar iyi bilinmektedir?'* biçimindedir. Bu kapsamda öncelikle matematik ve geometri derslerinde kullanılan ispat ve ispatlamaya yönelik sözcüklerin bir listesi oluşturulmakta ve sonrasında bu listede yer alan sözcüklerin öğretmenlerce nasıl sunulduğu ve (özellikle) öğrencilerce nasıl anlamlandırıldıkları TES'ler yardımıyla ortaya konulmaktadır.

İkinci alt problemde ispat ve ispatlamaya yönelik söylemlerin katılımcılarına ait genel gözlemler ve söylemsel karakteristikler analiz edilmektedir. Katılımcılara ait söylemsel karakteristikler *göreceli statülerin* incelenmesi ile gerçekleştirilmektedir. Göreceli statüler üç alt başlık altında ele alınmaktadır. Bunlar; *konuşma eylemleri*, *konuşmadaki sıra döngüsünün yönetimi* ve *hitap etmede kullanılan terimlerdir*.

Üçüncü alt problemde ise ispat ve ispatlamaya ilişkin söylemlerin stiline yönelik genel gözlemler ve söylemsel karakteristikler irdelenmekte olup söylemsel karakteristikler açısından *destekleyici geri bildirimler* ve *soru ifadelerine* odaklanılmaktadır.

Son alt problemde ise öncelikle

(a) öğretmenlerin ispat ve ispatlamaya yönelik açıklamalarına,

(b) ispatları oluşturma aşamasındaki genel eğilimlerine,

(c) öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik söylemlerine ve

(d) TES-6 kapsamında öğrencilerin ispat yapma uygulamasına ve bu uygulamanın analizi yoluyla anlam oluşturma biçimleri irdelenmektedir. Bu çerçevede dördüncü alt problemde; Öğretmenlerin açıklamaları (a) hem DS'ler hem de TES'ler içerisinde yer alan söylemlerinin ard arda sıralanması ile sunulmakta ve bütününde nasıl bir yaklaşımın ortaya çıktığının görülmesi amaçlamaktadır. Öğretmenlerin ispat yapma sürecindeki eğilimleri (b) ortaya konurken her iki öğretmenin de ispatların insaşı esnasındaki tipik söylemsel özelliklerini içeren birer dersi ele alınarak bu derslerdeki söylemleri ayrıntılı olarak tartışılmaktadır. Öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik söylemleri (c) TES'ler içerisindeki ifadelerinin sıralanması ile yapılmakta ve böylece söylemsel açıdan genel durumun betimlenmesine çalışılmaktadır. Öğrencilerin araştırmacı tarafından seçilen bir teoremin ispatlanmasına yönelik (yazılı ve sözlü) söylemlerinin doğası ele elan (d) son bölümde ise TES-6 kapsamında Ayşe Hanım tarafından sınıfa yöneltilen "*iki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır*" teoreminin ispatına yönelik (tüm sınıf bazında yapılan sözel) tartışma diyalogları ve bireysel yazılı söylemler üzerinde yapılan analizler sonrasında ortaya çıkan bulgular ve yorumlar ortaya konmaktadır.

Daha sonra hem (a,b,c,d deki) irdelemelerden elde edilen hem de ilk üç alt problemden ortaya çıkan bulgular çerçevesinde SA, SK ve SS ait karakteristiklerin, öğrencilerin anlamalarındaki belirgin noktalara ve bunların oluşmasına ne yönde etki ettiğine kısaca odaklanılmaktadır.

Sonuç, tartışma ve öneriler bölümünde ise söz konusu bu etkiye ve etkiyi oluşturan unsurlara daha ayrıntılı biçimde değinilmektedir. Bu bölümde öncelikle SA, SK, SS açısından *genel gözlemler* çerçevesinde öğretmen söylemlerindeki benzerlikler ve farklılıklar özetlenmektedir. Bu özetin ardından SA, SK, SS açısından *kodlama çerçevesinde* ortaya çıkan öğretmen söylemlerindeki benzerlikler ve farklılıklar özetlenerek araştırmada elde edilen tüm bulgular ve yapılan yorumlar üzerine bütüncül bir bakışın oluşturulmasına çalışılmaktadır. Daha sonra bu bilgiler çerçevesinde yapılan tartışmalara ve onlara dayalı öneriler ortaya konmaktadır.

BÖLÜM IV
BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde öncelikle araştırmacının gözlemlerine ve alan notlarına dayalı olarak *sınıf kültürüne bakış* başlığı altında örneklem grubu olarak belirlenen 11-Fen sınıfındaki öğrenme-öğretme sürecinin genel durumunu ortaya koyan bir betimlemeye yer verilecektir. Böylece analizi yapılacak olan söylemlerin ne tür bir öğrenme çevresinde ve sosyal bağlamda oluştuğuna dair genel bir bilgilendirme amaçlanmaktadır. Sonraki aşamada seçilen kodlama çerçevesinde yapılan SÇ ile alt problemlere yönelik bulgular ve onların yorumlanmasına geçilmektedir.

Sınıf Kültürüne Bakış

11-Fen sınıfı genel anlamda tipik bir Fen Lisesi sınıfı görünümündedir. Öğrencilerin akademik başarıları, çalışma performansları ve kariyer hedefleri yüksek düzeydedir. Öğrencilerin büyük bir kısmı (11 öğrenci) bireysel çalışma yapmayı tercih eden, konuşkan, dışa dönük, fikirlerini ve sorularını rahatlıkla ifade eden ve savunan bir yapıya sahiptir. İlköğretim eğitimlerinde oldukça başarılı olan öğrenciler lisedeki derslerde de bu başarılarını sürdürmektedir. Derslerde sınıf içi rekabete dayalı bir anlayış hakimdir. Ancak rekabet uygun ve sağlıklı bir düzeydedir, belli normlar çerçevesinde işlemektedir ve sınıf içi iletişimi ve sosyal paylaşımları negatif yönde etkilememektedir. Bu anlayışın geliştirilmesi ve sürdürülmesinde hem öğretmenler hem de öğrenciler ortak tavır takınmaktadır. Rekabet daha çok basit ve orta düzey soruların çözümlerinde sonuca (en) hızlı ulaşmayı, zor sorularda ise çözüme ulaşabilmeyi ya da yapılan özgün çözümü anlayabilmeyi, okul tarafından yapılan ortak sınavlarda ve dershanelerin genel deneme sınavlarında başarı açısından üst grupta yer almayı kapsamaktadır. Konu anlatımları esnasında belirli bir rekabet olmamakta kimi zaman paylaşma ya da yardımlaşma ortamları oluşabilmektedir. Öğretmenlerin ve öğrencilerin nihai amacı ÖSS sınavında yüksek başarı gösterilmesidir. Bu amaç örneklemin her iki kutbunu da (öğretmen ve öğrenci) farklı davranışlar sergilemeye yöneltmektedir. Her iki öğretmen de öğrencilerinin hızlı algılama yeteneğine ve düzenli, sistemli çalışma alışkanlıklarına sahip olduğunu belirtmektedir. Hem öğrencilerin bu özelliklerine hem de yeni ortaöğretim matematik öğretim programının fen liseleri için uygun olmaması ve ayrıca fen liseleri için bir öğretim programının da bulunmamasını gerekçe göstererek, öğretmenler yeni (2005'de uygulamaya konan) öğretim programını uygulanmamaktadır. Yeni programı sadece genel izlence olarak kabul etmekte ve etkinlik temelli öğretim yapmamaktadırlar. Derslerde ikili ya da küçük grup çalışmalarına da yer verilmemektedir. Öğretmenler işlenecek konuların sırası ve sunumuna yönelik kendi formatlarını geliştirmiştir. Özellikle matematik öğretmeni Ayşe Hanım derslerinde konu anlatımlarını ve temel örneklendirmeleri hızlı yaparak alıştırma ve problem çözme aşamasında daha fazla sayıda ve tipte soruyu yöneltebilmeyi amaçlamaktadır. Öğrencilerin bu formata uyum sağlamış olmaları o sınıf seviyesindeki matematik konularının belirlenen zaman diliminden önce tamamlanmasını sağlamakta ve kalan zamanda Ayşe Hanım bir üst sınıfta işlenmesi gereken ya da alt sınıflarda işlenmiş olan konulara da (hızlı tekrarlar için) yer ayırmaktadır. Her iki öğretmen de matematik ve geometri derslerinin bir saatini doğrudan ÖSS çalışmalarına ayırmıştır. Öğrenciler kimi zaman kendi ek çalışmalarıyla kimi zaman da dershanedeki öğretmenlerinden yararlanarak okuldaki içerikten farklı matematik konularını da öğrenebilmekte ve o konuya ilişkin soruları çözebilmektedir. Her iki öğretmende derslerini tek bir kaynak kitaba bağlı kalarak işlemekten kaçınmaktadır. Ayşe Hanım MEB'in hazırlattığı ortaöğretim matematik ders kitaplarından da minimum düzeyde yararlanmaktadır. Öğretmenler deneyimlerine dayalı olarak farklı bir kaç kitaptan geçmiş yıllardaki materyallerinden de yararlanarak kendi konu anlatım notlarını geliştirmiş ve onları kullanmaktadır. Soru ve problem çözme uygulamalarında da benzer durum hakimdir. Öğrencilere verilecek ödevler önceden öğretmenlerce belirlenen 4-5 (çoğu soru bankası niteliğindeki) kitaptan işlenen konuya uygunluğuna dikkat edilerek verilmektedir. Ayşe Hanım'ın derslerinde anlatımlar kendisi tarafından yapılmakta, genellikle matematiksel içeriğe ilişkin temel bilgiler verilmekte, anlatım aşaması kısa tutularak bu süreç öğrencilerin soruları ya da eğilimlerine göre uzatılmakta ya da genişletilmektedir. Sonrasında alıştırma ve problem çözümlerine geçilmekte genellikle önce orta güçlükte sonra zor seviyede sorular öğrencilere sunulmaktadır. Öğrencilere verilen (büyük bölümü yine soru çözümünü içeren) ödevler sınıfta kontrol edilmekte ve öğrencilerin sıkıntı yaşadığı durumlarda destekler sağlanmaktadır. Bu destekler sorulara yönelik bilgileri kısaca hatırlatma, konuyu tekrar özetleme, sıkıntı yaşanan sorularda daha fazla örnek ya da benzer soru çözümleri yapma ya da çözümü birkaç kez birlikte tekrar gözden geçirme biçiminde olabilmektedir. Her dersin sonunda öğrencilere ödevler verilmekte ve bir sonraki dersin başında verilen ödevler bireysel olarak kontrol edilmektedir. Her öğrencinin yapmakta zorlandığı ya da yapamadığı sorular sınıfta tartışılmakta ve diğer öğrencilerin katılımıyla birlikte çözülmektedir. Ahmet Bey'in derslerinde de anlatımlar kendisi tarafından yapılmakta olup, işleniş döngüsü aşağı yukarı Ayşe Hanım'ınkine paraleldir. Ancak Ahmet Bey öğrencilere açıklama yapma, çözüm yapma, çözümü anlama-anlatma, vb uygulamalar için daha fazla zaman vermekte, onları daha fazla dinlemekte ve onları konuşmaya, tartışmaya yöneltmeye çalışmaktadır. Ayrıca Ahmet Bey kimi zaman derslerinin tamamını süre tutarak kendisinin hazırladığı test biçimindeki soru uygulamalarına ayırmaktadır. Her iki öğretmen de derslerinde farklı öğrenme-öğretme araçlarından ve teknolojiden neredeyse hiç yararlanmamaktadır. Bazen Ahmet Bey bazı test uygulamalarını teknoloji sınıfındaki akıllı tahta üzerinde gerçekleştirmiştir. Öğrencilere araştırma ve sunum yapabilecekleri ya da soru çözümü dışında performans gösterebilecekleri türde farklı ödevler verilmemektedir. İki öğretmen de öğrencilerin ağırlıklı olarak akademik başarılarını ölçmekte, duyuşsal özelliklerine yönelik bir gözlem ya da ölçme yapmamaktadır. Derslerde kullanılan ölçme değerlendirme biçimi yazılı, sözlü ve test uygulamalarına dayalı bireysel not verme biçimindedir.

Araştırma Problemleri Çerçevesinde Ortaya Çıkan Bulgular ve Yorumlar

I. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar

Birinci alt problem, "*matematik ve geometri derslerinde ispata ve ispatlamaya yönelik iletişim durumlarındaki, söylem alanına (field of discourse)* [**SA**] *ait genel karakteristiklerin neler olduğunu* içermektedir. Bu ve sonraki iki alt problemlere yönelik bulgular, araştırma literatüründe Halliday ve Hasan'ın (bkz. s. 61) sosyal göstergebilim temelinde ortaya koyduğu sistemik fonksiyonel dilbilgisi çalışmalarına ilişkin bilgilerden yararlanılarak ortaya konacaktır. Bu alt problemde öncelikle ispat ve ispatlamaya yönelik söylemlerin alanına ait genel gözlemler betimlenecek ve sonrasında "*sözcüksel ögelere (lexical items)*" dönük yapılan analizin sonuçları iki soru çerçevesinde sunulacak ve yorumlanacaktır.

Genel Gözlemler

Her iki derste de ispata yönelik SA, genel düzeyde işlenen matematik konusunu, özelde ise yapılan ispatı ve onun hakkındaki/üzerindeki yorumları içermektedir. Dolayısı ile SA açısından matematik ve geometri derslerindeki tüm söylemlerin teması, işlenen matematik konusuna yönelik sunulan ispatlara ait amaçları, matematiksel gösterimleri, anlamları ve onlara dayalı işlemsel uygulamaları kapsamaktadır.

Matematik derslerini yürüten Ayşe Hanım'ın derslerde ispata ve ispatlamaya yönelik genel tavrı diğer (ispat içermeyen) derslerdeki tavrına paraleldir. Ayşe Hanım'ın söylemlerinin SA açısından sahip olduğu örüntüsel karakteristikler aşağıdaki biçimde sıralanabilir;

MO-1) Ayşe Hanım genellikle ispatlanması gereken ifadeyi (sözlü ifade ederek ya da tahtaya yazarak) verir vermez öğrencilerin kendi ispatlarını yapmalarını beklemeden, onlara yeterince süre tanımadan, ispatlama sürecine geçilmesini sağlamaktadır. Bunu ya kendisi hemen tahtada ispatı yapmaya başlayarak, ya öğrencilere ispata ne şekilde başlayacakları ve diğer adımlarda ne yapacakları doğrudan söyleyerek, ya da ispatı yapması için tahtaya kaldırdığı bir öğrenciye ispatlamak için ne yapması gerektiği sık sık yaptığı müdahalelerle belirterek hatta bazen doğrudan dikte edip tahtaya yazmasını sağlayarak gerçekleştirmektedir.

Örnekler

DS-1: (11), (18),(21), (23),(24)
DS-4: (15),(18),(25),(32),(36)
DS-5: (11),(13)
DS-8: (13),(19)
DS-9: (229),(231),(262),(270),(326),(352),(354)
DS-10: (109),(140),(165),(184)
DS-11: (8),(23),(101),(102),(114),(123),(127),(129)
DS-13: (28),(30),(39),(53),(54),(69)

MO-2) İspatların ve ispat yapmanın amacına ve ispatların sahip olduğu fonksiyonlarına dair Ayşe Hanım'ın ağırlıklı vurgusu pratik uygulamalar ve işlemsel ritüellere imkân sağlama üzerinedir. Bu nedenle söylemlerinde ispatlar yoluyla bir formül, kural ya da kısa yol elde edildiğine yönelik ifadeler yer almaktadır.

Örnekler

DS-1: (48),(59),(64) DS-5: (1),(49),(50) DS-6: (25)
DS-8: (13),(19) DS-9: (229),(309),(310) DS-10: (151)

50 DS-5	MO	Şimdi şöyle, artık bu formülü kullanıyoruz bakın bu kadar ispat yaptık bunları gösterdik.
59 DS-1	MO	Buradan kullanabileceğimiz bir formül elde etmiş olduk. Tamam mı çocuklar! [*10–15 saniye bekliyor.*]
151 DS-10	MO	O zaman şöyle soruları kullanabilir miyiz? $\sum_{k=1}^{100} k.k!$ nedir dersem, bunu bakın (n+1)!-1 yani 101!-1 yazabilirsiniz bakın ispatladığınız bir şeyi kullanacaksınız.

MO-3) MO-2'deki yaklaşım doğrultusunda Ayşe Hanım ispatların yapılması sürecinde çok geniş zaman dilimleri ayırmamaktadır. Bu sürecin hızlı biçimde gerçekleştirilerek ispat ile elde edilen formül ya da kuralın örneklendirilmesini göstermek ve öğrencilerin alıştırmalar ve problemler üzerinde uygulama yapması aşamasına geçmeyi amaçlamaktadır.

Örnekler

DS-1: (5),(45) DS-4: (70),(74),(83) DS-10: (151)

70 DS-4	MO	Öyle kural işte, şimdi örneği yaptığımızda göreceksin neden öyle olduğunu, başka türlü çarpılamıyor. İki matrisi çarpacağız.
83 DS-4	MO	Bak şimdi örnek üzerinde izleyeceksin, o yazdırdığımın anlamını 1–2 örnek yaptık mı göreceğiz.

MO-4) Ayşe Hanım bir ispatın yapılmasındaki genel mekanizmayı bir taraftan diğer tarafı elde etme işlemi olarak tanımlamakta ve bunu sıkça tekrarlamaktadır.

Örnekler

DS-4: (16),(18),(19),(21) DS-9: (268),(335),(352)

19 DS-4	MO	Bakın değişme özelliği olduğunu gösteriyoruz. Matrislerde toplama işleminin değişme özelliği var. Eşitliğin bir tarafını kullanıp öbür tarafını elde ettik. Daima biliyorsunuz ispatta eşitliğin bir tarafını kullanıp öbür tarafını elde ediyorduk.

Ahmet Bey geometri derslerinde ispatlara sayıca daha az yer vermiş olmasına karşın ispat yapılan derslerinin tamamı ya da büyük bir bölümünü (örn. DS-2'nin tamamı, DS-3'ün (1-60) kısmı, DS-12'nin tamamı) ispatın ayrıntılı biçimde, sınıfla sürekli etkileşim içerisinde olarak, soru-cevap tekniğine dayalı inşa edilmesine ayırmıştır. Ahmet Bey'in söylemlerinin SA açısından sahip olduğu örüntüsel karakteristikler aşağıdaki gibi sıralanabilir;

GO-1) Ahmet Bey öğrencilerin ön bilgileri ile yapabilecekleri, ileri düzeyde bilgi gerektirmeyen ispatlarda ispatı kendisi yapmamakta, öğrencilerin yapması için onlara düşünme/uğraşma süresi tanımaktadır. Bu süre zarfında sınıftaki sıraların arasında dolaşarak defterlerde yapılanlara bakmakta ve öğrencilerin bireysel sorularına cevaplar vermektedir.

Örnekler

DS-2: (3),(62),(64) DS-3: (1)

3 DS-2	**GO**	Her biri için ayrı bir şekil çizerek ispatlayacağız. Herkes kendi başına uğraşsın. *[OG–2 eliyle soruyu gösterip alçak sesle bir şeyler soruyor ve GO yanına giderek soruyu daha iyi anlamasına yönelik açıklamalar yapıyor.]*

GO-2) Öğrencilerin yaptıkları ispatları değerlendiren Ahmet Bey ispatın formal biçimde yapılmasına geçme aşamasında tahtaya bir öğrenci kaldırmakta ve ispatı bu öğrenciyle adım adım, tartışarak inşa edilmesini sağlamaktadır. İspatın başlangıcında tüm adımlarına yönelik doğrudan genel açıklamalarda da bulunmamaktadır [bkz. DS-2: (2-45)].

Örnekler

DS-2: (16),(65) DS-3: (1)

GO-3) Ahmet Bey ispatın yapılmasına yeterince zaman ayırmakta bu aşamayı hızlı geçmemekte, ispatlama sürecinde yapılanların (hem kendisi hem de öğrencilerini yönlendirerek) tek tek üzerinde durulmasını sağlamaktadır.

Örnekler

DS-2: (2-45),(56-80) DS-3: (1-23),(24-51) DS-12: (8-30),(42-66)

Hem ispata başlamadan önce hem de ispatların oluşturulması esnasında yapılanların anlaşılırlığını arttırmak için Ahmet Bey gerekli gördüğü yerlerde ek açıklamalarda bulunmaktadır. Benzer şekilde tahtadaki öğrenciden de yaptıklarını sınıfa açıklamasını talep etmektedir.

Örnekler

DS-2: (67),(71) DS-3: (9),(24-27),(33)
DS-12: (1-7),(42-58)

67 DS-2	**GO**	Önce bir arkadaşlarına açıkla bakalım neden olduğunu sonra da ispatını yapalım, önce açıklama yapalım.

9 DS-3	**GO**	Şimdi başlangıçtan itibaren şekle bakıp açıklamalara geçelim. AA' dik D düzlemi de. [*OG–12 ye*]

İspat yapma aşamasında öğrencilere kimi zaman yönlendirici sorular yöneltmektedir.

<u>Örnekler</u>

DS-2: (5),(7),(9),(71)   DS-3: (3)

5	**GO**	Orası dik üçgen olur mu?

9	**GO**	Peki, Pisagor mu kullanırsın, yoksa eş üçgen yöntemini mi kullanırsın

GO-4) Ahmet Bey bir ispatın yapılmasındaki genel mekanizmayı *hipotez—hüküm* ya da *verilen—istenen* arasındaki geçiş olarak ifade etmektedir. Bu ilişkiyi hem açıklamalar yoluyla hem de matematiksel gösterimini yaparak ortaya koyan Ahmet Bey ispatı hipotezden hükme ulaşma işlemi olarak tanımlamaktadır.

<u>Örnekler</u>

DS-2: (35), (52-55),(71-80)
DS-3: (13),(35-30),(41),(54),(96)

53 DS-2	**GO**	Sonra göstermek istediğin nedir? [*tahtaya yazılı olanlar üzerinde* } ⟹ *işaretini kullanarak*] AB' nin AA' ' den uzun olduğu.
		(th: $\left.\begin{array}{l} AA' \perp (D) \\ B \in (D) \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \|AB\| > \|AA'\|$) - Göstermek istediğim buydu. Şimdi BA′ nü çizdiğimizde BAA′ dik olur.
77	OG-4/ **GO**	*A B* uzunluğu eşittir *A C* uzunluğu. Bunu göstermeye çalışıyorum tamam mı?
		(th: $\underbrace{\left.\begin{array}{l} AA' \perp (D) \\ \|AB\| = \|AC\| \end{array}\right\}}_{\Downarrow \; a} \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{\|A'B\| = \|A'C\|}_{\Downarrow \; b}$)
78	**GO**	Soldaki a kısmına hipotez denir. Sağdaki b kısmına ispatlamamız gereken şey.

Aşağıdaki bölümde MO ve GO'nun söylemlerinin alanına yönelik söylemsel karakteristiklerle bağlantılı olarak sözcüksel ögelere ilişkin elde edilen bulgular ve yorumlar sunulmaktadır.

Sözcüksel Ögeler: Bir söylem SA açısından incelemeye girişildiğinde sözcüksel ögeler açısından iki temel soruya cevap verilmeye çalışılır (soruların kapsamı için bkz. sy. 61).

-- Söylem içerisindeki kelimeler hangi çalışma alanına yöneliktir?(anlamsal alan)
-- Söylem içerisindeki sözcükler genel kitle ve o alandaki uzman kitle tarafından ne kadar iyi bilinmektedir? (uzmanlaşma)

Birinci soru için araştırmacı matematik ve geometri derslerindeki ispata ve ispatlamaya yönelik DS'lerdeki sözcükleri ayrıntılı olarak inceleyerek öğretmen ve öğrencilerce ispata yönelik kullanılan sözcüklerin bir listesini oluşturmuştur. Bu liste oluşturulurken sadece sözcükler değil onların geçtiği ifade bölümlerinden kesitler de alınarak geniş bir ön liste (bkz. Ek-6) hazırlanmış ve sonrasında yalnızca o listedeki sözcüklere odaklanılarak aşağıdaki (Tablo-7) sözcük listesi elde edilmiştir. Tablo-7 incelendiğinde hem Ayşe Hanım hem de Ahmet Bey'in söylemlerinde kullandıkları ortak sözcükler; *teorem, kanıt/ispat* ve *gösteriniz* biçiminde karşımıza çıkmaktadır. Ayşe Hanım bunların dışında *formül* ve *tümevarım* sözcüklerini de kullanırken, Ahmet Bey ise bir kez (Cavelieri İlkesi) *ilke* sözcüğünü ifade etmiştir. Matematik derslerinin bu dönem konuları arasında tümevarımla ispatın bulunması nedeniyle *tümevarım* sözcüğün kullanımı pek çok kez karşımıza çıkmaktadır. Ayşe Hanım *teorem* sözcüğünü bir kez kullanmıştır. Öğrenciler yapılan ispatı defterlerine yazmak için ne tür bir başlık yazacaklarını sorduklarında teorem sözcüğünü ifade etmiş ve Ayşe Hanım "*tanım ya da teorem deyin* (DS-1 [10])" demiştir. Ayrıca bir öğrencinin tümevarımla yapılması istenen bir ispatı modüler aritmetikten yararlanarak yaptığı farklı bir ispat şekline yönelik Ayşe Hanım ispatın yanlış olduğunu açıklamak için bir kez *çürütme* (DS-9 [286]) sözcüğünü kullanmıştır. Ahmet Bey *teorem* sözcüğünü Ayşe Hanıma kıyasla fazlaca ifade etmektedir. Öğrencilerin söylemlerine bakıldığında onların hem sayı hem de çeşitlilik açısından öğretmenlerinden çok daha sınırlı şekilde bu sözcüklere başvurdukları görülmektedir. Öğrencilerin matematik derslerinde en fazla kullandıkları sözcük tümevarım ve gösteriniz iken geometri derslerinde ise ispattır. Herhangi bir lise ya da üniversite matematik/geometri ders kitabı incelendiğinde ispat ve ispatlamaya yönelik var olan sözcükler dikkate alınarak bir liste yapılmaya çalışılır ise; *tanım, teorem, aksiyom, postulat, varsayım, lemma, ara teorem, sonuç teoremi, sanı, sav, varsayım, doğrulama, yanlışlama, gösterme* gibi sözcüklerle karşılaşılmaktadır.

Tablo 7

Öğretmen ve Öğrenci Söylemlerindeki İspata Yönelik Sözcük Listeleri

DS NO & DERS	SÖZCÜK/ TERİM	TRANSKRİPTTEKİ İFADE NUMARASI
	--ÖĞRETMENLER--	
DS-1 (mat)	*Gösteriniz*	*(3)*
	İspat/Kanıt	*(8),(21),(55)*
	Teorem	*(10)*
	Formül	*(20),(48),(59),(64)*
DS-4 (mat)	*Gösteriniz*	*(15),(19)*
	İspat/Kanıt	*(15),(19),(40),(51), (60)*
DS-5 (mat)	*Formül*	*(1),(49),(50)*
	İspat	*(9),(11),(50)*
DS-6 (mat)	*İspat*	*(25),(26)*
DS-8 (mat)	*Gösteriniz*	*(2),(22)*
DS-9 (mat)	*İspat*	*(189),(258),(282),(286),(297),(299),(308)*
	Gösteriniz	*(239),(241),(244),(274),(288),(304),(306),(313),(327),(335),(348)*
	Tümevarım	*(189),(239),(241),(244),(297),(299),(303),(304) (306),(308),(313),(327),(350),(352),(354),(356)*
	Formül	*(310)*
	Çürütme	*(286)*
DS-10 (mat)	*Gösteriniz*	*(92),(94),(135),(151)*
	İspat	*(144),(146),(151)*
	Tümevarım	*(144)*
	Formül	*(158),(160),(163)*
DS-11 (mat)	*İspat*	*(75),(89),(111)*
	Gösteriniz	*(69),(89),(107),(114)*
	Tümevarım	*(69),(71),(75),(81),(89),(107),(114),(116),(121)*
	Formül	*(38)*
DS-13 (mat)	*İspat*	*(28),(36),(41),(43),(58)*
	Gösteriniz	*(45),(58)*
DS-2 (geo)	*Teorem*	*(1),(72)*
	İspat	*(2),(3),(45),(49),(51),(56),(67),(71),(78),(80)*
	Gösteriniz	*(74),(76),(77)*
DS-3 (geo)	*Teorem*	*(24),(25),(27),(52),(58),(95),(112), (120)*
	İspat	*(35)*
	Gösteriniz	*(39)*
DS-7 (geo)	*Teorem*	*(29)*
	İspat	*(35),(37)*
DS-12 (geo)	*İlke*	*(1),(3)*
	İspat	*(8),(30),(32)*
	--ÖĞRENCİLER--	
DS-1 (mat)	*İspat/Kanıt*	*(7),(54)*
	Tümevarım	*(13)*
	Formül	*(35)*
DS-4 (mat)	*Kanıt*	*(39),(59)*
	Gösteriniz	*(17)*

DS-5 (mat)	*İspat*	*(10)*
DS-6 (mat)	--	--
DS-8 (mat)	*İspat*	*(7)*
	Tümevarım	*(5)*
DS-9 (mat)	*İspat*	*(190),(298)*
	Gösteriniz	*(240),(285)(307),(309)*
	Tümevarım	*(240),(285),(298),(307),(309),(330)*
	Formül	*(191),(309)*
DS-10 (mat)	*Tümevarım*	*(80)*
	Formül	*(13)*
DS-11 (mat)	*Tümevarım*	*(118)*
DS-13 (mat)	*İspat*	*(35),(40)*
DS-2 (geo)	*Teorem*	*(12)*
	İspat	*(15),(18),(59)*
	Gösteriniz	*(83),(87)*
DS-3 (geo)	*Teorem*	*(8),(119)*
	İspat	*(6)*
DS-7 (geo)	--	--
DS-12 (geo)	--	--

Ayşe Hanım derslerinde en fazla ispat, tümevarım ve gösterinizi, Ahmet Bey ise ispat ve teorem sözcüklerini kullanmıştır. Dolayısıyla her iki öğretmenin de söylemlerinde kitaplardan yararlanılarak oluşturulan listedeki sözcüklerden ağırlıklı olarak ikisini (ispat, gösteriniz) kullandıkları görülmektedir. Bu bir anlamda sınıfta ispat ve ispatlamaya yönelik var olan iletişim durumlarındaki sözcük dağarcığının dar olduğunu gösteren bir veridir. Elbette tek başına öğretmenlerce kullanılan sözcükler ele alınarak genel duruma dair bir yordamaya varılamaz. İspat ve ispatlamaya yönelik söylemler, işlenen matematik ve geometri konularından, müfredatta o konuların içeriğinde yer alan önerme, teorem ve ispatlardan bir ölçüde etkilenmektedir. Ancak yine de sadece iki, üç sözcük ve onların semantik anlamları ekseninde kurulan iletişimin, öğrencilerin ispata yönelik öğrenmelerinde, genel terminolojinin oluşturulmasına yönelik bir sınırlılık yaratabileceği düşünülmektedir. Başka bir deyişle sözcüklerin anlamlarının ayrıntılı olarak açıklanmadan, yorumlanmadan ve çeşitli bağlamlarda kullanımları yapılmadan, (çeşitlilik açısından) dar bir çerçevede sunulması, sadece sınıf terminolojisinin geliştirilmesinde değil aynı zamanda kavramsal öğrenme açısından da bazı sıkıntıların oluşmasına neden olabilmektedir. Bu tür değerlendirmeler söz konusu sözcüklerin uzman kitle (öğretmenler) ve genel kitle (öğrenciler) tarafından ne kadar iyi bilindiğine yönelik ikinci soruya dair birtakım cevapları da içermektedir. İkinci soruya yönelik bazı bulguların ortaya konmasında TES'ler önemli veriler sağlamıştır. Özellikle TES-1 incelendiğinde Ayşe Hanım ve öğrenciler arasındaki yer alan "önerme, aksiyom, teorem ve ispat" sözcüklerine yönelik sözel tartışmalar, öğrencilerin söz konusu terimlere yönelik kavramsal anlamalarına ve ilişkilendirmelerine yakından bakılmasını ve bazı sıkıntılı yanların görülmesini sağlamaktadır.

Tablo 8

Teşvik Edilmiş Söylem Metni (TES)-1

(A) 9-33		28 NİSAN-Pzt (Mat-3) TES-1
10	**MO**	OG- 5 hadi bir önerme nedir? Düşündüğünü söyle bakayım.
11	OG-8	Ben söyleyeyim mi hocam?
12	OG-3	Kesin doğru ya da kesin yanlış yargı bildiren cümlelerdir.
13	OG-8	Hayır, doğru önerme yanlış önerme olabilir, bence hüküm bildiren cümlelerdir.
14	OG-11	O da [*OG–3 ü kastediyor*] onu dedi.
15	**MO**	Hüküm bildirecek ama nasıl bir hüküm bildirecek?
16	OG-3	Ya kesin doğru, ya kesin yanlış.
17	OG-2	Kesin bir hüküm.
18	**MO**	Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildirecek, peki OG–2 söyle bakalım, bir tane önerme söyle.
19	OG-2	Salı hafta içi bir gündür.
20	**MO**	Salı hafta içi gündür
21	OG-7	Doğru bir önerme.
22	**MO**	Evet, başka?
23	OG-11	Bütün Fenerliler buruktur.
24	**MO**	Genelleme yapmıyoruz, bak genelleme demedik biz önerme dedik.
25	OG-8	Peki, bugün günlerden çarşambadır desek bu doğru bir önerme mi olur, yanlış bir önerme mi?
26	**MO**	Bu önerme ama yanlış bir önerme.
27	OG-8	Bugün pazartesi, ama çarşamba günü çarşamba, yani bu kesin doğru veya yanlış değil.
28	**MO**	Bugün pazartesidir dersek doğru olmaz mı?
29	OG-8	Yarın ben o cümleyi kursam?
30	**MO**	Haa, o gün kurarsan yanlış olur.
31	**MO**	Şey, OG–6 bir önerme söylüyordu.
32	OG-6	Türkiye'nin başkenti Ankara'dır
33	**MO**	Evet peki… Teorem nedir?

TES-1' in ilk kısmında [10-32] önermenin ne olduğu ve örnekleri üzerinde tartışılmaktadır. Bu kavram üzerinde sınıfın genelde ortak bir düşünce etrafında dolaştığı ve genelleme ile önerme ilişkisine yönelik MO'nun yanıtı (23-24) dışında önemli fikir ayrılıkları yaşamadıkları görülmektedir. MO'nun "*genelleme yapmıyoruz, bak genelleme demedik biz önerme dedik*" ifadesi önermelerin genellemeleri içeremeyeceği gibi bir düşüncenin oluşmasına neden olabilir. Daha sonra MO *teoremin* ne olduğu sormuş ancak OG-5'in verdiği yanıt sonrasında tartışma *aksiyom* kavramı üzerine kaymıştır [37-80].

(B) 9-33		28 NİSAN-Pzt (Mat-3) TES-1
37	OG-5	Aksiyom.
38	**MO**	Aksiyom, peki aksiyom nedir?
39	OG-7	Belit, belit.
40	**MO**	Belit ne demek? [*MO ilk kez duyuyor.*]
41	OG-9	Ya hocam doğruluğu tam olarak ispatlanamayan…
42	OG-3	Ama yanlışlığı da ispatlanamayan…
43	**MO**	1 dakika, 1 dakika lütfen çocuklar söz alarak konuşun, OG–9 bir şey söyledi.
44	OG-9	Doğruluğu ya da yanlışlığı kesin olarak ispatlanamayan fakat sezgisel olarak kabul edilen.
45	**MO**	İspatlanamayan değil de, yani… birazcık daha, doğruluğu açıkça görülen desek.
46	OG-9	Doğruluğu açıkça görülen, yani doğruluğu sezgisel olarak görülen…
47	OG-6	Ama kanıtlanmayan/ kanıtlanamayan…
48	**MO**	Niye kanıtlanmasın, kanıtlanabilir.
49	OG-7	Kanıtlarsak *yasa* olur.
50	B-OG	Kanıtlanmaz.
51	OG-9	Öyle şey olmaz hocam. [*kanıtlanmaz anlamında*]
52	**MO**	Hıı, peki bir tane aksiyom söyleyin bakalım.
53	OG-11	1 dakika, 1 dakika bir şey söyleyeceğim, ama bir şey söyleyeceğim.
54	OG-1	Nokta, nokta.
55	**MO**	Nokta bir aksiyom mu? Nokta tanım.
56	OG-7	Söyleyeyim mi? Üçgenin iç açıları toplamı 180^0 dir.
57	**MO**	O teoremdir.
58	OG-11	Ama hocam biz teorem kanıtlansa yasa olur dedik, kanıtlanmış ama öyle.
59	OG-1	Doğru parçası, doğru parçası…
60	**MO**	1 dakika [*OG–8 elini kaldırıyor*] evet, [*OG-8'e*]
61	OG-8	Dikdörtgenin alanı a.b' dir.
62	**MO**	O ispatlanır.
63	OG-8	Biz bunu ispatlayamadık.
64	OG-2	İspatlanmıyor ama doğruluğu veya yanlışlığı görülüyor.
65	OG-11	İspatlanmış, ispatlanmış söyleyeyim mi?
66	**MO**	1 dakika, söyle OG–11.
67	OG-11	Şimdi bir tane AB doğru parçası var diyelim a uzunluğunda.
68	OG-4	Ondan b tane.
69	OG-11	Ondan b tane üst üste.
70	**MO**	Haa, [*üst üste*] koydun.
71	OG-11	İşte a.b
72	OG-4	Biz onları kabul ediyoruz ama.
73	OG-2	Evet, işte.
74	OG-11	Evet.
75	OG-2	Evet, o ispat değil yani.
76	OG-9	Biz doğru açının değerine [*ölçüsüne*] 180^0 dediğimiz için o 180^0 dir.
77	**MO**	Peki, şöyle bir aksiyom, doğruluğu apaçık görülen bir aksiyom söyleyecek olan yok mu?
78	OG-11	Doğruluğu apaçık görülen?
79	**MO**	Yani öyle bir cümle söyleyeceksiniz ki...
80	OG-11	İki noktadan yalnız bir doğru geçer.
81	**MO**	Evet, iki noktadan yalnız bir doğru geçer. Peki, teorem nedir?

Bu ikinci bölüm önermeye yönelik tartışmanın aksine farklı düşüncelerin ve örneklerin ortaya çıktığı bir söylemsel yapıya sahiptir. Öğrenciler aksiyomu 'doğruluğu (ya da yanlışlığı) kesin olarak ispatlanamayan ancak sezgisel olarak doğru olduğu kabul edilen/görülen ifade' biçiminde tanımlamaktadır. Tanımlama açısından büyük bir sıkıntı olmamasına karşın MO'nun aksiyomların kanıtlanabileceğine yönelik (48) görüşünü ifade etmesi tartışmayı derinleştirmiş ve öğrencilerce yapılan örneklendirmeler de bazı yanılgıları ortaya çıkarmıştır. OG-7 aksiyomların kanıtlanırsa yasa olacağını (49) öne süren yanlış ifadesi, OG-11'in aynı fikri teoremler için tekrarlaması ile (58) başka biçimde yeniden söylenmiştir. Dolayısıyla bazı öğrencilerin diğer bilim dallarında yer alan yasa (örn. Newton'un ikinci hareket yasası) kavramının matematikte de var olduğunu düşündüklerini ve yasanın kanıtlanan şey olduğuna dair bir algılarının bulunduğu görülmektedir. Ayşe Hanım öğrencilerden aksiyom örnekleri vermelerini istediğinde OG-1 nokta (54) ve doğru parçası (59), OG-7 üçgenin iç açıları toplamı 180^0 dir (56), OG-8 dikdörtgenin alanı a.b dir (61) biçiminde örnekler sunmuştur. Aksiyoma örnek oluşturmayan bu ifadelerin aksiyom olup olmaması yanında, teorem ya da yasa olup olmadığında da sınıfta bir anlaşma sağlanamamıştır. MO'nun dikdörtgenin alanının a.b olduğunun ispatlanabilir (62) demesi bir şeyin kabul edilmesi ile ispatlanması arasındaki ilişkiye yönelik başka bir küçük tartışmayı başlatmıştır. MO öğrencilerden doğruluğu apaçık görülen bir aksiyom söylemelerini istediğinde ise sadece OG-11 yaygın olarak bilinen Öklid aksiyomlarından birini (80) ifade etmiştir. Ayrıca OG-11'in dikdörtgenin alan formülüne yönelik yaptığı açıklama da (67, 69, 71) önceki öğrenmelere dayalı olarak ispatı nasıl algıladığına/öğrendiğine farklı bir örnek sunmaktadır. TES-1'de aksiyomun ardından teoreme yönelik bir tartışma [81-132] yer almaktadır. Bu bölüm teoremin ne olduğu ve ispat ile olan ilişkisi açısından ilginç diyalogları barındırmaktadır.

(C) 9-33		**28 NİSAN-Pzt (Mat-3) TES-1**
81	**MO**	Evet, iki noktadan yalnız bir doğru geçer. Peki, teorem nedir?
82	OG-11	Teorem böyle içinde sayısal bir şey…
83	OG-5	Kesin olarak kanıtlanamayan ama sezgisel yolla bilinen.
84	OG-2	O belit yaa!
85	B-OG	Hayır, o değil ya, hayır. [*OG-5'in cümlesine yönelik*]
86	OG-8	Hocam hocam? [*Elini kaldırıyor söz istiyor*.]
87	**MO**	OG–7 söylesin.
88	OG-7	Şimdi, mesela bir tane işte tasarının kanun, yasa olması için %100 kanıtlanması gerekiyor, her yapıldığı deneyde aynı sonucu vermesi gerekiyor. Teoremde de mesela %98 olarak %99 olarak kanıtlanıyor ama yine de yani bazı kuşkular var ufakta olsa ve hiç bir türlü şekilde çürütülemiyor bu teorem oluyor.
89	**MO**	[*Sınıfta yoğun bir tartışma, konuşma oluyor*.] Tamam, bir dakika herkes fikrini söyleyecek.
90	OG-5	Teoremle, teori aynı şey mi?
91	**MO**	Teori ile teorem aynı şey midir? Herkes fikrini söyleyecek.
92	OG-11	Hayır hocam.
93	**MO**	Katılıyor musunuz?
94	OG-11	Ben bir şeye katılmıyorum.
95	**MO**	Söyle.

96	OG-11	Şimdi %99 kesin kabul şey ya da ispatlanamayan falan diyoruz ama mesela Melanous Teoremi biz onu %100 doğru olarak kabul edip kullanıyoruz, her seferinde aynı sonucu veriyor. %100 doğrudur o ama niye o zaman kesin değil diyoruz?
97	OG-7	Ama hocam.
98	**MO**	[*OG-7'ye*] senin teorem tanımın o, ben bir şey söylemedim.
99	OG-7	Ama o yasa olarak, hala pürüzler var ama.
100	**MO**	Nasıl pürüzler ama?
101	OG-11	Abi o teoremle aynı teorem değil.
102	OG-7	İşte bende onu diyecektim, bence fen bilimlerinde kullanılanlar somut, matematik hani soyut ya ondan dolayı işte bu teorem oluyor o paradigma [*matematikteki*] gibi oluyor yani tam kesin olamıyor.
103	**MO**	Hadi OG–1 konuşsun bakalım, OG–1 teorem nedir senin için?
104	OG-1	Tam kesin olarak ispatlanmamış.
105	**MO**	Teorem ispatlanmamış!!! Hıı?
106	OG-13	Tam olarak. [*ispatlanmamış*]
107	OG-9	Ama teoremleri ispatlıyoruz derste.
108	OG-8	Doğruluğu ispatlanamayan ama eldeki verileri sağlıyor, bizim bulduğumuz şey eldeki verileri sağlıyor.
109	**MO**	Bir üçgenin iç açıları toplamının 180^0 oluğunu ispatlayamıyor musun?
110	OG-11	İspatlarız, çiz bir çember.
111	OG-8	Onu ispatlarız ama yani, Melanaus Teoremi, [*ama*] o teoremi de ispatlarız.
112	**MO**	Yaa!
113	OG-7	Ama şeyi ispatlayamayız, bir çember niye 360^0 .
114	**MO**	Niye ispatlayamayız?
115	OG-7	Niye, nasıl ispatlayacağız?
116	OG-13	Niye o eskiden biliniyormuş.
117	OG-7	Ben diyorum 720^0derece.
118	OG-11	İlk başta 450 imiş hatta.
119	OG-7	Hayır, 400 müş. [*tartışma çıkıyor.*]
120	**MO**	Her bir ağızdan bir şey çıkmasın, söyle. [*OG–6' ya*]
121	OG-6	Hocam 400 küsur müymüş neymiş, o da tam her şeye bölünmüyormuş, 360 güzel, 3' e bölünüyor demişler, 4' e, 2' ye [*de bölünüyor*].
122	OG-11	Sırf o yüzden hocam, çok sayıya bölünebiliyor [*diye*].
123	**MO**	Ama ben dairenin alanının ispatlandığını biliyorum.
124	OG-11	Alanı değil 360^0 diyoruz.
125	**MO**	360^0 mi? [*onu*] Kabul ediyoruz.
126	OG-6	Kabul yani.
127	OG-7	Yalnız bir şey diyeceğim onlar [*geçmişte bunu ifade edenler*] o 360^0 hesaplıyorlar da, önce çemberin 360^0olduğunu söylüyorlar, ona göre materyaller oluşturuyorlar daha sonra bu materyallerle ölçüyorlar.
128	OG-12	Açıları da kendilerine göre belirliyorlar.
129	0G-7	Evet, o materyalleri zaten önce çembere göre ayarlamış oluyorlar.
130	OG-2	Hocam o zaman çember şey olsaydı, 400^0 olsaydı, üçgenin iç açıları toplamı da 180^0 olacak mıydı?
131	OG-11	Hayır, 200^0 olurdu.
132	OG-9	200^0 olurdu.
133	**MO**	Peki, önerme ile teorem ilişkili mi?

Öğrencilerin teoreme yönelik düşünceleri 'onun tam bir kesinlikle ispatlanamayan biraz da (% 1-2) olsa şüphe barındıran ama elimizde olanlar üzerinde doğru işlemler yapmamıza da yardımcı olan ifadeler' olarak belirmektedir. Teoremi tanımlayan/açıklayan öğrenci ifadeleri alt alta sıralanacak olursa bu yaklaşım net olarak görülebilir. İfadeleri doğrultusunda öğrencilerin ispatı tam olan ve olmayan şeklinde iki grupta düşündüklerini söylemek mümkündür. Yani bir ispat ya tam olarak yapılabilir ya da eksik yanlar, yönler içererek yapılabilir.

82	OG-11	Teorem böyle içinde sayısal bir şey…
83	OG-5	Kesin olarak kanıtlanamayan ama sezgisel yolla bilinen.
84	OG-2	O belit yaa!
85	B-OG	Hayır, o değil ya, hayır. [*OG-5'in cümlesine yönelik*]
88	OG-7	Şimdi, mesela bir tane işte tasarının kanun, yasa olması için %100 kanıtlanması gerekiyor, her yapıldığı deneyde aynı sonucu vermesi gerekiyor. Teoremde de mesela %98 olarak %99 olarak kanıtlanıyor ama yine de yani bazı kuşkular var ufakta olsa ve hiç bir türlü şekilde çürütülemiyor bu teorem oluyor.
104	OG-1	Tam kesin olarak ispatlanmamış.
106	OG-13	Tam olarak. [*ispatlanmamış*]
108	OG-8	Doğruluğu ispatlanamayan ama eldeki verileri sağlıyor, bizim bulduğumuz şey eldeki verileri sağlıyor.

Yine bu bölümde de teorem ve yasa üzerine var olan tartışmalardaki gibi diğer bilim dallarındaki bazı kavramlarla ilişkilendirmeler yapılması sonucu oluşmuş görüş ayrılıklarına rastlanmaktadır. Teorem ve teorinin aynı şey olup olmadığı ve hangisinin daha kesin ve tam bir ispata sahip olduğuna yönelik tartışma bu durumu örneklemektedir. Teoremlerin ispatlanan ifadeler olduğu ancak bazı şeylerin kabul edilmesi sonrası ispatlamanın yapılabildiği için öğrenciler ispatlanan bir şeyin kesin doğru, tam ve hiçbir şüphe içermeyen bir doğrulama sağlayıp sağlamadığından emin olamamaktadır. Öğrencilerin ispatlardaki kabuller olarak algıladığı ya da ifade ettikleri şeyler, matematikte yetkin olan kişilerin ispatlama aşamasında yararlandıkları kabullerden (örn. tanımlar ve aksiyomlardan) farklı görünmektedir (72, 76, 125, 128). Bu görüşü destekleyen bir diğer söylem grubu TES-5 deki [43-61] tartışmalar esnasında ortaya çıkmıştır.

Tablo 9

Teşvik Edilmiş Söylem Metni (TES)-5

15-47		**14 MAYIS-Çrş (Mat-1) TES-5**
43	OG-2	Bir de şey hocam, matematiksel ispatta belirli şeyleri kabul ederek ispatlıyoruz.
44	OG-9	Bazı kavramları, hocam bence matematikte de kesinlik yok.
45	**MO**	Niye?
46	OG-9	Bazı kavramları kendimiz yaratıyoruz.
47	**MO**	Neyi yaratıyoruz mesela söyler misin?
48	OG-9	Mesela 1'e bir dediğimiz için o, 1'dir.
49	**MO**	Nasıl yani?
50	OG-9	Yani 1 rakamına dediğimiz için o, 1.
51	**MO**	E tabi ki başka ne diyebiliriz? Tam anlamadım.
52	OG-9	Ya hocam bazı kavramları biz şey yapıyoruz.
53	**MO**	Ama tüm dünyada kabul edilmiş.
54	OG-13	Doğada var mı? Yok mesela.
55	OG-9	Doğada yok, insan diyor onu, o yüzden kesin değil.
56	OG-3	Sen 1 diyorsun, İngiliz "one" diyor, farklı işte.
57	OG-2	Hocam o zaman çoğu ispatta n = R (Reel sayılarda) diyoruz, kısıtlı bir yerde ispat yapabiliyoruz ama.
58	**MO**	Ama kısıtlı bir yer olur mu, reel sayılar şu anda kullanılan, karmaşık sayılar haricinde.
59	OG-2	Uzayda üç boyutlu sayılar varmış bir sürü.

60	**MO**	Ama kısıtlı bir alanda bile ispat yapıyorsun değil mi?
61	OG-7	Ama hocam doğayı da kısıtlayabiliriz.

Görüldüğü üzere öğrencilerin matematiksel nesnelerin var oluş biçimlerine, matematiksel bilgilerin nasıl üretildiğine ve sonraki aşamalarda bu nesne ve bilgilerin nasıl kullanıldığına yönelik düşünce biçimlerinde eksik ve sınırlı yanlar bulunmaktadır. "*Biz doğru açının değerine [ölçüsüne]* 180^0 *dediğimiz için o* 180^0 *dir* (76)" ifadesinde olduğu gibi matematiksel olarak bir şeyi kabuller çerçevesinde sözel, sembolik, ya da simgesel biçimde tanımlamanın bir anlam taşıdığı ancak tanımın onun doğruluğunu matematiksel açıdan garanti etmediği iyi kavranamamaktadır. Matematiksel nesnelerin soyut ve insan zihninin ürünleri olması, bu nesnelere verilen isimlerin spesifik anlamları ve özellikleri tümüyle kabuller değildir. Başlangıçta yer alan tanımsız terimler, aksiyomlar, işlemsel rutinler dışında matematikteki tüm tanımlar ve kurallar birbirini doğuran mantıksal çıkarımlarla ve yatay ve dikey ilişkileri içeren etkileşimsel bir yapıda ortaya konmuştur. Öğrencilerin bütüncül bir bakışla fark etmekte zorlandıkları nokta ispatlarda kullanılan kabul edilmiş şeylerin ispatın kesinliğini ve doğruluğunu azaltmadığıdır. Bu duruma DS-9,10 ve 11'de yer alan tümevarıma yönelik söylemlerde başka somut örnekler de bulunmaktır. TES-1'in bir sonraki kısmında [133-168] sınıfta önerme ile teoremin ilişkisi tartışılmaktadır.

(D) 9-33		**28 NİSAN-Pzt (Mat-3) TES-1**
133	**MO**	Peki, önerme ile teorem ilişkili mi?
134	OG-9	Evet, hocam ilişkilidir, çünkü teoremler önermelerden doğar.
135	**MO**	Efendim, anlayamadım.
136	OG-9	Yani hocam ilişkilidir bence çünkü.
137	**MO**	İlişkilidir, neden ilişkilidir?
138	OG-9	Teoremler önermelerden doğar, bir bilim adamı ortaya bir önerme atar onun ispatlanması yolunda teoremler oluşturulur.
139	**MO**	Başka? [*fikri olan*] [*Bazıları OG-9'a katıldığını söylüyor.*] Evet, güzel bir görüş, başka görüşü olan?
140	OG-7	Bence teoremler önermelerle ifade edilir.
141	**MO**	Teoremler.
142	OG-7	Önermelerle ifade edilir.
143	**MO**	Mesela nasıl ifade ediliyor, bir teorem söyleyin hipotezini hükmünü göreyim.
144	OG-8	Pisagor teoremi örneğin.
145	**MO**	Pisagor teoremi. Ama nerede, bir dik üçgende.
146	OG-7	Bir dik üçgende iki dik kenarın kareleri toplamı, hipotenüsün karesine eşittir, diyoruz mesela.
147	**MO**	Peki, bu teoremin hipotezi neresi? [*3–4 saniye sessizlik oluyor.*]
148	OG-8	Eşittir cümlesi.
149	OG-2	Formül işte hipotez $a^2 = b^2 + c^2$
150	**MO**	Hipotez nedir? [*sınıfa*] Verilen değil mi?
151	B-OG	Evet.

152	**MO**	Hüküm nedir? İstenen değil mi?
153	B-OG	Evet.
154	**MO**	Peki, bir dik üçgende dediniz ki Pisagor teoremini söylediniz.
155	OG-8	$a^2 + b^2$ hipotez, c^2 hüküm mü? Oluyor.
156	**MO**	[*Hayır, anlamında kafasını sallıyor.*] Başka?
157	OG-11	Söyleyeyim mi?
158	**MO**	Söyle.
159	OG-11	ABC üçgeninin dik üçgen olması; a,b nin dik kenar, c nin hipotenüs olması.
160	**MO**	Verilen üçgenin dik üçgen olması hipotezdir, verilendir.
161	**MO**	Bu dik üçgen desem 90^0'ın karşısı yani A açısını 90^0 kabul ediyorsam o zaman $a^2 = b^2 + c^2$ olur. [*OG-8'e bakıyor.*] Hipotez nedir teoremde verilendir yani, hüküm nedir? İstenendir. Peki, bir teorem daha söyleyin bakalım hipotezine hükmüne ayırabileceğimiz.
162	OG-11	Tamam, söyleyelim.
163	**MO**	Söyle bakalım.
164	OG-7	Mesela kosinüs teoremi.
165	**MO**	Kosinüs teoremi.
166	OG-7	Bir üçgenin mesela atıyorum, bir üçgenin kenarları a, b ve c olsun
167	**MO**	Evet.
168	OG-7	Oradan $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,.\cos A$
169	**MO**	Peki, ispat nedir? İspat.

Önerme ile teoremin ilişkili olup olmadığına yönelik MO'nun sorusu sonrasında öğrencilerin ifadelerine bakıldığında birbirinden çok farklı ya da karşıt görüşlerin oluşmadığı ve düşüncelerinin kabul edilebilir nitelikte olduğu görülmektedir. Ancak MO'nun bir teoremin hipotez ve hükmünü belirlemelerini istemesi üzerine verilen örnekte bazı öğrencilerin teoremin hipotez ve hükmünü ifade etmede sorunlar yaşadıkları (148, 149, 155) görülmektedir. TES-1 öncesinde MO dört kez, GO üç kez farklı derslerde ispat yapmıştır. Özellikle GO ispat içeren derslerinin tamamını ya da büyük bir kısmını tamamen ispatın yapılmasına ayırmıştır. Ayrıca GO derslerinde ispatların oluşturulması sürecinde *verilen/hipotez----gösterilmek istenen/merak edilen* mekanizmasına hem sözel hem de matematiksel gösterimlerle, soru-cevap yöntemi çerçevesinde sürekli vurgu yaparken, MO ise ispat mekanizmasını bir taraftan diğer tarafı elde etmek olarak sunmuştur. Ancak Pisagor Teoremi'ne yönelik örnekteki söylemsel verilere göre yalnızca öğretmenlerin bilgi aktarımına dayanan öğretim anlayışının öğrencilerin ispat mekanizmasını anlamada ve uygulamalarında yeterli olmadığını düşündürmektedir. İspatın ne olduğuna yönelik söylemleri içeren TES-1'in son bölümünde [169-186] MO'nun (TES-1 öncesindeki DS'lerde yer alan) düşünceleri ve yönlendirmelerine dayalı temel tek bir görüş hâkimdir. 'İspat bir tarafı kullanarak diğer tarafı elde etmedir.' Bu görüş ispatın temel mekanizmasına yönelik sınıftaki genel algı niteliğindedir. Bu mekanizma MO tarafından pek çok kez DS'ler içerisinde de ifade edilmiştir (örn. DS-4: (16),(18),(19),(21), DS-9: (268), (335), (352)).

(E) 9-33		28 NİSAN-Pzt (Mat-3) TES-1
169	**MO**	Peki, ispat nedir? İspat.
170	B-OG	Kanıtlama.
171	**MO**	Kanıtlama.
172	OG-8	Bir tarafı kullanarak diğer tarafa ulaşma. [*OG-2 de benzer bir şey söylüyor*]
173	OG-11	Yalnızca bir tarafı kullanacağız ama.
174	**MO**	Bir tarafı kullanarak dediğiniz nedir? Acaba hipotezi mi kullanacağız?
175	B-OG	Hipotezi, hipotezi, hükmü.
176	**MO**	Haa, hipotezi kullanarak hükmü elde etmeye ispat mı diyoruz?
177	B-OG	Evet.
178	**MO**	Pekâlâ, biz bu senenin matematik dersinde [*daha önce*] tümevarımla ispat yaptık değil mi? Tümevarım bir ispat şekli değil mi? Neydi tümevarım, hatırlayan var mı? [*Söz istiyorlar*.]
179	**MO**	OG–8 söyleyecek.
180	OG-8	k=1 için doğruluğunu gösteriyoruz, k=k için doğruluğunu kabul ediyoruz.
181	B-OG	n, n eşittir [*OG-8 in sözünü düzeltiyorlar*].
182	OG-8	n=k için doğruluğunu kabul ediyoruz, n=k+1 i k cinsinden yazıp eğer doğruluğunu görürsek o zaman doğrudur diyoruz.
183	**MO**	Peki, hatırladığınızdan, şöyle kolay bir tane, hatırladığınızdan yazayım [*bu esnada notlarına bakıyor*] bir tane.
184	OG-5	Bir de tümdengelim var.
185	OG-8	O felsefede.
186	OG-4	Matematikte tümdengelim var mı? [*Öğretmen kâğıttakilere göz gezdiriyor, hafif bir gürültü var, soru ihmal ediliyor*.]

TES'lerde de görüldüğü üzere öğrencilerin ispata yönelik öğrenmelerindeki en belirgin nokta bu temel mekanizmadır. MO bu mekanizmayı bir hipotezi kullanarak hükmü elde etme olarak burada da yeniden ifade etmektedir. Benzer şekilde TES-5 de de MO *"tabi matematikte, önce matematiksel ispat denilince verilen vardır bir de buna bağlı olarak istenen vardır. Verilenleri kullanır ispatlarsınız dimi!* ...(38)*"* ifadesini kullanmaktadır. İspatın ne olduğuna yönelik söylemlerde MO ayrıca tümevarımın da bir ispat şekli olduğuna değinmiş ve bu ispatlama biçiminin kuralının hatırlanmasını sağlamıştır (178). İspata yönelik tartışmanın son bölümünde tümdengelimin matematikte var olup olmadığına dair bir soru gündeme gelmiştir. Bu soru hem burada ifade edilmiş hem de TES-2 de [29-44] biraz daha geniş şekilde tartışılmıştır.

Tablo 10

Teşvik Edilmiş Söylem Metni (TES)-2

(A) 10-37		30 NİSAN-Çrş (Mat-1) TES-2
29	OG-2	Tümdengelim [*OG–7 de söylüyor aynı anda.*]
30	**MO**	Tümdengelim nedir?
31	OG-6	Genelden özele.
32	**MO**	Nasıl? Bir örnek verin.
33	OG-5	Tümden işte, geriye doğru.
34	OG-3	Yani bir şeyi kabul edip özele iniyoruz.
35	OG-7	Şöyle bir şey olabilir mi? Mesela biz tümevarımla şeyi ispatlıyorduk ya?
36	**MO**	Neyi?
37	OG-7	Mesela 1^2+2^2+3^2+… öyle gidiyor ya mesela bunun işte $n.(n+1).(2n+1)/6$

		olduğunu söylemiştik.
38	**MO**	Hı hı.
39	OG-7	Mesela $n.(n+1).(2n+1)/6$ neyi, neyi verir bize diye gidip oradan 1^2+2^2+… falan diye.
40	**MO**	Bulabilir miyiz?
41	OG-8	Şey diye görmüştük felsefede.
42	**MO**	Ne diye görmüştünüz?
43	OG-8	11-Fen çalışkandır. OG–1 11-Fen' in öğrencisidir, o zaman OG–1 çalışkandır, bunu tümdengelim olarak gördük.
44	**MO**	Gördünüz, felsefede görüyorsunuz ispatları. Peki, ispatı kim ya da kimler yapabilir?

Tümdengelimin matematikte bir ispat yöntemi olarak var olup olmadığına ait söylemler, öğrencilerin ispata yönelik genel kavramsal anlamalarına ve öğrenmelerindeki sıkıntılı yanlara dair başka önemli bir bulguyu ortaya koymaktadır. Tümdengelimin özellikle felsefe dersindeki açıklama ve yaklaşımlar nazarında tartışılması ve matematiksel örnekler sunulamaması, öğrencilerin matematikte tümdengelimle ispat yapmaya yönelik bilgilerinin muğlâk olduğunu göstermektedir. Benzer durumun ispat yapma yöntemleri için de geçerli olduğunu söylemek mümkündür [TES-2: (1-28)].

(B)	**10-37**	**30 NİSAN-Çrş (Mat-1) TES-2**
1	**MO**	İspat yapma yöntemleri nelerdir?
2	OG-11	***Bir tarafı kabul edip öbür tarafı elde ediyoruz.***
3	OG-2	Tümevarım.
4	OG-8	Doğrudan ispat var, dolaylı ispat var öyle ikiye ayrılıyor.
5	OG-11	Evet.
6	OG-8	Olmayana ergi ile ispat vardı.
7	**MO**	Bir daha söyle.
8	OG-8	Aksine yöntemi ile ispat vardı.
9	**MO**	Aksine yöntemi [*onaylama anlamında*] ***bakın gayet güzel, OG–11' in dediği gibi sol tarafı kullanıp sağ tarafı elde etme.***
10	OG-11	Ya da sağ tarafı kullanıp.
11	**MO**	***Sol tarafı elde etmede ispat yöntemleri neydi OG–8 bir söyleyelim bakalım.***
12	OG-8	İkiye ayrılıyordu, aksine ispat, bir de doğrudan ispat diye.
13	OG-2	Aksine ispat sağlama mıydı hocam?
14	OG-8	Doğrudan ispatlar ayrılıyordu bir de, yok olmayana ergi ile ispat vardı, ondan sonra aksine örnek vererek ispat vardı başka.
15	**MO**	Bir şey söylemişti OG–2.
16	OG-2	Aksine ispat sağlama gibi mi?
17	**MO**	***Aksine ispat sağlama gibi değil, tam tersi bir örnek verip doğruluğunu gösteriyorsun.***
18	OG-11	Ama yanlışlığı da olabilir.
19	**MO**	Ya da yanlışlığını gösteriyorsun, peki başka, biz tümevarımla ispat yapıyor muyduk?
20	OG-11	Tümevarımla da olur da, bir şey söyleyebilir miyim?
21	**MO**	Söyle.
22	OG-11	Mesela olmadığını yani her x, O x' in dışında hiçbir değerin sağlamadığını, kesin olarak sağlamadığını gösterirsek bu da ispat olur değil mi? Tam tersinin kesin olduğunu.
23	OG-7	Yanlışlığını yani diyor.
24	**MO**	Olabilir niye olmasın.
25	OG-11	Ama olmayabilir, bütün x' ler sağlamayabilir.
26	**MO**	Sağlamayabilir, peki başka, var mı başka?
27	OG-11	Tümevarımla yapabiliriz.
28	**MO**	Evet, tümevarımı bu sene kullanıyoruz.

Tümdengelimsel ispat teorik matematik açısından tümevarıma göre daha fazla kabul gören ve matematikçilerin çoğu kez başvurduğu ispat (rigorous proof) türü olarak ifade edilebilir. Ayrıca yeni matematik öğretim programında yer aldığı biçimiyle (bkz. sy 84) tümdengelimsel ispat, dolaysız ve dolaylı ispat (dolaylı ispatlama yöntemleri: olmayana ergi, çelişki yoluyla ispat, deneme yöntemi ve aksine örnek biçiminde sıralanmıştır) olarak ikiye ayrılan ve tümevarım dışındaki tüm ispatlama biçimlerini içinde barındıran temel ispatlama yöntemidir. TES-2 deki ispat yapma yöntemlerine ilişkin söylemler de [1-28] göz önünde bulundurularak bu temel yöntemin matematikte var olup olmadığının tartışılıyor olması ve örneklenememesi öğretmenlerin (sunma biçimlerinde) ve öğrencilerin (anlamalarında) ispatlamaya yönelik yaklaşımlarında birtakım eksikliklerin bulunduğuna işaret etmektedir. TES-2 deki bu bölümde [1-26] dikkat çeken diğer iki husus ise; MO'nun yine bir tarafı kullanarak diğer tarafı elde etme biçiminde sunduğu ispat mekanizmasına vurgu yapması (9,11) ve OG-2 ve MO arasındaki aksine ispatın ne olduğuna ilişkin diyalogdur (13-19). Aksine ispat, daha doğru bir ifadeyle aksine örnek verme yöntemiyle ispatın ne olduğu konusunda MO ve OG-2'nin söylemleri farklı şeyleri içermektedir. MO bu yöntemi "a*ksine ispat sağlama gibi değil, tam tersi bir örnek verip doğruluğunu gösteriyorsun* (17)" biçimindeki söylemi ile net olarak açıklayamazken ve bir örnek sunmazken, OG-2 ise bu yöntemin sağlama olup olmadığındaki kararsızlığını ifade etmektedir. TES-3 içerisinde de ispat mekanizmasını, ispat ile sağlama arasındaki ilişkiyi ve ispata yönelik kullanılan sözcüklerin anlamlandırılmasını içeren bazı tartışma bölümleri bulunmaktadır. MO matematikte nelerin ispatlanabileceğini sorduğunda verilen cevaplarda terminolojiden yararlanarak 'önermeler' ve 'teoremler' gibi bir açıklama getirmek yerine daha genel ve MO tarafından sunulan mekanizma çerçevesinde yorumlar bulunmaktadır. İspatın ne olduğu ya da ne gibi fonksiyonları bulunduğuna dair var olan algıları göstermesi açısından ispat ile sağlama yapma arasındaki ilişkinin tartışıldığı bölüm de (25-31) dikkate değerdir.

Tablo 11

Teşvik Edilmiş Söylem Metni (TES)-3

12-41		**7 MAYIS-Çrş (Mat-1) TES-3**
19	**MO**	Peki, matematikte neleri ispatlarız?
20	OG-7	Valla mümkün olabilen her şeyi ispatlarız.

21	OG-5	İspatlanabilmesi mümkün olan her şeyi!
22	OG-3	***Sağ ve sol varsa mutlaka ispatlarız.***
23	**MO**	Ne demek sağ ve sol?
24	OG-3	***Yani bir tarafı kullanarak diğer tarafı elde ediyorduk ya, orada yani.***
25	**MO**	Yani onu öğrendin, sağlama yapmıyorsunuz değil mi? Bir tarafı kullanıp diğer tarafı elde ediyorsunuz.
26	OG-9	Hocam sağlama ispat değil midir yani?
27	**MO**	Sağlama ispat olabilir mi?
28	OG-11	İspatı doğrulamadır.
29	**MO**	Evet.
30	OG-9	Ne bileyim sağlatıyoruz bir şeyi, bulduğumuz sağlıyorsa demek ki doğrudur.
31	OG-11	Ama her x için sağlar mı? Orada her önemli!

Öğrenciler MO tarafından sunulan mekanizmaya yönelik genel algıyı bir çırpıda ifade edebilmelerine karşın (DS'ler incelendiğinde) mekanizmanın nasıl işlediğine, kurulduğuna ve değerlendirildiğine yönelik kavrayışları ve becerileri yeterli düzeyde görünmemektedir. Öğrenciler (OG-2 ve OG-9) 'sağlamanın', bir şeyin doğruluğunu göstermede uygulanan bir yöntem olduğunu düşünerek ispat ile ilişkilendirmişlerdir. İspatlar bir şeyin (matematik derslerinde genellikle formüller biçiminde değiniliyor) doğru olduğunu göstermek için başvurulan matematiksel yapılardır. Ancak ispatın en temel fonksiyonu olan doğrulama ile sağlama yaparak elde edilen doğrulamanın çok farklı anlamları bulunmaktadır. Öğrencilerin bu ayrımı görememelerinde de ispatın kavramsal anlamına yönelik eksikliklerin etkisinin olduğu düşünülmektedir.

Buraya kadar ortaya konan bulgulara bağlı olarak öğrencilerin ve öğretmenlerin iletişim süreçlerinde ispat ve ispatlamaya yönelik sözcükleri gerek terimsel gerekse kavramsal anlamları açısından yeterince etkili ve verimli biçimde kullanamadıkları ifade edilebilir. Özellikle öğrencilerin tanımlamaları, açıklamaları ve örneklemeleri dikkatle incelendiğinde ispat ve ispatlamaya yönelik sözcük dağarcıklarında yer alan terimlerin anlamlarını doğru biçimde yapılandıramadıkları görülmektedir.

II. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar

İkinci alt problemde, *"matematik ve geometri derslerinde ispata ve ispatlamaya yönelik iletişim durumlarındaki, söylemin katılımcılarına (tenor of discourse) [**SK**] ait genel karakteristikler"* ele alınmaktadır. Aşağıda öncelikle ispat ve ispatlamaya yönelik söylemlerin katılımcılarına ait genel gözlemlere değinilecek ve sonrasında *"göreceli statülere"* yönelik yapılan analizin sonuçları sunulacaktır (bkz. sy.62). Bu araştırmada katılımcılar arasındaki *sosyal mesafe* analiz edilmemiştir. Bunun nedeni söylemlerin oluştuğu ve paylaşıldığı ortamın bir Fen Lisesi sınıfı olması ve sınıfta öğretmen ve öğrenci biçimindeki iki tip statünün bulunması ve derslerde öğrenciler ya da öğretmenlerin statüleri açısından önemli bir farklılaşmaya rastlanmamış olmasıdır. Ancak yine de göreceli statülere yönelik bulgular sunulurken '*hitap etmede kullanılan terimler*' başlığı altında statülere yönelik kısa açıklamalara yer verilecektir.

Genel Gözlemler

Hem Ayşe Hanım hem de Ahmet Bey genel olarak derslerini öğretmen merkezli olarak yürüttükleri için ispat ve ispatlama uygulamalarının yer aldığı derslerde de bu durum devam etmektedir. İspat yapma uygulamalarında tek yönlü bilgi akışı olmakta ve soru-cevap yönteminden yararlanılmaktadır. Derslerde ikili ya da küçük gruplar şeklinde çalışma biçimleriyle ispat uygulamaları yapılmamaktadır. Benzer şekilde genellikle ispatları içeren ev ödevleri (geometri DS-7 de piramitin hacmi için verilen hariç), dönem ödevleri ve performans ödevleri de verilmemektedir. Yazılı soruları içerisinde de tümevarım dışında bir ispat sorusu ile karşılaşılmamıştır. Dolayısıyla ispatlara dair öğrenme-öğretme, uygulama süreci neredeyse tamamen sınıf içinde yapılanlarla sınırlı kalmaktadır. İletişim esnasındaki söylemlerde baskın karakter ve güç ögesi öğretmenlerdir. Ancak öğretmenler otoritelerini sert, katı ve paylaşıma kapalı bir biçimde sergilememektedir. Otoriter tavır daha çok matematiksel içeriğin sırası, yapısı, hızı ve derinliğine karar vermede kendini göstermektedir. Doğal olarak her iki dersteki söylemler katılımcılar açısından (öğretmen ve öğrenci arasında) oranlandığında bütünün büyük bir bölümünün öğretmen söylemlerinden oluştuğu görülebilir. Sadece öğrenci söylemlerine odaklanılacak olursa geometri derslerindeki söylemlerin matematiktekilere göre daha fazla ve daha uzun (içerdiği kelime ve ifadelerin sayısı açısından) olduğu ortaya çıkmaktadır. Öğrenciler geometri derslerinde daha fazla konuşma fırsatı bulmaktadır. Bu durum Ahmet Bey'in öğrencilerini anlatılan konuya katmak için sorduğu sorulardan ve yanıtlar için yeterli süre tanımasından ileri gelmektedir.

Ayşe Hanım'ın söylemlerinin SK açısından sahip olduğu örüntüsel karakteristikler aşağıdaki biçimde sıralanabilir;

MO-1) Ayşe Hanım'ın öğretim açısından genel yaklaşımı hızlı ders anlatımı, hızlı konu tekrarı ve hızlı (ve çok) soru çözümü biçimindedir. Doğal olarak ispatların yapılması sürecinde de benzer şekilde Ayşe Hanım öğrencilere sözlü ifade edilenleri ya da tahtada yazılı olan şeyleri defterlerine aktarmaları için kısıtlı süre vermektedir.

Örnekler

DS-1: (54) DS-4: (71),(73), (75),(79),(89),(107)
DS-6: (10),(18) DS-10: (112),(152) DS-11: (36)

54 DS-1	B-OG	Hocam bir saniye, kanıtı yazalım.
107 DS-4	OG-7	[*öğretmen tahtaya yeni soru yazarken*] Hocam biz daha bunu anlamadık siz tahtaya yeni soru yazıyorsunuz ya!

MO-2) Öğrenciler Ayşe Hanım'a ispatlama sürecinde, öncesinde ya da sonrasında ilginç, özgün sorular yönelttiğinde bu sorular üzerinde fazla durulmamakta, tartışılmamakta ve ek açıklamalar yapılmamaktadır.

Örnekler

DS-4: (46-51), (69-70) DS-9: (279-303)

46 DS-4	OG-5	Ben şunu merak ediyorum hocam, hiç matematikte şu maddeyi 3. Maddeyi sağlamayan, toplama işleminde bir olay var mı?
47	**MO**	Nerede var mı?
48	OG-5	Matematikte herhangi bir konu mesela, A+B=B+A gibi veya dağılma özelliği mesela, onları sağlamayan bir konu var mı matematikte?
49	**MO**	[*yürürken*] Olabilir mi, düşünmek lazım.
50	OG-5	Bana hiç denk gelmedi.
51	**MO**	[*Konuya dönüyor.*] Peki, burada şunun yerine A yazdığımızda sonucu görürüz. [*A yerine matematiksel indisli gösterimi kastediyor.*] Bunun için ispat yapmaya gerek yok.

MO-3) Bir ispatın yapılışı bittikten sonra Ayşe Hanım ispatlama aşamasında yapılanlara yönelik genellikle kısa bir tekrar ya da özetleme [DS-8 ve DS-9 (280) hariç] sunmamakta ve yapılanlara yönelik bir tartışma ortamının oluşmasına da aracılık etmemektedir.

Örnekler

DS-1: (44-45) DS-4: (19),(43)
DS-5: (36-38) DS-9: (237-239),(326-327),(354-356)
DS-10: (119-121),(133-134),(151) DS-11: (23-30),(101-104),(129-142)

DS-13: (55)

36 DS-5	**MO**	*[işlemleri izledi ve hatanın* $t = \frac{+a}{...}$ *olması gerektiğini – olmasından kaynaklandığını buldu.]* Buradan paranteze alırsak $\frac{1}{a.d-b.c}\begin{bmatrix} a & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ oldu.
37	B-OG	Tamam.
38	**MO**	Şimdi ilk baştaki matrisi yazalım ve kurala göre ne olduğunu bulalım.

Ahmet Bey'in söylemlerinin SK açısından sahip olduğu örüntüsel karakteristikler aşağıdaki biçimde sıralanabilir;

GO-1) Ahmet Bey ders anlatımındaki genel tavrını ispatların yapılması sürecinde de devam ettirmektedir. Öğrencilerin yorumlarına ve sorularına yönelik yeterli kadar süre vermektedir. GO soru-cevap aşamasında iletişimi aktif kılmak ve dikkati yüksek tutmak için bazen sorgulayıcı sorular sormakta ve öğrencilerin kendi açıklamalarını yapmalarına imkân sağlamaktadır.

Örnekler

DS-2: (5),(7),(9),(11),(72) ←[GO nun soruları] → DS-3: (1-22),(65),(69),(78),(118)
(27),(28) ←[öğrenci açıklamaları] → (16),(17),(19),(88),(92),(94)
DS-7: (27-35)

69 DS-3	**GO**	Dik üçgendir neye dayanarak söylüyorsun?
88 DS-3	OG-11	Şimdi bu ikisinin, aynı şeyi mesela A içinde yapsaydık, yani T' nin arkasında bir T' noktası olsaydı, T'AD dik olurdu ama, bunu çizdiğim zaman şu T doğrusu onların önünde oluyor. Yani şu A geride kalıyor, B nin uzantısı *[TB' yi kastediyor.]* olduğu için dik olmuyor bence.

GO-2) İspatlar esnasında Ahmet Bey teknolojik araçlardan ve yazılımlardan destek almamasına karşın zaman zaman sınıfta bulunan bazı araç ve nesnelerden faydalanarak anlattıklarını görselleştirmeye, somutlaştırmaya çalışmaktadır. Bu tür uygulamalar esnasında yine öğrencilere sorular sorarak ilgilerini çekmeye ve yorumlarını almaya gayret etmektedir.

Örnekler

DS-2: (29),(31) DS-3: (50-51),(103-106),(129-131)
DS-12: (5-7)

5 DS-12	**GO**	Şu şekilde örnekleyebiliriz, *[öğretmen masasından bir nesne alıyor]* bunu şurada göstereyim. *[masanın üzerine geri bırakıyor]* Bunun bir hacmi var değil mi! Şöyle yaptığımda, biraz bozduğumda, kaydırdığımda hacmi değişti mi?

GO-3) İspatların tamamlanmasının ardından Ahmet Bey yapılanlara yönelik kısa bir tekrar/özetleme (öğrencilerin ön bilgileri ile yapılabilir olan ispatlarda) yapmaktadır. Bu tekrar özellikle hipotez-hüküm mekanizması üzerinde verilenleri, isteneni ve yapılan adımların gerekçelerini vurgulayarak gerçekleştirmektedir.

<u>Örnekler</u>

DS-2: (52-55) DS-3: (52),(119-133)

52 DS-2	**GO**	Ve mümkün olduğunca şekli baştan takip ediyorum. Verilen neydi AA' nün (D) düzlemine dik oluşu. B de onun üzerinde bir nokta, bir eğik ayağı olduğunu anlatan. Ya da bunu yazı ile de yazsan olur. B eğik ayağıdır diye.
53	**GO**	Sonra göstermek istediğin nedir? [*tahtaya yazılı olanlar üzerinde* } $\Longrightarrow$ *işaretini kullanarak*] AB' nin AA' ' den uzun olduğu.
		(th: $\left.\begin{array}{r} AA' \perp (D) \\ B \in (D) \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} \lvert AB \rvert > \lvert AA' \rvert$) - Göstermek istediğim buydu. Şimdi BA' nü çizdiğimizde BAA' dik olur. Ama neye dayanarak dik olur? Onu yazmamız gerekiyor. - Neye dayanarak dik olur OG-1 ? [*OG-1'e soruyor ve 10–12 saniye bekliyor.*] Şuraya dik değil mi? Bu buraya neden diktir? [*AA' ' nün A' B ' ye olan dikliğini gösteriyor.*]
54	OG-1	Çünkü düzleme dik, B düzlemin içinde.
55	**GO**	Evet, çünkü AA' düzleme dik bir doğru, bu da onun içinde dik bir doğru, o zaman her doğruya dik olacağı [*düzlem içindekini kastediyor*] için AA' diktir AB diyoruz.

GO-4) Öğrenciler Ahmet Bey'e ispatlama sürecinde, öncesinde ya da sonrasında ilginç, özgün sorular yönelttiğinde Ahmet Bey bu sorular üzerinde yeterince durmakta, açıklamalar yapmakta ve öğrencilerin açıklamalardan ikna olmasına çalışmaktadır.

<u>Örnekler</u>

DS-7: (30-35) DS-12: (34),(38),(67-74)

34 DS-12	OG-9	[*55–60 saniye sonra*] hocam integral ile yaparken hangi alanları topluyor ki? Sadece küre üzerinde mi çalışıyordu o zaman.
38	OG-9	Bizim de denklemimiz var o zaman.

Aşağıdaki bölümde MO ve GO'nun söylemlerinin katımcılarına yönelik söylemsel karakteristiklerle bağlantılı olarak "*göreceli statüler*" açısından (bkz. s.71-72) yapılan analizin bulguları ve yorumları sunulmaktadır.

Göreceli Statüler: Halliday & Hasan'ın (1989) modeli çerçevesinde söylemin katılımcıları açısından bir söylem analiz edilirken Mechura (2005) incelemenin yapılabileceği basamakları; *1)konuşma eylemleri*, 2)*konuşmadaki sıra döngüsünün yönetimi (turn management), 3)hitap etmede kullanılan terimler (terms of address), 4)ölçme ve değerlendirme (assessmant and evaluation) ve 5)konu seçimi (topic choice)* biçiminde sıralamıştır. Bu araştırmada incelenen söylemlerin bir lise sınıfındaki öğretmen-öğrenci arasındaki konuşmaları kapsaması nedeniyle ispata yönelik söylemler üzerinde yapılan analizde ilk üç basamak kullanılmıştır. Ölçme-değerlendirme ve konu seçimi basamakları tamamen öğretmen inisiyatifinde ve katı bir formatta olduğu için söylemsel açıdan bir çeşitlilik ya da farklılaşma içermediği için analizlerine yer verilmemiştir.

1) Konuşma eylemleri: Konuşma eylemleri açısından matematik ve geometri derslerindeki öğretmen ve öğrenci söylemlerinin '*bildirici [BL] (declerative), soruya dayalı [SD] (interrogative) ve buyurucu [BY] (imperative)*' biçimindeki üç söylem tipinden ağırlıklı olarak hangisi (ya da hangilerini) barındırdığı araştırılmıştır. Bu amaçla her bir DS tek tek incelenerek var olan söylemlerin üç konuşma eyleminden hangisi ya da hangilerini ne oranda barındırdığına bakılmıştır. Araştırmacı on üç adet DS'yi iki farklı zamanda iki kez baştan sona BL, SD ve BY açısından kodlamış ve iki kodlama sonucunu karşılaştırarak aynı şekilde kodlanmamış olan (sadece öğretmen söylemlerinde 14 tane farklılık çıkmıştır) ifadeleri not etmiştir. Sonrasında araştırmacı bir dil uzmanına on üç DS' nin kodlanmış iki farklı biçimini de birlikte sunarak hem genel olarak tüm kodlanmış veriye hem de özellikle uyuşma olmayan 14 maddeye yönelik uzman görüşünü talep etmiştir. Uzman görüşü sonrasında oluşan son durumda öğretmen ve öğrenci söylemlerindeki BL, SD ve BY ayrımları ayrıntılı olarak tekrar gözden geçirilmiştir. Analiz sonucunda öğretmen söylemlerine yönelik ortaya çıkan bulgular Tablo-12'de, öğrenci söylemleri için ise Tablo-15'de sunulmuştur.

Tablo-13 incelendiğinde hem Ayşe Hanım hem de Ahmet Bey tarafından oluşturulan söylemlerin büyük oranda bildirici nitelikte (BL) olduğu görülmektedir. Baskınlık açısından sadece DS-1 de bildirici (BL) söylemler ve soruya dayalı (SD) söylemler eşit sayıda belirmiş olup DS-8'de ise baskın olan eylemin SD şeklinde olduğu görülmektedir.

Tablo 12

Öğretmen Söylemlerinin Konuşma Eylemlerinin Türüne Göre Genel Dağılımı

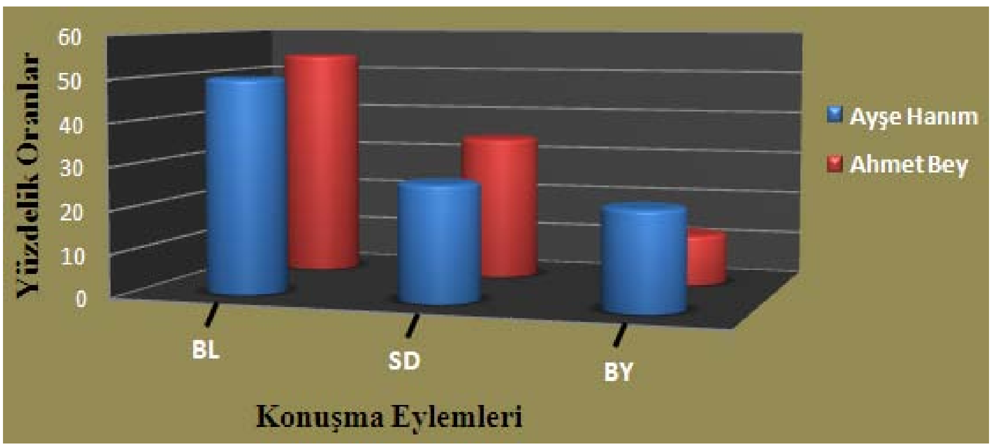
Transkript Metni	Konuşma Eylemleri Bildirici (BL) (Declerative)	N	Soruya Dayalı (SD) (Interrogative)	N	Buyurucu (BY) (Imperative)	N	Baskın Eylem Türü
DS-1 (mat)	4,5,10,11,14,16,21, 23,29,32,34,36,42, 45,48,53,59,64	18	6,8,17,18,20,24, 27,30,38,40,42,45 46,48,51,55,57,60	18	55	1	BL SD
DS-4 (mat)	5,15,18,19,23,32,33, 38,42,45,49,51,54, 56,58,61,63,65,66, 68,70,72,74,76,78, 80,85,87,90,92,94, 96,102,112,115,118, 120,122,126	39	1,3,5,8,15,16,18, 19,43,45,47,51,56 68,70,76,83,85,87 90,96,98,100,113, 118,122,126	27	10,12,19,21,25,27 29,36,40,60,83, 102,104,110,112, 115,116,118,120	19	BL
DS-5 (mat)	1,3,7,11,13,15,18,21 23,25,28,31,36,38, 40,43,47,49	18	7,13,25,33,35,41, 45,49	8	3,9,11,45,49,50, 52	7	BL
DS-6 (mat)	1,4,6,9,17,19,21,23, 25,26	10	7,17,26	3	11	1	BL
DS-8 (mat)	8,10,22,24,40	5	13,17,19,21,27,40	6	6	1	SD
DS-9 (mat)	195,197,201,205, 212,216,218,223, 225,227,229,235, 237,250,252,254, 256,258,260,264, 272,280,282,284, 286,288,292,297, 299,301,303,308, 310,322,329,331, 333,335,338,342, 344,348,350,352, 354,356	46	201,209,221,229, 244,256,270,295, 325,346,352,354, 356	13	189,201,203,214, 216,231,233,241, 244,258,262,266, 268,270,274,276, 278,282,292,297, 306,310,313,317, 319,325,352	27	BL
DS-10 (mat)	96,101,109,111,125, 127,129,131,133, 134,135,140,142, 144,146,149,151, 153,155,165,167, 183,186,188,190, 192,200,213,214, 216,218	31	94,109,119,121, 125,147,149,151, 153,156,165,188, 207,209,211,216	16	94,103,107,113, 115,117,137,142, 147,156,158,160, 161,163,184,194, 196,205,209	19	BL
DS-11(mat)	6,10,15,17,19,21,23, 25,32,38,42,44,46, 57,64,66,71,75,77, 87,89,93,101,102, 104,123,127,133, 135,138,140,142	32	1,6,8,27,29,30,50, 61,66,75,95,99, 104,111,123,127, 138,140	18	8,12,14,17,29,32, 48,50,53,59,71,81 83,89,91,97,99, 114,116,119,121, 123,129	23	BL
DS-13 (mat)	7,13,17,19,21,22,24, 26,28,30,34,36,39, 41,43,50,52,55,58, 61,63,66,69	23	1,4,9,15,26,28,30, 32,39,58,69	11	45,54	2	BL
Matematik	**Toplam** BL	222	SD	120	BY	100	**BL**
DS-2 (geo)	1,2,3,17,19,21,22,31, 33,35,37,41,43,45,49, 51,52,53,55,56,58,66, 67,69,71,74,76,77,78, 80,86	31	5,7,9,11,29,41,53, 65,71,72,74,76,77 78,84,90,	16	3,9,13,16,24,26, 32,37,39,43,60,62 64,65,74,80,	16	BL
DS-3 (geo)	9,13,15,18,23,24,25,		1,3,7,9,22,23,27,		1,13,87,91,106,		BL

	26,27,32,35,37,41,42, 46,48,50,51,52,54,60, 62,64,67,73,75,75,76, 85,95,96,100,102,103, 105,110,112,120,121, 123,129,131,133	43	30,35,39,42,44,46 48,50,51,52,56,58 61,62,65,69,73,78 96,98,102,103, 106,108,112,116, 118,120,125,127, 129,131	39	110,118,123,133	9	
DS-7 (geo)	1,3,5,7,11,14,16,18,19 24,26,27,29,35,37,40	16	1,3,9,14,20,24,27, 38	8	29,31	2	BL
DS-12(geo)	3,4,7,8,10,12,14,16,18 20,22,24,26,27,30,32, 33,35,37,39,41,47,50, 52,56,58,59,61,64,66, 70,72,74	33	4,5,12,14,16,18, 20,26,27,50,56,59 61,64,66	15	--	0	BL
Geometri	**Toplam** BL	**123**	SD	78	BY	27	**BL**
GENEL	**TOPLAM** BL	**345**	SD	198	BY	127	**BL**

Her iki öğretmenin söylemleri bu üç eylem türü açısından kendi içerisinde değerlendirildiğinde yüzdelik dilimlerine göre farklılaşmanın olduğu görülmektedir. Ayşe Hanım'ın söylemlerindeki eylem türleri BL-(%50), SD-(%27), BY-(%23) şeklinde iken Ahmet Bey'in söylemlerindeki dağılım ise BL-(%54), SD-(%34), BY-(%12) biçimindedir. Matematik ve geometri derslerindeki konuşma eylemlerinin kendi içerisindeki oranına bakıldığında ise Ahmet Bey ve Ayşe Hanım'ın BL türü açısından birbirine yakın değerlere sahip olduğu ancak SD ve BY açısından durumun değiştiği görülmektedir. Ayşe Hanım, derslerinde Ahmet Bey'e göre daha fazla BY nitelikteki söylemlere başvururken Ahmet ise SD türünü daha fazla kullanmaktadır. Bu durum iki öğretmenin konuşma eylemleri açısından yüzdelik değerler çerçevesinde oluşturulan Grafik-1 de açıkça görülmektedir.

Grafik 1

Öğretmenlerin Konuşma Eylemlerine Göre Yüzdelik Değer Karşılaştırması



Her iki öğretmenin de öğretim anlayışının geleneksel yapıda ve öğretmen merkezli olması nedeniyle söylemlerde BL oranlarının ağırlıkta olması şaşırtıcı değildir. Daha önce SA ve SK'ya yönelik genel gözlemlerde belirtildiği üzere Ahmet Bey öğrencilere Ayşe Hanım'a nazaran daha fazla soru yöneltmekte ve onları fikirlerini ifade etmeleri için teşvik etmektedir. Dolayısıyla BL dışındaki diğer türlerde Ahmet Bey'in oransal açıdan daha fazla SD söylemlere başvurmaktayken, Ayşe Hanım'ın ise BY söylemlerini fazlaca tercih etmesi de genel gözlemler ile tutarlı bulgulardır.

BL ve SD niteliğindeki söylemler dikkatle incelendiğinde her iki gruba giren söylemlerin özelliklerine ilişkin bazı ayrıntıları da sunmak mümkündür. Bildirme amacı taşıyan BL söylemleri içerisinde özne ile nesne arasında gerçekleşen genel bir durumu ortaya koymanın dışında (örn. "*şimdi 1 duruyor, 2r den r çıkardım*" [DS-1 (32)]), yorum, hüküm ya da açıklama içeren (örn. "*buradan kullanabileceğimiz bir formül elde etmiş olduk, tamam mı çocuklar*!" [DS-1 (59)]) gibi örneklere de rastlanmaktadır. Bu tip yorum, hüküm ya da açıklama içeren örnekler Tablo 13'deki gibi ayrıntılandırılabilir.

Tablo 13

BL Söylemlerinde Yer Alan Açıklama-Yorum-Hüküm Bildiren Örnekler

DS-1		
64	**MO**	… Direk formülü eğer bu formülü bulmasaydık yöntemin kendisini kullanacaktık bakın**.** Önce açık yazacaktık, her iki tarafı r ile çarpacaktık, taraf tarafa çıkaracaktık. [AÇIKLAMA]
DS-2		
51	**GO**	--İspatı yaparken tabi bir kendimizi ikna etmek var, açıklama yapmak var, bir de ispat yapmak var. --İspat yaptığın zaman onun herkesçe aynı olması gerekir, ortak bir dille yazmamız gerekir. [YORUMLAMA-HÜKÜM]
78	**GO**	Soldaki a kısmına hipotez denir. Sağdaki b kısmına ispatlamamız gereken şey. -Şimdi nereden ... mızı yazalım. [AÇIKLAMA]
DS-3		
22	**GO**	Gayet güzel, özellikle son kısım güzel oldu değil mi? [YORUMLAMA]
52	**GO**	Şimdi üç dikme teoremi neydi bir kez daha bakalım. … -Bu, bana uzunluk hesaplarında lazım olacak çünkü uzunluk hesaplarını neye dayandırarak yapıyoruz? Ya paralelliğe ya da dikliğe göre yapıyoruz, diğerleri oradan türetilmiş şeyler. [AÇIKLAMA-YORUMLAMA]
60	**GO**	… Bunları hesap kolaylığı için kullanacağız, dikmeleri kullanacağız, neresi diktir, neresi değildir oralarda kullanacağız. [AÇIKLAMA]
95	**GO**	Bu işi üç dikme teoremine dayandırsak zannedersem ikna oluruz, zaten teorem o yüzden var, yani sana öyle geldi, bana öyle geldi, işte arkada yok önde gibi

		şeylerin daha bilimsel açıklaması teoremlere dayandırmaktır. [YORUMLAMA-HÜKÜM]
DS-4		
18	**MO**	Evet, eşitliğin bir tarafını kullanıp öbür tarafını elde ediyoruz. … [AÇIKLAMA]
19	**MO**	Eşitliğin bir tarafını kullanıp öbür tarafını elde ettik. * Daima biliyorsunuz ispatta eşitliğin bir tarafını kullanıp öbür tarafını elde ediyorduk. [AÇIKLAMA-HÜKÜM]
70	**MO**	Öyle kural işte, şimdi örneği yaptığımızda göreceksin neden öyle olduğunu, başka türlü çarpılamıyor. İki matrisi çarpacağız.[YORUMLAMA]
74	**MO**	Daha çarpımı yapmadan çarpım matrisinin nasıl olacağını belirleyebiliriz. [AÇIKLAMA]
DS-6		
25	**MO**	[OG-8 söylüyor: *Yani bir matrisin tersini bulurken, aynı zamanda biz onun determinantını buluyoruz.*] İşte onun için onu tanımladık direk vermedik, ispatladık o nedenle yaptık, … [AÇIKLAMA]
DS-7		
37	**GO**	Yalnız şöyle bir ispat istemiyorum, deneysel bir ispat. Daha önce şöyle olmuştu; Yükseklikleri aynı tabanları aynı olan bir piramit ile bir prizma aldılar. İçine su doldurdular. Piramiti üç kerede doluyor diye gösterdiler. Deneysel olarak aslında o da güzel ama geometrik istiyorum tamam mı! O fiziksel bir ispat oluyor, matematiksel bir ispat olmuyor. [AÇIKLAMA-YORUMLAMA]
DS-10		
153	**MO**	Bakın bu eklediğimiz +1, -1' i başka soruda da kullanabiliriz. [AÇIKLAMA]
213	**MO**	A.(n+1).(n+2) artı B.n.(n+2), artı C.n.(n+1) bu basit kesirlere ayırmayı seneye integralde özellikle göreceksiniz bakın. [AÇIKLAMA]
DS-12		
30	**GO**	İntegralsiz ispatı bu. İntegral bilmediğiniz için öyle yapamıyoruz. [AÇIKLAMA]
33	**GO**	İntegral zaten toplamaya yarar; alan toplarsın, uzunluk toplarsın onları toplamı bir şey ediyorsa alan ediyorsa, hacim ediyorsa anlamlı bir şey çıkar ortaya. [YORUMLAMA]
DS-13		
58	**MO**	Nasıl bir ispat yapmış olduk? Örnek vererek ispat mı? Tanımı kullanın bakalım, tanımı kullanarak ispat istiyorum burada, 1. yi kullanacaksınız yani $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ olup olamadığını göstereceksiniz ya da $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ olduğunu kullanın [AÇIKLAMA]

Benzer şekilde SD söylemleri içerisinde doğrudan, anlatılan konuya yönelik kısa cevaplı ve öğretmen beklentisini gerçekleştirmek için yöneltilmiş klasik soruların yanında düşünmeyi teşvik eden sorgulayıcı soru örneklerine de rastlanmaktadır. Bu tip sorular Tablo 14'deki gibi ayrıntılandırılabilir.

Tablo 14

SD Söylemlerde Yer Alan Sorgulayıcı Nitelikteki Örnekler

DS-2		
5	**GO**	Orası dik üçgen olur mu?
7	**GO**	Niye olmasın?
11	**GO**	[*OG-13'e yönelik*] Neye dayanarak yapıyorsun?
DS-3		
69	**GO**	Dik üçgendir, neye dayanarak söylüyorsun?
DS-7		

20	**GO**	Piramitin düzgün olması ne işe yarar? Ne farkı vardır? Şundan [*düzgün olmayanı gösteriyor*] ne farkı ya da ne gibi farklılıkları vardır? İkisi arasında [*öğrenci elini kaldırıyor*] evet, OG-8.
DS-11		
61	**MO**	Şimdi 2003 ile 401 asal mı kontrol et [*OG-11 asal olduğunu söyledi*]. Nereden bildin?

Ancak hem açıklama, hüküm, yorumlama niteliğinde olan BL'ler hem de sorgulama amacı olan SD söylemleri son derece az sayıdadır. Öğretim sürecinde öğretmenlerin bu tür söylemleri (özellikle sorgulayıcı soruları) yeterince kullanmama eğiliminde olması öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik anlamsal ve kavramsal gelişimlerinde sınırlılıklar yaratan başka bir unsur olarak görülebilir.

Öğrencilerin söylemlerinde yer alan konuşma eylemleri açısından benzer bir analiz yapıldığında DS'lerin tümü için, üç eylem türü açısından ortaya çıkan bulgular aşağıdaki (Tablo 15) gibidir.

Tablo 15

Öğrenci Söylemlerinin Konuşma Eylemlerinin Türüne Göre Genel Dağılımı

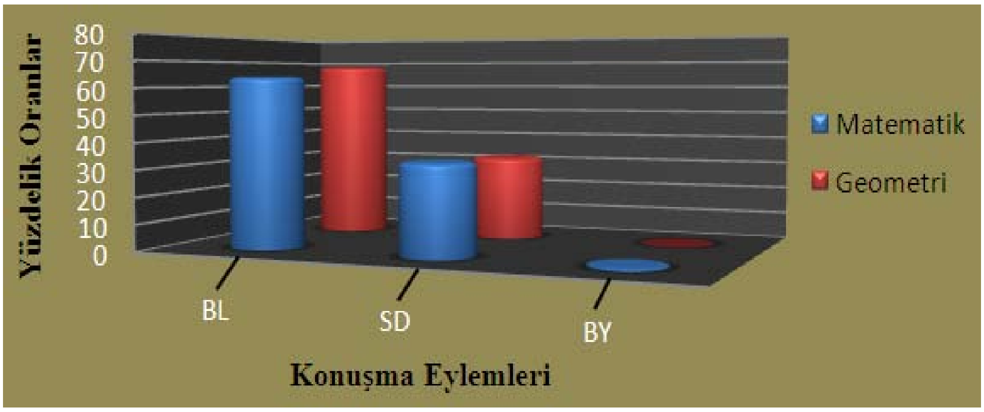
Transkript Metni	**Konuşma Eylemleri**						
	Bildirici (BL) (Declerative)	**N**	**Soruya Dayalı (SD) (Interrogative)**	**N**	**Buyurucu (BY) (Imperative)**	**N**	**Baskın Eylem Türü**
DS-1 (mat)	12,15,22,28,31,35, 37,39,41,43,50,54, 63	13	1,7,9,13,26,61	6	--	0	BL SD
DS-4 (mat)	2,4,6,7,9,11,13,14, 20,26,39,50,52,59, 64,77,79,81,82,89, 95,97,99,101,107, 125	26	17,22,31,35,37,46 48,57,62,67,69,86 109,111,114,123	16	--	0	BL
DS-5 (mat)	2,5,19,20,24,26,27, 29,42,44,46,48,51	13	4,6,8,17,32	5	10	1	BL
DS-6 (mat)	2,10,24	3	3,12,14,16,20,22	6	--	0	BL
DS-8 (mat)	9,12,18,23,25,26,30, 34,35,36,37,39	12	3,5,7,11,14,16,28, 32	8	--	0	BL
DS-9 (mat)	191,193,194,200, 202,204,206,211, 213,217,219,228, 230,232,234,238, 240,243,245,249, 251,253,255,263, 265,267,271,275, 277,283,285,289, 291,293,296,298, 300,302,305,307, 309,311,316,320, 330,334,336,340,	52	188,190,196,208, 210,215,220,222, 224,226,236,247, 257,261,279,281, 285,314,321,324, 328,332,337,339, 343,345,351	27	--	0	BL

	341,347,349,353						
DS-10 (mat)	93,102,108,110,112, 114,116,118,124, 126,128,130,132, 145,148,154,162, 166,191,193,195, 197,198,201,206, 208,215,219	28	95,97,99,106,136, 138,143,152,157, 159,185,187,189, 199,215,217	16	--	0	
DS-11(mat)	5,9,11,13,20,26,28, 31,37,41,47,49,52, 62,63,67,68,72,73, 74,79,80,82,83,86, 88,90,92,98,103,105 106,110,115,117 120,132,	35	2,3,16,18,22,24, 39,43,45,84,118, 122,126,128,130, 131,134,136,141	19	34	1	BL
DS-13 (mat)	2,3,5,6,10,18,23,27, 29,31,35,38,42,44, 46,48,51,53,57,59, 64,65,67,68	24	8,14,16,25,40,46, 62	7	47,49	2	BL
Matematik	**Toplam** BL	**206**	SD	110	BY	4	**BL**
DS-2 (geo)	4,6,8,12,20,25,27,28, 38,42,44,47,48,50,54, 61,68,70,73,77,83,89	22	10,14,15,18,23,57 59,63,81,85,87	11	--	0	BL
DS-3 (geo)	2,4,6,8,10,12,14,16,17 19,21,28,29,36,38,40, 43,55,57,59,70,74,81, 83,88,92,94,107,109, 111,114,115,119,124, 128	35	34,63,72,79,82,84 86,90,97,99,101, 104	12	--	0	BL
DS-7 (geo)	15,21,23,28,30,32,34	7	4,6,12,17,34	5	--	0	BL
DS-12 (geo)	17,28,38,43,44,46,55, 60,62,63,65,67,69	13	2,21,23,31,34,36, 49,71,73	9	--	0	BL
Geometri	**Toplam** BL	**77**	SD	37	BY	0	**BL**
GENEL	**TOPLAM** BL	**283**	SD	147	BY	4	**BL**

Konuşma eylemleri açısından öğrencilerin söylemlerindeki baskın eylemin öğretmenlerinkine paralel olarak BL olduğu görülmektedir. Bir diğer bulgu ise öğrencilerin her iki ders için BL, SD ve BY yüzdelik oranlarının birbirine çok yakın olmasıdır. İki derste de eylem türlerine göre kendi içerisinde yüzdelikler açısından bir hesaplama yapıldığında bu durum net olarak görülebilmektedir (bkz. Grafik 2). Öğrencilerin matematik derslerindeki söylemlerinin oranları; BL-(%64), SD-(%34), BY-(%1) iken geometri dersindeki oranlar ise; BL-(%68), SD-(32), BY-(%0) biçimindedir. Dolayısıyla öğrencilerin hem matematik hem de geometri derslerinde ispata yönelik sınıf içi iletişim sürecine katılma ve bu süreçte açıklama yapma, düşüncelerini ifade etme ve soru sorma yaklaşımlarının oransal olarak önemli ölçüde farklılaşmadığı ifade edilebilir.

Grafik 2

Derslere Göre Öğrenci Konuşma Eylemlerinin Yüzdelik Değer Karşılaştırması



2) Konuşmadaki sıra döngüsünün yönetimi: Derslerdeki konuşmalar genellikle işlenecek olan konunun aktarımı (sözlü anlatım ve yazdırma biçiminde) ve sonrasında alıştırma (çoğu kez test tipi) ve problem çözümlerini kapsamaktadır. Her iki öğretmen de geleneksel yaklaşımı benimsedikleri için dersin akışındaki iletişimi yönetmede de merkezi öge onlardır. Derslerde kullanılan öğretim yöntemleri düz anlatım ve soru-cevaptır. Düz anlatımların yapıldığı esnada öğrenciler anlatıma kısa açıklamalar yoluyla ya da yapılacak matematiksel adıma yönelik düşüncelerini, cevaplarını ifade ederek katılabilmektedir. Bu tür durumlarda açıklamayı yapan ya da katkı yapmak isteyen öğrenciler direkt izin istemeden konuşabilmekte ve düşüncelerini öğretmen ve arkadaşlarına sesli biçimde sunabilmektedir (örn. tablo 16). Bu gibi anlarda kimin konuşacağı ya da ne zaman konuşacağına yönelik bir düzenleme, sıralama ya da kural bulunmamaktadır.

Tablo 16

Anlatımlar Esnasında Öğrencilerin İletişime Katılım Şekline Bir Örnek

DS-1		
34	**MO**	Artı r mi kaldı, $3r^2$ den $2r^2$' yi çıkardım.
35	OG-11	Şu formül geliyor işte.
36	**MO**	r^2 artı r^3 artı nokta nokta gitti.
		(th: $A-Ar=1+\underbrace{r+r^2+r^3+\dots}$) Peki, şurasının ne olduğunu biliyoruz biz?
37	B-OG	1 bölü 1 eksi r.
38	**MO**	$\frac{1}{1-r}$, ne bulduk şimdi bakalım?
39	B-OG	A parantezine alırsak.

40	**MO**	A parantezine alırsak A(1-r) = $\frac{1}{1-r}$ mi çıktı?
		Her iki tarafı $\frac{1}{1-r}$ ile çarpalım.
41	OG-11	Karesi oluyor.
42	**MO**	O zaman, A ifadesi neye eşit oldu? A dediğimiz neydi bizim?
		th: $A=\frac{1}{(1-r^2)}$ $\downarrow$ $\sum_1^\infty n.r^{n-1}$ (neye eşit çıktı) = $\frac{1}{(1-r)^2}$ [*MO işaretini ekledi.*]
43	OG-7	Ama orası önemli!
44	**MO**	r küçük eşit, |r|<1 olduğu zaman.

Öğretmenlerin soru, problem ya da ispatlanacak ifadeleri öğrencilere yönelttiği durumlarda ise genelde önce yapan, ilk kez fikrini ifade eden ya da öğretmeninden izin ya da ricada bulunarak yaptıklarını defterinde kontrol ettiren öğrenciler söz almaktadır. Defter incelemesinden sonra tahtaya kimin kalkacağına öğretmenler karar (örn. Tablo 17) vermektedir. Soru-cevap yönteminin uygulandığı durumlarda ise hem öğrencilerin gönüllü olmasına hem de öğretmenlerin kendi tercihlerine göre kimin konuşacağına karar verilebilmektedir.

Tablo 17

Soru, Problem, İspat Uygulamaları Esnasında Öğrencilerin İletişime Katılım Şekline Bir Örnek

DS-2		
56	**GO**	Peki, şimdi b' yi bu şekilde ispatlamaya çalışalım.
57	OG-9	AA′' ne paralel bir doğru alsak BA′ 'ne diktir değil mi?
58	**GO**	Evet, kesiyorsa diktir, kesmiyorsa dik durumludur. -Evet, b şıkkı. [*OG–7 yanına çağırıp yazdıklarını gösteriyor tek tek, daha çok şekil üzerindeki düşüncelerini söylüyor ve yorumlarını yapıyor.*]
59	OG-9	Hocam ben ispatlayabilir miyim?
60	**GO**	[*OG-7'ye*] O zaman bu şeklide ifade edeceksin.
61	OG-7	Olmadı ilk böyle yaparım olmadı...
62	**GO**	Defterinden bir çalış önce. [*OG-7'ye*]
63	OG-11	Ben de gösterebilir miyim? [*OG–7 yazmaya başlıyor ve hala açıklıyor ve soruyor GO' ya.*]
64	**GO**	[*OG-7'ye*] Onu yaz da göreyim önce. [*OG–9 tahtaya kalkmak istiyor*.] -Göreyim defterinde. [*Deyip OG-9'un yanına gidip defterine bakıyor ve onu dinliyor, uzunca bir süre kısık sesle karşılıklı konuşup açıklamalar yapıyorlar, GO defter üzerinde kalemlerle bazı gösterimler yapıyor.(yazmadan havada)*]
65	**GO**	[*OG-4'e*] Gel tahtaya çiz önce şekli. Evet, nasıl oldu? [*sınıfa soruyor*] [*Sonra tekrar OG-7'nin yanına gidip defterine bakıyor.*] [*OG-4 o sırada tahtada şekli çiziyor.*]
66	**GO**	[*sınıfa*] Evet, bir dik çizdi, bir eğik çizdi, bir tane daha eğik çizdi. [*OG-4'ün çizimi için*] Tamam tamam o perspektife göre değişir. İleride de olabilir geride de olabilir. Ben eşit dersem [*kabul edersem anlamı*] eşit olur.

Ancak genel olarak hem ispat içeren hem de içermeyen derslerde öğrencilerin ne zaman dinlemesi gerektiğine, ne zaman defterlerine not alabileceklerine, kime ne sorulacağına ve ne kadar söz hakkı tanınacağına dair karar verme yetkisi öğretmenlerin elindedir. Bu bulgu ülkemizde özellikle ortaöğretim düzeyinde benimsenmiş olan geleneksel, öğretmen merkezli öğretim anlayışı ve öğretmenlerin öğrenmeye bakışı göz önüne alındığında şaşırıcı olmayan bir durumdur. İkili, küçük gruplar ya da tüm sınıf bazında konuşma, tartışma ve çalışma uygulamalarının yapılmaması da sıra döngüsünün öğretmen kontrolündeki klasik yapısının değişememesinde bir diğer etkendir.

3) Hitap etmede kullanılan terimler: Matematik ve geometri derslerinde yer alan konuşmalardaki hitapların biçimi ve kullanılan kelimeler ülkemizdeki toplumsal kültür ve okul kültürü çerçevesinde var olan öğretmen-öğrenci ilişkisine sahiptir. Öğretmenlerin (özellikle okul içerisinde) öğrenciler için yaş, bilgi ve deneyim açısından daha yüksek bir statüde bulunması nedeniyle iletişim belirli bir saygı ve resmiyet çerçevesinde gerçekleşmektedir. Öğrencilerin öğretmenlerine hitap ederken kullandığı tek bir terim bulunmaktadır, o da “hocam” dır. Soru sorma eylemleri esnasında öğrenciler soruyu doğrudan ya da kimi zaman daha kibar bir tavırla yöneltmektedir (örn. hocam bir şey sorabilir miyim, ben de gösterebilir miyim, ben ispatlayabilir miyim, gelebilir miyim). Öğretmenler açısından öğrencilere yönelik hitaplar incelendiğinde ise şunlar ifade edilebilir;

Her iki öğretmen de öğrencileri ile konuşmalarında resmi iletişim biçimini benimsemiştir. Derslerde günlük konuşmalarda geçen hitap ve kelimeler, argo ifadeler [DS-9: (341,342) ve DS-10: (171,172) hariç] yer almamaktadır. Her iki öğretmen de hitaplarında hem tekil hem de çoğul şahıs kullanımlarına başvurmaktadır (örn. bir formülümüz vardı, biliyoruz, ispatladık, bakalım, şöyle diyelim, diyoruz, söyleyebiliriz, ne bulduk, kontrol ediyoruz, göstermeye çalışacağız, inceleyelim, kullanabilirim, tartışalım, göreceksin, diyeceksin, biliyorsun, yazarsan, yaz, göstermek istediğin nedir, bu şekilde ifade edeceksin, açıkla bakalım, gel yap,…). Çoğul isimlerin kullanıldığı söylemler genellikle BL niteliğinde iken tekil şahıs kullanımları ise BY tipindedir. Öğretmenler daha önce de belirtildiği gibi buyurucu ifadelere sıklıkla başvurmalarına karşın bu tür söylemleri sertlik ya da disiplin amacına yönelik değildir, öğrencilerce de bu şekilde anlaşılmamaktadır. Öğrencilerin büyük bir kısmı öğrenme isteği olan ve meraklı gençler olması nedeniyle anlamadıkları ya da kafalarına takılan hemen hemen her türlü şeyi öğretmenlerine rahatlıkla sorabilmektedir. Ayşe Hanım kimi zaman öğrencilere hitapları esnasında öğrencilerle aralarında büyük yaş farkı olması nedeniyle “çocuklar” terimini kullanmaktadır (örn. r burada kaçtır çocuklar bakın, tamam mı çocuklar, çocuklar demek ki iki matrisin …, çocuklar yazın). Ahmet Bey’in hitaplarında her hangi bir özel terime rastlanmamaktadır. Araştırmacının genel gözlemleri çerçevesinde ifade edilebilecek bir diğer bulgu ise Ahmet Bey’in Ayşe Hanım’dan biraz daha fazla resmi olduğudur. Öğrenciler arasındaki söylemlerde statü açısından önemli bir farklılık bulunmamaktadır. Bir öğrencinin hem matematik derslerinde hem de Tübitak çalışmalarındaki başarısı diğerlerine göre belirgin biçimde daha yüksek olmasına karşın bu öğrencinin sınıf söylemlerinde bir statü farklılığı oluşmamaktadır. Bu durumun meydana gelmesinde hem diğer öğrencilerin hem de öğretmenlerin bu öğrenciye ayrıcalıklı yaklaşmaması önemli bir etkendir.

Bu alt problem kapsamında ortaya konan bulgulara dayalı olarak, öğrencilerin sınıf söylemlerindeki statüsünün ikinci derecede olduğu ve söylemsel açıdan sahip oldukları belirgin rolün öğretmenlerin kendilerine tanıdığı zaman ve yönelttiği sorular çerçevesinde ispat yapma sürecinde bazı matematiksel adımları ifade etme ve yerine getirme olduğu söylenebilir. Öğrencilerin sınıftaki öğretim sürecine katılmadaki rolleri ise dinleme, izleme, cevap verme, kısa açıklamalar yapma, yazma ve soru sormadır. Ancak bu rollerden baskın olanı dinleme, yazma ve cevap verme biçiminde sıralanmaktadır. DS’lerde öğrencilerin kendi aralarındaki tartışma ve konuşmaları sınırlı iken TES’lerde bu tür durumların daha fazla oluştuğu görülmektedir.

III. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar

Bu alt problemde, *“matematik ve geometri derslerinde ispata ve ispatlamaya yönelik iletişim durumlarındaki, söylemin stiline (mode of discourse) [**SS**] ait genel karakteristikler”* ele alınmaktadır. Önceki iki alt problemde olduğu gibi bu alt probleme yönelik bulgular ortaya konulurken yine önce SS’ye yönelik genel gözlemlere yer verilecek sonrasında *1)destekleyici geri bildirimler ve 2)soru ifadelerine* yönelik yapılan analizin bulguları sunulacaktır.

Genel Gözlemler

Hem Ayşe Hanım'ın hem de Ahmet Bey'in ispatları içeren derslerdeki öncelikli tercihi tek yönlü bilgi akışını sağlamaktır. Kendileri gerekli olan bilgileri sunarak ispatlardaki başlangıç ve ilerleyişi yönlendirmektedirler. Yine kendileri tarafından uygun görülen yerlerde soru-cevaplara yer verilmektedir. Ancak ilgili soruların bir kısmı öğrencilerce değil yine öğretmenlerce yanıtlanmaktadır. Daha önce de belirtildiği üzere derslerde öğrenci ve öğretmenler arasındaki iletişim biçimi resmi bir yapıdadır. Ancak öğrencilerin Ayşe Hanım'ın dersinde Ahmet Bey'e göre daha rahat ve az resmi oldukları gözlenmektedir. Buna karşın Ayşe Hanım'ın öğrencilere daha az konuşma fırsatı verdiği görülmektedir. Sınıftaki iletişim biçimi ispatlarda kullanılan dil açısından değerlendirilecek olursa Ahmet Bey matematiksel dili daha formal biçimde kullanmaya çalışmakta ve tahtaya kaldırdığı öğrencileri de bu yönde teşvik etmektedir. Ahmet Bey derslerinde ispatlara uzun zaman dilimleri ayırdığı için hem ispatların öncesinde hem de ispatların yapıldığı esnada neden-sonuç ilişkisine dayalı açıklamalarda bulunarak formal matematiksel dili hem sözel olarak hem de tahtada yazılı olarak kullanmakta ve öğrencilerin de anlatılanları defterlerine bu şekilde (tahtada kendisinin yazdığı ya da yazdırttığı gibi) aktarmalarını talep etmektedir. Konu anlatımları esnasında öğrencilerin verdiği tepkiler, sorduğu sorular ve derse katılımları dikkate alındığında Ahmet Bey'in anlatım şeklinin söylemsel nitelik açısından daha verimli olduğu ifade edilebilir. Benzer şekilde Ahmet Bey'in sınıf hâkimiyetinin de Ayşe Hanıma nazaran daha fazla olduğunu söylemek mümkündür. Ayşe Hanım ispatlarda çoğu kez kural ya da adımların biçimsel yapısına vurgu yapmakta anlamlarına yeterince değinmemektedir. Bu nedenle öğrenciler matematik derslerindeki ispatların sunumu ve örneklendirilmesinde (geometriye kıyasla) daha muğlâk bir dil ile karşı karşıya kalmaktadır.

Ayşe Hanım'ın söylemlerinin SS açısından sahip olduğu örüntüsel karakteristikler aşağıdaki biçimde sıralanabilir;

MO-1) Ayşe Hanım ispatların inşası esnasında yararlanılan öncülleri (tanım, aksiyom, teorem, özelik gibi) terimsel biçiminde (isimleri ile) kullanmamaktadır. (örn. DS-21 de daha önce ispatlanan şeyin önerme mi, teorem mi olduğundan söz etmiyor)

Örnekler

DS-1: (21) DS-4: (18) DS-8: (13)

21 DS-1	MO	1+r+r²+r³+… , bunun biz $\frac{1}{1-r}$ olduğunu biliyoruz. (th: 1+r+r²+r³+…= $\frac{1}{1-r}$) Daha önce de ispatladık.

MO-2) Ayşe Hanım ispatların tahtaya yazımı esnasında matematiksel dili katı bir formda kullanmamaktadır. Hipotez-hüküm şeklindeki mekanizmaya sürekli vurgu yapmasına rağmen ispatın yazımında semboller yardımı ile matematiksel gösterimleri kullanmaya çok dikkat etmemektedir.

Örnekler

DS:1 (1-42) DS-5: (11-36)
DS-8: (2-40) DS-13: (28-36)

Ahmet Bey'in söylemlerinin SS açısından sahip olduğu örüntüsel karakteristikler aşağıdaki biçimde sıralanabilir;

GO-1) Ahmet Bey de Ayşe Hanım gibi ispatların inşası esnasında yararlanılan öncülleri (tanım, aksiyom, teorem, özelik gibi) terimsel biçiminde kullanmamaktadır.

Örnekler

DS-2: (31),(71) DS-3: (44),(50),(73) DS-7: (24),(26)

31 DS-2	GO	Siyah kalemi nasıl tutarsan tut, şöyle tutuyoruz, şöyle tutuyoruz, her defasında bir üçgen oluşur, çünkü **eğer bir doğru düzleme dikse onun içinde bulunan bütün doğrular diktir ya da dik durumludur demiştik**. Yani nasıl durursa dursun oraya diktir. [*Hala kâğıt kalemle sınıfa gösteriyor.*]
44 DS-3	GO	Şimdi burada A,C,B **doğrusal olmayan 3** nokta değil mi? **Bir düzlem belirtir** mi?
50 DS-3	GO	Şimdi demiştik ki **bir doğru bir düzleme dik ise içindeki bütün doğrulara diktir.** Madem öyle CB nereye diktir? d doğrusuna diktir diyoruz.

GO-2) Ahmet Bey (öğrencilerin ön bilgileri ile yapılabilecek ispatlarda) ispatların inşası esnasında hem kendisi hem de tahtaya kaldırdığı öğrencinin matematiksel sembol ve notasyonu doğru kullanma konusunda titizlik göstermektedir. Tahtadaki öğrenciye kendi gösterimleriyle (ya da bire bir yazdırarak) ispatın yazımındaki biçimsel yapıya uyması için yönlendirmelerde bulunmaktadır.

Örnekler

DS-2: (9),(19),(37),(39),(43),(47),(71-80) DS-3: (9),(13)

19 DS-2	**GO**	… şimdi tahtada yapacağız, **biraz daha matematiksel anlatmaya çalışalım. Düşüncelerini sözel olarak ifade etmişsin doğru ama biraz daha yazarsan.** Noktaları yerine yazarsan A,B deyip hipotenüs oluyor, o yüzden uzunluğu AC ‘nin uzunluğundan küçük.
13 DS-3	**GO**	$\left(\text{th: } \left. \begin{array}{l} AA' \perp (D) \\ A'B \subset (D) \\ A'C \subset (D) \\ \lvert AB \rvert > \lvert AC \rvert \end{array} \right\} \overset{?}{\Rightarrow} \lvert A'B \rvert > \lvert A'C \rvert \right)$
47 DS-2	OG-5	Kareyi çizebiliriz artık. [*Halmos Mezar Taşı nı kastediyor* ■] [*OG–11 tahtaya* $\lvert AB \rvert > \lvert AA' \rvert$ *yazdı.*]

SS’ye yönelik genel gözlemler sonrasında aşağıdaki kısımda *1)destekleyici geri bildirimler, 2) soru ve cevapların varlığı ve 3)paralel gramatik yapılara* yönelik yapılan analizden elde edilen bulgular sunulmaktadır.

1) Destekleyici geri bildirimler: Konuşmalarda öğretmenler tarafından kullanılan destekleyici geri bildirim ifadeleri iki kategoride ele alınabilir. 1.a) İlki olumlu geri bildirim (takdir) içeren ifadeler, 1.b)ikincisi ise iletişimin akışı içerisinde öğrencinin yaptığı yaklaşımın doğruluğuna yönelik soru sorduğu ya da yapılan bir şeye yönelik fikrini beyan ettiği durumlarda öğretmence dönüt vermek için söylenen ifadeleridir. Bu tip ifadeler öğretmenin öğrencilerce dile getirilen şey hakkında ‘iyi’, ‘doğru’, ‘ilerletilmesi gerekli’ gibi mesajlarını barındırmaktadır. Destekleyici geri bildirimlerde olumsuz ya da negatif ifadeler ele alınmamaktadır.

1.a) Olumlu geribildirim ifadelerinin söylemler içerisindeki yerini, toplamdaki sayısını ve kullanım biçimini göstermek için aşağıdaki tablolar (18-19) hazırlanmıştır. DS’ler içerisinde aşağıdaki tablolarda listelenenler dışında ‘*güzel*’ kelimesinin geçtiği başka olumlu geribildirim ifadesi bulunmamaktadır. Dolayısıyla tüm DS’ler içerisinde Ayşe Hanım’ın ifade ettiği olumlu geribildirim ifadesi toplam 14 iken Ahmet Bey tarafından söylenenler 5 tanedir.

Tablo 18

Ayşe Hanım'ın Söylemlerindeki Olumlu Geribildirim İfadeleri

12	**MO**	Toplama işleminin hangi özellikleri var düşünün.	**DS-4**
13	B-OG	Kapalılık, yer değiştirme, dağılma.	
14	OG-7	Her elemanın tersi vardır.	
15	**MO**	Evet, çok güzel!.	
37	OG-2	Bu p, p şey oluyor, direk katsayıya gidiyor Yani log p tabanında $\frac{1}{p^n}$	**DS-8**
39	OG-2	Burada da yani log,… -n	
40	**MO**	-n, güzel aferin OG–2.	
239	**MO**	$\forall n \in N^+$için $3^{2n}-1$ sayısının 8 ile bölündüğünü tümevarımla gösteriniz.	**DS-9**
256	**MO**	n=k için $3^{2k}-1$ 'in 8'e bölündüğünü kabul ediyoruz, 8' e bölünüyor A gibi bir pozitif tamsayı çıkıyor, yani bunun anlamı nedir?	
262	**MO**	Bakın sizin buradaki düşünceniz şey, $3^{2k+2}-1$ ' in içinde bir 8 çarpanı olduğunu, bir sayının 8 katı olduğunu göstermektir Evet, OG–12.	
263	OG-12	Buna [$3^{2k+2}-1\ i\ gös.$] bölü 8 eşittir B diyelim.	
264	**MO**	Güzel düşünce.	
327	**MO**	$\forall n \in N^+\ \text{içi ı}\ P(n): n! \leq n^{n-1}$ olduğunu tümevarımla gösteriniz.	
347	OG-3	Şurası zaten bundan büyüktür, o yüzden bu da bundan büyüktür.	
348	**MO**	Büyüktür şeklinde düşüneceğiz [*OG-3'e*] güzel düşündün bak güzeldi. $n=1\ \text{içi ı}\ 1! \leq 1^0,\ 1 \leq 1$ her zaman doğru mu? Geçiyorum….	
349	OG-12	İkinciyi k+1 ile çarpalım.	
350	**MO**	Evet, çok güzel, amacımız burada tümevarımı kullanırken...	
92	**MO**	… devam edelim. 1.2+2.3+3.4+…+n.(n+1)=$n.(n+1).(n+2)/3$ olduğunu göstermiş miydik?	**DS-10**
93	B-OG	Evet, gösterdik.	
94	**MO**	Gösterdik mi, o zaman bunu kullanarak şunu istiyorum; Olduğuna göre (n+1).(n+2)+(n+2).(n+3)+…+(2n-1).2n in sonucu kaçtır? Öbürünü kullanıp bunun sonucunu bulacaksınız.	
112	OG-7	Hocam 1 dakika bulacağım şimdi.	
114	OG-7	$7n^3-3n^2-4n/3$	
115	**MO**	Evet, çok güzel onu da n parantezine alıp çarpanlarına ayır, hadi.	
121	**MO**	n doğal sayı olmak üzere, $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2$ toplamının değeri nedir?	
124	OG-8	Ya 1' den n' e kadar olanı çıkartacaksın işte n.(n+1).(2n+1) bölü 6 formülünü kullanarak	
125	**MO**	Ha haa, güzel düşündün OG–8 aferin [*8–10 saniye*] gene bunu direk, toplam biçiminde nasıl yazarsınız?	
130	OG-3	$14n^3+15n^2+n/6$	
131	**MO**	Çarpanlarına ayır onu, bakalım ne çıkacak.	
132	OG-3	$n.(14n+1).(n+1)/6$	
133	**MO**	[OG-3 tahtada yapıyor] …. = $\frac{n.(14n^2+15n+1)}{6} = \frac{n.(n+1).(14n+1)}{6}$	
134	**MO**	Evet, güzel, bir tane daha yazalım.	
1	**MO**	$\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1)$ toplamının değeri nedir?	**DS-11**
5	OG-8	Bence bir k ekleyip bir k çıkartalım.	
6	**MO**	Çok güzel düşündün, şu araya, hadi düşündüğünü yap bakalım. Ne olur bir k ekleyip, çıkarırsak?	
15	**MO**	Bak çok güzel OG-8 orada yolu buldu.	
30	**MO**	1.2003+2,2002+3,2001+…+2002,2+2003,1 sayısının kaç tane asal sayı	

		böleni vardır?	
31	OG-3	2003 yılında çıkmış bir olimpiyat sorusu.	
32	**MO**	Evet, bu 2003 Tübitak sorusu kolay, toplamla yazacaksınız. Bu kolay bir soru zor değil, toplam biçiminde yazacaksınız bunu. O şekilde yazdığınızda zaten geliyor.	
37	OG-3	n.2004-n diye yazdım.	
38	**MO**	Evet, çok güzel, formülden tamam, [*Sonra dolaşırken OG-12'nin defterine bakıyor.*] güzel OG–12 bundan sonra beklenir mi yani şimdi.	
107	**MO**	n>1 ve n∈N için $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ olduğunu tümevarımla gös.	
114	**MO**	Bakın n 1'den büyük, n=1 için denemeyeceksiniz, n=2 için doğru olduğunu göstereceksiniz. Tümevarımla gösteriyoruz.	
122	OG-7	Hocam bir şey sorabilir miyim?	
123	**MO**	Sor [*yanına gelip defterine bakıyor*] ha sen bunu buldun, buraya kadar geldin güzel, şimdi şunu kullanacaksın, aşağı al bunu $1/\sqrt{1}+1/\sqrt{2}$ +…+$1/\sqrt{k}$ >$\sqrt{k}$ mı oldu, …	
26	**MO**	R' de 3x+5 fonksiyonunun 1–1 olup olmadığını irdeleyiniz.	**DS-13**
28	**MO**	Şimdi bunu tanım kullanarak ispatlamanız lazım, şu tanımlardan bir tanesini kullanarak ispatlamanız lazım. Eğer x_1' i; x_2 den farklı kabul ediyorsanız $f(x_1)$ in $f(x_2)$ den farklı olduğunu göstereceksiniz, eğer x_1 ile x_2 nin görüntülerini eşit kabul ediyorsanız x_1 in x_2 ye eşit olduğunu göstereceksiniz, hangisini kullanalım?	
46	OG-9	Neyi? Buradan başlayıp, bunu [*mu*] göstereceğim!	
49	OG-8	En alttan başlayacaksın. [*OG-9'a*]	
50	**MO**	Birbirine eşitini verdi çok güzel.	
51	OG-9	$f(x_1)=f(x_2)$ olsun.	

Matematik dersindeki olumlu geri bildirim ifadeleri genellikle öğrencilerin ispat yapma sürecinde Ayşe Hanım'ın beklentisi yönünde bir söylemde bulunduklarında kullanılmaktadır. Bu tip söylemler ispatın ya da soru çözümünün öğretmenin istediği, sunmayı planladığı yol, yöntem ile yapıldığında ya da öğrencilerce özgün bir yaklaşım sergilendiğinde ortaya çıkmaktadır. Ahmet Bey'in olumlu geribildirim ifadelerine yönelik yapılan liste Tablo-19'daki gibidir.

Tablo 19

Ahmet Bey'in Söylemlerindeki Olumlu Geribildirim İfadeleri

37	**GO**	AA′ diktir, şu düzlemin bir adı olsun, D, E gibi bir şey de. [*Öğrenci D yazdı*] D düzlemi. (th: AA'⊥ (D)) Güzel. [*OG-11 'e*] sonra?	**DS-2**
4	OG-12	İki tane de eğik olsun.	**DS-3**
5	**GO**	Güzel.	
19	OG-12	$\lvert AB\rvert^2$- $\lvert AC\rvert^2$ = $\lvert A'B\rvert^2$ - $\lvert A'C\rvert^2$ Bu bundan büyük olduğu için [$\lvert A\ I\rvert^2$ - $\lvert A\ (\rvert^2$] Bu taraf pozitif [*eşitliğin sol tarafı*]	
20	**GO**	Çok güzel.	
21	OG-12	O zaman bu tarafta pozitif olur ve |A'B| > |A'C|	
22	**GO**	Gayet güzel, özellikle son kısım güzel oldu değil mi?	

Ahmet Bey'in olumlu geri bildirimleri hem tahtadaki öğrencinin ispatı yapma aşamasında basit gösterimleri (harflendirme, sembol kullanımı gibi) yapmasına hem de özgün bir yaklaşım sergilemesine yönelik ifade etmektedir ve Ayşe Hanım gibi kendiside bu tür ifadeleri fazlaca kullanmamaktadır. Öğretmelerin olumlu geri bildirim ifadelerini ispatlar dışındaki derslerde (soru çözümleri, test uygulamaları gibi) daha fazla kullandıklarını gözlenmektedir.

1.b) İletişimin akışı içerisinde öğrencinin yaptığı yaklaşımın doğruluna yönelik soru sorduğu ya da yapılan bir şeye yönelik fikrini beyan ettiği durumlarda öğretmenlerce söylenen ifadeleri kapsayan ikinci kategoride farklı örnekler ile karşılaşılmaktadır. Bu tip örnekler aşağıdaki (Tablo-20) gibi listelenebilir. Tablo incelendiğinde her iki öğretmenin söylemlerinde sekiz çeşit geri bildirim kelimesinden yararlandığı ve bunların yedisinin aynı kelimeler olduğu görülmektedir.

Tablo 20

Öğretmen Söylemlerinde Diğer Destekleyici Geribildirim İfadeleri

AYŞE HANIM		**AHMET BEY**	
Değil mi	DS-1: (29),(51)	Değil mi	DS-2: (29) DS-7: (22),(26)
Hı hı	DS-8: (31),(33),(38) DS-10: (125) DS-11: (87),(101),(127)	Hı hı	DS-2: (13) DS-3: (11),(71),(80),(93)
Evet	DS-4: (15),(18),(21),(32),(65),(68),(112) DS-9: (350) DS-10: (105),(111),(115),(133),(134),(186) DS-11: (10),(38),(59) DS-13: (4),(15)	Evet	DS-2: (29),(43),(45),(55),(58) (65),(78) DS-3: (3),(37),(39),(116), (125) DS-12: (12),(16),(64),(68)
Tamam	DS-4: (27) DS-9: (201),(207),(218),(310) DS-10: (127),(129),(158) DS-11: (38),(48) DS-13: (30)	Tamam	DS-2: (33),(39) DS-3: (110)
Hadi Haydi	DS-4: (27) DS-5: (11) DS-6: (11) DS-8: (22) DS-9: (246) DS-10: (115),(156) DS-11: (101),(125)	Olabilir	DS-2: (19)
Tabi	DS-8: (15)	Tabi	DS-3: (35)
Peki	DS-1: (55)	Peki	DS-2: (9) DS-3: (89),(106)
Bak	DS-4: (83)	Bak	DS-2: (76)

Her iki öğretmen de en fazla '*evet*' sözcüğünün yer aldığı geri bildirimlerde bulunmaktadır. Öğretmenlerin bu kategorideki geri bildirim sözcüklerinin büyük oranda benzerlik göstermiş olması ilginç bir bulgudur. Olumlu geribildirim ifadelerinde '*güzel*' kelimesinin de ortak olarak belirdiği (bravo, harika, şahane, şık vb kelimelerin bulunmadığı) gözlenmektedir. Bu bulgu olumlu geri bildirim ifadelerinin öğretmenlerin söylemsel karakteristiklerinin ortak bir boyutunu oluşturduğunu ortaya koymaktadır. Söz konusu benzerlik öğretmenlerin sınıf söylemlerinde resmi dil kullanımını tercih etmelerinden de kaynaklanıyor olabilir. Destekleyici geri bildirim sözcüklerinin içinde geçtiği ifadeler dikkate alındığında aynı sözcüklerin öğrencilere benzer geribildirim mesajlarını ilettiği durumlarla karşılaşılmaktadır. Örneğin 'değil mi' sözcüğünü içeren ifadelere bakıldığında her iki öğretmen bildirimlerinin 'teyit/onama' niteliği taşıdığı görülmektedir.

DS-1		
27	**MO**	Taraf tarafa çıkarsam?
28	OG-11	Doğru doğru, şunu elde edeceğiz.
29	**MO**	Değil mi! Taraf tarafa çıkartırsam;
48	**MO**	Sonuç nedir burada şimdi? Direk formülü kullanabilirim.
49	**MO**/ OG-8	$\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2}$
50	OG-8/11	9 geliyor.
51	**MO**	Ne geliyor? Sonuç 9 mu geliyor? [*4–5 saniye bekliyor*.] Değil mi?
DS-2		
28	OG-11	Bizim gördüğümüz normalde aynı uzunluk ama önde ya da arkada gördüğümüz için [*tahtadaki eğik ve dikmeyi gösteriyor*] kısa ya da uzun gibi görüyoruz.
29	**GO**	Evet, her defasında… Tut onu o şekilde. [*OG-11'e hitaben*] Her defasında dik üçgen oluşur değil mi orada?
DS-7		
20	**GO**	Piramitin düzgün olması ne işe yarar? Ne farkı vardır? Şundan [*düzgün olmayanı gösteriyor*] ne farkı ya da ne gibi farklılıkları vardır? İkisi arasında [*öğrenci elini kaldırıyor*] evet, OG-8.
21	OG-8	Yanal yüzleri ikizkenar üçgenler olabilir.
22	**GO**	Değil mi?
23	OG-8	Tam ortada aldığımızda
25	B-OG	Aynı.
26	**GO**	Birbirinin aynısı değil mi bunlar, o zaman yan yüzleri birbirine eş ikizkenar üçgenlerdir diyelim, buradan da birbirine eşitse yan yüz yükseklikleri de nedir, birbirine eşittir.

2) Soru ifadeleri: Yüz yüze etkileşime dayalı bir söylem içerisinde interaktifliği sağlayan önemli unsurlardan birisi de sorulardır. Sorular hem iletişimin şekline ve yönüne hem de katılımcılar arasındaki anlam alış-verişlerinin düzeyine etki eden önemli dilsel yapılardan biridir. Sorular aynı zamanda iletişimde görev alan söylemlerin doğasını anlamada da anahtar göstergelerdir. Bu nedenle ispat ve ispatlamaya yönelik söylemlerde hangi soruların bulunduğu analiz edilmiştir. Analiz için önce hem matematik hem de geometri derslerinden iki tanesi seçilerek bu derslerde geçen tüm sorular tek tek listelenmiştir (Tablo-21 ve 22). Burada amaç herhangi bir derste yer alan tüm soruların çeşitleri, ifade edilme biçimi ve amacı hakkında kabaca fikir vermektir. Sonrasında tüm DS'ler taranarak her DS'de (yazara göre) önemli bulunan soru ifadeleri belirlenerek ikinci bir liste oluşturulmuştur (Tablo-23). Bu ikinci listenin amacı ise DS'lerin tümü çerçevesinde Ayşe Hanım ve Ahmet Bey'in öğrencilere yönelttiği soruların genel dağılımına dair bir betimleme yapmaktır. Tablolarda, öğretmenin öğrenciden görüş ya da cevap almak için sorduğu sorular (x) işaretiyle, aslında öğrenciye doğrudan sorulmayıp öğretmenin anlatımı ya da açıklaması esnasında kendi kendine soru-cevap yaptığı ifadeler ise (-) işareti ile gösterilmiştir. Öğretmenlerin ispatların yapımı tamamlandıktan sonra öğrencilere sorduğu sorular diğerlerinden ayrılarak tabloların en alt satırında belirtilmiştir. Ayrıca öğretmenlerin ispatın yapılması aşamasında yönelttiği sorular da italik şekilde verilmiştir.

Tablo 21

Ayşe Hanım'ın DS-1 ve DS-4'teki Tüm Soru İfadeleri

Sorular		DS No/Sıra
Tamam mı çocuklar Tamam mı	- -	DS-1: (6) DS-4: (19),(76),(83)
İspat yapacağız, yapacak olan	x	DS-1: (8)
Peki başka ne yapabiliriz	-	DS-1: (17)
Bu eşitliğin her iki tarafını r ile çarpsak ne olur	-	DS-1: (18)
Bizim bir formülümüz vardı neydi bu	-	DS-1: (20)
(Peki) taraf tarafa çıkarsam	-	DS-1: (24),(27)
Ne bulduk şimdi bakalım	-	DS-1: (38)
… mi çıktı	-	DS-1: (40)
… ifadesi neye eşit oldu? … dediğimiz neydi bizim	-	DS-1: (42)
r burada kaçtır çocuklar bakın	x	DS-1: (46)
Sonuç nedir burada şimdi	x	DS-1: (48)
Ne geliyor, 9 mu geliyor [4-5 sn bekliyor] değil mi	x	DS-1: (51)
Başka	x	DS-4: (3),(5),(8)
Bunu nasıl gösteririz, Nasıl ispatlarız *İspatı nasıl yapıyorduk biz*	- -	DS-4: (15) DS-4: (16)
Bu ifadeyi şu şekilde yazabilir miyim	-	DS-4: (18)
Neydi toplama işleminin birim elemanı	x	DS-4: (43)
Burada sınıf matrisi toplama işleminin nesidir	-	DS-4: (45)
Yazdık mı başlığı Çocuklar yazdık mı soruyu	x x	DS-4: (68) DS-4: (113)
Buradan ne olur, 73 mü oldu	-	DS-4: (98)

Kaç kişi anladı bunu	x	DS-4: (100)
Şimdi tamam mı, Burayı anladık mı	x	DS-4: (122)
Anladık değil mi, Anlamayan var mı	x	DS-4: (126)
İspat bittikten hemen sonra sorulan sorular		
Anladık mı ispat yöntemini		DS-1: (55)

Tablo 22

Ahmet Bey'in DS-2 ve DS-12'deki Tüm Soru İfadeleri

Sorular		**DS No/Sıra**
Orası dik üçgen olur mu	x	DS-2: (5)
Niye olmasın	x	DS-2: (7)
Neye dayanarak yapıyorsun	x	DS-2: (11)
… çizildiğinde ne diyeceğiz	-	DS-2: (41)
Verilen neydi	-	DS-2: (52)
Sonra başka ne veriyor teoremde	x	DS-2: (72)
Göstermek istediğim nedir	-	DS-2: (53),(76)
Benim merak ettiğim ne	-	DS-2: (74)
Neyi göstermeye çalışıyorum	-	DS-2: (74)
Bu buraya neden diktir	x	DS-2: (53)
Evet nasıl oldu [bir şey buldunuz mu anlamında]	x	DS-2: (65)
… eşitliğinden desek olur mu	-	DS-2: (71)
Eşit olan eğikler ne demektir	x	DS-2: (90)
Eğiklerin eşit olması ne demektir	x	DS-2: (90)
Her defasında dik üçgen oluşur **değil mi** orada	x	DS-2: (29)
Bunun dik üçgen olduğunu söyleyeceğiz **değil mi**	-	DS-2: (41)
Uzunluk işareti var **değil mi**	x	DS-2: (74)
Onu veriyor zaten **değil mi**, vermiyor mu	x	DS-2: (84),(90)
Bu eğik **değil midir**	-	DS-2: (90)
Bana bu S lerin toplamı lazım **değil mi**	-	DS-12: (61)
Yazıyoruz değil mi	x	DS-12: (2)
Eğiklerin eşit olması ne demektir	x	DS-2: (90)
Hacmi kabaca ne olarak düşünebiliriz demiştik	-	DS-12: (4)
Biraz bozduğumda, kaydırdığımda hacmi değişir mi	x	DS-12: (5)
En altta aynı şey olmaz mı	x	DS-12: (12)
Şunu kesit alanı nedir	-	DS-12: (14)
Nedir bunun kesit alanı	-	DS-12: (16)
O zaman şurası R değil midir	-	DS-12: (18)
Bu kesitin alanı nedir o zaman	-	DS-12: (20)
Bununla bunun ikisinin toplamı neyi verdi	-	DS-12: (26)
Silindirin hacmi, kürenin hacmi artı koninin hacmine eşittir, doğru mu	-	DS-12: (27)
… yüzeyi tarayabilirim, tarayabilir miyim	x	DS-12: (50)
Koniyi mümkün olduğunca küçültsem bu hata sıfıra yaklaşır mı	x	DS-12: (56)
Bu konilerin hacmini toplayacağız, neydi formül	x	DS-12: (59)
… sayısı sonsuza giderken, yükseklikte R ye yaklaşmaz mı	x	DS-12: (61)
Normalde yükseklik nedir	-	DS-12: (64)
Bu S_i lerin toplamı nedir	-	DS-12: (66)
İspat bittikten hemen sonra sorulan sorular		
İspatla ilgili sorusu olan var mı		DS-2: (45)

Ayşe Hanım ve Ahmet Bey'in belirli bir derste sorduğu tüm sorular dikkate alındığında göze çarpan ilk bulgu her iki öğretmenin de ispatların yapılması aşamasında öğrencilere sordukları soruların (*Bunu nasıl gösteririz, Nasıl ispatlarız, İspatı nasıl yapıyorduk biz, Neyi göstermeye çalışıyorum gibi*) kendileri tarafından cevaplanıyor olmasıdır. Ayşe Hanım ispatların yapılmasına yönelik daha genel sorular yöneltmekte iken Ahmet Bey'in soruları iki kategoriye ayrılmakta ve teoreme/önermeye yönelik verilenleri-istenenleri kapsamaktadır. İspatın dışındaki sorular içerisinde Ayşe Hanım'ın hem yapılan matematiksel işlemlerin adımlarına (örn. *Bu eşitliğin her iki tarafını r ile çarpsak ne olur*) yönelik hem de bunların anlaşılıp anlaşılmadığına (örn. *Şimdi tamam mı, Burayı anladık mı*) dair sorular yer almaktadır. Matematiksel işlemlerin adımlarına yönelik sorular kimi zaman öğrencilerce kimi zaman da öğretmen tarafından cevaplanmaktadır. Ancak yapılanların anlaşılıp anlaşılmadığını sorgulayan soruların tümü öğrencilerce yanıtlanmıştır. Ayşe Hanım'ın ispatın yapılmasından sonra sorduğu soru "*Anladık mı ispat yöntemini* (DS-2: 45)" biçimindedir. Ancak Ayşe Hanım ispatın yapılmasında herhangi bir ispat yapma yönteminden bahsetmemiş olup, bu soru ile ispatın adımlarında yapılan matematiksel işlemlerin (örn. *r ile çarpmak, alt alta yazıp toplamak*) anlaşılıp anlaşılmadığını belirlemeyi amaçlamıştır. Ahmet Bey'in ispatın (teoremde verilen-istenenleri içeren sorular) yapılışı dışındaki sorularına bakıldığında ise hem derste yapılan matematiksel uygulamalara hem de ispat yapma aşamasındaki işlemlere yönelik sorularla karşılaşılmaktadır. Ahmet Bey, derslerinde ispatlara geniş zaman dilimleri ayırdığı için ispatlara yönelik sorularda sayıca fazladır. Ahmet Bey'in soruları içerisinde az olmakla birlikte sorgulama, düşündürme amacı taşıyan örnekler de (örn. *Neye dayanarak yapıyorsun, Bu buraya neden diktir*) bulunmaktadır ve bu sorulara öğrencilerin cevap vermesi sağlanmaktadır. DS-2 ve DS-12 kapsamında sorulan sorulara matematik derslerinde olduğu gibi kimi zaman Ahmet Bey'in kimi zaman da öğrencilerin cevap verdikleri görülmektedir. Göze çarpan bir diğer bulgu ise Ahmet Bey'in sorularını yöneltirken '*değil mi*?' ifadesine sık sık başvuruyor olmasıdır. Bu ifadeyi barındıran soruların hem Ahmet Bey hem de öğrencilerce cevaplandığı, Ahmet Bey'in kendisinin cevapladığı anlarda ise bu ifadeye destekleyici geribildirim ifadelerinde olduğu gibi, anlatılana yönelik teyit etme/onama anlamının yüklendiği görülmektedir. Bir teoremin ispatının tamamlanmasının ardından Ahmet Bey'in sınıfa yönelttiği soru "*İspatla ilgili sorusu olan var mı*" biçimindedir.

Tablo 23

Öğretmen Söylemlerinde Yer Alan Önemli Soru İfadeleri

AYŞE HANIM			**AHMET BEY**		
Başka ne yapabiliriz	DS-1: (17)	-	Niye olmasın	DS-2: (7)	x
Sonuç nedir burada şimdi	DS-1: (48)	-	Hazır mı herkes	DS-3: (120)	x
Bunu nasıl gösteririz	DS-4: (15)	-	*Göstermek istediğin nedir*	DS-2: (53)	-
Nasıl ispatlarız	DS-4: (15)	-	*Göstermek istediğin nedir*	DS-2: (76)	-
İspatı nasıl yapıyorduk biz	DS-4: (16)	-	*Göstermek istedğimiz şey ne*	DS-3: (39)	x
Nasıl ispatlamıştık	DS-11: (75)	-	*Neyi göstermeye çalışıyorum*	DS-2: (74)	-
Nasıl bir ispat yapmış olduk	DS-13: (58)	-	*Benim merak ettiğim ne*	DS-2: (74)	-
Kaç kişi anladı bunu	DS-4: (100)	x	*Verilen neydi*	DS-2: (52)	-
Burayı anladık mı	DS-4: (122)	x	*Başka ne veriliyor teoremde*	DS-2: (72)	x
Anladık değil mi	DS-4: (126)	x	*Başka ne verilmiş*	DS-3: (35)	x
Anlamayan var mı	DS-4: (126)	x			
Nasıl buluyoruz	DS-5: (49)	-	Takip ediyor musunuz	DS-3: (7)	x
Kural öğretmemiş miydik	DS-8: (13)	-	Takip ediyor musunuz	DS-3: (9)	x
Yani bunun anlamı nedir	DS-9: (256)	-	Buraya neden diktir	DS-2: (53)	x
Öyle anlatmadık mı	DS-9: (325)	-	Neden diktir	DS-3: (78)	x
Onu neye göre yazdın	DS-9: (346)	x	Neden diktir	DS-3: (118)	-
Ne yapıyoruz	DS-9: (354)	-	Neye dayanarak söylüyorsun	DS-3: (69)	x
Nasıl Kullanıyoruz	DS-9: (354)	-			
Bunu nasıl yazarsın	DS-10: (109)	-	Neye dayanarak yapıyorsun	DS-2: (11)	x
Kullanabilir miyiz	DS-10: (151)	-	Neye dayanarak dik olur	DS-2: (53)	x
Nereden bildin	DS-11: (61)	x	Şunun adı ne olabilir	DS-7: (14)	-
Ne yapacağız	DS-11: (89)	-	Ne farkı vardır	DS-7: (20)	x
İspat bittikten hemen sonra sorulan sorular					
Anladık mı ispat yöntemini	DS-1: (55)		İspatla ilgili sorusu olan var mı	DS-2: (45)	
Anladık mı çocuklar	DS-8: (40)		Var mı aklınıza takılan bir yer	DS-3: (23)	
Anladık [mı]	DS-9: (354)		Var mı aklına yatmayan	DS-3: (106)	
Anladık mı bunu	DS-9: (356)				
Bunu anladık değil mi çocuklar	DS-10: (119)				
Bunu anladık mı	DS-10: (149)				
Anladık [mı]	DS-10: (165)				
Tamam mı çocuklar, anladık mı	DS-11: (29)				
Anladın mı nereden geldiğini	DS-11: (140)				

Tablo 23 incelendiğinde ortaya çıkan bulgulardan ilki, matematik ve geometri derslerinden herhangi ikisi seçilerek oluşturulan önceki tablolarda gözlenen bazı bulguların tüm dersler için geçerli olduğudur. Örneğin,

-İspatların yapılışına yönelik (tabloda italik verilen) soruların hemen hemen tamamının öğretmenlerce cevaplanıyor olması,

-Ayşe Hanım'ın bu kategorideki sorularının ispatlamaya yönelik genel yaklaşımları sorgularken, Ahmet Bey'in sorularının ise teoremde verilen-gösterilmek istenen mekanizmasını içermesi,

--Bir ispatın yapımı tamamlandıktan sonra Ayşe Hanım tarafından soruların tümünün 'anladık mı' kalıbı ile (örn. "Bunu anladık değil mi çocuklar?, Tamam mı çocuklar anladık mı?) kurulurken, Ahmet Bey'in sorularının ise 'var mı' kalıbını (örn. İspatla ilgili sorusu olan var mı?, Var mı aklınıza takılan bir şey?) içermesi bunlardan bazılarıdır.

Ayşe Hanım'ın, ispatların yapılışına yönelik soruları incelendiğinde tümünde '*nasıl*' kelimesini kullandığı (örn, *Nasıl ispatlarız?, ispatları nasıl yapıyorduk biz?*), Ahmet Bey'in sorularında ise '*ne/nedir*' kelimelerinin (örn. *Göstermek istediğimiz şey ne?, Başka ne veriliyor teoremde?*) yer aldığı görülmektedir. Ayrıca tabloda yer alan soruların büyük oranda 'ne, neye, neden, nedir ve nasıl' kelimelerini içerdiği gözlenmektedir. Soruların öğrenciler ya da öğretmenler tarafından cevaplanması açısından bir inceleme yapıldığında ise Ahmet Bey'in sorularına öğrencilerce verilen cevap sayısının daha fazla olduğunu ortaya çıkmaktadır.

Soru ifadelerine yönelik ortaya konan bulgulara dayalı olarak öğretmenlerin ispat ve ispatlamaya yönelik öğrencilere yönelttiği soruların sorgulama, düşündürme, yorumlama amacı gütmekten daha çok kısa sürede bilgi alış-verişini gerçekleştirmeye ve yapılanları izlemeye yönelik mekanik bir yapıya sahip olduğu yorumu yapılabilir. Öğretmenlerin ispatlar esnasında '*verilen teoremin ifadesini başka biçimde söylemek/yazmak mümkün mü?, bu teorem/önerme başka şekilde ispatlanabilir mi?, ispatı hangi yöntemi kullanarak yaptık, neden o yöntemi kullandık?, bu ispatı yapmadaki amacımız nedir?, ispat ile elde ettiğimiz şeyi nerede kullanabiliriz?* biçiminde sorulara başvurmaması bu yoruma ulaşmadaki diğer bir etkendir.

IV. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar

Dördüncü alt problemde, *"ispata ve ispatlamaya yönelik var olan söylemler ve onların bağlamsal özellikleri çerçevesinde, SA, SK ve SS'ye ait karakteristiklerin, öğrencilerin ispata yönelik anlamalarındaki belirgin noktalara ve bunların oluşmasına ne yönde etki ettikleri"* ele alınmaktadır.

Önceki bölümlerde görüldüğü üzere öğrencilerin ispatlara yönelik genel düşünceleri ve ispat yapma süreci ve mekanizmasına yönelik görüş ve davranışları önemli ölçüde öğretmenlerinin söylemlerinden etkilenmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin ispatlara yönelik anlamalarını iyi analiz edebilmek için öğretmenlerin söylemsel yaklaşımlarına daha yakından bakarak öğrenci söylemlerinin ele alınması ayrıntılı ve sağlıklı bulgulara ulaşmayı sağlayacaktır.

Aşağıdaki bölümde önce (a)öğretmenlerin ispat ve ispatlamaya yönelik genel açıklamalarına, (b)öğretmenlerin ispatları oluşturma aşamasındaki eğilimlerine, (c)öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik söylemleri ve ispatların (DS'ler içerisinde) inşası esnasındaki genel yaklaşımlarına ve (d)öğrencilerin araştırmacı tarafından seçilen bir teoremin ispatlanmasına yönelik (yazılı ve sözlü) söylemlerinin doğasına yönelik bulgulara yer verilmektedir.

a) Öğretmenlerin İspat ve İspatlamaya Yönelik Genel Açıklamaları: Ayşe Hanım'ın DS ve TES'lerde yer alan ispat ve ispatlamaya yönelik ifadeleri ve açıklamaları aşağıdaki biçimde sıralanabilir,

DS-4		
15	**MO**	Şimdi matrislerde toplama işleminin değişme özelliği vardır, yani A+B=B+A Bunu nasıl gösteririz, nasıl ispatlarız? Genel ifade olarak hemen bir verelim.
16	**MO**	Önce bu tarafa bakın [*yazdığı kısmi eşitliğin solunu gösteriyor*] ispatı nasıl yapıyorduk biz?
18	**MO**	Evet, eşitliğin bir tarafını kullanıp öbür tarafını elde ediyoruz.
19	**MO**	Matrislerde toplama işleminin değişme özelliği var. Eşitliğin bir tarafını kullanıp öbür tarafını elde ettik. Daima biliyorsunuz ispatta eşitliğin bir tarafını kullanıp öbür tarafını elde ediyorduk. Tamam mı? Şimdi ikinciyi siz ispatlayacaksınız, ben yazıyorum.
DS-5		
50	**MO**	Size 2x2 türünde bir matris verildiğinde önce $\mathrm{a.d} - \mathrm{b.c}$ ye bakacaksınız sıfırdan farklı mı diye, sıfırdan farklıysa o zaman tersini bulacaksınız. Şimdi şöyle, artık bu formülü kullanıyoruz bakın bu kadar ispat yaptık bunları gösterdik. Şöyle bir matris verdiğimizde;
DS-6		
24	OG	Yani bir matrisin tersini bulurken, aynı zamanda biz onun determinantını buluyoruz.
25	**MO**	İşte onun için onu tanımladık direk vermedik, ispatladık o nedenle yaptık, mesela biz ne demiştik, şöyle yazmamış mıydık bakın A eşittir a,b,c,d böyle dersek bunun determinantı detA eşittir …
26	**MO**	Bunu bu şekilde tersini verirken determinanttan hiç bahsetmeden ispatlayarak bunu elde etmiştik, şimdi örnek yapalım.
DS-10		
151	**MO**	… O zaman şöyle soruları kullanabilir miyiz? $\sum_{k=1}^{10} k.k!$ nedir dersem, bunu bakın (n+1)!-1 yani 101!-1 yazabilirsiniz bakın ispatladığınız bir şeyi kullanacaksınız.
DS-11		
75	**MO**	… biz bunu karmaşık sayılarda nasıl ispatlamıştık? Genelleyerek ispatlamıştık; 2.kuvveti, 3.kuvveti, 4.kuvveti diye alıp sonra genellemiştik değil mi ama şimdi tümevarımla istiyoruz.
111	**MO**	Ne gerek var değil mi, belli olan bir şeyi ispatlamaya. [*kinaye*]
DS-13		
28	**MO**	Şimdi bunu tanım kullanarak ispatlamanız lazım, şu tanımlardan bir tanesini kullanarak ispatlamanız lazım. Eğer x_1' i; x_2 den farklı kabul ediyorsanız $f(x_1)$ in $f(x_2)$ den farklı olduğunu göstereceksiniz, eğer x_1 ile x_2 nin görüntülerini eşit kabul ediyorsanız x_1 in x_2 ye eşit olduğunu göstereceksiniz, hangisini kullanalım?

58	**MO**	… farklı olan iki elemanın görüntüleri aynı oldu. Nasıl bir ispat yapmış olduk? Örnek vererek ispat mı? Tanımı kullanın bakalım, tanımı kullanarak ispat istiyorum burada, 1. yi kullanacaksınız yani $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f\ (x_2)$ olup olamadığını göstereceksiniz ya da $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ olduğunu kullanın, bu daha iyi ikinciyi kullanın bence.

TES-1

174	**MO**	Bir tarafı kullanarak dediğiniz nedir? Acaba hipotezi mi kullanacağız?
176	**MO**	… hipotezi kullanarak hükmü elde etmeye ispat mı diyoruz?
1	**MO**	İspat yapma yöntemleri nelerdir?
2	OG	Bir tarafı kabul edip öbür tarafı elde ediyoruz.
9	**MO**	Aksine yöntemi [*onaylama anlamında*] bakın gayet güzel, OG–11' in dediği gibi sol tarafı kullanıp sağ tarafı elde etme.

TES-2

66	**MO**	… ispat sizin için ne kadar önemlidir?
69	**MO**	Peki, ispatladığınız bir şeyi problemlerde daha hızlı… [*2–3 saniye bekliyor.*]
80	**MO**	İspatın size kazandırdığı bir şey şu olamaz mı, yani hayatta karşılaştığın şeylere sorgulayıcı yaklaşmaz mısın?

TES-4

1	**MO**	Bir ispat yapılırken nelerden yararlanılır?
3	**MO**	İspatladığımız diğer teoremleri de kullanabiliriz.

TES-5

38	**MO**	Tabi matematikte, önce matematiksel ispat denilince verilen vardır bir de buna bağlı olarak istenen vardır. Verilenleri kullanır ispatlarsınız dimi! Ama günlük yaşamda tabi mutlaka ortada bir veri vardır ama dediği gibi OG-7'ye katılıyorum biraz felsefi yönü de vardır yani.

Ahmet Bey'in ispat ve ispatlamaya yönelik ifadeleri ve açıklamaları ise,

DS-2

51	**GO**	--İspatı yaparken tabi bir kendimizi ikna etmek var, açıklama yapmak var, bir de ispat yapmak var. --İspat yaptığın zaman onun herkesçe aynı olması gerekir, ortak bir dille yazmamız gerekir.
71	**GO**	-Şimdi bunu arkadaşlarına açıkladın, yazalım ispatını yapalım. -İspat denen şey şu, düzleme bir ad ver, D düzlemi de, tamam. - AA′ diktir D düzlemi diyelim. Şekilde verilenleri yazıyla yazalım.
77	**GO**	$A'B$ uzunluğu eşittir $A'C$ uzunluğu. Bunu göstermeye çalışıyorum tamam mı? $\left(\text{th: } \underset{a}{\underset{\Downarrow}{\left.\begin{matrix} AA' \perp (D) \\ \lvert AB\rvert = \lvert AC\rvert \end{matrix}\right\}}} \overset{?}{\Rightarrow} \underset{b}{\underset{\Downarrow}{\lvert A'B\rvert = \lvert A'C\rvert}}\right)$
78	**GO**	Soldaki a kısmına hipotez denir. Sağdaki b kısmına ispatlamamız gereken şey.

DS-3

25	**GO**	Bu da bir teorem, ancak meşhur diğerlerine göre daha meşhur bir teorem; şöyle diyelim…
95	**GO**	Bu işi üç dikme teoremine dayandırsak zannedersem ikna oluruz, zaten teorem o yüzden var, yani sana öyle geldi, bana öyle geldi, işte arkada yok önde yok gibi şeylerin daha bilimsel açıklaması teoremlere dayandırmaktır.

DS-7

32	OG	Şimdi koninin hacmi silindirin hacminin üçte biri kadardı.
35	**GO**	O dediğini nereden biliyorum, koninin silindirin hacminin üçte biri olduğunu, o da aynı hesap olmuş oluyor değil mi? Yani bir şeyi kabul ediyorum ama ben şu an onu

		bilmiyorum onu daha önce ispatlamadım, üçte biri olduğunu ispatlamadık daha sonra ispatlarsam bunu da ispatlamış olurum. Peki, bunu [*teoremi*] kullanacağız yalnız ispatlamadık [*henüz*] ama kullanacağız [*şimdi*].
37	**GO**	Yalnız şöyle bir ispat istemiyorum, deneysel bir ispat. Daha önce şöyle olmuştu; Yükseklikleri aynı tabanları aynı olan bir piramit ile bir prizma aldılar. İçine su doldurdular. Piramiti üç kerede doluyor diye gösterdiler. Deneysel olarak aslında o da güzel ama geometrik istiyorum tamam mı! O fiziksel bir ispat oluyor, matematiksel bir ispat olmuyor.

DS-12

8	**GO**	Şimdi bu ilkeyi [*Cavalieri İlkesi*] kullanarak kürenin hacmini ispatlayalım.
30	**GO**	İntegralsiz ispatı bu. İntegral bilmediğiniz için öyle yapamıyoruz.
32	**GO**	Değil integralle bulmuş, bu sonradan yapılan bir ispattır. İntegralsiz nasıl yapılabilir diye düşünüldüğünde yapılan bir ispattır.

TES-7

13	**GO**	İlk aşama ne olmuş oluyor? [*ispat yaparken*] Tarif edileni anlayıp, kâğıda dökebilmen gerekiyor, olimpiyat çalışmalarında bununla karsılaşmıştınız, …
66	**GO**	Tabi eğer ispatla hiç uğraşmadıysan, unuttuğun formülü çıkarmak için hiçbir şansın kalmıyor, hafızanın dışında, hafızanı kullanmanın dışında, bir yetenektir ispatlamayı öğrenmek.
79	**GO**	O kesin, o konuda her zaman size söylediğim bir şey vardı ilk günden beri, ispatları boşuna yapmıyoruz. Onlar sizin çözüm teknikleriniz olacak sorularda. Direk özellik soran bir soruyla kolay kolay karşılaşmazsınız, birinci testlerde görürüsünüz onu kitaplarda ve sınavlarda göremezsiniz; yani-şunun uygulaması çıktı yok öyle bir şey dış kuvveti uyguladın bitti bir soru, öyle bir soru fazla göremezsiniz.
80	OG	Ama hocam, ÖSS' de bir soruyu yaparken ispat kullanmak, bir sürü zaman götürüyor.
81	**GO**	Aslında şeyi geometride dediğim şeyi çok kısa bir sürede çıkarabilirsin. Senin düşünme gücünü geliştirir [*ispat*], şeyle sınırlı değilsin soru çözmekle sınırlı değilsin daha üst düzeyde bir iş yapıyorsun [*ispat yaparken*], bu [*ÖSS sorusu*] sana daha kolay gelecek, hiç alakasız şeylerde olmadığı için seni başka yere götürmeyecek.

biçiminde sıralanmaktadır. Ayşe hanım'ın herhangi bir derste o an yapılan ispatın dışında, genel anlamda ispatın kavramsal anlamına ve ispat yapma mekanizmasına yönelik söylemleri tek bir düşünce etrafında toplanmaktadır. Ona göre ispat, hipotezden hükmü (bir tarafı kullanarak diğer tarafı) elde etme işlemi/sürecidir. İspatın lise matematiği açısından yapılma amaçları içerisinde de öncelikli olan ispat ile elde edilen formülün, kuralın alıştırmalarda ve soru çözümlerinde kullanılmasıdır. Ayrıca Ayşe Hanım'ın farklı olarak dile getirdiği iki kavram daha bulunmaktadır. Bunlar, genelleyerek ispat ve örnekleyerek ispattır. Ancak Ayşe Hanım bunlar üzerinde çok durmamış ve örneklerini de sunmamıştır.

Ahmet Bey'in söylemlerinde, ispat ve ispatlamaya yönelik daha geniş bir bakış açısının bulunduğu söylenebilir. Temelde Ahmet Bey de ispat yapma mekanizmasını hipotez-istenen ilişkisi altında sunmakta ve ispat yapma amacını da yine soru çözümlerine yönelik teknikler elde etme olarak ifade etmektedir. Ancak Ahmet Bey ispatların ikna etme ve doğrulama gibi fonksiyonlarınada gönderimde bulunarak ispatların formal bir yazım şekline sahip olması gerektiğinede vurgu yapmaktadır. Dikkat çeken diğer bazı söylemler deneysel/fiziksel ispat kavramı ve ispatın bir yetenek olduğunu içerenlerdir. Ancak bu kavram ve düşünceler de Ahmet Bey tarafından ayrıntılandırılmamış ve başka örnekler üzerinde ele alınmamıştır.

Bir ispatın yapılmasında yararlanılabilecek şeyler için Ayşe Hanım diğer teoremlerin ve tanımların kullanılabileceğine işaret ederken, Ahmet Bey bir ilkeyi kullanarak nasıl ispat yapılabileceğini örneklemiştir.

Gerek buradaki ifadeler ve gerekse ispata yönelik geniş sözcük listesi (bkz. Ek-6) dikkate alındığında her iki öğretmenin de ispatın anlamı, fonksiyonları ve amacına yönelik söylemlerinin anlamca sınırlı ve sayısı bakımından da yetersiz olduğu ifade edilebilir.

b) Öğretmenlerin İspatları Oluşturma Aşamasındaki Eğilimleri: Öğretmenlerin genel açıklamaları ve ifadelerine yönelik tespitlerden sonra bu bölümde Ayşe Hanım ve Ahmet Bey'in ispat yapma sürecindeki eğilimleri ele alınmaktadır. Ayşe Hanım'ın söylemsel karakteristikleri çerçevesinde ispat yapma aşamasındaki eğilimlerini en iyi yansıtan örnekler tümevarıma yönelik uygulamalardır. Bu nedenle aşağıda tümevarıma ilişkin ispat yapma uygulamalarını içeren DS-9'dan bazı kesitlere yer verilecektir. İlgili kesitler oluşturulurken sadece gerekli görülen ifadeler alınmış söylem kesiti sıralı ve bütün olarak verilmemiştir.

Tablo 24

Ayşe Hanım'ın İspat Yapma Sürecindeki Söylemsel Eğilimine Yönelik Kesit

DS-9		
239	**MO**	$\forall$n$\in N^+$için $3^{2n}-1$ sayısının 8 ile bölündüğünü tümevarımla gösteriniz.
252	**MO**	1) n=1 için doğruluğunu göstereceğiz [*Yazıyor.*]
253	OG-12	[*OG-11'e*] iyi de bilmiyoruz ki kabul ediyoruz.
254	**MO**	$3^2-1=8$ bu da 8'e tam bölünür, bir tam sayıdır doğruluğunu gösterdik.
255	OG-11	Tamam, o doğru.
256	**MO**	n=k için $3^{2k}-1$ 'in 8'e bölündüğünü kabul ediyoruz, 8' e bölünüyor A gibi bir pozitif tamsayı çıkıyor, yani bunun anlamı nedir?
		th: 1) $n=1,\ \ 3^2-1=\frac{8}{8}=1\in Z^+$ 2) $n=k,\ \ \frac{3^{2k}-1}{8}=A\in Z^+ \longrightarrow$
258	**MO**	$3^{2k}-1=8.$A şeklinde, bunun içinde [$3^{2k}-1$ *i kastediyor*] bir 8 çarpanı var ki

		8'e tam bölünüyor. Yani bölünsün bakın kabul ettik, yani $3^{2k}-1$'in bir a sayısının 8 katı olduğunu gösterdik. Şimdi ondan sonra, ben önce yazayım, siz ispatlayın bakalım.
260	**MO**	8'e bölündüğünü gösterelim.
261	OG-11	Söyleyeyim mi hocam nasıl yaptığımı?
262	**MO**	Bakın sizin buradaki düşünceniz şey, $3^{2k+2}-1$ ' in içinde bir 8 çarpanı olduğunu, bir sayının 8 katı olduğunu göstermektir [*göstermek olmalıdır anlamında*]. Evet, OG–12.
263	OG-12	[*Tahtaya kalkıyor.*] Buna [$3^{2k+2}-1$ *i gös.*] bölü 8 eşittir B diyelim.
264	**MO**	Güzel düşünce.
265	OG-12	$3^{2k+2}-1=8.B$
267	OG-12	$3^{2k}-1=8.A$
268	**MO**	Bir tarafı kullanıp diğer tarafı elde edeceksin.
269	OG-12	Şimdi şu bilgiyi,
270	**MO**	Bu tarafta düzenle, o bilgiyi kullanacaksın [*tahtanın boş kısmında yapmasını istiyor.*] düzenle, yerine koy.
		th: 3^{2k+1}-1= 8B ☆ $\Longrightarrow$ 9.3^{2k}-1 = 8B 3^{2k}-1= 8A Peki, şunu şu tarafa atsan da 3^{2k} yerine değerini yazsan nasıl olur? Daha kolay gelmez mi?
271	OG-12	Hocam taraf tarafa çıkartayım.
272	**MO**	Tamam, çıkar, o da güzelmiş [*2 saniye*] ama bak sen taraf tarafa çıkarırsan bunu ☆ da kullanırsın.
273	OG-12	Tamam, ama 8(B-A) olduğu için.
274	**MO**	Ama sen işte bunu ne yazdın? B olsun, B olduğunu göstereceksin sen daha, B olduğunu kabul ediyorsun, B olduğunu göstereceksin. O zaman sen burada ne yapacaksın, bunu bu tarafa at ya [*-1'i 8A yanına*]
275	OG-12	$3^{2k}=8A+1$ dir.
276	**MO**	Yerine koy şurada (☆)
277	OG-12	9.(8A+1)-1= 8B 72A+9-1= 8B 8(9A+1)= 8B $\underbrace{9A+1}_{Z^+}=\underbrace{B}_{Z^+}$
278	**MO**	Dinle bakalım [*sınıfa*], biz burada B olduğunu göstereceğiz ya,
280	**MO**	Şöyle düşünüyoruz! n=k için doğru olsun, yani $3^{2k}-1$, 8'in katı bir sayı olduğunu kabul ettik. Buradan n yerine k+1 yazdık, $3^{2k+2}-1$'in 8'e bölündüğünü göstereceğiz. O halde şu kısmı anladık [$3^{2k+2}-1=8B$]. Şimdi şuradan da doğru olarak kabul ettiğimiz ifadeyi aldı arkadaşınız. Buradan $3^{2k}=8A+1$ olduğunu bulduk, bunu burada getirdik yerine yazdık, gördüğünüz gibi 3 üzeri 2k+2, eksi 1 sayısının 8'in katı olduğunu gördük, yani B=9A+1, her halükarda bu bir [*9A+1 i kastediyor*] tamsayıdır, yani bu ifade daima 8'e bölünür.
281	OG-11	Göstereyim mi [*kendi yolunu*] ?
282	**MO**	Göster, [*bakıyor*] modlu düşünmeyeceksin ama peki arkadaşınız modlu bir ispat yapmış.
283	OG-11	n=1 için $3^2-1\equiv 0\ (m\ o\ \ 8)$ sağlıyor.
284	**MO**	Sağlıyor, evet.
285	OG-11	n=k için, bu soru aslında biraz saçma, tümevarımla çözülmez, göstereceğim. n=k için $3^{2k}-1\equiv 0\ (m\ o\ \ 8)$, biz bunu normalde tümevarım ile soru çözerken kabul ediyoruz değil mi? Kabul etmemize gerek yok bu her zaman doğrudur, neden? $(3^2)^k-1$ bu 9^k-1 dir. 9^k mod 8'de 1^k'dır o da 1'dir. 1 eksi 1, 0'dır.

		th: $n = 1$ için $3^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$ $n = k$ için $3^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod 8$ $\underbrace{(3^2)^k}_{\underbrace{9^k}_{\underbrace{1^k}_{}}} - 1$ $1\text{-}1 \equiv 0$ ✓✓
286	**MO**	Çürütelim biz onu, şöyle tümevarımla ispat yapımı 3 aşamadan oluşur.
288	**MO**	Biz onu adım adım gösteriyoruz.
289	OG-11	Ama biz onu kabul ediyoruz.
290	**MO**	Biz onu kabul ederek hiçbir şey yapmadan…
291	OG-11	Ama kabul etmemize gerek yok, öyledir zaten.
292	**MO**	Zaten sağladığı için bu böyledir [*OG–11 in yaklaşımını kastediyor*] diyoruz, ilkeleri adım adım uyguluyoruz, hadi devam et.
293	OG-11	Neyse, n=k+1 için biz göstereceğiz şu (✓✓) olsun. Zaten oluyor. $3^{2k+2} - 1 \overset{?}{\equiv} 0 \ \ (m\ o\ \ 8)$ $9.3^{2k} - 1 \equiv 0$
294	OG-3	Bizim yaptığımız.
295	**MO**	Aynı şeyi göstermiyor musun?
296	OG-11	Ama benim göstermek istediğim bu. [*n=k için olan kısımdaki iddiası*] Bunu her zaman sağlıyor, [$\underbrace{9}_{1}.\underbrace{3^{2k}}_{1} - 1 \ \equiv 0$] şu 1, şu da 1, $1 - 1 \equiv 0$
298	OG-7	Bu da tümevarımla ispat oluyorki hocam.
299	**MO**	Hayır, siz bir tarafı hep sıfır kabul ediyorsunuz, oysa tümevarım üç aşamalı bir ispat yöntemidir. Bunun için 1 olarak göstereceğiz, bunun için k doğru olarak kabul edeceğiz k+1 için sol tarafta ikincisinde doğru kabul ettiğini kullanıp üçüncüsünün doğru olduğunu göstermenin ispatıdır.
300	OG-13	Hocam orada da öyle ama o tarafı kullandı.
301	**MO**	Sen öbür tarafın tam göründüğünü kabul edip, A gibi bir reel sayı olarak ya da A gibi bir tamsayı olarak değil sıfır tamsayısı olarak kabul edip ona göre işlem yapıyorsun, oysa onu herhangi bir A sayısı olarak kabul ediyoruz. Yani bir şeyi öğrendiğinizde bir başka şeyi de o açıdan bakarak çözme mantığını geliştirmeniz lazım.
302	OG-11	Ama OG–12' nin yaptığı da doğru.
303	**MO**	OG–12 tabi, o tam tümevarım şekliyle çözdü.
304	**MO**	Bir tane daha yapalım, $\forall n \in N$ *içi ı* $12^n + 10$ sayısının 11 ile bölündüğünü tümevarım ile gösteriniz.
305	OG-12	OG–11 gene aynı şey.
306	**MO**	Altını çiziyorum [*tümevarım kelimesinin altını çizdi*] gösteriniz.
307	OG-5	Hocam tümevarımla gösterilecek tabi ki çok şey var ama bunları da tümevarımla göstermenin manası yok ki!
308	**MO**	Tümevarım ispatını yerleştiriyor, mantığını.
309	OG-5	Mesela güzel formüller gösterebiliyoruz tümevarımla.
310	**MO**	Tamam, bak şimdi daha başka formüllerde yazacağım. Yani bir şeyi bir yoldan izleyip hep aynı şeyi kullanmayın, mantığınızı başka açıdan da geliştirmeniz lazım.
311	OG-2	OG–11 bu olmaz galiba. [*senin yönteminle*]
312	OG-11	Oluyor, 12 ne 11+1 ya 1^n [*1–2 kişi de olur diyor.*]
313	**MO**	Tümevarımla gösteriyorsunuz.
314	OG-3	Ben yapayım mı bunu?
315	**MO**	Hadi yap.
316	OG-3	n=1 için 12+10
317	**MO**	Şimdi bakalım bir dakika, bir dakika n ne; bir yerde bir şeyimiz var şuraya bir bakalım. Bak n nerden başlıyor doğal sayılardan, doğal sayılar nerden başlar sıfırdan,

		sıfırdan başlıyorsun.
318	OG-5	Yaa ne olacak ki!
319	**MO**	Tümevarımda bu böyle, verilen kümeye göre başlayacaksınız.
320	OG-3	$n = 0$ için $\rightarrow \frac{1+10}{11} = 1$
321	OG-8	n = 0 için mi? [*Şaşırıyor.*]
322	**MO**	Tabi sayma sayıları vermedim, doğal sayıları verdim.
323	OG-8	Haaa, doğru.
324	OG-6	Ben 1 ile yaptım 1 ile olmaz mı?
325	**MO**	Ama kümenin ilk elemanından başlıyoruz, öyle anlatmadık mı?
326	**MO**	[*tahtadaki bitince*] Evet, bölündü yani şunun 11'in katı olduğunu gösterdin.
		th: $n = k$ için $\frac{12^k+10}{11} = \mathrm{A} \Rightarrow 12^k = 11.\mathrm{A} - 10$ $n = k+1$ için $\frac{12.12^k + 10}{11} = \frac{12(11.\mathrm{A} - 10) + 10}{11} = \frac{132.\mathrm{A} - 110}{11}$ $= 12\mathrm{A} - 11$
327	**MO**	$\forall n \in N^+$ için $P(n)$: $\overset{\#}{n!} \le n^{n-1}$ olduğunu tümevarımla gösteriniz.
328	OG-9	Negatif doğal sayı var mı? [N^+ *yazıldığı için.*]
329	**MO**	Hayır, pozitif doğal sayılar bak, sayma sayıları yani şu kısmı # tümevarımla gösteriniz.
330	OG-9	Aaa, hocam eşitsizlik sormayın tümevarımla yaa!
331	**MO**	Yaa işte esas burada başlıyor yorumlar bakın.
335	**MO**	Yapanlara bir bakalım. [*Defterine bakıyor.*] [*Öğrenci adım adım açıklıyor defterden hoca takip ediyor.*] Bak şimdi sen her iki tarafı birden kullanıyorsun. Neydi bir tarafı kullanıp diğer tarafı göstereceksin.
347	OG-3	Şurası zaten bundan büyüktür, o yüzden bu da bundan büyüktür.
348	**MO**	Büyüktür şeklinde düşüneceğiz [*OG-3'e*] güzel düşündün bak güzeldi. $n = 1$ için $1! \le 1^0$, $1 \le 1$ her zaman doğru mu? Geçiyorum. $n = k$ için $k! \le k^{k-1}$ doğru olsun. $n = k+1$ için $(k+1)! \le (k+1)^k$ oldu. Bu ifadenin doğru olduğunu göstereceğiz, önce bir yazalım. Peki.
349	OG-12	İkinciyi k+1 ile çarpalım.
350	**MO**	Evet, çok güzel, amacımız burada tümevarımı kullanırken...
351	OG-5	Niçin ikinciyi k+1 ile çarpıyoruz?
352	**MO**	1 dakika, 1dakika bir tarafı kullanacaksın, biz neden n=k için doğru kabul ettik! Bunu kullanmak için tümevarımda. Ne yapacağız? Her iki tarafı $k!(k+1) \le k^{n-1}(k+1)$ bunun her iki tarafını k+1 ile çarpacağız.
353	OG-4	İyi de biz ikinciyi kullanıyoruz.
354	**MO**	İkinciyi kullanacağız, doğru kabul ettiğimizi kullanmıyor muyuz tümevarımda, kullanıyoruz. Burası ne oldu bakın [k!(k+1)].(k+1)! oldu ≤ bunu da açarsak bakın, $[k^{k-1}.(k+1)] \ldots \le \overbrace{k^k + k^{k-1}}^{☆}$ mi oldu! Peki, şimdi OG–3 ün dediği yorumu yapabilir miyiz? Yapabiliriz. Şu ifade [☆] neden küçüktür sizce? Bakın ≤ (k+1)' in k. kuvvetinden küçük değil midir? th: $(k+1)! \le k^k + k^{k-1} \le (k+1)^k$ Bunu açtığımızda bakın burada k+1 tane terim vardır. k+1 tane terimin 2 tanesi bu değil midir? O halde bakın A, B den; B de C den küçükse buradan biz ne yazabiliriz? $(k+1)! \le (k+1)^k$ her zaman için yazabiliyoruz. Ne yapıyoruz biz tümevarım prensibinde doğru kabul ettiğimiz şeyi kullanıyoruz, biz bunu nasıl kullanıyoruz [*2. adımı gös.*]? Ya bunu olduğu gibi yazıp her iki tarafı çarpıyorduk, ya da bunun baş kısmını açıyorduk öyle

		kullanıyorduk ikisi de doğru diyorduk. Anladık. [*mı?*]
356	**MO**	Yani sen [*OG-11'e*] orada ikisini birden kullanıyorsun bir doğruluk gösteriyorsun ama tümevarımı kullanmıyorsun, tam tümevarım şeklinde düşünmüyorsun. Anladık mı bunu?

Ayşe Hanım ispatların oluşturulması esnasında hem genel olarak ispat mekanizmasına hem de yapılmakta olan tümevarım ispatına yönelik uygulama adımlarını sıkça vurgulayan bir anlayış içindedir. Uygulamada bir tarafı kullanarak diğer tarafı elde etmeye yönelik söylemlerin (268,335,352) ve tümevarımın üç aşamalı ve bu aşamaların sistematik bir biçimde uygulanmasına dayalı bir ispat yapma yöntemi olduğuna yönelik ifadelerin (252,256,280,286,292,299,319,325, 352,354) tekrarlı kullanımlarına rastlanmaktadır. OG-11'in modüler aritmetikten faydalanarak yaptığı alternatif ispat yaklaşımıyla (281,283,285) başlayan tartışma tümevarım mekanizmasının ne derecede kavrandığına ve bu algının gelişmesinde Ayşe Hanım'ın söylemlerinin nasıl etki ettiğine ilişkin bazı önemli örnekleri içermektedir. OG-11'in yaklaşımındaki ispat adımının mantıksal bir hatayı içerecek şekilde kurulmuş olmasına karşın üzerinde tümevarımın üç aşamasının uygulanabiliyor gibi görünmesi bazı öğrencilerin yapılan ispatın doğru olduğunu düşünmelerine yol açmıştır. OG-11 kendi yaptığı yaklaşımda, tümevarımın ikinci adımındaki doğruluğun kabul edilmesinin gerekli olmadığını zaten her zaman doğru olduğunu iddia ederek bu sorunun biraz saçma olduğunu öne sürmesinin (285) akabinde Ayşe Hanım'ın yapılanın yanlış olduğuna yönelik sunduğu temel dayanaklardan biri tümevarım mekanizmasının adımlarıdır (286,288,292). OG-11'in tümevarımın üçüncü adımını da göstermesi (293) hem (sadece mekanizma olarak) Ayşe Hanım'ın hem de bazı öğrencilerin yapılanın önceki (doğru) çözüm ile aynı şey olduğunu düşünmelerine (295,298) yol açmıştır. Akabinde Ayşe Hanım'ın, OG-11'in kabulündeki yanlışlığa yeterince değinmeden hatanın yine tümevarım mekanizmasının doğru uygulanmamasından kaynaklandığını (299) ima etmesi tartışmanın sürmesine neden olmuştur. Bir başka öğrenci OG-11'in yaptığı şeyin de bu mekanizmayı kullanmak olduğunu ve bu anlamda bir yanlışın olmadığını ima etmesi (300) üzerine, Ayşe Hanım OG-11'in yaptığı kabuldeki mantıksal hataya değinmeye çalışmış ancak bunu yeterince genişletmeden yine kuralın uygulanması esnasında yapılması gerekenin A gibi bir sayıda eşitlemek olduğunu söyleyerek (301) kural tabanlı açıklama yapma eğilimini sürdürmüştür. OG-11'in, öğretmenin istediği biçimde tahtada, önceki çözümü yapan diğer öğrencinin yaklaşımının da doğru olduğunu söylemesi üzerine bu sefer Ayşe Hanım doğru olan ispat yaklaşımı için ek bir tanımlama yaparak [o *tam tümevarım* şekliyle çözdü (303)] "tam tümevarım" ifadesini kullanmıştır. Bu tanımlama tümevarımın tam ve tam olmayan biçiminde farklı uygulama şekillerinin olabileceğine dair açık uçlu bir ifadedir. Bu kavramı Ayşe Hanım dersin sonunda tekrardan (356) dile getirmiştir. Ayşe Hanım sınıfa ispatlanması için benzer bir önerme daha sunduğunda (304) bazı öğrenciler yine OG-11'in yaklaşımı çerçevesinde yorumlar yapmaya başlamıştır. Bu durum öğrencilerin OG-11'in yaptığı ispatın yanlış ya da geçersiz olduğuna yeterince ikna olmadıklarının bir göstergesidir. Bir öğrencinin ispat yapmaya gönüllü olması ve tahtaya yazarken ispatın ilk adımında n'i 1'den başlatması, tümevarımda birinci basamağın nasıl uygulanacağına dair başka bir küçük tartışmayı (316-325) başlatmıştır. Öğrencilerin niçin kümenin ilk terimi alınarak doğrulamaya başlanması gerektiğine yönelik sorularına Ayşe Hanım "*tümevarımda bu böyle, verilen kümeye göre başlayacaksın (319), ama kümenin ilk elemanından başlıyoruz öyle anlatmadık mı? (324)"* biçiminde cevaplar sunmuştur. Ayşe Hanım'ın tümevarıma yönelik sunduğu bir diğer örnek ise eşitsizlik durumunu (327) kapsamaktadır. Bu uygulamanın sonlarına doğru bir öğrencinin "*niçin ikinciyi (doğru kabul edilen basamak) k+1 ile çarpıyoruz?(351)*" sorusu ve bir başka öğrencinin yapılanda bir hata olup olmadığına yönelik düşüncesini sunduğu "*iyi de biz ikinciyi kullanıyoruz(353)*" ifadesine karşılık Ayşe Hanım'ın yaptığı açıklamalar ise,

> *İkinciyi kullanacağız, doğru kabul ettiğimizi kullanmıyor muyuz tümevarımda, kullanıyoruz.*
>
> …
>
> *Ne yapıyoruz biz tümevarım prensibinde doğru kabul ettiğimiz şeyi kullanıyoruz, biz bunu nasıl kullanıyoruz [2. adımı gös.]? Ya bunu olduğu gibi yazıp her iki tarafı çarpıyorduk, ya da bunun baş kısmını açıyorduk öyle kullanıyorduk ikisi de doğru diyorduk. Anladık. [mı?]* (354)

biçimindedir. Tüm bunlar öğrencilerin tümevarımla ispat yapma mantığını kavramasında ve ispatta yer alan adımların anlamını fark etmede Ayşe Hanım'ın söylemsel tavrının sınırlı ve tek yönlü olduğunu ortaya koymaktadır. Ayşe Hanım, tümevarımla ispat yönteminin bir formül ya da kuralın tanımlı olduğu kümenin tüm elemanları için geçerli olan bir doğrulama işlemi olduğu ve bu amaçla kümenin ilk elemanı için yapılan doğrulamadan başlanarak sonrasında herhangi bir eleman için doğruluğunun kabul edilip onun ardışığı olan eleman için de doğruluğunun gösterilmesi gerektiğini kavratan, sezdiren açıklamalarda bulunmamakta ya da bir tartışma ortamının yaratılmasına çalışmamaktadır. Bunun yerine genellikle kuralın bu şekilde tanımlanıp uygulanması gerektiğini dile getirmektedir. Tümevarıma yönelik yapılabilecek bir dizi açıklama şu şekilde örneklenebilir;

Tümevarım yönteminde kümenin herhangi bir elemanının seçilerek ardışığı olan eleman için de doğrulamanın yapılabiliyor olması doğal sayılarla indislenen (sayılabilen) kümelerde tüm elemanlar için geçerli bir doğrulamanın yapılabileceğini göstermeyi sağlar. Ayrıca tümevarım tek bir teorem ya da önermenin ispatlanması değildir, k. önerme doğru ise (k+1). önerme de doğrudurun ispatıdır (Houston, 2010). Tümevarım adımları uygulanırken kümenin ilk elemanından başlanmaz ise formül ya da kuralı sağlayıp sağlamadığı kesin olarak bilinmeyen en az bir elemanın olabilecek ve bu da formül ya da kuralın doğruluğuna şüphe ile bakılmasına neden olacaktır. Ancak ilk önerme doğru ise diğer tüm önermeler de doğru olabilir. Ayşe Hanım söylemlerinde bu ve benzeri açıklamalara, bunların örnekler üzerinde tartışılmasına ya da yanılgıya düşülebilecek kısımlarda uyarılar sunmaya çalışmamaktadır. Dolayısı ile öğrenciler farklı tipteki tümevarım ispatlarını yaparken sorulan formül ya da kurala has matematiksel işlemleri ve geçişleri yapabilmelerine karşın genel anlamda tümevarım mantığını yeterince kavrayamamakta ve ispat adımlarının anlamını algılayamamaktadır. Ayşe Hanım’ın ispatları oluşturma aşamasındaki genel eğiliminin burada ele alınan tümevarım örneğindeki ile aşağı yukarı benzer olduğunu ileri sürmek mümkündür. İspatların yapılması sürecinde hızlı, kural tabanlı ve öğrencilerce soru sorulmadıkça ek açıklamalar ve tartışmalarla desteklenmeyen bir yaklaşım hakimdir.

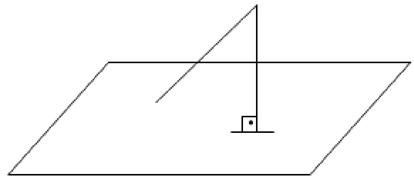
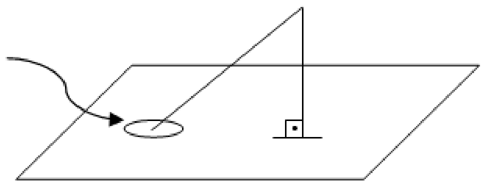
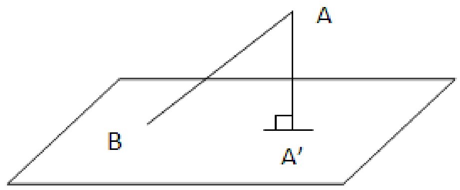
Ahmet Bey’in ispat yapma sürecindeki eğilimlerini iki kategoride değerlendirmek mümkündür. Birincisi öğrencilerin ön bilgileri çerçevesinde yapabilecekleri ve onlarla birlikte yapılan ispatlar, ikincisi ise ön bilgileri ile formal bir ispatın yapılamayacağı ancak alternatif yaklaşımlarla doğrulamanın farklı bir şekilde gösterilmesini içeren uygulamalardır. DS-2 ve DS-3 birinciye, DS-12 ise ikinci kategoriye yönelik örnekleri içermektedir. İkinci kategorideki ispatlarda söylemlerin büyük bölümü Ahmet Bey’in aktarımlarından oluşmakta ve öğrencilerin sürece aktif katılımı olamamaktadır. Ancak bu tür ispatlar farklı akıl yürütmeler ile farklı biçimlerde ispat yapılabileceğini örneklemektedir. Öğrencilerin DS-12'de yapılan iki ispatı da izleme, anlama ve yorumlamada gayretli oldukları görülmektedir.

Birinci kategoride yer alan ispat yapma süreçleri içerisinde Ahmet Bey'in söylemlerindeki eğilimi belirlemek amacıyla aşağıda (Tablo-25, DS-2'den seçilen bir kesit sunulmaktadır.

Tablo 25

Ahmet Bey'in İspat Yapma Sürecindeki Söylemsel Eğilimine Yönelik Kesit

DS-2		
1	**GO**	Peki, şöyle bir teorem yazalım, dikme ve eğikler ile ilgili bir teorem. [*2–3 saniye bekledi.*]
2	**GO**	Bir düzleme dışındaki bir noktadan dikme ve eğikler çizildiğinde, 3 şeyi ispatlayacağız. [*Tahtaya gelip yazmaya başlıyor, hem söylüyor, hem yazıyor.*] *a)* Dikme eğiklerden kısadır. *b)* Uzunlukları eşit olan eğiklerin ayakları, dikme ayağından eşit uzaklıktadır. *c)* Eğik ayağı, dikme ayağından uzakta olan eğik diğer eğiklerden daha uzundur.
3	**GO**	Her biri için ayrı bir şekil çizerek ispatlayacağız. Herkes kendi başına uğraşsın. [*OG–11 alçak sesle kendi gösterimine ilişkin bir şeyler soruyor defterinden ve GO eğilerek bazı şeyler söylüyor ve soruyor.*]
4	OG-11	..., buraya kadar düşündüm,… şunun hipotenüs olduğunu göstersek ama mesela şurada...
5	**GO**	Orası dik üçgen olur mu?
6	OG-11	Olmaz ki!
7	**GO**	Niye olmasın?
8	OG-3	Haaa, şöyle olursa [*eliyle havada dik üçgeni oluşturmaya çalışıyor mırıldanarak*] [*OG-5 o sırada bir şeyler soruyor.*]
9	**GO**	[*OG–5' yönelik*] Harflendirip göstereceksin. Peki, Pisagor mu kullanırsın, yoksa eş üçgen yöntemini mi kullanırsın, sen bilirsin.
10	OG-13	Harflendirmesek de ... yapsak, yanlış mı?
11	**GO**	[*OG-13'e yönelik*] Neye dayanarak yapıyorsun?
12	OG-13	Hipotenüs teoremine.
13	**GO**	Hı hı, öyle diyeceksin. [*Dayanağı kabul ediyor.*]
14	OG-7	Hocam bunları [*tahtadaki şıkları kastediyor*] sözel olarak mı?
15	OG-11	İspatlayalım mı? [*Ardından OG–7' ye*] İspatlayabilir misin?
16	**GO**	[*OG-11'e yönelik*] Gel bakalım, sil sol tarafı. [*Tahtayı kastediyor.*]
17	**GO**	Önce şekli çizelim.
18	OG-9	Hocam böyle mi ispatlayacağız?
19	**GO**	[*OG- 9' un sorusu sonrası sınıfa dönerek*] olabilir, şimdi tahtada yapacağız, biraz daha matematiksel anlatmaya çalışalım. Düşüncelerini sözel olarak ifade etmişsin doğru ama biraz daha yazarsan. Noktaları yerine yazarsan A,B deyip hipotenüs oluyor, o yüzden uzunluğu AC 'nin uzunluğundan küçük.
20	OG-9	Haa, anladım!
21	**GO**	Öyle yazacağız.

		 [*Bu arada OG–11 tahtaya çizdi*
22	**GO**	[*tahtaya bakarak*] ... Evet, bir eğik çizdi ve bir dikme çizdi.
24	**GO**	Yaz daha aşağıya yaz. [*Eğik in alt kısmını kastediyor.*] [*Tahtaya gelip parmağıyla gösteriyor.*]
25	OG-11	Evet, ben de öle yapacaktım.
26	**GO**	Orada dursun, mesela şurada bir yerde dursun. 
27	OG-11	Şöyle bir şey göstereyim defterle, kalemle. [*Eline kâğıt, tahta kalemi alıyor.*] Şimdi mesela bu, [*dik olan kalemi kastetti*] bunun dik olduğu düzlem aynı noktadan bu hipotenüs düzlemi keseceği için ister böyle olsun yahut ister böyle olsun. [*Düzleme dik kalemin ucuna dokunan diğer kalemi kastediyor.*]
28	OG-11	Bizim gördüğümüz normalde aynı uzunluk ama önde ya da arkada gördüğümüz için [*tahtadaki eğik ve dikmeyi gösteriyor*] kısa ya da uzun gibi görüyoruz.
29	**GO**	Evet, her defasında… Tut onu o şekilde. [*OG-11'e hitaben*] Her defasında dik üçgen oluşur değil mi orada?
30	OG-11	Evet.
31	**GO**	Siyah kalemi nasıl tutarsan tut, şöyle tutuyoruz, şöyle tutuyoruz, her defasında bir üçgen oluşur, çünkü eğer bir doğru düzleme dikse onun içinde bulunan bütün doğrular diktir ya da dik durumludur demiştik. Yani nasıl durursa dursun oraya diktir. [*Hala kâğıt kalemle sınıfa gösteriyor.*]
32	**GO**	[*OG-11'e*] harflendir. Buraya A de, B de, A' de. [*Aynı anda OG–11 şeklin üzerine A, B, A' yazıyor.*] 
33	**GO**	Tamam, B ile A' nü birleştirelim.
34	OG-11	Tamam.
35	**GO**	Şimdi verilenleri önce bir yazalım. Buraya şöyle diyelim. [*Şeklin solundaki boşluğu gösteriyor.*] AA′ diktir. [*OG–11* $AA' \perp$ *yazdı.*] Uzunluk değil.
36	OG-11	Haa!
37	**GO**	AA′ diktir, şu düzlemin bir adı olsun, D, E gibi bir şey de. [*Öğrenci D yazdı*] D düzlemi.
		(th: $AA' \perp (D)$) Güzel. [*OG-11 'e*] sonra?
38	OG-11	AB eğiktir.
39	**GO**	B eleman D düzlemi de.
		(th: $B \in (D)$) -Tamam, şimdi?
40	OG-11	AA′ doğrusu ile B.
41	**GO**	B'yi A′ ile birleştirdik. Onu yazsanız da olur yazmasanız da olur. Yazalım. - BA′ doğru parçası çizildiğinde [*aynı anda OG–11 yazıyor*] ne diyeceğiz? Bunun dik üçgen olduğunu söyleyeceğiz, değil mi?

		-Yaz. ABA′ dik üçgen olur. Bunun sebebini söylememiz gerekiyor.
		(th: BA′ çizildiğinde ABA′ dik üçgen olur.)
42	OG-11	Hocam bunlar dik durumlu.
43	**GO**	Evet, yaz, AA^{l} dik D düzlemi ve $A^{l}B$ eleman daha doğrusu alt küme D düzlemi olduğu için AA^{l} diktir $A^{l}B$ ‘ye.
		(th: $[AA' \perp (D)] \wedge [A'B \subset (D)] \Rightarrow AA' \perp A'B$)
44	OG-11	AB bu üçgenin hipotenüsü, AA′ dikmesi de ondan mutlaka kısadır.
45	**GO**	Evet, o zaman şöyle yazalım. [*Aynı anda öğrenci tahtaya yazıyor*.]
		(th: |*A ł*| $>$ $\|AA'\|$) -İspatla ilgili sorusu olan var mı?
46	OG-3	Hayır.
47	OG-5	Kareyi çizebiliriz artık. [*OG–11 tahtaya* |*A ł*| $>$ $\|AA'\|$ *yazdı*.]
48	OG-5	Hayır, o değil ya.
49	**GO**	[*Gelip yanına gösteriyor*.] $\|AB\| > \|AA'\|$ -İspatlarda daha önce yapmıştık. [*En son eşitsizliği kastediyor*.]
50	OG-11	[*Yerine doğru yürürken*] Yapıyorduk da şimdi unuttum.
51	**GO**	--İspatı yaparken tabi bir kendimizi ikna etmek var, açıklama yapmak var, bir de ispat yapmak var. --İspat yaptığın zaman onun herkesçe aynı olması gerekir, ortak bir dille yazmamız gerekir.
52	**GO**	Ve mümkün olduğunca şekli baştan takip ediyorum. Verilen neydi AA′ nün (D) düzlemine dik oluşu. B de onun üzerinde bir nokta, bir eğik ayağı olduğunu anlatan. Ya da bunu yazı ile de yazsan olur. B eğik ayağıdır diye.
53	**GO**	Sonra göstermek istediğin nedir? [*tahtaya yazılı olanlar üzerinde* $\}\Longrightarrow$ *işaretini kullanarak*] AB’ nin AA′ ‘ den uzun olduğu.
		(th: $\left.\begin{array}{r} AA' \perp (D) \\ B \in (D) \end{array}\right\} \stackrel{?}{\Longrightarrow} \|AB\| > \|AA'\|$) - Göstermek istediğim buydu. Şimdi BA′ nü çizdiğimizde BAA′ dik olur. Ama neye dayanarak dik olur? Onu yazmamız gerekiyor. - Neye dayanarak dik olur OG-1 ? [*OG-1’e soruyor ve 10–12 saniye bekliyor*.] Şuraya dik değil mi? Bu buraya neden diktir? [*A A′’ nün A′B’ ye olan dikliğini gösteriyor*.]
54	OG-1	Çünkü düzleme dik, B düzlemin içinde.
55	**GO**	Evet, çünkü AA′ düzleme dik bir doğru, bu da onun içinde dik bir doğru, o zaman her doğruya dik olacağı [*düzlem içindekini kastediyor*] için AA′ diktir AB diyoruz.
56	**GO**	Peki, şimdi b’ yi bu şekilde ispatlamaya çalışalım.

Ahmet Bey ispatlanacak ifadeyi sınıfa yönelttikten sonra bir süre öğrencilere zaman tanıyarak kendi yaklaşımlarını yapmalarını istemektedir (3). Bu süre zarfında öğrencilerin yaptıklarını defterlerine bakarak kontrol etmekte ve sorularına yanıt vermektedir. Ahmet Bey’in bu aşamadaki tavrı sorulana direk açık yanıt sunmak değil yanıtı bulmaya yönelik düşünme, yönlendirme yapmak şeklindedir (4-15). Sonraki aşamada, bir öğrenciyi tahtaya kaldırarak ispatın onunla tahtada soru-cevap yöntemine ve yapılacak olanı adım adım söyleme ve yazdırmaya dayalı bir şekilde yapılmasını sağlamaktadır. Bu aşamada var olan söylemler Ahmet Bey ile tahtadaki öğrencinin diyaloglarından oluşmaktadır (21-45). Bu ikili diyalog esnasında matematiksel bilgiler, yapılanlar ve gerekçeleri ayrıntılı biçimde ifade edildiği için genellikle sınıftaki diğer öğrencilerden sorular gelmemekte, dinleme ve izleme gerçekleşmektedir. İspatın tamamlanmasının ardından Ahmet Bey yapılanları kısaca tekrar etmektedir (52-55). Ahmet Bey'in ispatlar esnasındaki eğilimine dair söylenebilecek bir diğer şey ise ispatların *verilen(ler)--gösterilmesi istenen şey* biçimindeki iki kutuplu mekanizmasına yönelik sorular, sözel açıklamalar (35,52,53) ve matematiksel sembollerin kullanıldığı yazımlara (19,32,35,37,39,43,45,49) sürekli vurgu yapıyor olması ve öğrencilerin de bu mekanizma çerçevesinde ispat yapmalarını istemesidir. Ahmet Bey'in ispatları öğrencilerle birlikte yaptığı derslerdeki genel eğiliminin buradaki (DS-2 kesiti) ile benzer olduğu ileri sürülebilir.

Yukarıdaki bilgiler sonrasında bu bölümde öğrencilerin ispata yönelik bilgileri, kavramsal anlamaları ve ispat yapmadaki yaklaşımları ele alınacaktır.

(c) Öğrencilerin İspat ve İspatlamaya Yönelik Söylemleri ve İspatların İnşası Esnasındaki Genel Yaklaşımları: Öğrencilerin DS'ler içerisinde ispat ve ispatlamaya yönelik düşüncelerini, görüş ve yorumlarını dile getirmedikleri, sadece derste o an yapılmakta olan ispata dair gerekli matematiksel uygulamalar hakkında konuşmalar yaptıkları görülmektedir. Bu nedenle öğrencilerin ispata yönelik söylemleri listelenirken TES'ler içerisindeki ifadelerinden alıntılar yapılmıştır. Aşağıda TES'lerden seçilen öğrenci söylemleri sıralanmaktadır.

TES-1

169	**MO**	*Peki, ispat nedir? İspat.*
170	B-OG	Kanıtlama.
172	OG-8	Bir tarafı kullanarak diğer tarafa ulaşma. [*OG-2 de benzer bir şey söylüyor*]
173	OG-11	Yalnızca bir tarafı kullanacağız ama.
174	**MO**	*Bir tarafı kullanarak dediğiniz nedir? Acaba hipotezi mi kullanacağız?*
175	B-OG	Hipotezi, hipotezi, hükmü.
178	**MO**	*Tümevarım bir ispat şekli değil mi? Neydi tümevarım, hatırlayan var mı?*
180	OG-8	k=1 için doğruluğunu gösteriyoruz, k=k için doğruluğunu kabul ediyoruz.
181	B-OG	n, n eşittir [*OG-8 in sözünü düzeltiyorlar*].
182	OG-8	n=k için doğruluğunu kabul ediyoruz, n=k+1 i k cinsinden yazıp eğer doğruluğunu görürsek o zaman doğrudur diyoruz.
184	OG-5	Bir de tümdengelim var.
185	OG-8	O felsefede.
186	OG-4	Matematikte tümdengelim var mı? [*soru ihmal ediliyor*.]
309	OG-5	Mesela güzel formüller gösterebiliyoruz tümevarımla.

TES-2

1	**MO**	*İspat yapma yöntemleri nelerdir?*
2	OG-11	Bir tarafı kabul edip öbür tarafı elde ediyoruz.

9	**MO**	*…bakın gayet güzel, OG–11' in dediği gibi sol tarafı kullanıp sağ tarafı elde etme.*
10	OG-11	Ya da sağ tarafı kullanıp.
11	**MO**	*Sol tarafı elde etmede ispat yöntemleri neydi OG–8 bir söyleyelim bakalım.*
12	OG-8	İkiye ayrılıyordu, aksine ispat, bir de doğrudan ispat diye.
22	OG-11	Mesela olmadığını yani her x, o x' in dışında hiçbir değerin sağlamadığını, kesin olarak sağlamadığını gösterirsek bu da ispat olur değil mi? Tam tersinin kesin olduğunu.
23	OG-7	Yanlışlığını yani diyor.
24	**MO**	*Olabilir niye olmasın.*
25	OG-11	Ama olmayabilir, bütün x' ler sağlamayabilir.
26	**MO**	*Sağlamayabilir, peki başka, var mı başka?*
27	OG-11	Tümevarımla yapabiliriz.
29	OG-2	Tümdengelim [*OG–7 de söylüyor aynı anda.*]
30	**MO**	*Tümdengelim nedir?*
31	OG-6	Genelden özele.
32	**MO**	*Nasıl? Bir örnek verin.*
33	OG-5	Tümden işte, geriye doğru.
34	OG-3	Yani bir şeyi kabul edip özele iniyoruz.
35	OG-7	Şöyle bir şey olabilir mi? Mesela biz tümevarımla şeyi ispatlıyorduk ya?
37	OG-7	Mesela $1^2+2^2+3^2+\ldots$ öyle gidiyor ya mesela bunun işte $n.(n+1).(2n+1)/6$ olduğunu söylemiştik.
39	OG-7	Mesela $n.(n+1).(2n+1)/6$ neyi, neyi verir bize diye gidip oradan $1^2+2^2+\ldots$ falan diye.
40	**MO**	*Bulabilir miyiz?*
41	OG-8	Şey diye görmüştük felsefede.
43	OG-8	11-Fen çalışkandır. OG–1 11-Fen' in öğrencisidir, o zaman OG–1 çalışkandır, bunu tümdengelim olarak gördük.
68	OG-8	… [ispat] en azından bir Fen Lisesi öğrencisi için önemli, ya ispat bir şeyin kanıtıdır yani, onun doğru olduğuna bir dayanaktır; ben bir şey söylerim, ispatını yapmadıkça doğrudur ya da yanlıştır karşımdakine açıklayamam doğrudur ya da yanlış olduğunu.
69	**MO**	*Peki, ispatladığınız bir şeyi problemlerde daha hızlı… [2–3 saniye bekliyor.]*
70	B-OG	Çözebiliyoruz.
72	OG-7	Kısa bir yoldan yapabiliyoruz.

TES-3

1	**MO**	*Sizce ispat yapmanın öğrencilere faydası var mıdır?*
2	OG-9	Bence yoktur.
3	OG-8	Bence vardır, çünkü yani o ispatı yaparken, görürken yani onu kim ispatladıysa onun nasıl düşündüğünü, matematiğe bakış açısını da görmüş oluyoruz.
4	**MO**	*Ne kazandırır sizce, yani bir ispat yöntemini öğrendiniz, size ne kazandırdı?*
5	OG-5	Daha iyi anlamış oluruz, bence tek artısı o başka bir artısı yok.
6	OG-7	Farklı yollardan çözüme gitmeyi öğretir.
8	OG-9	Bence, şey anlamadığımız bir şey üzerinde nerden geldiğini anlarız.
9	**MO**	*Peki, ispat sizin için ne kadar önemlidir?*
10	OG-9	Önemlidir hocam çünkü bir şeyin nereden geldiğini yani mantığını anlarız. Mesela bir matematik ispatı yapıyorsak, matematiğin mantığını anlarız, bakış açılarını öğreniriz.
11	OG-5	Öbür türlü ezberlemiş oluruz.
12	OG-8	Mesela ben bir şeyin ispatını görmediğimde onu unutuyorum, ispatı gördüğümde unutmuyorum.
15	OG-6	Sorgulama gücünü geliştirir.
19	**MO**	*Peki, matematikte neleri ispatlarız?*
20	OG-7	Valla mümkün olabilen her şeyi ispatlarız.
21	OG-5	İspatlanabilmesi mümkün olan her şeyi!
22	OG-3	Sağ ve sol varsa mutlaka ispatlarız.
23	**MO**	*Ne demek sağ ve sol?*
24	OG-3	Yani bir tarafı kullanarak diğer tarafı elde ediyorduk ya, orada yani.

25	**MO**	Yani onu öğrendin, sağlama yapmıyorsunuz değil mi? Bir tarafı kullanıp diğer tarafı elde ediyorsunuz.
26	OG-9	Hocam sağlama ispat değil midir yani?
27	**MO**	*Sağlama ispat olabilir mi?*
28	OG-11	İspatı doğrulamadır.
30	OG-9	Ne bileyim sağlatıyoruz bir şeyi, bulduğumuz sağlıyorsa demek ki doğrudur.
31	OG-11	Ama her x için sağlar mı? Orada her önemli!

TES-4

1	**MO**	*Bir ispat yapılırken nelerden yararlanılır?*
2	OG-8	Bir ispat yapılırken o konuya ait özelliklerden yararlanılabilir, örneğin logaritma yapıyorsak taban değiştirme olabilir mesela, ayrıca başka ispatlanmış şeyleri de kullanabiliriz.
4	OG-7	Mesela bir konuda ispat yaparken o konuyla bağlı olmayan farklı yollardan gidebiliriz, mesela atıyorum logaritma ile ilgili bir ispat yaparken tümevarımı kullanmak hani, aynı konu için de değil taban değiştirme gibi farklı bir konuyu da kullanabiliriz. Ondan sonra matematiksel simgelerden yararlanabiliriz.
6	**MO**	*Peki, ispat yapılırken işe nasıl başlarız?*
9	OG-6	Bir tarafı ellemeden diğer taraftan başlarım.
19	OG-11	Önce verilenleri bir toplarız, bizden istenene ulaşmaya çalışırız.
20	**MO**	*Ha, verilenleri kullanıp isteneni elde etmeye çalışırız.*
21	OG-9	Ama nasıl başlarız, amacı bilmek sorun.
41	OG-11	Deneyerek yapmak, sonsuz kere deneyerek ispatlayabiliriz ama birde normal yöntemle ispatlasak, ispatlanması gereken yöntemle ispatlarsak daha şık olur.
46	OG-3	Genelleme yapılarak ispata ulaşır.
47	OG-4	Hayır, ispat yaparak genelleme olur.
48	OG-8	İspatla ulaşınca genelleme yaparsın.
49	OG-3	Haa, evet.
50	OG-4	İspat genellenirse ispat olur. [*Sınıfta gülüşmeler oluyor.*]
51	**MO**	*Ne dedin?*
52	OG-4	İspat belli bir kısım sayıları sağlamayacak, bütün her şeyi sağlarsa harbi ispat olur.
53	OG-7	Bir de bir genellemeyi bozmak için de ispat yapılabilir.
54	**MO**	*Ne yönden nasıl bir şey mesela?*
55	OG-7	Mesela, bütün ördekler beyazdır diyorlar, ama mesela doğada beyaz olmayan ördekler de var, bu bir genelleme ama yanlış çünkü doğada bir tane siyah ördek gösterdim işte ispat yanlış genelleme olmuyor.
61	OG-12	…ispatladıktan sonra onun kısaca formülünü buluyoruz ya günlük yaşamda da hiç uğraşmadan hız kazanarak şey yaparız yani. Hız kazandırır bize.
63	OG-8	Trigonometride ispat yaptık, artık ispatıyla uğraşmadan kolayca yapıyoruz.
64	OG-9	Mesela ÖSS de oturup ispatlamıyoruz.
65	OG-3	Günlük yaşantımızda ÖSS' yi kazanmamız lazım, ÖSS' yi kazanmak için hızlı olmamız lazım, hızlı olmak için ispatladığımızdan direk bildiğimiz için kullanabiliriz.

TES-5

11	OG-7	Bence ispat böyle soyut zeka ile yapılan bir şey olduğu için yani soyut zekanın gelişimine bağlı olarak 8. sınıf veya 9. sınıf lisede falan başlaması gerekir.
43	OG-2	Bir de şey hocam, matematiksel ispatta belirli şeyleri kabul ederek ispatlıyoruz.
57	OG-2	Hocam o zaman çoğu ispatta n = R (Reel sayılarda) diyoruz, kısıtlı bir yerde ispat yapabiliyoruz ama.
98	**MO**	*Peki, ispatlar olmadan da matematik yapılabilir, katılıyor musunuz?*
99	B-OG	Hayır.
104	OG-6	Niye, yapılır yani. [*bence*]
105	**MO**	*Yapılır değil mi! Ne yapılır mesela?*
106	OG-6	Anlamadan yapılır, onun nerden geldiğini anlamazsın, ama yaparsın. Sonuca ulaşırsın.
107	OG-12	Ama o, formülden de ispatla çıktı yani. [*ispatlandığı için*]
108	OG-6	Tamam, da hazır formülü kullanırsın sen!

109	OG-9	Ama o formülü ispatla buluyorsun.
110	OG-3	İspatlaman lazım. [*formülü*]
112	OG-4	Tamamda formülü bulmak için ispat lazım işte.
113	OG-6	Hazır bulunmuş ama zamanında.
114	OG-3	Zamanında ispat yapılmış işte. [*OG-6'ya karşılık*]
116	OG-6	Ben şu andan konuşuyorum.
117	OG-7	İyi ama yanlışı yapa yapa doğruyu bulmuşlar zamanında, ispatsız da matematik oluyor yani.

TES-7

2	OG-5	Geometride ispat yapmak daha zor!
4	OG-5	Daha uzun, daha karmaşık bir süreç, uğraş gerektiriyor.
6	OG-5	Mesela tümevarımda biz kolaylıkla yaparız o tip ispatları ama burada daha fazla uğraş gerekiyor, belli bir yolu yok uğraşarak bulunuyor.
8	OG-12	Matematikte önemli olan işlem, işlemi bildikten sonra uzun olanları bile yapabiliyorsun ama geometride hem şekli çözeceksin hem de işlemler var.
10	OG-4	Hocam geometride hem cebir var ispatta, hem de şekil var, mesela A,B,C gibi harfler veriyoruz ve onların arasında işlemler yapıyoruz. Matematikte öyle değil, şekil yok en azından.
12	OG-9	Hocam geometri ispatlarında hem geçmişten gelen bilgilerimizle yorum yaparak o soru için ayrı bir şekil çizmemiz gerekiyor, o şekil üzerinden sorularını bulmamız gerekiyor.
16	OG-8	Geometrideki ispat yöntemleri arasında alanlara parçalama, açıortaylardan yararlanma, kenarortaylardan yararlanma tarzında veya Pisagor'u sağlayarak iki eş üçgenlerden yararlanarak gösterebiliriz; fakat matematikte bunları yapamayız, matematik daha fazla sayılara dayanıyor.
18	OG-3	Bence; matematikteki ispat daha zor geometridekinden, yani geometride bir şeyi görünce gerisi geliyor.
19	OG-12	Göremezsen.
20	OG-3	Göremezsen gelmiyor.
22	OG-13	Matematikte belli bir yere kadar götürebilir.
24	OG-6	Matematikte daha yöntemler belirli böyle, mesela tümevarım kalıplaşmış çoğu şeyde ispatlar da kullanılıyor.
28	OG-6	Evet, geometride ise önce göreceksin, ona göre şekil ve yorumlar yapacaksın.
30	OG-7	Ben şöyle düşündüm; matematikte daha önce ispatlanmış şeyden gidebiliriz, işimizi kolaylaştırır ispat yaparken, ama geometride daha önce ispatlanan şeyi de ispatlamamız gerekiyor ispat yaparken, ondan dolayı daha karmaşık.
38	OG-2	Hocam bir de geometride matematikten daha kesin sonuçlar elde ederiz, çünkü geometri sonuçta görsel bir ders olduğu için görerek yapıyoruz ama matematikte bir şeyi ispatlamak için önce belli kuralları kabul etmeniz gerekiyor, ona göre doğru olup olmadığı ispatlanıyor.
40	OG-2	Ama geometri kadar kesin, ispat kesin sonuç veremiyor.
70	OG-7	Mesela biz tümevarımla ilgilendik bu yıl matematik derslerinde falan, geometride mesela hocam sonuç neyse o yani, atıyorum mesela sonuç $3\sqrt{3}$ çıkıyor $3\sqrt{3}$, ama yani matematikte ispat yaparken sonucu nasıl buluyorsak mesela (k+1).(k+2) çarpı … bölü 3 gibi onu daha değişik şekilde de bulabiliriz yani.
71	**GO**	*Tabi birkaç farklı ispat! Geometri de de sanki olur gibi geliyor bana.*
72	OG-11	Hatta daha fazla olur.
74	OG-11	Bir alan hesaplaması mesela…
75	**GO**	*Bir alan kullanırsın, bir başka yöntem kullanırsın eşlik, benzerlik kullanırsın.*
76	OG-8	Dörtgenin alanında yapmıştık, hem paralel çizerek kanıtlamıştık, hem de alt taban artı üst taban.
78	OG-8	Bir de hocam geometride ispat, bir şeyin ispatı başka bir sorunun çözümünde yardımcı da olabilir.
79	**GO**	*ispatları boşuna yapmıyoruz. Onlar sizin çözüm teknikleriniz olacak sorularda. Direk özellik soran bir soruyla kolay kolay karşılaşmazsınız,*
80	OG-4	Ama hocam, ÖSS' de bir soruyu yaparken ispat kullanmak, bir sürü zaman götürüyor.

Öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik söylemleri hem TES'lerin içerisinde yer alan (araştırmacı tarafından hazırlanan) sorular hem de TES'lerin uygulanması esnasında öğretmenlerce yöneltilen ek soru ve açıklamalar çerçevesinde oluşmuştur. Öğrenci söylemlerinde, belli ölçüde öğretmenlerin yönlendirmeleri bulunmakla birlikte öğrencilerin pek çok kez kendi düşüncelerini de ortaya koydukları görülmektedir. Öğrencilerin söylemlerinde hem her iki öğretmenin de temel vurgusu olan ispatın matematikteki işlemsel uygulamalarda kolaylık sağlayan formül, kural, yol, yöntem bulunmasını sağlamada yararlı olduğuna, hem de ispatın sahip olduğu fonksiyonlara yönelik ifadeler bulunmaktadır. Bu tür ifadeler, *ispatın bir şeyin doğruluğuna dayanak oluşturması*, *ispatı yapan kişinin düşünme şekli ve matematiğe bakış açısını görebilme*, *bir şeyin nereden geldiğini anlamayı sağlama* biçiminde örneklenebilir. Öğrencilerin ispatlara ilişkin genel görüş ve düşüncelerini yansıtan bu tür söylemlerin yanında sahip oldukları bilgileri yansıtan söylemleri de bulunmaktadır. İspat ve ispatlamaya yönelik bilgilerini barındıran söylemlerde; *matematikte tümdengelimin var olup olmadığı*, *sağlama yapma ile ispat yapmanın aynı şey olup olmadığı*, *ispatta bazı şeylerin kabul edildiği ve bunların da ispatın yüzde yüz kesin olmasına engel olabildiği*, *genelleme ile ispat ilişkisi*, *ispat yapma yöntemleri* ve *geometrideki ispatlar ile matematikteki ispatların kesinlik, kolaylık* açısından kıyaslanması tartışılmaktadır.

Yaklaşımlar: İspatlar öğretmenler tarafından ifade edilip tahtaya yazıldıktan sonra fırsat tanınması durumunda öğrenciler (tahtada) ispat yapmak için gönüllü olmaktadır [örn. DS-2:(59),(64), DS-3:(1), DS-8:(28), DS-9: (190),(245),(257),(314), DS-10:(138), DS-13:(40)]. Nadiren de olsa öğrencilerin, ispatların formal şekilde yapılması yerine soru çözme alışkanlıklarında olduğu gibi [DS-2:(10),(14)] ya da sözel olarak konuşma biçimde [DS-4:(37),(39),(57)] yapılmasını talep ettiği görülmektedir. Öğrencilerin, ispatlama aşamasında genellikle verilen-istenen mekanizmasını ifade etmedikleri, sembol ve notasyon kullanımına da (tümevarım hariç) titizlik göstermedikleri gözlenmektedir. Yapılan bir ispata yönelik alternatif yaklaşımlar geliştirme çabasına (OG-11'in DS-9 daki yaklaşımı hariç) girilmemektedir. Daha önceden bilinen ya da önermede ifade edilen şeyin kolayca algılanabildiği durumlarda ispatın yeni bir yolla yapılması yerine daha kolay olan yolun benimsendiği ya da ispat yapmada isteksizlik olduğu görülmektedir. [örn. DS-11: (69),(107), DS-9: (304)]. Öğrenciler, genellikle yapılan bir ispatın adımlarını izleyebilmekte ve ispat için gerekli düşünme biçimini de kavrayabilmektedir [DS-DS-11: (107) hariç]. İspatların ardından yapılan örnek ve alıştırmalarda da ispatlarla elde edilen bilgileri (formül, kural, çizim yapma gibi) kullanmada büyük sorunlar yaşanmamaktadır. Sınıftaki öğrencilerin geometri derslerinde öğretmenle birlikte yaptıkları ya da sadece öğretmen tarafından yapılan ispatlara yönelik ilgisi matematiktekilerden biraz daha fazla gözükmektedir.

(d) Öğrencilerin Araştırmacı Tarafından Seçilen Bir Teoremin İspatlanmasına Yönelik (Yazılı ve Sözlü) Söylemlerinin Doğası: Araştırmanın son döneminde TES uygulamalarının bitmesine yakın araştırmacı ile Ayşe Hanım arasında geçen bir konuşmada Ayşe Hanım kendi işlediği konularda planladığı sürecin biraz önünde olduğu ve fazladan bir uygulama yapmanın mümkün olduğunu belirtmiştir. Bu aşamada, yeni bir TES uygulaması yapmak yerine bir ispat yapma etkinliğinin yapılabileceğini belirten Ayşe Hanım'ın önerisi araştırmaya (sınırlı da olsa) ek veri kaynağı sağlaması açısından yararlı görülmüştür. Yeni uygulamada, öğrencilerden ispatı istenecek olan teoremi/önermeyi araştırmacı kendisi belirlemeyi talep etmiş ve Ayşe Hanım bu talebi kabul etmiştir. Araştırmacının belirlediği teorem "***iki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır***" biçimindedir. Araştırmacı bu teoremi, ifadesinin basit ve anlaşılır olması, az sayıda ön bilgi kullanımını gerektirmesi, daha önce bu ve benzer tarzda bir ispatın sınıfta yapılmamış olması ve özgün bir düşünme tarzını gerektirmesi nedeniyle seçmiştir. Aşağıdaki tabloda (Tablo 26) bu teoremin uygulandığı derste oluşan sınıf içi sözlü söylemler yer almaktadır. Uygulamanın yapıldığı gün iki öğrenci proje yarışmasına katıldığı için tabloda 11 öğrencinin söylemleri bulunmaktadır. İzleyen bölümde bu tablo ve öğrencilerin uygulama esnasında (bireysel olarak) kâğıt üzerinde yaptıkları yaklaşımlar içeren bulgular sunulmaktadır. Araştırmacı teoremin ispatına yönelik öğrenci söylemlerinin, içerdikleri ifadeler açısından 6 başlık (1-*ifadenin doğruluğunu örnekler üzerinde deneme*, 2-*ispat yapmaya yönelik düşünce ve yöntem*, 3-*tanımlar*, 4-*teoremin ifadesini yorumlama,* 5-*alternatif yaklaşım* ve 6-*sıkıntı yaşanan anlar*) altında toplanabileceğini gözlemlemiş ve incelemesini bu başlıklar altında gerçekleştirmiştir.

Tablo 26

Araştırmacı Tarafından Seçilen İspatın Uygulanmasındaki Söylemler

	7-50	26 MAYIS-Pzt (Mat-4) TES-6 (Sözlü Tartışma ve Yazılı Uygulama)	Başlık
2	**MO**	***Örnek verin kendinize göre bir yorumlayın bakalım.***	
3	OG-13	Örnek versek olur mu?	**--**
4	**MO**	***Tabi, ne istiyorsan, nasıl düşünüyorsan!***	
5	OG-3	İyide o ispat olmaz ki!	**2**
6	**MO**	***Ne demek istedim, örnek ver derken kafanda bir şey canlandır.***	
7	OG-13	1 ile 2 arasında $\sqrt{3}$ var, irrasyonel sayı olur mu?	**1-3**
8	**MO**	***Bilmem artık sen karar ver.***	
9	OG-8	İrrasyonel köklü sayı oluyor, yani 4 ile 16 arasında 9 var öyle düşünelim, 2 ile…	**3-1**
10	**MO**	***Herkes kendi yorumunu kendisi yapsın.***	
11	OG-1	İrrasyonel ne?	**3**
12	**MO**	***İrrasyonel köklü sayılar*** $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ ***gibi.***	
13	OG-1	Bir iki sayıyla göstersek olur mu?	**2**
14	**MO**	***Artık siz kendinize göre kendi kanıtınızı yapın bakalım.***	
15	OG-4	x 'li falan göstermek lazım.	**2**
16	**MO**	***Birbirinize bakmadan herkes kendi kendine yapsın.***	
17	OG-5	Hocam irrasyonel sayı köklü sayı değil mi?	**3**
18	OG-2	Hocam doğru değil ki bu. *[Verilen önermeyi kastediyor.]* -1 ile -2 arasında.	**1-3**
19	**MO**	***İyi düşün bakalım.***	
20	OG-2	Eksi kök yok ki.	**3**
21	OG-8	- $\sqrt{3}$ *[var]*	**3-1**
22	B-OG	*i* var.	**3-1**
23	OG-9	Karmaşıklarda irrasyonel.	**3**
24	OG-3	Hocam buradaki bir *[ifadesi]* sadece bir *[tane]* anlamında mı, 2, 3, 4 tane de olabilir mi?	**4**
25	**MO**	***Bir tane vardır diyor yani.***	
26	OG-9	En az 1.	**4**
27	OG-3	En az 1, çok sayıda var işte. *[çünkü]*	**4**
28	OG-8	- $\sqrt{3}$ irrasyonel sayı mı?	**3**
29	B-OG	Evet.	**3**
30	OG-6	İspatladım işte.	**2**
31	**MO**	***Biraz daha düşün. [Kâğıda bakıyor.]***	
32	OG-9	Mesela ben 1 ile 2 arasında $\sqrt[3]{3}$ olduğunu gösterdim.	**1**
33	OG-5	En ücra sayıların arasında bile var.	**4**
34	OG-3	Olmasaydı desek,	**2**
35	**MO**	***Olmayana ergiyle ters örnekle de ispat yapabilirsin.***	
36	OG-1	Bir yanlış gösterirsek doğru olduğunu ispatlamış olur muyuz?	**2**
37	**MO**	***Tabi onu da kullanabilirsin.***	
38	OG-2	Hocam iki rasyonel sayının ardışık olması gerekli mi?	**4**
39	**MO**	***Yaa kendi düşüncenize göre bir şey gösterin bakalım, ne düşünüyorsunuz, ne gösterebiliyorsunuz.***	
40	OG--	0 ile 1 arasında var mı?	**1**
41	OG-4	Var.	**1**
42	OG-5	Her yerde var her yerde.	**4**
43	OG-4	½ nin karekökü irrasyonel oluyor yine değil mi?	**3**
45	OG-9	Her sayının karekökü irrasyonel sayı değil midir?	**3**
46	**MO**	***[OG–7' ye] Ama sen söylüyorsun [yazdıklarına bakıyor] örnek ver bir şeyler yap, ne yapıyorsun genelliyor musun? Aksine mi örnek veriyorsun? Çelişkiyle mi yapıyorsun***	

		ispatı?	
47	OG-3	Sözel olarak anlatabilir miyiz?	**6**
48	OG-5	*[OG–9 'a]* 4 yerine 4,5 un karekökünü al bakalım.	**3**
49	OG-9	Her sayının karekökü irrasyonel değildir o zaman.	**3**
50	OG-6	1 ile 2 arasında $\sqrt{3}$ var, karesini alarak kanıtlayabiliriz.	**1-2**
51	OG-3	Hocam aslında üçgenle falan olur mu acaba?	**5**
52	**MO**	***Olabilir bak güzel bir düşünce geldi.***	
53	OG-5	Sayı doğrusu üzerinde ispatlayabilir miyiz?	**5**
54	OG-7	Ben öyle yaptım.	**5**
55	**MO**	***Olabilir, yani bakın bir sürü ispat çeşidinden bahsetmedik mi! Aksine örnek verme dedik, genelleme dedik, çelişki dedik, tümevarım dedik, değil mi?***	
61	OG-13	0 ile 1 arasında var mı?	**1**
62	OG-3	Var $\sqrt{3}/100$	**1**
63	OG-5	Önemli olan düşünmemiz değil mi hocam?	**6**
64	**MO**	***Tabi, nasıl düşünüyorsun, nasıl düşünebileceğin.***	
65	OG-4	Bir şey düşünemiyorum yaa.	**6**
69	**MO**	***Artık ne düşünüyorsanız, hangi bilgileri kullanıyorsanız, sizi serbest, özgür bırakıyoruz, benim ağzımdan bir şey alamazsınız siz kendiniz yapın.***	
70	OG-9	Burada…*[kâğıdındakini gösteriyor MO' ya]*	**--**
71	**MO**	***Yani hep kareköklü sayılar mı irrasyoneldir? Küp kökler, dördüncü, beşinci kuvvetten kökler irrasyonel değil midir?***	
72	OG-2	Onlar da var ama biz bir tane gösterdik mi tamam işte.	**2-4**
73	B-OG	Hayır /olmaz/tam tersi olur.	**2**
74	**MO**	***Genelleyeceksin bence.***	
75	OG-2	İki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır diyor, bir tanesini göster tamam doğru işte.	**4-2**
76	OG-13	Hayır, bir tane yanlış çıkarsa.	**2**
77	OG-2	Hayır, iki rasyonel sayı arasında bir tane bul yeter, yani onu doğrular.	**2**
78	OG-6	Tamamını doğrulamaz ki.	**2**
79	OG-2	Tamamını demiyorum parça parça.	**2**
80	OG-1	Bir tane olmayanını gösterirsen kanıtlamış olursun.	**2**
81	OG-2	İyi de o değil ki buradaki.	**2**
82	OG-1	Olmayana ergi yöntemi işte.	**2**
83	OG-3	Hayır, eğer olmasaydı diyeceğiz, olmazdı diyeceğiz, bu yüzden olmalıdır diyeceğiz. Ama nasıl diyeceğiz? *[Olmayana ergi yönteminin nasıl uygulanacağını açıklıyor.]*	**2**
88	OG-4	Yaa, ben zihnimde çözdüm ama buraya *[kâğıda]* aktaramıyorum.	**6**
89	**MO**	***Zihnindekini kâğıda dökersen çok mutluluk duyacağım, bana söyleme kâğıda da yaz.***	
90	OG-3	Bir şey buldum, öyle bir şey olmasaydı *[önermenin ifadesini kastediyor]* bunlar aynı sayı olurdu doğru mu?	**2**
93	OG-13	Zil çalacak hocam. yardımcı olun *[da yapalım.]*	**6**
94	**MO**	***Hayır, bu sizin işiniz. Doğru ya da yanlış ne düşünüyorsunuz, sizin görüşleriniz lazım.***	
95	OG-4	Yaa, şöyle işte ben sözel olarak ifade edeyim de; her iki rasyonel sayı arasında.	**6**
96	**MO**	***Tek bana değil, kâğıdına da anlat.***	
97	OG-4	Ama hocam anlatamıyorum oraya işte.	**6**
98	**MO**	***Bana anlattıklarını oraya da anlat.***	
99	OG-4	Her iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır. O rasyonel sayı da bir sayının karekökü.	**6**
100	OG-5	Bir şeyler yazdım kendi çapımda, sayı doğrusundan gittim ben.	**6**
101	OG-7	Bende.	**6**
102	OG-8	Ben bir şey yapamadım.	**6**
104	OG-8	Zaten doğru olduğunu kanıtlayın demiyor ki gösteriniz diyor, ben de örnekle gösterdim.	**4-2**
105	**MO**	***Örnekle göstermek, göstermek mi oluyor? Biz öyle mi yapıyoruz?***	
106	OG-2	Hocam *i*, 0 ile -1 arasında bir sayı değil mi?	**3**
107	**MO**	***i***, $\sqrt{-1}$ ***demek***	
108	OG-2	Yani 0 ile -1 arasında mı?	**3**
109	**MO**	***Bilemem.***	

110	OG-2	Ya o zaman sıfırdan küçük şeyler için olmuyor. *[Önerme geçersiz anlamında.]*	**4**
111	OG-3	Ama iki farklı rasyonel sayı arasında diyor değil mi? Aynı sayı olmaz.	**4**
112	OG-8	O iki sayının karesini al, arasındaki sayılardan birinin kökünü al olur işte.	**2**
113	OG-1	Hocam sonsuzun karekökü sonsuz mudur?	**--**
114	**MO**	***[Evet anlamında başını sallıyor.] +∞' dan bahsediyorsan tabi [eğer].***	
115	OG-1	Buldum galiba, bakar mısınız?	**--**
116	**MO**	***Bakayım.***	
117	OG-1	Şimdi bu bir sayı (sonsuzdan küçük bir değer) bu da sonsuz arasında bir değer.	**2**
118	**MO**	***Rasyonel sayı için sonsuzdan mı gidiyorsun [yola çıkıyorsun anlamında] yani?***	
119	OG-1	Evet. *[MO negatif bir ifadeyle bakıyor OG-1'e.]*	**--**
120	OG-4	Hocam her iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır değil mi? Bunu ispatlamama gerek yok burada değil mi?	**2**
121	**MO**	***Hayır, [gerek] yok.***	
122	OG-9	-1 ile 0 arasında var mı?	**1**
123	OG-4	-1 ile 0 arasında -1/2 var.	**1**
124	OG-12	-0.01 de *[mesela anlamında]*	**1**
125	OG-2	Hayır, irrasyonel sayı yok.	**3**
126	OG-12	Onu köklü yazabilirsin nasıl olsa.	**1**
127	OG-2	Köklü yaz ne oluyor *[o zaman]*, kaçın karesi -1 dir?	**3**
128	OG-4	OG–2 bak $\sqrt{\frac{1}{2}}$'*i* onun arasındaki sayı.	**1**
129	OG-13	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ al.	**1**
130	OG-4	Hayır, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ alınca, 0 ile 1 arasında oluyor, *i'* li alınca.	**1**
131	OG-2	İyi de *i*, 0 ile 1 arasında değil işte.	**3**
132	OG-4	*i* sanal bir sayı *[OG–2 'ye söylüyor sonra MO' ya dönüyor] i* diye bir sayı yok değil mi hocam?	**3**
133	B-OG	Var var.	**3**
134	OG-13	Kök -1'dir o.	**3**
135	**MO**	***Kök içerisinde -1'i "i" kabul ediyoruz işte.***	
137	OG-8	Ben şöyle yazdım [*Kâğıdı eline alıp, okuyor.*] Her iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır. Bu rasyonel sayıları irrasyonel biçimde yazabiliriz. Bu yazdığımız irrasyonel sayılar, rasyonel sayının arasında olduğundan	**6**
140	**MO**	*[Zil çalıyor.]* ***Tamam, kâğıtları verin, toplayalım şunları hemen.***	

Teoremi okuduktan sonra öğrencilerin öncelikli yaklaşımı teoremdeki ifadenin doğruluğunu araştırmak için örnekler bulmaya çalışmaktır. Tartışmanın ilerleyen aşamalarında da yine örneklere yönelik görüş alış-verişleri ile karşılaşılmaktadır. Örnek bulmaya yönelik girişimler kimi (1,5,8,13 numaralı öğrenciler) öğrencilerin irrasyonel sayının ne olduğu konusunda yeniden düşünmelerine yol açmıştır. OG-2 irrasyonel sayıların negatiflerinin olamayacağını ifade ederken (18),(20),(110), OG-8 ise irrasyonel sayıları köklü sayılar olarak tanımlamış, dokuz sayısını irrasyonel olarak ifade etmiş ve negatiflikleri konusunda kararsız kalmıştır (21),(28). OG-5 ve OG-9 da her sayının karekökünün irrasyonel olup olmadığını sorgulamaktadır. Ayrıca "*i*" sayısının da irrasyonel olarak söylenmesi örnekler bulmada onu da tartışma konusu yapmaktadır. Öğrencilerin ağırlıklı çabası herhangi iki rasyonel sayı seçerek aralarındaki irrasyonelleri belirlemeye yöneliktir. Bu aşamada hiçbir öğrenci rasyonel sayıların a/b (a,b $\in Z$ ve b≠0) biçimindeki cebirsel gösteriminden söz etmemiştir. *İspat yapmaya yönelik düşünceler ve ispatlama yöntemleri* öğrencilerin söylemlerinde fazlaca yer bulan diğer ifade grubunu oluşturmaktadır. Bu gruptaki söylemler:

-- ispat için bir iki örnek üzerinde doğru olduğunu göstermek (13),(72),(75),(104),
-- x gibi değişkenler kullanarak genel bir gösterim yapmak (15),
-- olmayana ergi yöntemini denemek (34),(82),
-- aksine örnek bulmak (36),(80) biçiminde sıralanmaktadır.

OG-1 ispata yönelik "bir tane olmayanını gösterirsen kanıtlamış olursun (80)" ifadesini kullanmış ve daha sonra bu ifadesini olmayana ergi yöntemi olarak tanımlamıştır (82). Olmayana ergi yöntemi için OG-3'ün yaptığı açıklama ise "eğer olmasaydı diyeceğiz, olmazdı diyeceğiz, bu yüzden olmalıdır diyeceğiz (83)" biçimindedir. Ayrıca ispatta alternatif yaklaşımların da olabileceği dile getirilmiş ve bu bağlamda; üçgenlerden yararlanma (51) ve sayı doğrusunda gösterme (53),(54) ifade edilmiştir. Tartışmalar içerisinde verilen teoremin ifadesinin ne anlama geldiğine, nasıl yorumlanması gerektiğine yönelik ifadeler de yer almaktadır. Bunlar aşağıdaki gibi örneklenebilir:

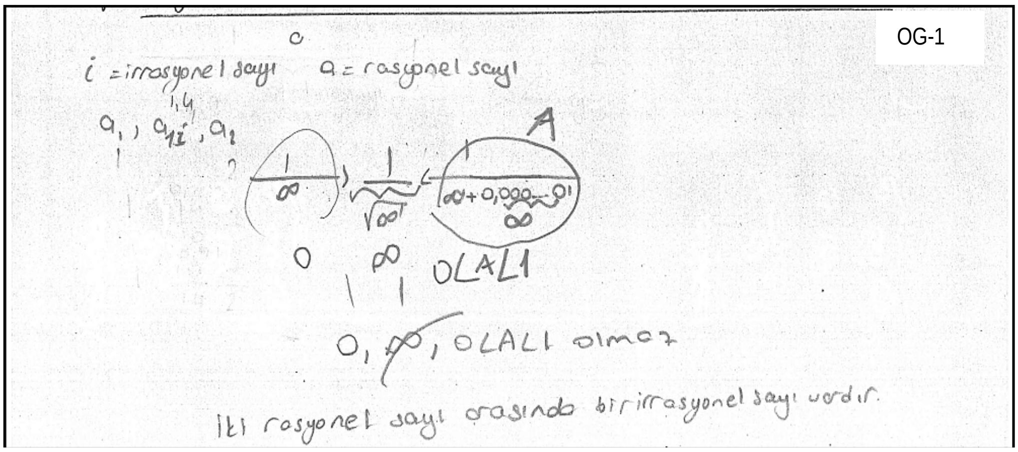
--buradaki bir [*ifadesi*] sadece bir [*tane*] anlamında mı, 2, 3, 4 tane de olabilir mi? (24)
--en ücra sayıların arasında bile var (33)
--iki rasyonel sayının ardışık olması gerekli mi? (38)
--iki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır diyor, bir tanesini göster tamam doğru işte (75)
--zaten doğru olduğunu kanıtlayın demiyor ki gösteriniz diyor, ben de örnekle gösterdim (104)
--ama iki farklı rasyonel sayı arasında diyor değil mi? Aynı sayı olmaz (111)

Söylemler içerisindeki bir diğer grup ise öğrencilerin ispatlama aşamasında ilerleyememelerinden ya da tatmin edici bir yaklaşım sunamamalarından kaynaklanan sıkıntı yaşadıklarını gösteren ifadelerdir. Bu ifadeler de şu şekilde örneklenebilir,

-- Yaa, ben zihnimde çözdüm ama buraya [*kâğıda*] aktaramıyorum (88)
-- Ama hocam anlatamıyorum oraya [*kâğıda*] işte (97)
-- Bir şeyler yazdım kendi çapımda, sayı doğrusundan gittim ben (100)

Bu tür sıkıntılı anlarda öğrencilerin eğilimlerinden birisi de ispata yönelik sözel açıklamalar yapmayı talep etmektir [örn. (95),(99),(137)]. Öğrenciler uygulama esnasında sözel tartışmaların olduğu anlarda bir yandan da kendilerine dağıtılan kâğıtlar üzerinde ispatı yazılı olarak yapmaya çalışmıştır. Yazılı yaklaşımların oluşmasında öğrenciler doğal olarak birbirlerini etkilemiş ve sınıf içerisinde paylaşılan düşünceler kâğıtlara da yansımıştır.

Öğrencilerin kâğıt üzerinde yaptığı yaklaşımlar incelendiğinde sözlü söylemlerine paralel matematiksel gösterimler ve açıklamalar ile karşılaşılmaktadır. Yazılı kâğıtların çoğunda sözel açıklamalar bulunmakta ve teoremin doğru olup olmadığı seçilen bazı sayı örnekleri üzerinde gösterilemeye çalışılmaktadır. Öğrenci kâğıtları kendi içerisinde sadece sözel açıklama içerenler (OG-5), sadece bazı sayılar üzerinde örneklemeler içerenler (OG-1, OG-2, OG-6, OG-9, OG-13) ve her ikisini de barındıranlar (OG-3, OG-4, OG-7, OG-8, OG-12) biçiminde üç gruba ayrılabilir. On bir öğrenciden yedisinin açıklama ya da örneklendirmelerinde sayı doğrusunu kullandığı, bir öğrencinin ise hem sayı doğrusu hem de dik üçgenden yararlanmaya çalıştığı görülmektedir (OG-7). Rasyonel sayıları göstermede harfleri kullanan yalnızca OG-3'tür. Diğer tüm öğrenciler sayıları kullanarak ispat yapmaya çalışmıştır. Öğrencilerden hiç biri kâğıtlarında teoremde verilen ya da istenenin ne olduğunu belirtmemiştir. İspatı doğru olarak tamamlayan ya da kabul edilebilir bir yaklaşım sunan öğrenci bulunmamaktadır. Bu durumun oluşmasında öğrencilerdeki bazı ön bilgi eksiklikleri ve kavram yanılgılarının da etkisi olduğu görülmektedir (örn. irrasyonel sayı kavramı, karmaşık sayı kavramı gibi). Öğrenci kâğıtlarından seçilen bazı örneklerde de bu bulgular açıkça görülebilir.



OG-2

$\sqrt{1} \to 1$

$\sqrt{2} \to 1 < \sqrt{2} < 2$

$\sqrt{3} \to 1 < \sqrt{3} < 2$

$\sqrt{4} \to 2$

$\sqrt{5} \to 2 < \sqrt{5} < 3$

$\sqrt{6} \to 2 < \sqrt{6} < 3$

$\sqrt{7} \to 2 < \sqrt{7} < 3$

$0 \Leftrightarrow 1$ arasında $\sqrt{0{,}1}, \sqrt{0{,}01} \ldots$

$1 \Leftrightarrow 2$ arasında $\sqrt{2}, \sqrt{3}$

$2 \Leftrightarrow 3$ " $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$

$3 \Leftrightarrow 4$ " $\sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13} \ldots$

$4 \Leftrightarrow 5$ " $\sqrt{17}, \sqrt{18}, \sqrt{19}, \sqrt{20} \ldots$

$-1 \Leftrightarrow 0$ yok

$a < x < b$

OG-3

$-\infty$ 0 $\sqrt{3}$ 2 $+\infty$

p ve q farklı reel sayılar ; irrasyonel sayı olsun.
$p<q$ olsun.

p ile q arasında bir reel sayı olmazsa
$p=q$ olur.

$p=q$ değilse aralarında k gibi
bir reel sayı vardır.

$p<k<q$ olur.

$p<q$ idi

$q>p>1$ ise $p^2>q^2$
$k>1$

p^2 ve q^2 arasında da k^2 vardır.

OG-5

$$\underbrace{0{,}263 \qquad 0{,}264}_{\text{sonsuz nokta var}}$$

sonsuz noktanın içinde irrasyonel sayı olmak zorundadır.

Sayı doğrusu üzerinde sonsuz sayıda nokta vardır. Aynı zamanda sayı doğrusu üzerindeki her nokta rasyonel ya da irrasyonel bir sayı belirtir.

Örnek olarak yukarıda sonsuz uzunluktaki sayı doğrusunun çok küçük bir parçası gösterilmiştir. Bu iki sayı ne kadar çok küçük sayılar olsa da bu iki sayının arasında da sonsuz sayıda rasyonel ya da irrasyonel sayı vardır. Bu da yukarıdaki önermeyi kanıtlar.

OG-8

2 ile $\frac{3}{1}$ arasında

$2 < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{25} < \sqrt{5} < 3$ gibi her iki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır

* her iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır. Bu rasyonel sayıları irrasyonel biçimde yazabiliriz. Bu yazdığımız irrasyonel sayılar, rasyonel sayıların arasında olduğu için iki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır.

Buraya kadar ortaya konan bulgular çerçevesinde şu yoruma ulaşmak mümkündür; Öğrencilerin,

-- ispatın sadece sözel açıklamalar biçiminde yapılamayacağı;
-- ispatlarda örnekler üzerinde deneme yapmanın başlangıç için yararlı olmakla birlikte örnekleme yoluyla tek başına bir ispatın oluşturulamayacağı;
-- ispatın, teorem (ya da önerme) içerisinde geçen tanımların ve özeliklerin sadece anlamlarını ifade ederek değil aynı zamanda matematiksel gösterimlerinin de kullanılmasını gerektirdiği ve
-- ispatın birbirini izleyen bir dizi mantıksal adım içerisinde verilenden istenene ulaşma işlemi olduğunu kavramada ve bunu kendi ispat yapma süreçlerine aktarmalarında önemli sıkıntıları bulunmaktadır.

SA, SK ve SS açısından ortaya çıkan karakteristikler dikkate alındığında ise aşağıdaki tespitlerin yapılması mümkündür.

Öğrenciler Ayşe Hanım tarafından sunulan mekanizmaya yönelik genel algıyı bir çırpıda ifade edebilmelerine karşın (DS'ler incelendiğinde) mekanizmanın nasıl işlediğine, kurulduğuna ve değerlendirildiğine yönelik kavrayışları ve becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı görülmektedir.

Öğrencilerin derslerde yapılan ispatların amacını ve içeriğini anlamaya çalışmaktan ziyade ispatın yapılışındaki rutin adımları ve ispat ile elde edilenlerin soru ve alıştırmalardaki uygulamalarına daha fazla özen gösterdikleri ifade edilebilir. Bu durum öğretmenlerin özellikle Ayşe Hanım'ın ispatların yapılmasındaki amacı formül, kural, teknik elde etme olarak sunmasıyla yakından ilişkilidir.

Öğrencilerin gerek kendi aralarında gerekse öğretmenleri ile sağlıklı bir iletişimi olduğunu söylemek güçtür. Çünkü sınıf içi iletişim sürecinde öğrencilerin yeterince konuşma, tartışma ve düşünceleri ifade etme, savunma, yeniden yapılandırma fırsatları bulunmamaktadır. Bu durum hem öğrencilerin kendilerinde hem de öğretmenlerin öğrencilerinde var olan eksikliklerin ya da kavram yanılgılarının farkına varmalarını ve giderilmesini engelleyen bir unsur olarak karşımıza çıkmaktadır. Nitekim TES-6 da tüm sınıf bazında yapılan tartışmalar yardımıyla bir ispatın gerçekleştirilmesine yönelik uygulama, öğrenciler arasında kurulan iletişimin (geneli itibariyle) sağlıklı olmadığını göstermektedir. Öğrenciler fikirlerini ve yaklaşımlarını kendi argumanları ile ortaya koymada, onları savunmada, arkadaşlarının görüş ve düşüncelerini dinlemede, eleştirmede, çürütmede ve sonucunda ortak belirli noktalara ulaşmada başarı görünmemektedir.

Gerek BY söylemleri gerekse olumlu geri bildirimler ve diğer geribildirim ifadeleri çeşitlilik göstermemektedir. Öğretmenler tarafından yapılan geri bildirimler öğrencilerin, öğretmenlerinin kendilerinden beklentisi yönünde açıklama ya da cevaplar sunduklarında ya da özgün bir yaklaşımlar sergilediklerinde ifade edilmektedir. Bu nedenle sınıf içi iletişim sürecinde var olan söylemlerin görev ve anlamlarında da bazı daralmalar olması beklenebilir bir durumdur. Bu tür kullanımların örüntüsel bir yapıya sahip olması da öğrencilerin öğretmenlerinden söylemleri açısından farklı pedagojik yaklaşımları görememelerine de yol açmaktadır. Öğretmenlerin konuşmalarında var olan düşük orandaki söylemsel farklıklar öğrencilerin söylem ve davranışlarına yansımamaktadır. Örneğin Ahmet Bey sembol ve notasyon kullanımına özen gösterirken ve ispat mekanizması üzerinde vurgulamalar yaparken öğrencilerin bu davranışları göstermediği gözlenmektedir. Benzer şekilde her iki öğretmen de bir teorem ya da önermede verilen-istenen mekanizmasına vurgu yapsına karşın öğrencilerin kendi defterlerindeki yazılarında ve TES-6 daki kağıtlarında verilen ve istenenleri ifade etmedikleri görülmektedir.

Öğretmenlerin söylemlerindeki karakteristik özellikler açısından ortaya çıkan benzerlikler ve farklılaklar ile bunların öğrencilerin anlamaları üzerindeki etkileri (tüm bulgular çerçevesinde) sonuç, tartışma ve öneriler kısmında ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

BÖLÜM V
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

SONUÇ

Bu araştırmada bir ortaöğretim sınıfında, öğretmen ve öğrenci arasında var olan iletişim süreçlerinin incelenmesi yoluyla öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik görüş ve düşüncelerinin belirlenmesine çalışılmıştır. Söz konusu görüş ve düşünceler öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik bilgilerini nasıl yapılandırdıklarının temel göstergelerini oluşturmaktadır. Bu amaçla araştırmada odaklanılan şey matematik ve geometri derslerinde kullanılan söylemlerde yer alan dildir. İncelenen söylemler öğretim süresince sınıf içerisinde öğretmen ve öğrenci arasında gerçekleşen konuşmalardaki sözlü söylemlerdir. Yalnızca dördüncü alt problem kapsamında öğrencilerin sözlü söylemlerinin yanında yazılı ifadeleri de incelenmiştir. Araştırmanın verilerini oluşturan sözlü söylemler DS ve TES biçiminde iki grup altında toplanmaktadır. Bu araştırma, DS'ler yanında TES'leri kullanarak söylem çözümlemesi yapılan öncü çalışmalardan biridir. Bulgular dikkate alındığında ifade edilebilecek sonuçlardan ilki yapılan SÇ açısından TES'lerin önemli katkılar sağlamış olmasıdır. TES'ler öğrencilerin görüş ve düşüncelerini farklı biçimlerde elde edebilmeyi ve DS'ler içerisindeki söylemleri daha geniş bir bakış açısıyla analiz etmeyi sağlamıştır. İspat ve ispatlamaya yönelik ifadelerin bulunduğu derslerde öğrencilerce oluşturulan söylemlerin kapsamı öğretmenlerinkine kıyasla sayı ve içerik açısından daha dardır. Öğretmen yönetiminde bütünüyle sözlü tartışmalar biçimde gerçekleşen TES'ler öğrencilere hem kendi görüş ve düşüncelerini daha uzun zaman dilimlerinde ifade etme hem de arkadaşları ile daha fazla görüş alış verişinde bulunma olanakları sağlamıştır. Ayrıca TES'ler aracılığıyla, öğrencilerin sadece işlenen konuda yer alan ispatlara yönelik değil, genel anlamda ispatın ne olduğu, ispat yapma yöntemleri, ispatın önemi, gerekliliği ve ispat ile diğer bazı kavramlar arasındaki ilişkilere yönelik sahip oldukları bazı bilgiler de elde edilebilmiştir.

Araştırmada yapılan SÇ ile SA, SK ve SS'ye yönelik ortaya konan karekterizasyonlar hem araştırmacının (*i*)genel gözlem notları hem de Halliday &

Hasan'ın (1989) Sistemik Fonksiyonel Dilbilgisi çalışmaları içerisinde sundukları (*ii*)üç bileşenli model çerçevesinde gerçekleştirilmiştir. Söz konusu bu iki (*i* ve *ii*) karekterizasyon yaklaşımının birbirini tamamladığı ve ispata yönelik söylemlerin yapı, özellik, rol ve işlevlerine yönelik ayrıntılı bilgileri ele etmede bütüncül bir bakış açısı oluşturmayı sağladığı görülmektedir. Bu iki karekterizasyona biçimine yönelik ortaya çıkan bulguları aşağıdaki biçimde özetlemek mümkündür.

SA, SK, SS Açısından *Genel Gözlemler* Çerçevesinde Öğretmen Söylemlerindeki Benzerlikler ve Farklılıklar

Benzerlikler şu şekilde ifade edilebilir;

Öğretmenler ispatlama aşamasında sık sık verilen-istenen mekanizmasına vurgu yapmaktadır. Ayşe Hanım ispat mekanizmasına yönelik 'sol tarafı kullanarak' 'sağ tarafı elde etme' ifadesini, Ahmet Bey ise 'hipotez' ile 'ispatı istenen şey' söylemi üzerinde durmaktadır. Ancak her iki öğretmen de vurgulamalarını sadece sözel olarak ifade ederek ya da öğrenciye dikte edip (tahtada ya da defterlerine) yazdırarak gerçekleştirmektedirler. Benzer şekilde hem Ahmet Bey hem de Ayşe Hanım tarafından bir ispatta kullanılan öncüllerin (tanım, aksiyom, teorem, önerme, özelik gibi) terimsel anlamları dile getirilmemekte ve ispatlarda nelerin kullanılabileceğini tartışılmamaktadır. Ayşe Hanım'ın ispatların oluşturulması esnasındaki açıklamalarında ve öğrencilerden gelen sorulara verdiği yanıtlarda sık sık ispatın adımlarındaki kurallara vurgu yaptığı ancak kuralın anlamını yeterince tartışmadığı görülmektedir. Yine her iki öğretmen de ispatların amacını pratik uygulamalara (soru ve problem çözümü gibi) ve işlemsel rutinlere yönelik formül, yöntem, teknik elde etme olarak sunduğu gözlenmektedir. Ayşe Hanım'ın bu konudaki vurgulamaları daha fazladır.

Farklılıklar ise şu şekilde ifade edilebilir;

Ahmet Bey ispatların inşası esnasında matematik dilini daha formal biçimde kullanmaktadır. İspat mekanizmasını ortaya koyarken sözlü söylemlerini tahtaya aktarma sürecinde sembol ve notasyon kullanımına özen göstermekte ve öğrencilerin de bu şekilde yazmaları için yönlendirmeler yapmaktadır. Ancak Ayşe Hanım matematiksel dili kullanırken çok fazla titiz davranmamakta ve öğrencileri de bu şekilde davranmaları için yönlendirmemektedir. Ahmet Bey öğrencilerden gelen özgün, ilginç sorular üzerinde durmakta ve yanıtlar sunmaya çalışmakta iken Ayşe Hanım bu tür soruları yeterince dikkate almamakta ve konu anlatımına geçerek öğrencilere tatminkar dönütler vermemektedir. Ahmet Bey ispatların tamamlanmasının ardından kısa tekrarlara yer verirken Ayşe Hanım bunu çok nadir yapmaktadır. Ayşe Hanım'ın derslerinde ispatlara ayırdığı zaman dilimi sınırlı olup bu süreçte öğrencilerin kendi yaklaşımlarını sergilemelerine ya da birlikte tartışmalarına yeterince süre vermediği görülürken, Ahmet Bey'in derslerinin büyük bir kısmını ya da bazen tamamını ispatların yapılışına ayırdığı ve bu tür anlarda başlangıçta öğrencilerin kendi ispat yapma yaklaşımlarını oluşturmalarına imkan sağladığı gözlenmektedir. Ancak ispatın yapılması aşamasında Ahmet Bey'in öğrencilerle birlikte soru-cevap biçimindeki diyaloglarında öğrencilere yönelttiği sorulara çoğu kez yine kendisinin yanıt verdiği ve şekiller üzerinde nasıl gösterim yapılabileceğini de kendisinin açıkladığı ya da dikte ettiği görülmektedir. Bunların dışında çok sınırlı sayıda da olsa Ahmet Bey'in kimi zaman öğrencilere yönlendirici sorular yöneltebildiği ancak Ayşe Hanım'ın bu tür bir davranışının olmadığı da ifade edilebilir.

SA, SK, SS Açısından *Kodlama Çerçevesinde* Ortaya Çıkan Öğretmen Söylemlerindeki Benzerlikler ve Farklılıklar

✓ **SA** açısından yapılan karakterizasyon her iki öğretmenin de derslerinde ispat ve ispatlamaya yönelik kullandıkları sözcüklerin çok sınırlı olduğunu göstermiştir. Ayşe Hanım en çok *ispat*, *gösteriniz* ve *tümevarım*, Ahmet Bey ise *ispat* ve *teorem* sözcüklerini kullanmıştır. Öğrenci söylemlerine bakıldığında ise matematik derslerinde en çok *tümevarım*, geometride ise *ispat* sözcükleri kullanılmıştır. Her iki öğretmenin de kullandıkları sözcük sayısı azdır. Bu sözcüklerin anlamlarına yönelik açıklamaları ve örneklendirmeleri son derece sınırlıdır. Söz konusu sözcüklerin anlamlandırılmasına yönelik öğrencilere tanıdıkları tartışma, konuşma, çalışma imkanları oldukça yetersizdir. Özellikle Ayşe Hanım'ın derslerde zaman zaman o an hızlı yanıt verme isteği, kendisine sorulan şeyi iyi algılamaya çalışmaması ve sorulan şey hakkında yeterince düşünmeden ortaya koyduğu bazı söylemleri öğrencilerin yanılabilmelerine ya da anlamlandırmalarını eksik gerçekleştirmelerine yol açabilmektedir. Ayşe Hanım'ın bu tip söylemlerine şu örnekler verilebilir;

-- *Aksine ispat sağlama gibi değil, tam tersi bir örnek verip doğruluğunu gösteriyorsun. [TES-2 (17)]*

-- *[Aksiyom] Niye kanıtlanmasın, kanıtlanabilir. [TES-1 (48)]*

-- *Genelleme yapmıyoruz, bak genelleme demedik biz önerme dedik. [TES-1 (24)]*

Bu sözcükler çerçevesinde TES'ler üzerinde yapılan analiz sonucunda öğrencilerin ispat ve ispatlamaya dair sözcüklerin kavramsal anlamlarına ve ispat yapma mekanizmasına yönelik bilgilerinde önemli yanılgı ve eksikliklerin olduğu ortaya çıkmıştır. Bunlar;

-- Teorem 'tam bir kesinlikle ispatlanamayan biraz da (% 1-2) olsa şüphe barındıran ama elimizde olanlar üzerinde doğru işlemler yapmamıza da yardımcı olan ifadeler' şeklinde tanımlanması ve ispatların tam olarak yapılabilen ya da eksik yanlar, yönler içererek şekilde yapılan şeklinde iki kategoride olabileceği,

-- Verilen bir teoremin hipotezi ve hükmünü belirlemede bazı sıkıntıların var olması ve bunun söylemlere yansımış olması,

-- Teorem ile diğer bilim dallarında yer alan yasa, teori ve kanun gibi kavramların bağlantılandırılması ve bu bağlantıların açıklanmaya çalışılması,

-- İspatlarda bir takım kabullerin bulunduğu ve bu kabuller nedeniyle ispatların ve matematiğin kesinlik, tam doğruluk içeremeyebileceği,

-- Matematikte tümdengelim yöntemi ile ispattın var olup olmadığında emin olamama,

-- Aksine ispat ile sağlama yapmanın aynı şey olup olmadığına karar verememe biçiminde sıralanabilir.

✓ **SK** açısından yapılan karakterizasyon sonucunda konuşma eylemleri açısından her iki öğretmenin de en fazla BL tipinde söylemlere başvurduğu ortaya çıkmıştır.

Matematik Toplam BL	**222**	SD	120	BY	100	**BL**
Geometri Toplam BL	**123**	SD	78	BY	27	**BL**
GENEL TOPLAM BL	**345**	SD	198	BY	127	**BL**

SD ve BY tipindeki konuşma eylemleri açısından öğretmenlerin bu söylemleri kullanma oranlarında farklılıklar oluşmaktadır. İspata yönelik iletişim durumlarında Ayşe Hanım BY tipinde söylemlere, Ahmet Bey SD tipindeki söylemlere daha fazla başvurmaktadır.

Ayşe Hanım'ın söylemlerindeki eylem türleri oransal olarak BL-(%50), SD-(%27), BY-(%23) şeklinde iken

Ahmet Bey'in söylemlerindeki dağılım ise BL-(%54), SD-(%34), BY-(%12) biçimindedir.

Öğrencilerin konuşma eylemleri incelendiğinde ise her iki derste de birbirine benzer ve çok yakın oranlarda kullanımlar ortaya çıkmaktadır.

Matematik	**Toplam**	BL	**206**	SD	110	BY	4	**BL**
Geometri	**Toplam**	BL	**77**	SD	37	BY	0	**BL**
GENEL	**TOPLAM**	BL	**283**	SD	147	BY	4	**BL**

Matematik derslerindeki oranlar BL-(%64), SD-(%34), BY-(%1)
Geometri derslerindeki oranlar BL-(%68), SD-(%32), BY-(%0)

Öğrenci söylemlerindeki oranların çok yakın olmasının her iki derste de öğretmen merkezli bir anlayışın hakim olması ve söylemlerin büyük oranda öğretmenlerce oluşturulmasından ileri geldiği düşünülmektedir. BL tipindeki öğretmen söylemleri kendi içerisinde analiz edildiğinde ise her iki öğretmenin de bazı söylemlerinin ispatlara dair '*açıklama*', '*yorumlama*' ve '*hüküm*' içerecek şekilde kurulduğu görülmektedir. Ancak bu tip BL söylemlerini her iki öğretmen de sınırlı sayıda kullanmaktadır. Yine SD tipindeki söylemlerde de '*sorgulama*', '*düşündürme*' amacı taşıyanların oldukça sınırlı olduğu gözlenmekle birlikte bu tip söylemleri Ahmet Bey'in biraz daha fazla kullandığı görülmektedir. Konuşmadaki sıra döngüsünün yönetimi ve hitap etmede kullanılan terimler açısından ortaya çıkan temel bulgular şu şekilde özetlenebilir:

Konuşmadaki sıra döngüsüne yönelik bulgular

- İspatların tamamlanmasının ardından alıştırma (çoğu kez test tipi) ve problem çözümlerine geçiliyor ve bunların sayısını, çeşidini, sırasını öğretmenler belirliyor,
- Öğretmenler geleneksel yaklaşımı benimsiyor, merkezi öge öğretmen,
- Derslerde kullanılan öğretim yöntemleri düz anlatım ve soru-cevap,
- Öğrenciler anlatımlarda spontane olarak derse katılım gösterebiliyor,
- Kimin ne kadar konuşacağı ve tahtaya kalkacağında öğretmen yetkili,
- Soru ve problemlerde önce yapan, defter kontrolü talep edebiliyor,

- Hızlı olan ve öğretmeni ikna eden tahtaya kalkabiliyor.

Hitap etmede kullanılan terimlere yönelik bulgular

- Öğretmenler bilgi ve deneyim olarak öğrencilerden ilerde olduğundan statüleri yüksek,
- Konuşmalarda saygı ve resmiyet hâkim,
- Espri, şaka vb kullanımlar oldukça sınırlı, (özellikle öğretmenlerde)
- Argo kullanımlar çok çok sınırlı düzeyde,
- Öğrencilerin hitap etmede kullandığı tek kelime var "*hocam*",
- Öğrencilerin özellikle soru ve problem çözümlerindeki yaklaşımları kibar,
- Öğretmenlerin hitaplarında hem tekil hem de çoğul şahıs kullanımları mevcut,
- Ayşe Hanım'ın hitaplarında sıkça kullandığı kelime "*çocuklar*",
- Konuşmalarda Ahmet Bey, Ayşe Hanım'a nazaran biraz daha resmi,
- Ahmet Bey'in hitap etmede kullandığı özel belirli bir sözcük yok,
- Öğrencilerin kendi aralarında statü açısından bir ayrılma yok,
- Öğretmenlerin çoğul isimlerin kullanıldığı söylemleri genellikle BL niteliğinde iken tekil şahıs kullanımları ise BY tipindedir.

✓ **SS** açısından yapılan karakterizasyon sonucunda ortaya çıkan bulgular ise *destekleyici geri bildirimler* ve *soru ifadeleri* açısından aşağıdaki biçimde maddelendirilebilir;

Olumlu geri bildirim ifadeleri az sayıda ve tek bir kelimenin ('güzel') kullanımına dayanmaktadır. Ayşe Hanım'ın olumlu geri bildirim ifadeleri ispatın ya da soru çözümünün öğretmenin istediği, sunmayı planladığı yol, yöntem ile yapıldığında ya da öğrencilerce özgün bir yaklaşım sergilendiğinde, Ahmet Bey'in olumlu geri bildirimleri ise hem tahtadaki öğrencinin ispatı yapma aşamasında basit gösterimleri (harflendirme, sembol kullanımı gibi) yapması hem de özgün bir yaklaşım sergilemesi durumunda kullanılmaktadır. İletişimin akışı içerisinde öğrencinin yaptığı yaklaşımın doğruluna yönelik soru sorduğu ya da yapılan bir şeye yönelik fikrini beyan ettiği durumlarda öğretmenlerce söylenen ifadeleri kapsayan diğer geri bildirim ifadeleri açısından şunlar ifade edilebilir;

- Her iki öğretmenin söyleminde de "*evet*" kelimesi en çok karşılaşılan geri bildirim ifadesidir.

- Her iki öğretmenin diğer geri bildirim ifadeleri büyük oranda aynı sözcüklerden (bunlar: *evet, değil mi, hı hı, tamam, tabi, peki, bak*) oluşmaktadır.

- İki öğretmenin geri bildirim ifadelerinde yer alan aynı sözcüklerin öğrencilere benzer geribildirim mesajlarını ilettiği durumlar görülmektedir. Örneğin '*değil mi*' sözcüğünü içeren ifadelere bakıldığında her iki öğretmen bildirimlerinin '*teyit/onama*' anlamı taşıdığı gözlenmektedir.

Soru ifadeleri açısından ortaya çıkan bulgulara bakıldığında ise şunlar ifade edilebilir;

- İspatların yapılışına yönelik soruların hemen hemen tamamı öğretmenlerce cevaplamaktadır,

- Ayşe Hanım'ın ispatların yapılışına yönelik soruları genel yaklaşımları sorgularken, Ahmet Bey'in soruları ise teoremde verilen-gösterilmek istenen mekanizmasını içermektedir,

- Bir ispatın yapılışı tamamlandıktan sonra Ayşe Hanım tarafından sorulan soruların tümü '*anladık mı*' kalıbı ile (örn. "*Bunu anladık değil mi çocuklar*?, *Tamam mı çocuklar anladık mı*?) kurulurken, Ahmet Bey'in sorularında ise '*var mı*' kalıbının (örn. *İspatla ilgili sorusu olan var mı*?, *Var mı aklınıza takılan bir şey*?) yer aldığı görülmektedir,

- Ayşe Hanım'ın, ispatların yapılışına yönelik soruları incelendiğinde tümünde '*nasıl*' kelimesini kullandığı, Ahmet Bey'in sorularında ise '*ne/nedir*' kelimelerine başvurulduğu görülmektedir.

TARTIŞMA

Buraya kadar ortaya konan bilgilere dayalı olarak SA, SK ve SS'ye yönelik yapılan SÇ sonucu ortaya çıkan bulgular, öğretmenlerin ispat ve ispatlamaya yönelik söylemsel karakteristiklerinin yapısı ve oluşturulma biçimleri açısından farklılıklar barındırdığını göstermektedir. Ancak söz konusu söylemlerin öğrenme ve anlam oluşturma sürecindeki işlevleri açısından önemli ölçüde farklılıklar barındırmadığı ifade edilebilir. Bu durumun nedenlerinin başında araştırmanın yapıldığı sınıfın matematik ve geometri derslerini yürüten öğretmenlerin geleneksel öğretim anlayışını benimsemesi gelmektedir. Sınıf içerindeki iletişim büyük oranda öğretmen ekseninde gerçekleşmektedir. Araştırmanın yapıldığı sınıfta öğrencilerin ispatlara yönelik öğrenmelerinin sadece, derslerde öğretmenler tarafından yapılan anlatımlar ve soru cevaplarla sınırlı olduğu görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik bilgilerini yapılandırma sürecinde etkili olan en temel öge öğretmen söylemleridir. Öğretmenler derslerinde düz anlatım ve soru cevap yöntemlerini kullanmakta, öğrencilere ikili ya da küçük gruplar biçiminde çalışma yaptırmamakta, ispatı içeren dönem ya da performans ödevleri vermemekte, yazılı ve sözlü değerlendirmelerinde de (tümevarım dışında) ispat problemleri sormamaktadır. Bu nedenle DS'ler içerisindeki söylemler öğretmen ve öğrenci arasındaki tek yönlü bilgi akışına dayanan ve çeşitlilik göstermeyen bir yapıya sahiptir. Konuşma eylemleri içerisinde BL tipinde olanların en büyük yüzdeye sahip olması da bu durumun bir göstergesidir. DS'ler içerisindeki iletişimin düzeyine yönelik şunu ifade etmek mükündür; Ayşe Hanım'ın derslerindeki iletişimin büyük oranda düşük düzeyde, Ahmet Bey'in derslerindeki iletişimin ise büyük oranda orta düzeyde etkileşimi barındırmaktadır.

Hem öğretmen hem de öğrencilerin sınıf içi söylemlerindeki ispata yönelik sözcük dağarcığı oldukça sınırlıdır. Söz konusu sınırlılığı oluşturan şey sadece sözcüklerin sayısı değil bu sözcüklere yüklenen anlamlar ve iletişimdeki rollerdir. İspata yönelik sözcüklerin terimsel anlamları yeterince vurgulanmamakta, bir ispatın gerçekleştirilmesi esnasında ispatla ilişkili temel sözcüklere yeterince başvurulmamakta (örn. Ayşe Hanım teorem kelimesini neredeyse hiç kullanmamıştır, her iki öğretmen de ispatlar esnasında kullandıkları tanımları, aksiyomları ya da diğer teoremleri ifade etmemektedir), bu sözcüklere yönelik kavramsal anlamanın geliştirilmesi için faklı bağlamlarda (örn. konuşmalarda günlük yaşamla, diğer disiplinlerle ilişkilendirme yapmamak, benzeşimlerden ve analojilerden yararlanmamak gibi) kullanım örnekleri (örn. fen bilimlerinde, hukukta, kriminalojik olaylarda ispatın taşıdığı anlam ile matematikteki anlamlar arasındaki farklılıklar, bir şeyin doğru olduğunu göstermenin matematikte ne anlama geldiğini ve doğrulamanın nasıl yapılabileceğini tartışmak, bunu yaparken örnekleme, genelleme, sağlama, soyutlama gibi kavramlardan yararlanmak, cebirsel olarak yapılan ispatların geometrik modellerinden yararlanmak) sunulmamaktadır. Dolayısıyla öğrencilerin sözcük dağarcığında yer alan kavramlarının sayısı ve anlamsal yapısı da buna paralel olarak daha da sınırlı hale gelmektedir. Ayrıca her iki öğretmenin de derslerde yapılan ispatlarda (tümevarım dışında) hangi ispat yapma yönteminin kullanıldığına değinmedikleri ve ispat yapma yöntemlerine ilişkin açıklamalarda bulunmadıkları görülmüştür. Buradan hareketle öğrencilerin ispat yapma yöntemlerine yönelik bilgilerinde ve bu yöntemleri uygulamaya yönelik yaklaşımlarında bazı sınırlılıkların oluşması doğaldır. Nitekim araştırmacı tarafından belirlenen teoremin, ispatına yönelik öğrenci söylemlerinde (TES-6) bu duruma yönelik örnekler (olmaya ergi üzerine) bulunmaktadır.

Söylemin katılımcılarına yönelik yapılan inceleme, söylemin oluşturulmasını ve paylaşılmasını sağlayan kişiler arasındaki sosyal ilişkileri, statüleri ve etkileşim sürecindeki değişen ya da sabit yapıdaki rolleri kapsamaktadır. İspatı içeren söylemlerde iki katılımcı grubu bulunmakta olup bunlar öğretmeler ve öğrencilerdir. Öğretmenler ispata ve ispatlama yönelik bilgileri doğrudan aktarım ve soru-cevap yaklaşımları altında sunan, öğrencilerin bu süreçte ne kadar ve ne düzeyde katılım göstereceğine karar veren, öğrenciler ise öğretmenleri tarafından sunulan bilgileri dinleme-yazma-çözme gibi eylemler çerçevesinde almaya çalışan temel görevlere sahiptir. Söylemlerde baskın olan karakter ve güç ögesi öğretmenlerdir. Öğrencilerin söylemlere katılımı soru-cevap aşamalarında olabilmektedir. Sınıftaki sosyokültürel yapı içerisinde öğrencilerin sahip olduğu statü ikinci derecededir ve bu statü öğrencilerin etkileşim sürecindeki rollerinin değişmesine engel teşkil etmektedir. Öğrencilerin ispata yönelik öğretim sürecinin genelinde aktif katılım gösterememeleri onların ispatlara yönelik bilgi yapılandırmalarını ve deneyimlerini de sınırlandıran temel etkenlerden biridir.

Her iki öğretmenin de derslerde kullandıkları konuşma dili resmidir. Ahmet Bey ispatların oluşturulması esnasında Ayşe Hanım'a nazaran matematiksel dili daha formal şekilde kullanmaya çalışmakta ve ispatın mekanizmasına yönelik gösterimlerde sembol ve notasyonları kullanmaya özen göstermektedir. Öğrencilerin matematiksel dili kullanma biçimine bakıldığında Ayşe Hanım'ın yaklaşımına daha yakın oldukları görülmektedir. Öğretmenlerin ispata yönelik söylemlerdeki destekleyici geri bildirim ifadeleri hem olumlu olanlar hem de diğerleri açısından büyük oranda benzerdir. Soru ifadelerine yönelik analiz sonucunda öğretmenlerce yöneltilen soruların öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik bilgilerini doğru biçimde yapılandırmalarına yeterince hizmet etmediği söylenebilir. Soruların yapısı, türü ve cevaplanma şekli dikkate alındığında büyük bölümünün düşünme, sorgulama, yorumlama yanlarının zayıf olduğu görülmektedir. Az sayıda olan bu tarzdaki soruların hemen hemen tamamının yine öğretmenlerce cevaplandığı görülmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin ispata yönelik bilgilerini yapılandırmalarında öğretmenlerce yöneltilen sorular yeterince etkili olamamaktadır.

Bir ispatı sınıfta birlikte tartışarak ve yazılı olarak yapmayı içeren TES-6'nın analizini çerçevesinde, öğrencilerin ispata yönelik kavramsal anlamalarında ve ispat yapmaya yönelik yaklaşımlarındaki sıkıntılı yanların doğrudan sözlü söylemlerine yansıdığı ve yazılı söylemlerinde de benzer durumun daha açık bir şekilde ortaya çıktığı görülmektedir. Öğrencilerin bilgi yapılandırmaları büyük oranda öğretmenleri ile etkileşimleri çerçevesinde gerçekleşmektedir. Dolayısıyla öğrencilerde var olan yetersizlik, yanılgı ve yanlış algılamalara zemin oluşturan temel nedenler, öğretmenlerin ispatları ağırlıklı olarak bilgi aktarımı yoluyla sunması, ispatın inşası esnasındaki bilişsel süreçlere öğrencileri yeterince dâhil etmemesi ve ispat yapmanın anlamı ve adımlarını sınırlı bir şekilde ifade ederek aktarması olarak gösterilebilir. Öğrenciler, ispatlar ile bir önerme ya da teoremin doğruluğunun gösterilmesi yanında o önermenin/teoremin neden doğru olduğuna yönelik kesin ve tutarlı bilgi sunulduğunu, ispatların hem kişinin kendisini hem de başkasını ikna etmede önemli bir araç olduğunu, matematikte bir şeyin kabul görmesi ya da kullanılabilmesi için (kabuller, aksiyom ve postulatlar dışında) mutlaka ispatlanması gerektiğine yönelik yorumlara sahip görünmemektedir. Dolayısı ile ispat ile kanun/yasa ve teori arasındaki ilişkilendirmelerde hatalı yorumlarda bulunabilmekte ve matematiksel ispatın yüzde yüz kesinlik içermediğini düşünebilmektedirler. Bu tür yorumların oluşmasında öğretmenlerin söylemlerindeki sınırlı ve eksik içeriğinin de etkisi olduğu düşünülmektedir.

İspatların sınıf içerisindeki önemli rollerinden biri okul matematiği ile bir disiplin olarak ele alınan matematik arasındaki gerekli bağlantıları sağlamaktır (Hanna ve ark, 2009). Ancak öğretmenlerin ispatların yapılma amacını soru ve problem çözümlerinde kolaylık sağlayacak formül, kural yöntem teknik elde etmeye indirgemiş olması ispatların bu rollünü yerine getirmelerine engel olmaktadır.

Halliday (1989), SS'nin bir söylemin sembolik organizasyonu ile ilgili olduğunu ve söylemin *ikna edici*, *açıklayıcı* ve *öğretici* gibi bazı kategoriler biçiminde gerçekleştirdiği belagat (ing: rhetoric, güzel söz söyleme sanatı) stilini de içerdiğini ifade etmektedir (aktaran Fries & Gregory, 1995). Bu açıdan matematik ve geometri derslerinin belagat türünün daha çok açıklayıcı olduğunu ikna edici ve öğretici yanının az olduğunu söylemek mümkündür.

Öğrencilerin genel görüş ve düşüncelerini yansıtan söylemleri onların ispatlara karşı olumlu olduklarını ve ispatlarla uğraşmayı yararlı ve gerekli bulduklarını göstermektedir. Buna karşın öğrencilerin geçerli bir ispatın ne olduğu ya da nasıl olması gerektiğine yönelik net bir düşünceye ve yeterli bilgiye sahip olmadıkları, ispatın matematik ve matematik öğretimindeki önemini yeterince kavrayamadıkları, ispatın sahip olduğu fonksiyonlardan sadece doğrulamaya yönelik bilgi sahibi oldukları gözlenmektedir.

Öğretmenlerin kullandıkları söylem biçimi öğrencilerin bilişsel anlamalarını doğrudan etkilemektedir. Söz konusu söylemler ne kadar iletişime katkı sağlarsa o denli öğrenmeyi olumlu etkiler nitelikte olmaktadır. Ortaya çıkan tüm bulgular ve yapılan yorumlar çerçevesinde öğretmenlerin, öğrencilerine ispat ve ispatlamaya yönelik yönlendirici yardımı (scaffholding) yeterli düzeyde sağlayamadığı, bunu daha alt boyutlarda da olsa öğrencilerin kendi aralarında yapabilmelerine yönelik fırsatlar sunamadığı, uygun öğrenme ortamları oluşturmadığı ve bunun sonucunda da öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik öğrenme ve anlamlandırma süreçlerini başarıyla tamamlayamadıkları görülmektedir.

ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen bulgular ve ulaşılan sonuçlar çerçevesinde ortaya konulabilecek öneriler şunlardır, Öğretmenler derslerde sınıf içerisinde var olan iletişimin yalnızca konu anlatımlarını, soru/problem çözümlerini ve öğrencilerle yapılan sınırlı sözel soru-cevapları içeren bir takım konuşmalar ve tahtada yazılan sınırlı gösterimler olmadığı konusunda bilinçlendirilmelidir. Özellikle günümüzde iletişime yüklenen anlamların ve iletişimin sahip olduğu fonksiyonların artmasıyla birlikte, iletişimin hem günlük yaşamda hem de öğrenme-öğretme sürecindeki yeri ve rolünün doğru olarak kavranması gerekmektedir. Öğretim programları ve standartlar çerçevesinde matematik öğretiminin kazandırmayı hedeflediği temel becerilerden birinin iletişim kurma olduğu ve bu becerinin kazandırılmasında öğretmenlere farklı görev ve sorumluluklar yüklendiği görülmektedir. Bu bağlanma öğretmenlerin kendi söylemlerinin yapısı, içeriği, türü ve öğrencilerin anlamaları üzerindeki etkilerine yönelik farkındalıklarının oluşturulmasına çalışılmalıdır. Örneğin öğretmenlere yönelik hizmet içi ve hizmet öncesi eğitimlerde güzel konuşma, iletişim ve diksiyon gibi dersler, seminerler yerine (ya da onların yanında) etkili iletişim kurma, sınıf içi iletişim sürecini verimli olarak yönetmede teknikler ve yaklaşımlar gibi konularda bilgilendirmelerin yapılması, öğretmen söylemlerinin rolleri ve fonksiyonlarına yönelik yapılan bazı makale, bildiri, proje, tez gibi akademik çalışmaların derlenerek öğretmenlere ve öğretmen adaylarına ilgili araştırmaları okuma ve inceleme fırsatlarının sağlanması yararlı olacaktır.

Öğrencilerin matematik öğrenme-öğretme sürecinde yeni ortaöğretim matematik dersi öğretim programında öngörüldüğü şekilde aktif, katılımcı ve iletişime açık olmalarına ve hem günlük dili hem de matematiksel dili etkili bir şekilde kullanmalarına imkân sağlanmalıdır. Bu araştırma öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik bilgi ve düşüncelerini belirlerken öğrencilerin eksikliklerini görme ve bunların giderilmesinde nasıl bir yol izleneceğine karar vermede tek başına DS'ler içerisindeki söylemleri incelemenin yeterli olmadığını ortaya çıkarmıştır. Bunun nedeni öğrencilerin DS'ler içerisindeki rolü ve katılımlarının oldukça sınırlı olmasıdır. Başka bir değişle geleneksel öğretim anlayışını benimseyen öğretmenlerin sınıflarındaki öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik söylemlerini uygun yapı, derinlik ve çeşitlilikte elde etmek güç görünmektedir. Öğrencilerin derslere katılımı büyük oranda uygulama süreçlerinde ve soru, problem çözümlerinde olduğu için kavramsal düzeyde sahip oldukları algıları, matematiksel bilgileri anlama ve ilişkilendirme biçimlerini ve var olan yanılgılarını, söylemleri çerçevesinde yeterli derinlikte analiz edebilmek mümkün olamayabilir. Ancak TES'lerde olduğu gibi öğrencilerin kendi aralarında ve öğretmenleri ile yapacağı sözel tartışmaların ve TES-6 da olduğu gibi birlikte ispat yapma etkinliklerinin gerçekleştirilmesi yapılacak SÇ'nin başarısını ve geçerliğini arttıracaktır. Bu nedenle yeni öğretim programının felsefesi çerçevesinde öğrenme ortamlarının oluşturulması, öğrenme süreçlerinin planlanması ve bu süreçe öğrencilerin aktif katılımlarının sağlanması ispat öğretimini daha iyi hale getirmeye çok yardımcı olacaktır.

Öğrencilerin ispatlara ve ispatlamaya yönelik bilgilerinde var olan eksiklikler ve sınırlılıkların giderilmesinde ve ispatlama becerilerinin geliştirilmesinde izlenecek yollardan biri onları ispatlarla daha fazla karşı karşıya getirmek ve ispatlar üzerinde bireysel ve gruplar içerisinde çalışmalarına olanak sağlamaktır. Bu tür etkinliklerde öğrencilerin ispat yapma sürecinde ya da sonrasında öğretmenleriyle ve tüm sınıf bazında yapacakları tartışmalar söz konusu etkinlikleri daha etkili hale getirecektir.

Sınıf içi öğretim sürecinde ispatın oluşturulması esnasında kullanılan argümanlar, mantıksal adımlar ve ön bilgilerin öğretmenlerce ayrıntılı biçimde sunulması ve bunlara yönelik gerekli açıklamaların yapılması öğrencilerin ispatlara yönelik anlamlandırmalarına olumlu katkı yapacaktır.

Öğretmenlerin hem ispatların hem de diğer konuların öğretimine yönelik sınıf içi söylemlerinde 'soruya dayalı konuşma eylemlerine' daha fazla başvurması öğrencilerin düşünme, yorumlama, açıklama ve sorgulama yapmalarına zemin oluşturacaktır. Ancak öğrenme sürecinde görev alacak soruların sorgulama, düşündürme ve ilişkilendirme yapmaya olanak sağlar nitelikte olmasına ve cevaplarının büyük oranda öğrencilerce oluşturulmasına özen gösterilmelidir. Bildirici söylemler içerisinde yorumlama, hüküm ve yargı bildiren türlerin daha fazla ifade edilmesi de öğrenmeler üzerinde olumlu etki yaratacaktır. Bu tip söylemlere, öğrencilerin kendi akıl yürütmelerine ve matematiksel düşünme süreçlerine bağlı olarak deneyim kazanmaları sonrasında başvurulması BL tipindeki söylemlerin işlevselliğini arttıracaktır. Böylece öğrencilerin kavramsal anlamalarında var olan eksikliklerin ve yanılgıların azalmasına da yardımcı olunulabilir.

Söylem çözümlemesinin yapılacağı gerek ispata gerekse diğer konulara yönelik araştırmalarda DS'ler yanında TES'lerden ve sözlü söylemlerin yanında yazılı söylemlerden de yararlanılması analizin derinliği ve bulguların zenginliği açısından oldukça yararlı olacaktır. Bu araştırma buna bir örnek niteliğindedir. Ayrıca ispat yönelik araştırmalarda TES'lerden yararlanırken yapılabilecek alternatif uygulanmalardan biri de TES-6'daki uygulama örneğinde olduğu gibi bir ya da birkaç ispat probleminin sınıfta öğrencilerin birlikte tüm sınıf bazında tartışmaları yoluyla yapılması olabilir. Bu tür uygulamalar ispat yapma becerisi, ispat yapmada yaşanan sıkıntıların tespit edilmesi, ispatlara karşı var olan tutum ve inancın belirlenmesi ve ispat şemalarına yönelik araştırmalarda da hem verileri daha boyutlu olarak elde etmeyi hem de ulaşılan bulgu ve sonuçları daha nitelikli kılmayı sağlayacaktır.

Ülkemizde ispat ve ispatlamaya ilişkin öğretimin niteliğini arttırmak için SÇ'ye dayalı bu tarz araştırmaların yapılması önerilmektedir.

KAYNAKÇA

Adams, T. L. (2003). Reading Mathematics: More Than Words Can Say, **The Reading Teacher**, Vol. 56, Issue. 8, pp. 786-795.

Ağlagül, D. (2009). Beşinci Sınıf Sosyal Bilgiler Dersinde Sınıf Öğretmenlerinin Yapılandırmacı Öğrenme Ortamı Düzenleme Becerilerinin Değerlendirilmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

Aksan, D. (1999). **Anlambilim, Anlambilim Konuları ve Türkçenin Anlam Bilimi**, Ankara: Engin Yayınevi.

Akturan, U. Domaç, B. ve diğer. (2008). Söylem Analizi, (Eds. T. Baş ve U. Akturan) **Nitel Araştırma Yöntemleri Nvivo 7.0 ile Nitel Veri Analizi**, Ankara: Seçkin Yayıncılık, s. 25-40.

Allwright, D. & Bailey, K. M. (1991). **Focus on Language Classroom: An Introduction to Classroom Research for Language Teachers**, Cambridge University Press.

Almeida, D. (2000). A Survey of Mathematics Undergraduates' Interaction With Proof:Some Implications for Mathematics Education. **Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.** 31(6), pp. 896-890.

Almeida, D. (2003). Engendering Proof Attitudes: Can the Genesis of Mathematical Knowledge Teach Us Anyting, **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Vol. 34, No. 4, pp. 479-488.

Aschenbrenner, A. (2009/10). Introduction to Linguistics, http://www.anglistik.uni-muenchen.de/personen/wiss_ma/aschenbrenner_anne/pragmatics.pdf (alıntı: Aralık 2009).

Atasoy, E. (2005). Matematik Öğretiminde Yazmanın Kullanılması. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi,

Atay, H. (2007). Söylem Analizi Kavramının Yapıları ve İşlem Akışı, (Eds. A. Yüksel, B. Mil ve Y. Bilim), **Nitel Araştırma, Neden? Nasıl? Niçin?**, Ankara: Detay Yayıncılık, s. 169-180.

Atweh, B., Bleicher, R. E. & Cooper, T. J. (1998). The Construction of the Social Context of Mathematics Classrooms: A Sociolinguistics Analysis, **Journal for Research in Mathematics Education**, Vol. 29, No. 1, pp. 63-82.

Austin, J.L. & Howson, A.G. (1979). Language and Mathematics Education, **Educational Studies in Mathematics**, Vol.10, No.2, pp.161-197.

Aydın, H. (2007). **Felsefi Temelleri Işığında Yapılandırmacılık**, Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Ayık, H. (2006). Düşüncenin Karanlık Noktaları, **Dinbilimleri Akademik Araştırma Dergisi**, VI, Sayı. 4, s. 175-193.

Bagchi, A. & Wells. C. (1998). Varieties of Mathematical Prose, **PRIMUS**, Vol. 8, pp. 116-136.

Baki, A. (2006). **Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi**. Trabzon: Derya Kitabevi.

Balacheff, N. (1988). Aspect of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics. (Eds. D. Pimm). **Mathematics Teachers and Children.** London: Hodder & Stougtoni pp. 216-235.

Ball, D.L., Hoyles, C., Jahnke, H.N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. In L.I. Tatsien (Ed.). **Proceedings of the International Congress of Mathematicians** (Vol. III, pp. 907–920). Beijing: Higher Education Press.

Barwell, R. (2003). Discursive Psychology and Mathematics Education: Possibilities and Challenges, **ZDM**, Vol. 35 (5), pp. 201-207.

Barwell, R. (2005). Language in Mathematics Classroom, **Language and Education**, Vol.19, No.2, pp. 97-102.

Barwell, R. (2008). Discourse, Mathematics and Mathematics Education, **Encyclopedia of Language and Education**, (Eds: M. Martin-Jones, A. M. de Mejia and N. H. Homberger) 2nd Edition, Vol. 3: **Discourse and Education**, pp. 317-328.

Barwell, R., Leung, C., Morgan, C. & Street, B. (2005). Applied Linguistics and Mathematics Education: More than Words and Numbers, **Language and Education**, Vol.19, No.2, pp.142-147.

Baş, T., Akturan, U., Ataçkarapınar, M. ve diğer. (2008). **Nitel Araştırma Yöntemleri, NVivo 7.0 İle Nitel Veri Analizi**, Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Benson, J. D. & Greaves, W. S. (1981). Field of Discourse: Theory and Application, **Applied Linguistics**, II(1), pp. 45-55.

Bilgin, N. (2000). **İçerik Analizi**, İzmir: Ege Üniversitesi Edebiyat Fakültesi Yayınları.

Blanton, M. L. (1998). Prospective Teachers' Emerging Pedagogical Content Knowledge During The Professional Semester: A Vygotskian Perspective on Teacher Development. Unpublished Doctoral Dissertation, Graduate Faculty of North Carolina State University, Raleigh, USA.

Blanton, M. L. (2002). Using An Undergraduate Geomerty Course to Challenge Pre-Sevice Teachers' Notions of Discourse, **Journal of Mathematics Teacher Education**, 5, pp. 117-152.

Blanton, M. L., Berenson, S. B., & Norwood, K. S. (2001). Using Classroom Discourse to Understand A Prospective Mathematics Teacher's Developing Practice, **Teaching and Teacher Education**, 17, pp. 227-242.

Blommeart, J. & Bulcaen, C. (2000). Critical Discourse Analysis, **Ann. Rev. Anthropol**., 29, pp. 447-466.

Bondarouk, T. & Ruel, H.J.M. (2004). **Discourse Analysis: Making Complex Methodology Simple**. (Eds. T. Leino, T. Saarinen, and S. Klein), Proceedings of the 12th European Conference on Information Systems (ECIS). (14-16 June), Turku, Finland.

Brown, G. & Yule, G. (1986). **Discourse Analysis**, Cambridge University Press, Reprinted Edition.

Bukova-Güzel, E. (2006). Öğrencilerin Limit Kavramını Algılamasında ve Diğer Kavramların İlişkilendirilemesin de Karşılaştıkları Güçlükleri Ortadan Kaldıracak Yeni Bir Program Geliştirme. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Bullock, J. O. (1994). Literacy in the Language of Mathematics, **The American Mathematical Monthly**, Vol. 101, No. 8, pp. 735-743.

Cameron, D. (2001). **Working With Spoken Discourse**, Sage Publication.

Casa & DeFranco, (2005). **Making Decisions About Discourse: Case Studies of Three Elementary-Level Teachers with Various Backgrounds and Years of Teaching Experience,** Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (20 October), Virginia Tech University, Roanoke.

Cazden, C. B. & Beck, S. W. (2003). Classroom Discourse, **Handbook of Discourse Processes**, (Eds. A. C. Graesser; M, A, Gernsbacher; S. R. Goldman), New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Inc. Publication.

Celce-Murcia, M. & Olshtain, E. (2000). **Discourse and Context in Language Teaching**. New York: Cambridge University Press.

Cem, A. (2005). Dilbilgisi Öğretiminde Biçim-Anlam-Kulanım Üçlüsü: Ders Malzemeleri Hazırlama ve Uygulama Önerisi, **TÖMER Dil Dergisi**, Sayı. 128, s. 7-28.

Chapman, A. (1993). Language and Learning in School Mathematics: A Social Semiotic Perspective, **Issues in Educational Research**, 3(1), pp. 35-46.

Chapman, A. (2003a). Reflection on A Social Semiotics Approach to Discourse Analysis in Educational Research, (Eds. T. O'Donoghue & K. Punch), **Qualitative Educational Research in Action**, RoutledgeFalmer, pp. 152-176.

Chapman, A. (2003b). **Language Practices in School Mathematics, A Social Semiotics Approach**, The Edwin Mellen Press.

Chazan, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof, **Educational Studies in Mathematics.** 24, pp. 359-387.

Cheek, J. (2004). At the Margins? Discourse Analysis and Qualitative Research, **Qualitative Health Research**, Vol. 14, No. 8, pp. 1140-1150.

Chiristie, F. (2005). **Classroom Discourse Analysis: A Functional Perspective**, Continuum.

Cirillo, M. (2008).On Becoming A Geometry Teacher: A Longitual Case Study of One Teacher Learning to Teach Proof. Unpublished Doctoral Dissertation, Iowa State University, Ames, Iowa.

Cobb, P. (1994). Where Is the Mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development, **Educational Researcher**, Vol. 23, No. 7, pp. 13-20.

Cobb, P. (2007). Zihin Nerdedir? Sosyokültürel ve Bilişsel Oluşturmacı Perspektiflerin Bir Buluşma Noktası, (2. Baskıdan Çev. S. Durmuş), **Oluşturmacılık. Teori, Perspektifler ve Uygulama**, Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E. & McNeal, B. (1992). Characteristics of Classroom Mathematics Traditions: An International Analysis, **American Educational Research Journal**, Vol. 29, No. 3, pp. 573-604.

Çakır, C. (2004). Anlamın Bağlam Açısından İncelenmesi: Kökanlambilim ve Artanlambilim, **GÜ, Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi**, Cilt 24, Sayı 3, s. 245-255.

Dascal, M. (1984). **Interpretation and Understanding**, John Benjamins Publishing.

Davis, P. J. & Hersh, R. (2002). **Matematiğin Seyir Defteri**.(Çev. E. Abadoğlu) Ankara: Doruk Yayıncılık.

Doğan, G. (2003). Söylemin Yorumlanması, (Yayına Haz. A. Kocaman) **Söylem Üzerine**, Ankara: ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş. Yayınları, s. 82-104.

Doltaş, D. (2003). Söylem ve Yazım, (Yayına Haz. A. Kocaman) **Söylem Üzerine**, Ankara: ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş. Yayınları, s. 48-55.

Durmuş, S. (2001). Matematik Eğitimde Oluşturmacı Yaklaşımlar, **Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi**, 1/1, s. 91-107.

Duval, R., Ferrari, P. L., Høines, M. J. & Morgan, C. (2005). **Language and Mathematics, Introduction**, Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, (17-21 February), Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Edwards, J. A. (2003). The Transcription of Discourse, (Eds.D. Schiffrin, D. Tannen & H. E. Hamilton), **The Handbook of Discourse Analysis**, Blackwell Publishing, pp. 321-348.

Edwards, D. & Potter, J. (1992). **Discursive Psychology**, London: Sage Publication.

Edwards, D. (1997). Toward A Discursive Psychology of Classroom Discourse, (Eds. C. Coll & D. Edwards), **Teaching, Learning and Classroom Discourse**, **Approaches to the Study of Educational Discourse**, Madrid: Astáviz Foromecánica, pp. 33-48.

Edwards, J. A. & Lampert, M. D. (1993). **Talking Data, Transcription and Coding in Discourse research**, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale NJ.

Edwards, J. A. (1993). Principles and Contrasting Systems of Discourse Transcription, (Eds. J. A. Edwards & M. D. Lambert) **Taking Data, Transcription and Coding in Discourse Research**, pp. 3-32.

Eggins, S. (2004). **An Introduction to Systemic Functional Linguistics** (2nd Edition) London: Continuum.

Ellerton, N. F. & Clarkson, P. C. (1996). Language Factors in Mathematics Teaching. (In A. J. Bishop et. al.) **International Handbook of Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ellerton, N. F. & Clement, M. A. K. (1991). **Mathematics in Language: A Review of Language Factors in Mathematics Learning**, Australia: Deakin University Publishing.

Erdener, E. (2009). Vygotsky'nin Düşünce ve Dil Gelişimi Üzerine Görüşleri: Piaget'e Eleştirel Bir Bakış, **Türk Eğitim Bilimleri Dergisi**, 7(1), s. 85-103.

Ergün, M. ve Özsüer, S. (2006). Vygotsky'nin Yeniden Değerlendirilmesi. **Afyonkarahisar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi**. 2, s. 269-292.

Erton, İ. (2000). Contributions of Discourse Analysis to Language Teaching, **Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi**, 19: s. 201-211.

Evans, V. & Green, M. (2006). **Cognitive Linguistics, An Introduction**, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Fawcett, R. (2000). **A Theory of Syntax for Systemic Functional Linguistics**, John Benjamin Publishing.

Fosnot, C. T. & Perry, R. S. (2007). Oluşturmacılık: Psikolojik Bir Öğrenme Teorisi (Bölüm-2), **Oluşturmacılık. Teori, Perspektifler ve Uygulama**, (2. Baskıdan Çev. S. Durmuş), Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Francis, A. P., Yu, P. W. D., Francis, J. & McCrory, R. (2009). **Using Semiotics to Teach Rational Numbers to Prospective Elementary School Teachers**, in Proceedings of the 31th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Atlanta, GA: Georgia State University, Vol. 5, pp. 1144-1152.

Freitag, M. (1997). Reading and Writing in Mathematics Classroom, **The Mathematics Educator**, Vol. 8, No. 1, pp. 16-21.

Fries, P. H. & Gregory, M., (1995). **Discourse in Society: Systemic Functional Perspectives: Meaning and Choice in Language; Studies for Michael Halliday**. Vol. L, Ablex Publishing.

Galbraith, P. L., (1981). A Clinical Investigation of Process. **Educational Studies in Mathematics**. 12(1), pp. 1-28.

Gallos, F. L. (2003). **Patterns of Students' Private Conversation in A Mathematics Classroom**, Conference of Learner's Perspective Study, International Research Team, (1-3 December), University of Melbourne.

Garnier, R. & J. Taylor (1996). **100% Mathematical Proof**. John Wiley & Sons, Inc. Press.

Gee, J. P. & Green, J. L. (1998). Discourse Analysis, Learning, and Social Practice: A Methodological Study, **Review of Research in Education**, Vol.23, pp. 119-169.

Gee, J.P. (1999). **An Introduction to Discourse Analysis**, London and New York: Routledge.

Golzy, J. (2008). A Cultural Study of Classroom Discourse and Its Impact on Students' Initiation of Geometry Proofs. Unpublished Doctoral Dissertation, The State University of New York, Buffalo.

Goodwin, C. & Duranti, A. (1992). Rethinking Context: An Introduction, (Eds. A. Duranti & C. Goodwin), **Rethinking Context, Language As An Interactive Phenomenon**, Cambridge Univeristy Press, pp. 1-42.

Goodwin, C. (1981). **Conversational Organization: Interaction between Speakers and Hearers**, New York: Academic Press.

Grant, L. M. (1995). Developing Student Awareness of Knowledge Structures: An Exploratory Teacher-Action Study. Unpublished Master Dissertation, The University of British Columbia.

Gupta, I. D. (1980). Mathematics Is A Language? A Rationale for Mathematics Instruction, **Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.**, Vol. 11, pp. 29-32.

Günay, V. D. (2004). **Dil ve İletişim**, İstanbul: Multilingual.

Günay, V. D. (2010). **Söylem Çözümlemeleri**, [basımda kitap]

Gündoğan, A. O. (2002). Dil ve Dil-Anlam İlişkisi, http://www.aliosmangundogan.com/PDF/Makale/Ali-Osman-Gundogan-Dil-ve-Anlam-Iliskisi.pdf, (alıntı 02 Ocak 2009).

Halliday, M. A. K. & Hasan, R. (1989). **Language, Context and Text: Aspects of Language in A Social-Semiotic Perspective.** (2nd ed.). Oxford: Oxford University Press.

Halliday, M. A. K. & Matthiessen, C. M. I. M. (1999). **Construing Experience Through Meaning: A Language-Based Approach to Cognition**, Cassell, London.

Halliday, M. A. K. (1994). **An Introduction to Functional Grammer**, London: Arnold.

Halliday, M. A. K., & Martin, J. R. (1993).**Writing Science: Literacy and Discursivep Ower**. London: Falmer.

Hanna, G. (1983). **Rigorous Proof in Mathematics Education**, Curriculum Series 48, Toronto: OISE Press.

Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. **Interchange**. 21(1), pp. 6-13.

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. **For the Learning of Mathematics**. 15(3), pp. 42-49.

Hanna, G. (2000). A Critical Examination of Three Factors in the Decline of Proof. **Interchange**. 31(1), pp. 21-33.

Hanna, G., de Villiers, M. Arzarello, F. et. al. (2009). **ICMI Study 19: Proof and Proving in Matematics Education**: **Discussion Document**, (Eds. F. L. Lin; F. J. Hsieh; G. Hanna & M. de Villiers) Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, (10-15 May) pp. 1-XIX--1-XXX,Taipei, Taiwan.

Har, Y. B. (2007). **The Singapore Mathematics Curriculum and Mathematical Communication**, Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. (Eds. A. H. Schoenfeld, J. Kaput, and E. Dubinsky), **CBMS Issues in Mathematics Education** (Vol. 3, pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L (2007). Toward a Comprehensive Perspective on Proof, (Eds. F. Lester), **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 805-842.

Harper, D.J. (2006) **Discourse Analysis**, (Eds. M. Slade and S. Priebe), Choosing Methods in Mental Health Research, Hove: Routledge, pp. 47-67.

He, A. W. (2002). Discourse Analysis, (Eds. M. Aronoff & J. Rees-Miller), **The Handbook of Linguistics**, Oxford: Blackwell Publishing, pp, 428-445.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). **Justifying and proving in school mathematics** (Technical Report). London: Institute of Education, University of London.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. **Journal for Research in Mathematics Education**. 31(4), pp. 396-428.

Hersh, R. (1993). Proving is Convincing and Explaining. **Educational Studies in Mathematics**. 24(4), pp. 389-399.

Hicks, D. (1996). Discourse, Learning and Teaching, **Review of Research in Education**, Vol. 21, (1995-1996), pp. 49-95.

Holloway, I. (1997). **Basic Concepts for Qualitative Research**, Blackwell.

Houston, K. (2010) **Matematikçi Gibi Düşünmek, Lisans Matematiği İçin Bir Klavuz**, (Çev. M. Terziler ve T. Öner), Ankara: Palme Yayıncılık.

Huang, J. & Normandia, B. (2007). Learning The Language of Mathematics: A Study of Student Writing, **International Journal of Applied Linguistics**, Vol. 17. No. 3, pp. 294-318.

Huang, J., Normandia, B. & Greer, S. (2005). Communicating Mathematically: Comparison of Knowledge Structures in Teacher and Student Discourse in a Secondary Math Classroom, **Communicating Education**, Vol.54, No.1, pp. 34-51

Khaing, T. T., Hamaguchi, K. & Ohtani, M. (2007). **Development Mathematical Communication in the Classroom**, Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

Kieran, C. (2001). The Mathematical Discourse of 13-Year-Old Partnered Problem Solving and Its Relation to the Mathematics That Emerges, **Educational Studies in Mathematics**, Vol. 46, No. 1/3, pp.187-228.

Knuth, E. & Elliott, R. (1997). **Preservice Secondary Mathematics Teachers' Interpretations of Mathematical Proof**. Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. pp. 545-552.

Knuth, E. J. & Peressini, D. D. (2001). Unpacking the Nature of Discourse in Mathematics Classroom, **Mathematics Teaching in the Middle School**, Vol. 6, No. 5, pp. 320-325.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**. 5, pp. 61-88.

Ko, Y. & Knuth, E. (2009). Undergraduate Mathematics Majors' Writing Performance Producing Proofs and Counterexamples in Continuous Functions. **Journal of Mathematical Behavior**, 28(1), pp. 68-77.

Kocaman, A. (2003). Dilbilim Söylemi, **Söylem Üzerine**, Ankara: ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş. Yayınları, s. 1-11.

Kocaman, A., Ruhi, Ş., Zeybek, D., Doltaş, D., Bengi-Öner, I. ve Doğan, G. (2003). **Söylem Üzerine**, (Yayına Hazırlayan A. Kocaman), ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş. Yayınları.

Kotsopoulos, D. (2008). **Communication in Mathematics: A Discourse Analysis of Peer Collaborations**, Proceedings/ Actes 2008 Annual Meeting, Canadian Mathematics Education Study Group. University of Sherbrooke, (23-27 May), pp. 141-147.

Lampert, M. D. & Ervin-Tripp, S. M. (1993). Structured Coding for the Study of Language and Social Interaction, (Eds. J. A. Edwards & M. D. Lampert), **Talking Data, Transcription and Coding in Discourse Research**, pp. 169-206.

Larrazabal, J. M. & Korta, K. (2002), Pragmatics and Rhetoric for Discourse Analysis: Some Conceptual Remarks. In Dascal's Festchrifft, Manuscrito, **Campinas**, XXV (2), pp. 33-48.

Lazaraton, A, (2002). Quantitative and Qualitative Approaches to Discourse Analysis, **Annual Review of Applied Linguistics**, 22, pp. 32-51.

Lee, J. K. (2002). Philosophical Perspectives on Proof in Mathematics Education. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, 16.

Leech, G. (1983). **Principles of Pragmatics**, London and New York: Longman.

Lemke, J.L. (1998b). Analysing Verbal Data: Principles, Methods, and Problems, **International Handbook of Science Education** (Kluwer), http://www-personal.umich.edu/~jaylemke/papers/handbook.htm, (alıntı 10 Kasım 2006).

Leont'ev, A. N. (1981). The Problem of Activity, (Eds. J. Wersch), **The Concept of Activity in Soviet Psychology**, M. E. Sharpe, Armonk, NY, pp. 37-71.

Levinson, S. C. (1983). **Pragmatics**, Cambridge University Press.

Lijuan, Y., Wenhong, Y. & Weigang, W. (2007). Hints from Discourse Analysis and Pragmatics in the Teaching of Listening and Speaking in ESL, **A Speicial Edition for the Fourth International Conference on ELT**, (25 April), Beijingh, China.

Lin, C. H., Shann, W. C. & Lin, S. C. (2007). **Reflection on Mathematical Communication from Taiwan Math Curriculum Guideline and PISA 2003**, Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, "Focusing on Mathematical Communication, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

Marks, G. & Mousley, J. (1990). Mathematics Education and Genre: Dare We Make the Process Writing Mistake Again?, **Language and Education**, 4(2), pp. 117-136.

Martin, G. W. & Harel, G. (1989). Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. **Journal for Research in Mathematics Education**, 20, pp. 41-51.

Martin, J. R. (1992). **English Text: System and Structure**, Amsterdam: John Benjamins.

Martin, J. R., Matthiessen, C. M. I. M. & Painter, C. (1997). **Working With Functional Grammar**, London: Arnold.

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W. & Dindyal, J. (2005). The Interplay of Teacher and Student Actions in the Teaching and Learning of Geometric Proof. **Educational Studies in Mathematics,** 60, pp. 95-124.

Matthiessen, C. M. I. M. (1995). **Lexicogrammatical Cartography: English Systems**, Tokyo: International Language Sciences Publishers.

McCarthy, M. (1991). **Discourse Analysis for Language Teachers**, Cambridge University Press.

McCrone, S.M., & Martin, T.S. (2002). **Proof Construction Assessment**. Illinois State University, College of Arts and Sciences. Available: htrp://www.cas.ilstu.edu/proofproject/webpage/ (alıntı 18 Mart 2006).

MEB, (1992). **Ortaöğretimde Matematik Dersi Programları**, Ankara.

MEB, (2005). **Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı**, http://ogm.meb.gov.tr/ (alıntı 01 Ekim 2009).

Mechura, M. B. (2005). **A Practical Guide for Functional Text Analysis: Analyzing English Texts for Field, Mode, Tenor and Communicative Effectiveness.** (alıntı 12 Eylül 2009) http://www.cainteoir.com/cainteoir_files/etc/FunctionalTextAnalysis.pdf.

Mehan, H. (1979). **Learning Lessons: Social Organization in the Classroom**, Harvard University Press.

Mey, J. (1993). **Pragmatics, An Introduction**, Oxford: Blackwell.

Meyer, D. K. & Turner, J. C. (2002). Using Instructional Discourse Analysis to Study the Scaffolding of Student Self-regulation. **Educational Psychologist**, Vol. 37, pp. 5-13.

Mingus, T., T., Y., Grassl, R., M. (1999). Preservice Teacher Beliefs about Proofs. **School Science and Mathematics,** Vol. 99, No. 8 pp. 438-444.

Miyagui, M. (2007). **Key Questions for Focusing on Mathematical Communication**, Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, "Focusing on Mathematical Communication, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

Mohan, B. A. (2007). Knowledge Structures in Social Practices, Chapter 20, **International Handbook of English Language Teaching**, Vol.15, Springer US, pp. 303-315.

Moore, R. C. (1994). Making the Transition to Formal Proof, **Educational Studies in Mathematics**, 27, pp. 249-266

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. & Yeşildere, S. (2006). Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri. **Kastamonu Eğitim Dergisi**. 14(1), s. 147-160.

Morgan, C. (2006). What Does Social Semiotics Have to Offer Mathematics Education Research?, **Educational Studies in Mathematics**, Vol. 61, No.1/2, A PME Special Issue, pp.219-245.

Morrone, A. S., Harkness, S. S., D'Ambrosio, B., & Caulfield, R. (2004). Patterns of Instructional Discourse That Promote the Perception of Mastery Goals in A Social Constructivist Mathematics Course, **Educational Studies in Mathematics**, 56, pp. 19-38.

Morselli, F. (2008). **High School Pre-service Teachers' Beliefs about Proof: Some Reflections For & From A Training Course**, Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI, Roma (5-8 March) http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/WG2.html (alıntı 09 Ekim 2009)

Nathan, J. M. & Knuth, J. E. (2003). A Study of Whole Classroom Mathematical Discourse and Teacher Change, **Cognition and Instruction**, 21(2), pp.175-207.

NCTM, (2000). **Principles and Standarts for School Mathematics**. Reston, VA: NCTM.

Neville-Barton, P. & Barton, B. (2005). The Relationship Between English Language and Mathematics Learning for Non-Native Speakers, Teaching and Learning Initiative, Unitec, New Zealand. http://www.tlri.org.nz/pdfs/13909.pdf, (alıntı 08 Ocak 2009).

Nolt, J., Rohatyn, D. & Varzi, A. (1998). **Schaum's Outline of Theory and Problems of Logic** (2nd ed.). New York: McGraw-Hill.

Ntenza, S. P. (2006). Investigating Forms of Children's Writing in Grade 7 Mathematics Classrooms. **Educational Studies in Mathematics**, 61, pp. 321-345.

O'Halloran, K. L. (2004). Discourse in Secondary School Mathematics Classroom According to Social Class and Gender, (Eds. J. Foley), **Language, Education and Discourse**, Continuum, pp. 191-225.

O'Halloran, K. L. (2005). **Matematical Discourse, Language. Symbolism and Visual Images**, Continuum.

O'Halloran, K.L. (2000), Classroom Discourse in Mathematics: A Multisemiotic Analysis, **Linguistics and Education**, 10 (3), pp.359-388.

Okazaki, M. (2006). **Semiotic Chaining in An Expression Constructing Activity Aimed at The Transition from Arithmetic to Algebra**, Proceedings 30 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 257-264, (16-21 July), Prague, Czech Republic.

Olson, M. R. & Truxaw, M. P. (2009). Invisibility of Text and Preservice Science and Mathematics Teachers: The Development of Discursive Meta-Knowledge. **Journal of Adolescent and Adult Literacy.** 52, pp. 422-431.

Özden, Y. (2003). **Öğrenme ve Öğretme**, Ankara: PegemA Yayınları.

Padraig, M. & McLoughlin, M. M. (2002). **The Central Role of Proof in the Mathematics Canon: The Efficacy of Teaching Students to Create Proofs Using a Fusion of Modified Moore, Traditional, and Reform Methods**. The Annual Summer Meeting of the Mathematical Association of America, (3 August) Burlington, Vermont.

Paltridge, B. (2006). **Discourse Analysis: An Introduction**, Continuum.

Parker, I. (1994). Discourse Analysis, **Qualitative Research Medhods in Psychology, A Research Guide**, Open University Press, pp. 92-107.

Peccei, J. S. (1999). **Pragmatics**, London: Routledge.

Peressini, D. D. & Knuth, E. J. (1998). Why Are You Talking When You Could Be Listening? The Role of Discourse and Reflection in the Professional Development of A Secondary Mathematics Teacher, **Teaching and Teacher Education**, Vol. 14, No. 1, pp. 107-125.

Philips, D. C. & Soltis, J. F. (2005). **Öğrenme: Perspektifler**, (4. Baskıdan Çev. S. Durmuş). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Philips, L. & Jørgensen, M. W. (2002). **Discourse Analysis As Theory and Methods**, Sage Publication.

Pimm, D. (1987). **Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms**. London: Routledge & Kegan Paul.

Pimm, D. (2004). **Discourse Analysis and Mathematics Education:** An Anniversary of Sorts Paper Presented at the International Congress of Mathematics Education, Copenhagen, Denmark [ICME 10].

Potter, J. & Wetherell, M. (1987). **Discourse ans Social Psychology: Beyond Attitudes and Behaviour**, Sage Publication.

Potter, J. (2009). Discourse Analysis, (Eds. M. Hardy and A. Bryman), **The Handbook of Data Analysis**, London: Sage Publication, pp. 607-624.

Potter, J., Edwards, J. A. & Wetherell, (1993). A Model of Discourse in Action, **American Behaviour Scientist**, 36(3), pp. 383-401.

Radford, L., Schubring, G., & Seeger, F. (Eds.) (2008). **Semiotics in mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture**. Rotterdam: Sense.

Raman, M. J. (2002). Proof and Justification in Collegiate Calculus. Unpublished Doctoral Dissertation, University of California, Berkeley.

Renkema, J. (2004). **Introduction to Discourse Studies**, John Benjamins Publishing.

Resnik, M. D. (1992). Proof As A Source of Truth, (Eds. M. Detlefsen) Proof and Knowledge in Mathematics, London and New York: Routledge.

Rogers, R. (2004). An Introduction to Critical Discourse Analysis in Education, (Eds. R. Rogers), **An Introduction to Critical Discourse Analysis in Education**, Lawrence Erlbaum, pp. 1-18.

Rogers, R., Malancharuvil-Berkes, E., Mosley, M., Hui, D. & Joseph, G. O, (2005). Critical Discourse Analysis in Education: A Review of the Literature, **Review of Educational Research**, Vol. 75, No. 3, pp. 365-416.

Rowland, T. (2002). Pragmatic Perspestives on Mathematics Discourse, **Philosophy of Mathematics Education Journal**, 16.

Ryve, A. (2004). Can Colloborative Concept Mapping Create Mathematically Productive Discourses?, **Educational Studies in Mathematics**, 26, pp. 157-177.

Ryve, A. (2006). Making Explicit the Analysis of Students' Mathematical Discourses-Revisiting A Newly Developed Methodological Framework, **Educational Studies in Mathematics**, 62, pp.191-209.

Sadock, J. (2004). Speech Acts, (Eds. L. R. Horn & G. Ward), **The Handbook of Pragmatics**, Blackwell Publishing.

Saeed, J. I. (1997), **Semantics**, Blackwell Publishing.

Schiffrin, D. (1994). **Approaches to Discourse**, Oxford: Blackwell.

Schoenfeld, A. H. (1994). What Do We Know about Mathematics Curricula. **Journal of Mathematical Behavior**, 13(1), pp. 55-80.

Seeger, F. (2001). Research on Discourse in the Mathematics Classroom: A Commentary, **Educational Studies in Mathematics**, 46, pp. 287-297.

Segal, J. (2000). Learning about Mathematical Proof: Conviction and Validity. **Journal of Mathematical Behavior**. 18(2), pp. 191-210.

Selden, A. & Selden J. (1987). **Errors and Misconceptions in College Level Theorem Proving.** Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Cornell University, Cornell, NY.

Setati, M. (2005). Mathem atics Education and Language: Policy, Research and Practice in Multilingual South Africa, (Eds. R. Vithal, J. Adler, & C. Keitel) **Researching Mathematics Education in South Africa**. Cape Town: HSRC Press.

Sever, S. (1998). Dil ve İletişim, **Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi**, Cilt. 31, s. 51-66.

Sfard, A. & Kieran, C. (2001). Cognition As Communication: Rethinking Learning-by-Talking through Multi-Faceted Anaysis of Students' Mathematical Interactions, **Mind, Culture, and Activity**, 8(1), pp. 42-76.

Sfard, A. (2000). Steering (Dis)Course between Metaphors and Rigor: Using Focal Analysis to Investigate an Emergence of Mathematical Objects, **Journal for Research in Mathematics Education**, Vol. 31, No. 3, pp.296-327.

Sfard, A. (2001). There is More to Discourse Than Meets the Ears: Loking at Thinking as Communicating to Learn More about Mathematical Learning, **Educational Studies in Mathematics**, Vol. 46, No. 1/3, pp. 13-57.

Sherin, M. G. (2002). A Balancing Act: Developing A Discourse Community in A Mathematics Classroom, **Journal of Mathematics Teacher Education** 5, pp. 205-233.

Sierpinska, A. (2005). Discoursing Mathematics Away, (Eds. J. Kilpatrick, O. Skovsmose & C. Hoyles), **Meaning in Mathematics Education**, Dortrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 205-230.

Sowder, L. & Harel, G. (1998). Types of Students' Justification. **The Mathematics Teacher**. 91(8), pp. 670-675.

Steele, D. F., (2001). Using Sociocultural Theory to Teach Mathematics: A Vygotskian Perspective. **School Science and Mathematics**. 101(8), pp. 404-416.

Straber, R. (2004). Introduction: Semiotics in Mathematics Education Research. **ZDM.** 36(6), pp. 184.

Street, B. (2005). The Hidden Dimensions of Mathematical Language and Literacy, **Language and Education**, Vol. 19, No. 2, pp. 136-141.

Stubbs, M. (1983). **Discourse Analysis, The Sociolinguistics Analysis of Natural Language**, Chicago: The University of Chicago Press.

Şimşek, N. (2004). Yapılandırmacı Öğrenme ve Öğretime Eleştirel Bir Yaklaşım, **Eğitim Bilimleri ve Uygulama**, 3(5), s. 115-139.

Talja, S. (1999). Analyzing Qualitative Interview Data: The Discourse Analytic Method. **Library & Information Science Research** 21 (4), pp. 459-477.

Tall, D. (1998). **The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some?** In Z. Usiskin (Ed.), Developments in School Mathematics Education Around the World. 4, Reston, Virginia: NCTM, pp. 117-136.

Taylor, S. (2001) Locating and Conducting Discourse Analytic Research (Eds. M. Wetherell, S. Taylor and S. J. Yates), **Discourse As Data, A Guide for Analysis**, London: Sage Publications, pp. 5-48.

te Molder, H. (2009). Discourse Theory and Analysis. (Eds. S.W. Littlejohn & K. Foss) **Encyclopaedia of Communication Theory**, London: Sage, pp. 312-317.

Tehrani, N. J. & Yeganeh, A. S. (1999). **A Dictionary of Discourse Analysis**, (Eds. A. B. Bahrami), Tehran: Rahnama Publications.

ten Have, P. (2007). **Doing Conversation Analysis, A Practical Guide**, Sage Publications.

Thomas, J. (1995). **Meaning in Interaction, An Introduction to Pragmatics**, Longman.

Thornton S. & Reynolds, N. (2006). **Analysing Classroom Interactions Using Critical Discourse Analysis**, (Eds. J. Novotna; H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova), Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (16 -21 July 2006), Prague, Czech Republic, Vol. 5, pp. 273-280.

Tomalin, M. (2004). Leonard Bloomfield, Linguistics and Mathematics, **Historiographia Linguistica**, XXXI:1, pp. 105-136.

Truxaw, M. P. & DeFranco, T. C. (2004). **A Model for Examining The Nature and Role of Discourse in Middle Grades Mathematics Classes**, Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (21-24 October), OISE/University of Toronto, Ontorio, Canada.

Truxaw, M. P. & DeFranco, T. C. (2005). **Models for Teaching to Promote Mathematical Meaning: Unpacking Discourse in Middle Grades Mathematics Classes**, Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (20-23 October), Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia Tech, USA.

Truxaw, M. P. & DeFranco, T. C. (2007). Lessons from Mr. Larson, An Inductive Model of Teachinng for Orchestrating Discourse, **Mathematics Teacher**, Vol. 101, No. 4, pp. 269-272.

Truxaw, M. P. (2004). Mediating Mathematical Meaning Through Discourse: An Investigation of Discourse Practice of Middle Grades Mathematics Teachers. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Connecticut, USA.

Truxaw, M. P. (2005). **Orchestrating Whole Group Discourse to Madiate Mathematical Meaning**, Annual Meeting of American Education Research Association [AERA], (11-15 April), Montreal.

Truxaw, M. P., Gorgievski, N. & DeFranco, T. C. (2008). Measuring K-8 Teachers’s Perception of Discourse Use in Their Mathematics Classes, **School Science and Mathematics**, 108(2), pp. 58-70.

Turgut, İ. (2000). **Çağımızın Son Felsefe Akımları ve Felsefeciler 21. Yüzyıl**, İzmir: Anadolu Matbaacılık.

Türk Dil Kurumu [TDK], (2010). http://tdkterim.gov.tr/bts/?kategori=verilst&kelime=s%F6ylem&ayn=tam , (alıntı 15 Şubat 2010).

Uğurel, I., Tekin, Ç. ve Moralı, S. (2008). Matematik Eğitimi Literatüründen “Yazma Aktiviteleri” Üzerine Genel Bir Bakış, **E-Journal of New World Sciences Academy**, Vol. 4, No. 2, pp. 494-507.

Ulep, S. A. (2007). **Developing Mathematical Communication in Philippine Classroom**, Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

Umay, A. (2002). Öteki Matematik, **Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi**, 23, s. 275-281.

Uslu, Z. (2005). Edimbilim ve Yabancı Dil Öğretimine Etkileri, **Dil Dergisi (A. Ü. Tömer)**, 127, s. 35-44.

Vardar, B. (2001). **Dilbilim Temel Kavramlar ve İlkeleri**, İstanbul: Multilingual.

Vui, T. (2007). **Enhancing Classroom Communication to Develop Students’ Mathematical Thinking**, Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, "Focusing on Mathematical Communication, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

Wagner, D. (2007). Students’ Critical Awareness of Voice and Agency in Mathematics Classroom Discourse, **Mathematical Thinking and Learning**, 9(1), pp.31–50.

Wakefield, D. V. (2000). Math As A Second Language, **The Educational Forum**, 64: 3, pp. 272-279.

Wang, S. (2007). **Research Process, Changes and Implementation of Mathematics Curriculum Standard of China**, Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, "Focusing on Mathematical Communication, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

Warren, E, (2006), Comparative Mathematical Language in The Elementary School: A Longitudinal Study, **Educational Studies in Mathematics**, 62, pp.169-189.

Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and Sytactic Proof Productions. **Educational Studies in Mathematics**. 56, pp. 209-234.

Weber, K. (2003), Students’ Difficulties With Proof, Teaching and Learning: Research Sampler, Mathematical Association of Americas [MAA], www.maa.org/t and l/sampler/rs 8.htm (alıntı 24 Temmuz 2006).

Weber, K., (2001),Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need For Strategic Knowledge. **Educational Studies in Mathematics**. 48, pp. 101-119.

Wertsch, J. V. & Toma, C. (1995). Discourse and Learning in The Classroom: A Sociocultural Approach, (Eds. L. Steffe & J. Gale) **Constructivism in Education**, New Jersey: Lawrence Erlbaum, pp. 159-174.

Wetherell, M., Taylor, S. & Yates, S. J. (2001). **Discourse As Data, A Guide for Analysis**, Sage Publications, London.

Willing, C. (2003). Discourse Analysis, (Eds. J. A. Smith), **Qualitative Psychology, A Practical Guide to Research Methods**, Sage Publication, pp. 159-183.

Wilson, J. (2002). **Dil. Anlam ve Doğruluk**, (Çev. İ. Emiroğlu; A. Tüzer). Ankara: Ankara Okulu Yayınları.

Wood, L. A. & Kroger, R. O. (2000). **Doing Discourse Analysis, Methods for Studying Action in Talk and Text,** California: Sage Publications.

Wood, T., Cobb, P. & Yackel, E. (1993). Chapter 6: The Nature of Whole-Class Discussion, **Journal for Research in Mathematics Education**, Monograph, Vol. 6, Rethinking Elementary School Mathematics: Insights and Issue, pp. 55-68+115-122.

Woodruff, A. & Aoki, P. M. (2004). Conversation Analysis and User Experience, **Digital Creativity**, Vol. 15, No. 4, pp. 232-238.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996) Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics, **Journal for Research in Mathematics Education**, Vol. 27, No. 4, pp. 458-477.

Yalçın, S. K. ve Şengül, M. (2007). Dilin İletişim Süreci İçerindeki Rolü ve İşlevleri, **Türkoloji Araştırmaları**, 2(2), s. 749-769.

Yıldırım, A..& Şimşek, H. (2000). **Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri**, (2. Basım) Ankara : Seçkin Yayıncılık.

Yushau, B. & Bokhari, M. A. (2005). Language and Mathematics: A Mediational Approach to Bilingual Arabs, **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**, April. 13th, [143], http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm (alıntı 20 Şubat 2008).

Yüksel, A., Mil, B. ve Bilim, Y. (Eds.) (2007). **Nitel Araştırma: Neden, Nasıl, Niçin**, Ankara: Detay Yayıncılık.

Zack, V. & Graves, B. (2001). Making Mathematical Meaning through Dialogue: “Once You Think of It, the Z Minus Three Seems Pretty Weird”, **Educational Studies in Mathematics**, **Bridging the Individual and the Social: Discursive**

Approaches to Research in Mathematics Education, Vol. 46, No. 1/3, pp. 229-271.

Zeybek, D. (2003). Söylem ve Toplum, (Yayına Haz. A. Kocaman) **Söylem Üzerine**, Ankara: ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş. Yayınları, s. 27-47.

Zhang, S. & Liu, C. (2005). The Function of Context in Discourse Analysis, **Sino-US English Teaching**, Vol. 2, No. 12 (Serial No. 24), pp. 61-65.

EK-1

ÖĞRENCİ KİŞİSEL BİLGİ FORMU

Sıra No:	*Açıklamalar*		*Fotoğraf*
Adı			
Soyadı			
Okul Numarası			
Sınıfı			
Cinsiyeti	☐ Erkek	☐ Bayan	
İlköğretim mezuniyet diploma notu			
Mezun olduğu ilköğretim okulunun adı			
OKS da tüm derslere göre net sayıları	*Türkçe:* *Matematik:*	*Fen Bilgisi:* *Sosyal Bilgiler:*	
Annenin eğitim durumu			
Babanın eğitim durumu			
Annenin mesleği			
Babanın mesleği			
Varsa aldığı ödül, derece, burs vb			
İlgi alanları			
Bildiği yabancı dillerin adı ve bu dillerdeki bilgi düzeyi	*Bilgi düzeyinizi 1 ile 10 arasında bir puan vererek gösteriniz.*		
Çalışmaktan ve ilgilemekten zevk aldığı dersler ve konular			
Katıldığı yarışma, turnuva vb aktiviteler			
İleride çalışmak istediği meslek dalı			

EK-2

İZMİR İL MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ'NE

MEB bağlı İzmir (Özel) [redacted] Fen Lisesi'nde okul müdürü olarak görev yapmaktayım. Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak görev yapan Işıkhan UĞUREL tarafından yürütülmekte olan "***Ortaöğretim Matematik Programının Temel Ögeleri Çerçevesinde Öğrencilerin İspat Kavramına Yönelik Matematiksel Bilgilerini Nasıl Düzenlediklerinin Söylem Çözümlemesi ile Belirlenmes****i*" başlıklı doktora tez projesi kapsamında 2008-2009 öğretim yılı ikinci döneminde ……… sınıfında matematik ve geometri derslerinin yaklaşık 3 ay süresince video kamera ile kayıtlarının alınmasının, İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nce uygun görülmesi durumunda, araştırmacı Işıkhan Uğurel'in aşağıdaki beyanı doğrultusunda bir sakıncası bulunmamaktadır.

…… Mart 2009

İmza

…………………..
Okul Müdürü

Sayın Okul Müdürü

Bu çalışmada toplanacak video kayıtları doktora tezi, bilimsel makaleler, bildiriler, posterler, raporlar vb akademik çalışmalar dışında asla kullanılmayacaktır. Ayrıca adı geçen akademik çalışmalarda öğrencilerinizin, okulunuzun ve öğretmenlerinizin gerçek isimleri yer almayacaktır.

Bu araştırma tamamen bilimsel amaçlı olup ülkemizdeki matematik eğitiminin kalitesini arttırmada matematiksel ispat kavramının öğretimi ve ispatlama becerilerinin geliştirilmesine katkı sağlamak için gerçekleştirilmektedir.

Araş. Gör. Işıkhan UĞUREL

EK-2

İZMİR İL MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ'NE

MEB bağlı İzmir (Özel) [redacted] Fen Lisesi …….. sınıfında öğrenim görmekte olan …………………… ……………………. isimli öğrencinin velisiyim. Çocuğumun Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak görev yapan Işıkhan UĞUREL tarafından yürütülmekte olan "***Ortaöğretim Matematik Programının Temel Ögeleri Çerçevesinde Öğrencilerin İspat Kavramına Yönelik Matematiksel Bilgilerini Nasıl Düzenlediklerinin Söylem Çözümlemesi ile Belirlenmesi***" başlıklı doktora tez projesi kapsamında 2008-2009 öğretim yılı ikinci döneminde matematik ve geometri derslerinde yaklaşık 3 ay süresince video kamera çekimlerinin yapılacağı araştırmada yer almasında, araştırmacı Işıkhan Uğurel'in aşağıdaki beyanı doğrultusunda İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nün uygun görülmesi durumunda şahsım adına bir sakınca yoktur.

…… Mart 2009

İmza

………………… ……………………

Değerli Öğrenci Velisi

Bu çalışmada toplanacak video kayıtları doktora tezi, bilimsel makaleler, bildiriler, posterler, raporlar vb akademik çalışmalar dışında asla kullanılmayacaktır. Ayrıca adı geçen akademik çalışmalarda öğrencilerin, okulun ve öğretmenlerin gerçek isimleri yer almayacaktır.

Bu araştırma tamamen bilimsel amaçlı olup ülkemizdeki matematik eğitiminin kalitesini arttırmada matematiksel ispat kavramının öğretimi ve ispatlama becerilerinin geliştirilmesine katkı sağlamak için gerçekleştirilmektedir.

Araş. Gör. Işıkhan UĞUREL

EK-2

İZMİR İL MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ'NE

MEB bağlı İzmir (Özel) [redacted] Fen Lisesi'nde öğretmen olarak görev yapmaktayım. Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak görev yapan Işıkhan UĞUREL tarafından yürütülmekte olan "***Ortaöğretim Matematik Programının Temel Ögeleri Çerçevesinde Öğrencilerin İspat Kavramına Yönelik Matematiksel Bilgilerini Nasıl Düzenlediklerinin Söylem Çözümlemesi ile Belirlenmesi***" başlıklı <u>doktora tez projesi</u> kapsamında 2008-2009 öğretim yılı ikinci döneminde ……… sınıfında matematik ve geometri derslerinin yaklaşık 3 ay süresince video kamera ile kayıtlarının alınmasının, İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nce uygun görülmesi durumunda, araştırmacı Işıkhan Uğurel'in aşağıdaki beyanı doğrultusunda bir sakıncası bulunmamaktadır.

…… Mart 2009

İmza

…………………….
Matematik Öğretmeni

<u>Sayın …………………. Dersi Öğretmeni</u>

Bu çalışmada toplanacak video kayıtları doktora tezi, bilimsel makaleler, bildiriler, posterler, raporlar vb akademik çalışmalar dışında asla kullanılmayacaktır. Ayrıca adı geçen akademik çalışmalarda öğrencilerinizin, okulunuzun ve öğretmenlerinizin gerçek isimleri yer almayacaktır.

Bu araştırma tamamen bilimsel amaçlı olup ülkemizdeki matematik eğitiminin kalitesini arttırmada matematiksel ispat kavramının öğretimi ve ispatlama becerilerinin geliştirilmesine katkı sağlamak için gerçekleştirilmektedir.

Araş. Gör. Işıkhan UĞUREL

EK-3

T.C.
İZMİR VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : B.08.4.MEM.4.35.00.03.1/ 21315
Konu : Işıkhan UĞUREL'in
Araştırma İzni

17 MAR 2009

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

İlgi: a) 28/02/2007 tarihli ve B.08.4.EGD.0.33.03.311-311/1084 sayılı Makam Onayı.
b) Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'nün 24/02/2009 tarihli ve 556 sayılı yazısı.
c) Valilik Makamı'nın 16/03/2009 tarihli ve 20900 sayılı Makam Onayı.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Alanlar Eğitimi Anabilim dalı Matematik Öğretmenliği doktora programı öğrencisi Işıkhan UĞUREL'in **"Ortaöğretim Matematik programının Temel Öğeleri Çerçevesinde, Öğrencilerin ispat Kavramına yönelik Matematiksel Bilgilerini Nasıl Düzenlediklerinin 'Söylem Çözümlemesi' İle Belirlenmesi"** konulu tez çalışması kapsamında Özel Bornova Fen Lisesi Öğrencileri ile Matematik ve Geometri Öğretmenlerine çalışma yapılması, Valilik Makamının ilgi (c) onayı ile uygun görülmüştür.

Araştırmacı tarafından yapılan araştırmanın tamamlanmasından itibaren en geç iki hafta içinde, ilgi (a) Makam Onayı ile yürürlüğe giren Yönerge kapsamında "Araştırmanın Teslimine İlişkin Taahhütname Tutanağı" doldurularak araştırmanın iki örneğinin CD'ye aktarılarak Müdürlüğümüze gönderilmesi gerekmektedir.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

E. Bayhan
Erdal BAYHAN
Vali a.
Şube Müdürü

EKLER:
1) Valilik Onayı (1 Sayfa)
2) Araştırma Değerlendirme Formu (1 Sayfa)
3) Araştırma Tamamlandıktan Sonra, Araştırmanın Teslimine İlişkin Taahhütname Tutanağı (1 Sayfa)

GELEN EVRAK
Tarihi : 25.03.2009
Kayıt No : 918
Dosya No :

35268 Konak / İZMİR
Telefon : (0 232) 4410332/208
Faks : (0 232) 4893069
E-Posta : arge35@meb.gov.tr
İnt. Adresi : http://izmir.meb.gov.tr

EK-3

16 MAR 2009

T.C.
İZMİR VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : B.08.4.MEM.4.35.00.03.1/ 20900
Konu : Işıkhan UĞUREL'in
Araştırma İzni

VALİLİK MAKAMINA
İZMİR

İlgi: a) 28/02/2007 tarihli ve B.08.4.EDG.0.33.03.311/1084 sayılı Makam Onayı.
b) Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'nün 24/02/2009 tarihli ve 556 sayılı yazısı.

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Alanlar Eğitimi Anabilim dalı matematik Öğretmenliği doktora programı öğrencisi Işıkhan UĞUREL'in **"Ortaöğretim Matematik programının Temel Öğeleri Çerçevesinde, Öğrencilerin ispat Kavramına yönelik Matematiksel Bilgilerini Nasıl Düzenlediklerinin 'Söylem Çözümlemesi' İle Belirlenmesi"** konulu tez çalışması kapsamında Özel Bornova Fen Lisesi Öğrencileri ile Matematik ve Geometri Öğretmenlerine anket uygulamak istediği belirtilmektedir.

Söz konusu anket uygulamasının, yukarıda belirtilen okulda, 2008-2009 eğitim-öğretim yılında, eğitim öğretimi aksatmadan ve öğretmen gözetiminde yapılması ayrıca araştırma sonucunun bir örneğinin Müdürlüğümüze verilmesi kaydıyla uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde Olur'larınızı arz ederim.

Seyfeddin YILMAZ
Müdür V.

OLUR
16/03/2009
Sait TOPOĞLU
Vali a.
Vali Yardımcısı

EK: Form (1 Sayfa)

35268 Konak / İZMİR
Telefon : (0 232) 4410332/208
Faks : (0 232) 4893069
E-Posta : arge35@meb.gov.tr
İnt. Adresi : http://izmir.meb.gov.tr

EK-3

T.C.
İZMİR VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

ARAŞTIRMA DEĞERLENDİRME FORMU

ARAŞTIRMA SAHİBİNİN	
Adı Soyadı	Işıkhan UĞUREL
Kurumu / Üniversitesi	Dokuz Eylül Üniversitesi
Araştırma yapılacak iller	İzmir
Araştırma yapılacak eğitim kurumu ve kademesi	Özel Bornova Fen Lisesi 11.Sınıf Öğrencileri (13 Öğrenci) ile Matematik ve Geometri Öğretmenleri
Araştırmanın konusu	Ortaöğretim Matemetik Programının Temel Ögeleri Çerçevesinde, Öğrencilerin İspat Kavramına Yönelik Matematiksel Bilgilerini Nasıl Düzenlediklerinin "Söylem Çözümlemesi" İle Belirlenmesi
Üniversite / Kurum onayı	Var
Araştırma/proje/ödev/tez önerisi	"Ortaöğretim Matemetik Programının Temel Ögeleri Çerçevesinde, Öğrencilerin İspat Kavramına Yönelik Matematiksel Bilgilerini Nasıl Düzenlediklerinin "Söylem Çözümlemesi" İle Belirlenmesi"
Veri toplama araçları	Nitel bir araştırma yapılacaktır. Matematik ve geometri dersinde ses ve video kayıtları ve öğrenci anekdotları yoluyla söylem çözümlemeleri belirlenecektir.
Görüş istenilecek Birim/Birimler	EARGED ile yapılan görüşme doğrultusunda öğrenci velilerinin, ders öğretmenlerinin ve okul idaresinin görüşlerine başvurularak, imzalı izin dilekçeleri alınmıştır.

KOMİSYON GÖRÜŞÜ

İlgi: Millî Eğitim Bakanlığı'nın 28/02/2007 tarihli ve 1084 sayılı Millî Eğitim Bakanlığı'na Bağlı Okul ve Kurumlarda Yapılacak Araştırma ve Araştırma Desteğine Yönelik İzin ve Uygulama Yönergesi.

Yönergenin 5. Maddesi gereğince; araştırma başvurusu olması gereken nitelikler açısından incelenmiş olup, inceleme sonucu velilerin, ders öğretmenlerinin ve okul idaresinin görüş ve izinleri doğrultusunda araştırmanın eğitim-öğretimi aksatmayacak şekilde öğretmen gözetiminde yapılmasına oybirliği ile karar verilmiştir.

Komisyon kararı	Oybirliği ile alınmıştır.
Muhalif üyenin Adı ve Soyadı:	**Gerekçesi;**... ....

KOMİSYON

.13./03/2009

Komisyon Başkanı Erdal BAYHAN Şube Müdürü	Üye Ela COŞKUNER Öğretmen	Üye Ayşen GÜLEN Öğretmen

EK-3

ARAŞTIRMA TAMAMLANDIKTAN SONRA, ARAŞTIRMANIN TESLİMİNE İLİŞKİN TAAHHÜTNAME TUTANAĞI

ARAŞTIRMA SAHİBİNİN	
Adı Soyadı	
Bağlı bulunduğu Üniversite/Kurum	
Araştırmanın konusu	....
Teslim edilen araştırma örneği türü ve sayısı	.... Adet elektronik ortamda CD / Basılı materyal
Araştırmayı teslim alan kurum	İzmir İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Yukarıda yazılı araştırma örneğini İzmir İl Millî Eğitim Müdürlüğü'ne teslim ettim.

...../...../200..

Teslim Eden

....

....

Teslim Alan

....

....

UYGUNDUR

....../...../200...

EK-4

Teşvik Edilmiş Söylemlere Yönelik Hazırlanan Sorular Listesi

1- İspat nedir?
2- Matematikte ispat önemli midir?
3- Matematikte bir şeyi neden ispatlarız?
4- İspat yapma yöntemleri nelerdir?
5- İspatı kim ya da kimler yapabilir?
6- Bir teoremin kaç tane ispatı olabilir?
7- İspat yapmanın sizlere (Öğrencilere) faydası var mıdır? Varsa ne ya da nelerdir?
8- İspat sizin için ne kadar önemli bir şeydir?
9- Teorem nedir?
10- Önerme nedir?
11- Öneme ile teorem ilişkili midir?
12- İspat yapmayı seviyor musunuz?
13- Matematikte neleri ispatlarız?
14- İspat hangi seviyede (ilköğretim, lise, üniversite, lisansüstü) matematik öğrenirken öğrenilmelidir?
15- İspat yapmanın günlük yaşamda bize yararı olur mu?
16- Bir ispat yapılırken nelerden yararlanılır?
17- İspat olmadan matematik yapılabilir?)
18- İspat yapmak çok karışık bir süreçtir. (D/Y)
19- İspatları anlamak çoğu zaman güçtür. (D/Y)
20- Bir ispatın yapılışını anlamak için çok iyi matematik bilmek gerekir. (D/Y)
21- Günlük yaşamda kullanılan ispat, ispatlama ifadeleri ile matematiksel ispat arasında fark var mıdır? Varsa ne ya da nelerdir?
22- Genelleme ile ispat arasında bir ilişki var mıdır?
23- Bir ispat yapılırken işe nasıl başlarsınız?
24- İspatlar arasında iyi daha iyi şık daha şık gibi ayrımlar olabilir mi?
25- Geometrik ispatlar ile matematiksel ispatlar arasında fark var mıdır? (Yapılış tarzı, kolaylık/zorluk, anlaşılırlık, vb)

EK-5
Matematik ve Geometri Derslerinde Yapılan İspatların Listesi

MATEMATİK VE GEOMETRİ DERSLERİNDE YAPILAN İSPATLAR

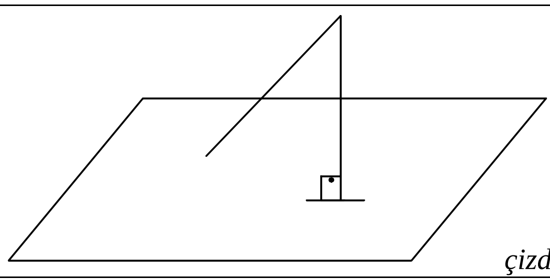
MATEMATİK		
DS-1	3	|r|<1 olmak üzere $A=\sum_{n=1}^{n} n.r^{n-1}$ in değerinin $\frac{1}{(1-r)^2}$ olduğunun gösterilmesi.
DS-4	15	Matrislerde toplama işleminin değişme özelliği vardır, Yani A+B=B+A olduğunun gösterilmesi.
DS-4	19	Matrislerde toplama işleminin birleşme özelliği vardır. Yani (A+B)+C = A+(B+C) dir.
DS-5	1	$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin çarpma işlemine göre tersinin kuralının $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{d}{a.d-b.c} & \frac{-b}{a.d-b.c} \\ \frac{-a}{a.d-b.c} & \frac{-a}{a.d-b.c} \end{bmatrix}$ olduğunun gösterilmesi.
DS-8	2	$\log_p.\log_p \sqrt[p]{\sqrt[p]{\dots\sqrt[p]{p}}}=-n$ olduğunun gösterilmesi.
DS-9	187	$\forall\, n\in N^{+}$ için $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ olduğunun tümevarımla ispatlanması.
DS-9	239	$\forall$n$\in N^{+}$için $3^{2n}-1$ sayısının 8 ile bölündüğünün tümevarımla gösterilmesi.
DS-9	304	$\forall n\in N$ için $12^{n}+10$ sayısının 11 ile bölündüğünün tümevarım ile gösterilmesi.
DS-9	327	$\forall n\in N^{+}$ için $P(n): n!\leq n^{n-1}$ olduğunun tümevarımla gösterilmesi.
DS-10	94	1.2+2.3+3.4+…+n.(n+1)=$n.(n+1).(n+2)/3$ olduğuna göre (n+1).(n+2) + (n+2).(n+3) +…+ (2n-1).2n in $\frac{n((7n+4).(n-1))}{3}$ olduğunun gösterilmesi.
DS-10	121	n doğal sayı olmak üzere, $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2$ toplamının değerinin $\frac{n.(n+1).(14n+1)}{6}$ olduğunun gösterilmesi.
DS-10	135	$\sum_{k=1}^{n} k.k!$ =(n+1)!-1 olduğunun gösterilmesi.
DS-10	163	$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ ‘ in, 1 - $\frac{1}{(n-1)!}$ olduğunun gösterilmesi.
DS-11	1	$\sum_{k=1}^{n} k!\,(k^2+k+1)$ toplamının değerinin (n+1).(n+1)!-1 olduğunun gösterilmesi.
DS-11	69	$\forall n\in N^{+}$ için $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i.\sin n\theta$ olduğunun tümevarımla gösterilmesi.
DS-11	107	n>1 ve n∈N için $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ olduğunun tümevarımla gösterilmesi.
DS-13	26	R’ de f(x) = 3x+5 fonksiyon 1–1 olup olmadığının gösterilmesi.
DS-13	55	R’ de $f(x)=x^2+1$ fonksiyonunun 1–1 olup olmadığının gösterilmesi.
TES-6	1	İki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır önermesinin doğrulanması.

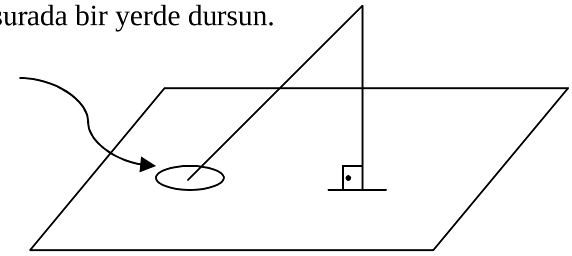
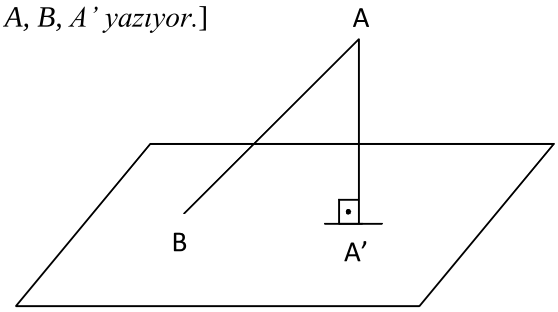
GEOMETRİ		
DS-2	2	Bir düzleme dışındaki bir noktadan dikme ve eğikler çizildiğinde; a) Dikme eğiklerden kısadır. b) Uzunlukları eşit olan eğiklerin ayakları, dikme ayağından eşit uzaklıktadır. c) Eğik ayağı, dikme ayağından uzakta olan eğik diğer eğiklerden daha uzundur, bu üç önermenin ispatlanması.
DS-3	25	*Üç Dikme Teoremi:* Bir D düzlemi dışındaki bir A noktasından düzleme ve düzlemdeki bir d doğrusuna iki dikme çizilirse dikme ayaklarını birleştiren doğru parçası d doğrusuna dik olduğunun ispatlanması.
DS-7	29	Teorem: Bir piramidin hacmi taban alanı ile yüksekliği çarpımının 3’te 1’dir (Ödev).
DS-12	1-3	*Cavalieri İlkesi* kullanılarak kürenin hacim formülünün $^{4}/_{3}\,\pi.r^3$ olduğunun integralden yararlanılmadan gösterilmesi.
DS-12	42	Kürenin yüzey alanının $4.\pi.R^2$ olduğunun gösterilmesi.

1-1		3 MART-Pzt (Mat-3) DS-1
1	OG-7	Deftere mi hocam?
2	**MO**	Evet deftere.
3	**MO**	|r|<1 olmak üzere $A=\sum_{n=1}^{n} n.r^{n-1}$ in değerinin $\frac{1}{(1-r)^2}$ olduğunu gösteriniz.
4	**MO**	Deftere yazıyoruz.
5	**MO**	A, yani n, 1 den sonsuza kadar n çarpı r^{n-1}' in $\frac{1}{(1-r)^2}$ olduğunu gösterip o üç soruyu öyle çözeceğiz.
6	**MO**	Tamam mı çocuklar!
7	OG-6	İspat mı yapacağız yani şimdi?
8	**MO**	İspat yapacağız, yapacak olan?
9	B-OG	Başlık ne atalım? (B-OG: Birkaç öğrenci anlamındadır.)
10	**MO**	Tanım ya da teorem deyin.
11	**MO**	Şimdi şu A' yı bir açalım n' e 1 verdik.
12	OG-8	1 çarpı, sadece 1 ile başlıyor.
13	OG-11	Tümevarımla mı ispatlayacağız?
14	**MO**	Hayır, 1 çarpı; n' e 1 verdik.
		(th: A=1+2r) 1+2r mi oldu burası?
15	OG-8	Artı 3 verdik.
16	**MO**	3 verdik $3r^2$ oldu, artı 4 verdik $4r^3$ oldu, artı nokta nokta.
		(th: $A=1+2r+3r^2+4r^3+\ldots$)
17	**MO**	Peki, başka ne yapabiliriz? [*hiç beklemeden*]
18	**MO**	Bu eşitliğin her iki tarafını r ile çarpsak ne olur?
19	B-OG	Haaa.
20	**MO**	A çarpı r diyelim, r ile çarpalım bunu, çünkü bizim bir formülümüz vardı neydi bu?
21	**MO**	$1+r+r^2+r^3+\ldots$, bunun biz $\frac{1}{1-r}$ olduğunu biliyoruz. (th: $1+r+r^2+r^3+\ldots=\frac{1}{1-r}$) Daha önce de ispatladık.
22	OG-8	Evet, ama katsayıları arta arta gidiyor.
23	**MO**	Evet, o zaman şu eşitliğin her iki tarafını r ile çarpalım. Her bir terimi r ile çarparsak, burası r mi oldu! Artı burası $2r^2$ mi oldu, burası ne oldu $3r^3$ mü oldu, artı $4r^4$, artı nokta nokta.
		(th: $Ar = r+2r^2+3r^3+4r^4+\ldots$)
24	**MO**	Yani şu şekilde bir düzenledik, peki taraf tarafa çıkarsam?
25	OG-11	Haaa, güzel.
26	OG-2	Nasıl yani?
27	**MO**	Taraf tarafa çıkarsam?
28	OG-11	Doğru doğru, şunu elde edeceğiz.
29	**MO**	Değil mi! Taraf tarafa çıkartırsam;
		th: $A =1+2r+3r^2+4r^3+\ldots$ $- Ar = r+2r^2+3r^3+4r^4+\ldots$
30	**MO**	[*Çizginin altına yazıyor.*] A-Ar = [*sınıfa dönüp*] taraf tarafa çıkaralım, ne olur? [*4–5 saniye bekliyor.*]
31	OG-7	$1+r+r^2$
32	**MO**	Şimdi 1 duruyor, 2r den r çıkardım.
33	B-OG	R

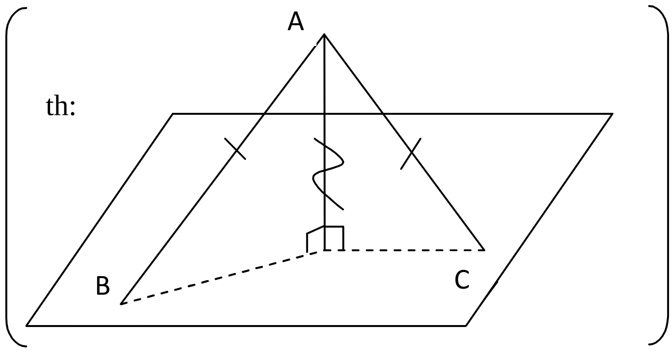
34	**MO**	Artı r mi kaldı, $3r^2$ den $2r^2$' yi çıkardım.
35	OG-11	Şu formül geliyor işte.
36	**MO**	r^2 artı r^3 artı nokta nokta gitti.
		(th: $A-Ar=\underbrace{1+r+r^2+r^3+\ldots}$) Peki, şurasının ne olduğunu biliyoruz biz?
37	B-OG	1 bölü 1 eksi r.
38	**MO**	$\frac{1}{1-r}$, ne bulduk şimdi bakalım?
39	B-OG	A parantezine alırsak.
40	**MO**	A parantezine alırsak A(1-r) = $\frac{1}{1-r}$ mi çıktı?
		Her iki tarafı $\frac{1}{1-r}$ ile çarpalım.
41	OG-11	Karesi oluyor.
42	**MO**	O zaman, A ifadesi neye eşit oldu? A dediğimiz neydi bizim?
		th: $A=\frac{1}{(1-r^2)}$ $\sum_1^\infty n.r^{n-1}$ (neye eşit çıktı) = $\frac{1}{(1-r)^2}$ MO işaretini ekledi.
43	OG-7	Ama orası önemli!
44	**MO**	r küçük eşit, |r|<1 olduğu zaman.
45	**MO**	Kitaptaki şu soruları yazayım, çözelim şimdi. 14. soru, [*elinde kitap aynı anda bakıp tahtaya yazıyor*] 14. soru, burası nedir? n eşittir 1 den ∞' a kadar n çarpı 2/3 üzeri n-1. (th: $\sum_1^\infty n.(\frac{2}{3})^{n-1}$=?)
46	**MO**	r burada kaçtır çocuklar bakın?
47	OG-8	2/3
48	**MO**	Sonuç nedir burada şimdi? Direk formülü kullanabilirim.
49	**MO**/ OG-8	$\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2}$
50	OG-8/11	9 geliyor.
51	**MO**	Ne geliyor? Sonuç 9 mu geliyor? [*4–5 saniye bekliyor.*] Değil mi?
52	OG-11	Evet.
53	**MO**	Peki, 15'i yazalım.
54	B-OG	Hocam bir saniye, kanıtı yazalım.
55	**MO**	Peki, kanıtı yazın. Anladık mı ispat yöntemini.
56	B-OG	Evet.
57	**MO**	Ne yaptık, bir daha anlatayım mı?
58	B-OG	Çık / hayır / yok.
59	**MO**	Buradan kullanabileceğimiz bir formül elde etmiş olduk. Tamam mı çocuklar! [*10–15 saniye bekliyor.*]
60	**MO**	15. soru n eşittir 1 den ∞ kadar $n.(3/5)^{n-1}$
		(th: $\sum_{n=1}^\infty n.(\frac{3}{5})^{n-1}$ =) r kaç burada bakın?
61	OG-11	25 bölü 9 mu? [*Cevabı söylüyor.*]

62	**MO**	[*Eşitliğin sağına yazıyor.*] $\frac{1}{(1-\frac{3}{5})^2}$
63	OG-11	25 bölü 4
64	**MO**	Burası 2 bölü 5, (sonuç) 25 bölü kaç oldu? Dört. Direk formülü eğer bu formülü bulmasaydık yöntemin kendisini kullanacaktık bakın. Önce açık yazacaktık, her iki tarafı r ile çarpacaktık, taraf tarafa çıkaracaktık.

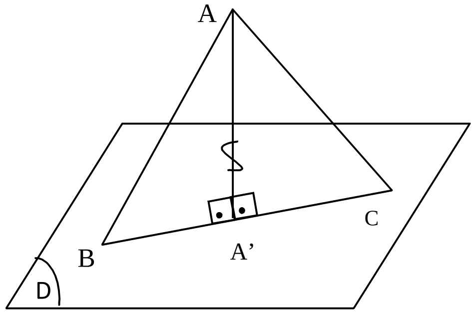
2-3		**4 MART-Salı (Geo-1) DS-2**
1	**GO**	Peki, şöyle bir teorem yazalım, dikme ve eğikler ile ilgili bir teorem. [*2–3 saniye bekledi.*]
2	**GO**	Bir düzleme dışındaki bir noktadan dikme ve eğikler çizildiğinde, 3 şeyi ispatlayacağız. [*Tahtaya gelip yazmaya başlıyor, hem söylüyor, hem yazıyor.*] *a)* Dikme eğiklerden kısadır. *b)* Uzunlukları eşit olan eğiklerin ayakları, dikme ayağından eşit uzaklıktadır. *c)* Eğik ayağı, dikme ayağından uzakta olan eğik diğer eğiklerden daha uzundur.
3	**GO**	Her biri için ayrı bir şekil çizerek ispatlayacağız. Herkes kendi başına uğraşsın. [*OG–2 eliyle soruyu gösterip alçak sesle bir şeyler soruyor ve GO yanına giderek soruyu daha iyi anlamasına yönelik açıklamalar yapıyor.*] [*Ardından OG–11 alçak sesle kendi gösterimine ilişkin bir şeyler soruyor defterinden ve GO eğilerek bazı şeyler söylüyor ve soruyor.*]
4	OG-11	..., buraya kadar düşündüm,… şunun hipotenüs olduğunu göstersek ama mesela şurada...
5	**GO**	Orası dik üçgen olur mu?
6	OG-11	Olmaz ki!
7	**GO**	Niye olmasın? [*O sırada OG–11 in ön sırasında oturan OG–5 ve OG–3 açıklamalara kulak misafiri oluyor.*]
8	OG-3	Haaa, şöyle olursa [*eliyle havada dik üçgeni oluşturmaya çalışıyor mırıldanarak*] [*OG-5 o sırada bir şeyler soruyor.*]
9	**GO**	[*OG–5' yönelik*] Harflendirip göstereceksin. Peki, Pisagor mu kullanırsın, yoksa eş üçgen yöntemini mi kullanırsın, sen bilirsin.
10	OG-13	Harflendirmesek de ... yapsak, yanlış mı?
11	**GO**	[*OG-13'e yönelik*] Neye dayanarak yapıyorsun?
12	OG-13	Hipotenüs teoremine.
13	**GO**	Hı hı, öyle diyeceksin. [*Dayanağı kabul ediyor.*]
14	OG-7	Hocam bunları [*tahtadaki şıkları kastediyor*] sözel olarak mı?
15	OG-11	İspatlayalım mı? [*Ardından OG–7' ye*] İspatlayabilir misin?
16	**GO**	[*OG-11'e yönelik*] Gel bakalım, sil sol tarafı. [*Tahtayı kastediyor.*]
17	**GO**	Önce şekli çizelim. [*Bu arada bir yandan da önce OG–8' in sonra OG–9' un sorularına, defterlerine bakarak kısık sesle cevaplar vermeye çalışıyor.*]
18	OG-9	Hocam böyle mi ispatlayacağız?
19	**GO**	[*OG- 9' un sorusu sonrası sınıfa dönerek*] olabilir, şimdi tahtada yapacağız, biraz daha matematiksel anlatmaya çalışalım. Düşüncelerini sözel olarak ifade etmişsin doğru ama biraz daha yazarsan. Noktaları yerine yazarsan A,B deyip hipotenüs oluyor, o yüzden uzunluğu AC 'nin uzunluğundan küçük.
20	OG-9	Haa, anladım!
21	**GO**	Öyle yazacağız. [*Bu arada OG–11 tahtaya*  *çizdi.*]
22	**GO**	[*tahtaya bakarak*] ... Evet, bir eğik çizdi ve bir dikme çizdi.

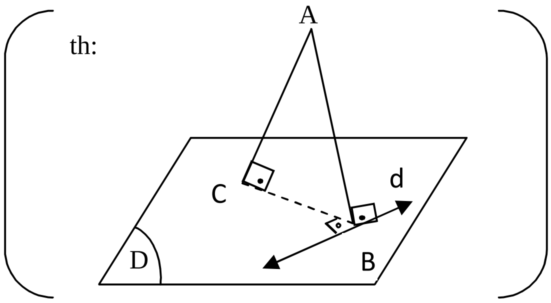
23	OG-11	Hocam?
24	**GO**	Yaz daha aşağıya yaz. [*Eğik in alt kısmını kastediyor.*] [*Tahtaya gelip parmağıyla gösteriyor.*]
25	OG-11	Evet, ben de öle yapacaktım.
26	**GO**	Orada dursun, mesela şurada bir yerde dursun. 
27	OG-11	[*Öğretmen masasına gidiyor.*] Şöyle bir şey göstereyim defterle, kalemle. [*Eline kâğıt, tahta kalemi alıyor.*] Şimdi mesela bu, [*dik olan kalemi kastetti*] bunun dik olduğu düzlem aynı noktadan bu hipotenüs düzlemi keseceği için ister böyle olsun yahut ister böyle olsun. [*Düzleme dik kalemin ucuna dokunan diğer kalemi kastediyor.*]
28	OG-11	Bizim gördüğümüz normalde aynı uzunluk ama önde ya da arkada gördüğümüz için [*tahtadaki eğik ve dikmeyi gösteriyor*] kısa ya da uzun gibi görüyoruz.
29	**GO**	Evet, her defasında… Tut onu o şekilde. [*OG-11'e hitaben*] Her defasında dik üçgen oluşur değil mi orada?
30	OG-11	Evet.
31	**GO**	Siyah kalemi nasıl tutarsan tut, şöyle tutuyoruz, şöyle tutuyoruz, her defasında bir üçgen oluşur, çünkü eğer bir doğru düzleme dikse onun içinde bulunan bütün doğrular diktir ya da dik durumludur demiştik. Yani nasıl durursa dursun oraya diktir. [*Hala kâğıt kalemle sınıfa gösteriyor.*]
32	**GO**	[*OG-11'e*] harflendir. Buraya A de, B de, A' de. [*Aynı anda OG–11 şeklin üzerine A, B, A' yazıyor.*] 
33	**GO**	Tamam, B ile A' nü birleştirelim.
34	OG-11	Tamam.
35	**GO**	Şimdi verilenleri önce bir yazalım. Buraya şöyle diyelim. [*Şeklin solundaki boşluğu gösteriyor.*] AA' diktir. [*OG–11* $A\,/'\perp$ *yazdı.*] Uzunluk değil.
36	OG-11	Haa!
37	**GO**	AA' diktir, şu düzlemin bir adı olsun, D, E gibi bir şey de. [*Öğrenci D yazdı*] D düzlemi.
		(th: AA'⊥ (D)) Güzel. [*OG-11 'e*] sonra?
38	OG-11	AB eğiktir.
39	**GO**	B eleman D düzlemi de.
		(th: $B \in (D)$)

		-Tamam, şimdi?
40	OG-11	AA' doğrusu ile B.
41	**GO**	B' yi A' ile birleştirdik. Onu yazsanız da olur yazmasanız da olur. Yazalım. [*Şeklin solunu gösteriyor yine OG-11'e.*] - BA' doğru parçası çizildiğinde [*aynı anda OG–11 yazıyor*] ne diyeceğiz? Bunun dik üçgen olduğunu söyleyeceğiz, değil mi? -Yaz. ABA' dik üçgen olur. Bunun sebebini söylememiz gerekiyor.
		(th: BA' çizildiğinde ABA' dik üçgen olur.)
42	OG-11	Hocam bunlar dik durumlu.
43	**GO**	Evet, yaz, AA^1 dik D düzlemi ve A^1B eleman daha doğrusu alt küme D düzlemi olduğu için AA^1 diktir A^1B 'ye.
		(th: $[AA' \perp (D)] \wedge [A'B \subset (D)] \Rightarrow AA' \perp A'B$)
44	OG-11	AB bu üçgenin hipotenüsü, AA' dikmesi de ondan mutlaka kısadır.
45	**GO**	Evet, o zaman şöyle yazalım. [*Aynı anda öğrenci tahtaya yazıyor.*]
		(th: $\lvert A\ Ɨ\rvert > \lvert AA'\rvert$) -İspatla ilgili sorusu olan var mı?
46	OG-3	Hayır.
47	OG-5	Kareyi çizebiliriz artık. [*OG–11 tahtaya* $\lvert A\ Ɨ\rvert > \lvert AA'\rvert$ *yazdı.*]
48	OG-5	Hayır, o değil ya.
49	**GO**	[*Gelip yanına gösteriyor.*] $\lvert AB\rvert > \lvert AA'\rvert$ -İspatlarda daha önce yapmıştık. [*En son eşitsizliği kastediyor.*]
50	OG-11	[*Yerine doğru yürürken*] Yapıyorduk da şimdi unuttum.
51	**GO**	--İspatı yaparken tabi bir kendimizi ikna etmek var, açıklama yapmak var, bir de ispat yapmak var. --İspat yaptığın zaman onun herkesçe aynı olması gerekir, ortak bir dille yazmamız gerekir.
52	**GO**	Ve mümkün olduğunca şekli baştan takip ediyorum. Verilen neydi AA' nün (D) düzlemine dik oluşu. B de onun üzerinde bir nokta, bir eğik ayağı olduğunu anlatan. Ya da bunu yazı ile de yazsan olur. B eğik ayağıdır diye.
53	**GO**	Sonra göstermek istediğin nedir? [*tahtaya yazılı olanlar üzerinde*} $\Rightarrow$ *işaretini kullanarak*] AB' nin AA' ' den uzun olduğu.
		(th: $\left.\begin{array}{r} AA' \perp (D) \\ B \in (D) \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} \lvert AB\rvert > \lvert AA'\rvert$) - Göstermek istediğim buydu. Şimdi BA' nü çizdiğimizde BAA' dik olur. Ama neye dayanarak dik olur? Onu yazmamız gerekiyor. - Neye dayanarak dik olur OG-1 ? [*OG-1'e soruyor ve 10–12 saniye bekliyor.*] Şuraya dik değil mi? Bu buraya neden diktir? [*A Ɨ' nün A'B' ye olan dikliğini gösteriyor.*]
54	OG-1	Çünkü düzleme dik, B düzlemin içinde.
55	**GO**	Evet, çünkü AA' düzleme dik bir doğru, bu da onun içinde dik bir doğru, o zaman her doğruya dik olacağı [*düzlem içindekini kastediyor*] için AA' diktir AB diyoruz.
56	**GO**	Peki, şimdi b' yi bu şekilde ispatlamaya çalışalım.
57	OG-9	AA'' ne paralel bir doğru alsak BA' 'ne diktir değil mi?
58	**GO**	Evet, kesiyorsa diktir, kesmiyorsa dik durumludur. -Evet, b şıkkı. [*OG–7 yanına çağırıp yazdıklarını gösteriyor tek tek, daha çok şekil üzerindeki düşüncelerini söylüyor ve yorumlarını yapıyor.*]
59	OG-9	Hocam ben ispatlayabilir miyim?

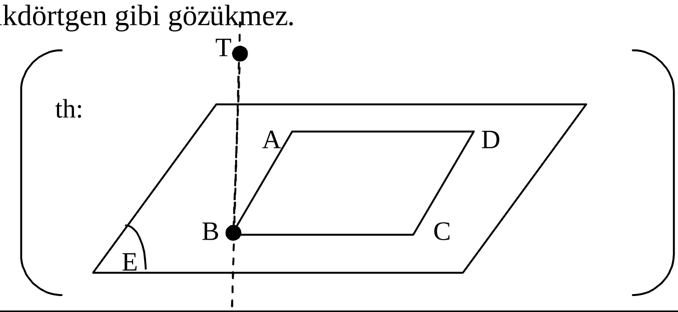
60	**GO**	[*OG-7'ye*] O zaman bu şeklide ifade edeceksin.
61	OG-7	Olmadı ilk böyle yaparım olmadı...
62	**GO**	Defterinden bir çalış önce. [*OG-7'ye*]
63	OG-11	Ben de gösterebilir miyim? [*OG–7 yazmaya başlıyor ve hala açıklıyor ve soruyor GO' ya.*]
64	**GO**	[*OG-7'ye*] Onu yaz da göreyim önce. [*OG–9 tahtaya kalkmak istiyor.*] -Göreyim defterinde. [*Deyip OG-9'un yanına gidip defterine bakıyor ve onu dinliyor, uzunca bir süre kısık sesle karşılıklı konuşup açıklamalar yapıyorlar, GO defter üzerinde kalemlerle bazı gösterimler yapıyor.(yazmadan havada)*]
65	**GO**	[*OG-4'e*] Gel tahtaya çiz önce şekli. - Evet, nasıl oldu? [*sınıfa soruyor*] [*Sonra tekrar OG-7'nin yanına gidip defterine bakıyor.*] [*OG-4 o sırada tahtada şekli çiziyor.*]
66	**GO**	[*sınıfa*] Evet, bir dik çizdi, bir eğik çizdi, bir tane daha eğik çizdi. [*OG-4'ün çizimi için*] Tamam tamam o perspektife göre değişir. İleride de olabilir geride de olabilir. Ben eşit dersem [*kabul edersem anlamı*] eşit olur.
		
67	**GO**	Önce bir arkadaşlarına açıkla bakalım neden olduğunu sonra da ispatını yapalım, önce açıklama yapalım.
68	OG-4	Şimdi dikme eşittir zaten, tek bir dikme var.
69	**GO**	Dikme ortaktır, AA' dediğin ortak kenardır.
70	OG-4	Sonra şu şeyler eşit uzunlukta ise eğikler, o zaman Pisagor' dan burası çembersel olur, yani bu şey eşit olur. [*Şekilde gösteriyor.*]
71	**GO**	Kenar kenar eşitliğinden eşliğinden desek olur mu? [*Tahtadaki şekil üzerinde gösteriyor.*] -Bu üçgenle bu üçgen kenar-kenar eşitliğine sahiptir oradan. [*sınıfa bakıp*] -Şimdi bunu arkadaşlarına açıkladın, yazalım ispatını yapalım. -İspat denen şey şu, düzleme bir ad ver, D düzlemi de, tamam. - AA' diktir D düzlemi diyelim. Şekilde verilenleri yazıyla yazalım.
		(th: $AA' \perp (D)$) -Uzunluk değil, evet.
72	**GO**	Sonra başka ne veriliyor teoremde?
73	OG-4	Sonra AB ile AC eşit.
74	**GO**	AB ile AC uzunlukları eşit, bu sefer uzunluk işareti var değil mi? Uzunluktan bahsediyoruz çünkü. -Bunlar verilenler, benim merak ettiğim ne? [*tahtaya gelip eliyle şeklin üzerinde göstererek*] Şöyle; benim yaptığım gibi yap, işareti } koy ve ise de.
		(th: $\left.\begin{array}{c} AA' \perp (D) \\ \lvert AB\rvert = \lvert AC\rvert \end{array}\right\} i\ s$) - Üzerine soru işareti koy, onu ok yap. [*"ise" kelimesini kastediyor.*]

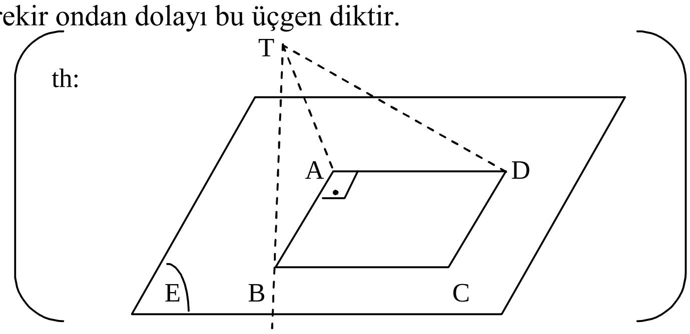
		(th: $\left.\begin{array}{l} AA' \perp (D) \\ IABI = IACI \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow}$) -Neyi göstermeye çalışıyorum?
75	OG-4	AB…
76	**GO**	Yok, göstermek istediğim nedir? Bak [*Tahtada b şıkkını göstererek okuyor.*] Dikme ayağından eşit uzaklıktadır.
77	OG-4/ **GO**	$A'B$ uzunluğu eşittir $A'C$ uzunluğu. Bunu göstermeye çalışıyorum tamam mı?
		(th: $\left.\begin{array}{l} AA' \perp (D) \\ \lvert AB\rvert = \lvert AC\rvert \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \lvert A'B\rvert = \lvert A'C\rvert$) $\Downarrow$ $\Downarrow$ a b
78	**GO**	Soldaki a kısmına hipotez denir. Sağdaki b kısmına ispatlamamız gereken şey. -Şimdi nereden ... mızı yazalım.
		(th: $\overset{\triangle}{AA'B} \overset{?}{\cong} \overset{\triangle}{AA'C}$) -Evet, [*kenar kenar eşitliği*] eştir ama nereden söyledik eşliği? [*kenar-kenar-kenar eşliğinin söylenme gerekçesi*]
79	OG-4	Şimdi.
80	**GO**	Evet, orada direk sonucu yazabilirsin. $A'B$ eşittir $A'C$.
		(th: $\lvert A'B \rvert = \lvert A'C \rvert$) -İspat bitti, bitti işaretini koy.
		(th: $A'B \rvert = \lvert A'C\rvert$) ▨
81	OG-11	Hocam bir şey sorabilir miyim?
82	**GO**	Evet, sor.
83	OG-11	Orada kenar-açı-kenardan, çünkü AB nin AC ye eşit olduğunu biz gösterdik.
84	**GO**	Onu veriyor zaten, değil mi? Vermiyor mu? [*Tahtanın sağına sorunun yazılı olduğu yere ilerliyor.*] Niye vermiyor?
85	OG-11	Hayır hayır AB ile AC nin eşit olduğunu veriyor mu?
86	**GO**	Veriyor bunu [*AA' kastediyor*] ortak kenar zaten.
87	OG-11	Tamam, ama AB ile AC nin eşit olduğunu biz göstereceğiz ya.
88	OG-5	Hayır, A′B ile A′C' nin.
89	B-OG	Veriyor zaten.
90	**GO**	Bunu vermiyor mu? Eşit olan eğikler ne demektir? [*b şıkkını gösteriyor soruda.*] Eğiklerin eşit olması ne demektir? AB nin AC ye eşit olması ne demektir? Bu eğik değil midir? Bu da eğik midir? [*A'B ve A'C' yi kastediyor.*]
91	OG-11	Tamam tamam. [*Zil çalıyor.*]

3-4		**4 MART-Salı (Geo-2) DS-3**
1	**GO**	Kim yaptı? OG–12 tamam, doğru gel yap.
2	OG-12	AA' düzleme dik.
3	**GO**	Evet, bir tane dikmeden bahsediyor değil mi? Daha uzun dediğine göre eğik olmalı değil mi?
4	OG-12	İki tane de eğik olsun.
5	**GO**	Güzel.
6	OG-12	Bunları da birleştirelim. th:  - Geçen şeyde ispatladığımız şurası dik şurası da dik oluyor.
7	**GO**	Takip ediyor musunuz? [*sınıfa*]
8	OG-12	Ondan sonra şurası eşit [*AA' 'nü kastediyor*] ve bu bundan uzun [$\lvert AB\rvert>\lvert AA'\rvert$ *kastediyor*] o zaman Pisagor teoreminden;
9	**GO**	Şimdi başlangıçtan itibaren şekle bakıp açıklamalara geçelim. AA' dik D düzlemi de. [*OG–12 ye*] Herkes tahtadan takip ediyor değil mi?
10	OG-12	Sonra A'B alt küme D, A'C alt küme D.
11	**GO**	Hı hı.
12	OG-12	Ondan sonra ben Pisagor yaptım.
13	**GO**	Şunu da yazalım, bir şey daha biliyorsun. AB uzunluğu büyüktür AC uzunluğundan, bunu da yazalım çünkü kullanacağız. [*Öğrenci tahtaya yazıyor.*] -Şimdi, şöyle bir işaret yap "}", ise de üzerine bir soru işareti koyup ne istiyorsan onu yaz. th: $\left.\begin{array}{l} AA' \perp (D) \\ A'B \subset (D) \\ A'C \subset (D) \\ \lvert AB\rvert > \lvert AC\rvert \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \lvert A'B\rvert > \lvert A'C\rvert$
14	OG-12	A'B büyüktür A'C.
15	**GO**	Böyle midir diye bakıyoruz, kontrol ediyoruz.
16	OG-12	Şimdi AA' 'nün karesi artı A'B' nin karesi, eşittir AB 'nin karesi bir de AA' 'nün karesi artı A'C 'nin karesi, eşittir AC 'nin karesi. th : $\lvert AA'\rvert^2 + \lvert A'B\rvert^2 = \lvert AB\rvert^2$ $\lvert AA'\rvert^2 + \lvert A'C\rvert^2 = \lvert AC\rvert^2$
17	OG-12	Sonra ikisinde de aynı, ortak alanlara dikkat ettim. O zaman şunu bu tarafa attım. $\lvert AB\rvert^2 - \lvert A'B\rvert^2 = \lvert AC\rvert^2 - \lvert A'C\rvert^2$ Sonra bakınca şunu yer değiştirdim.

18	**GO**	Şunu biliyorum, AB’nin AC’ den büyük olduğunu biliyorum.
19	OG-12	$\lvert AB\rvert^2 - \lvert AC\rvert^2 = \lvert A'B\rvert^2 - \lvert A'C\rvert^2$ Bu bundan büyük olduğu için [$\lvert A\ B\rvert^2$ - $\lvert A\ C\rvert^2$] Bu taraf pozitif [*eşitliğin sol tarafı*]
20	**GO**	Çok güzel.
21	OG-12	O zaman bu tarafta pozitif olur ve $\lvert A'B\rvert > \lvert A'C\rvert$
22	**GO**	Gayet güzel, özellikle son kısım güzel oldu değil mi?
23	**GO**	Pozitiftir bu, AB, AC’ den büyükse kareleri farkı pozitiftir. O zaman bu tarafta pozitif olmalı eşit olduğuna göre o halde A'B, A'C ‘den büyüktür diyoruz. [*Tahta da şekil üzerinde eliyle gösteriyor.*] - Aynen bu şekilde alabilirsin defterine. [*50 saniye bekliyor.*] - Var mı aklınıza takılan bir yer? [*10 saniye bekliyor.*]
24	**GO**	[*Başlık atıyor tahtada.*] Üç dikme teoremi (**Ü.D.T**)
25	**GO**	Bu da bir teorem, ancak meşhur diğerlerine göre daha meşhur bir teorem; şöyle diyelim: Bir D düzlemi dışındaki bir A noktasından düzleme ve düzlemdeki bir d doğrusuna iki dikme çizilirse dikme ayaklarını birleştiren doğru parçası d doğrusuna dik olur. [*Sınıfa okudu.*]
26	**GO**	Şekli birlikte çizmeye çalışalım, düzleme D demiş. Dışındaki bir A noktası var ve düzlemin içinde bir d doğrusu var. A noktasından iki dikme çizmiş. Bir tanesi d doğrusuna, bir tanesi de düzleme.
27	**GO**	Ne diyor teoremin sonunda bu dikme ayaklarını, dikme ayakları nelerdi C ile B [*Şekle C, B yazmıştı.*]. C ile B’ yi birleştirdiğimde ne olurmuş, nereye dik olurmuş? d doğrusuna. Onu farklı bir renkte yapalım. 
28	OG-7	Hocam o zaman orası sıfır derece olacak.
29	OG-11	Haa, düzlemden eğri, düzlemin dışından.
30	**GO**	Üç boyutlu düşünüyorsun değil mi? [*OG-7’ye*]
31	OG-7	Haa, tamam.
32	**GO**	Bu nerede düzlemde bir dikme.
33	OG-7	Tamam.
34	OG-9	AC de CB ye dik oluyor değil mi?
35	**GO**	Tabi. İspat diyelim. [*yazalım anlamında*] Verilenler neler bir yazalım, şekle göre yazalım. A noktası düzlemin dışında bir noktaymış. A eleman değil D düzlemi, d doğrusu düzlemin içindeymiş, onu yazdık. Başka ne verilmiş?
36	OG-11	AC dik düzleme.
37	**GO**	Evet, AC doğrusu diktir (D) ye. Bir tane daha diklik var.
38	OG-11	AC doğruya dik.
39	**GO**	Evet, AC dik d, göstermek istediğimiz şey ne?
40	OG-11	CB diktir küçük d’ ye. [*D ile d karışmasın diye*]

41	**GO**	CB⊥ d doğrusu $\left(\text{th: } \left.\begin{array}{ll} A\notin(D) & d\subset(D)\\ AC\perp(D) & AB\perp d\end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} CB\perp d\right)$ Göstermeye çalışacağız, önce verilenleri ve neyi ispatlamak istediğimizi bir yazıyoruz.
42	**GO**	d doğrusu düzlemde [*d ⊂ (D) yazdı*], AC de düzleme diktir. O zaman AC ile d nasıldır? Birbirine göre nedir? $(\ \text{th: } d\subset(D)\quad AC\perp(D) \overset{?}{\Rightarrow} AC \text{ ile } d\ )$ Diktir, dik durumludur değil mi? Kesişmedikleri için AC ile d dik durumludur. Dik durumluluğu da gene dik işareti ile gösterebiliriz, bir zararı yok.
43	OG-9	AC ile d' yi birleştirirsek.
44	**GO**	Şimdi burada A,C,B doğrusal olmayan 3 nokta değil mi? Bir düzlem belirtir mi?
45	B-OG	Evet.
46	**GO**	A,C,B noktaları bir düzlem belirtir, adı E olsun. d doğrusu bu düzleme dik midir? [*d ⊥ (E) yazdı.*]
47	B-OG	Diktir.
48	**GO**	AB doğrusu d ye dik, düzlemin içinde bir doğruya d dikse o zaman d, E ye diktir değil mi? d ⊥ (E) ise CB de E düzleminde bir doğru değil midir?
49	B-OG	Evet.
50	**GO**	Şimdi demiştik ki bir doğru bir düzleme dik ise içindeki bütün doğrulara diktir. Madem öyle CB nereye diktir? d doğrusuna diktir diyoruz. $(\text{ th: } d\perp(E) \text{ ve } CB\subset(E) \overset{?}{\Rightarrow} CB\perp d)$ [*3–4 saniye bekliyor, eline büyük bir cetvel alıp sınıfa gösteriyor.*]
51	**GO**	Şimdi bir doğru var [*cetvel*], üzerinde bir nokta var [*parmağıyla gösteriyor, parmağının olduğu yere kalem koyarak*] şu, buna diktir değil mi? Bu iki doğru diktir. -Peki, şu dik değil midir? [*Kalemi kaydırıyor.*] Bunu kalınlıksız bir düzlem olarak düşünün. Yani şu düzlem, bu şekilde; bu doğruyu düzlemden ayrılmadan nasıl hareket ettirirsen ettir doğruya [*cetvele*] dik kalır. Ancak sağa sola kaydığın an diklik bozulur.
52	**GO**	Şimdi üç dikme teoremi neydi bir kez daha bakalım. Bir nokta var düzlemin dışında, düzleme dik indiriyorsun, sonra düzlemin içindeki doğruya dik indiriyorsun ve dikme ayaklarını birleştirdiğinde bunların dik olduğunu söylüyor. -Bu, bana uzunluk hesaplarında lazım olacak çünkü, uzunluk hesaplarını neye dayandırarak yapıyoruz? Ya paralelliğe ya da dikliğe göre yapıyoruz, diğerleri oradan türetilmiş şeyler. Sonuç diyelim [*yazalım anlamında*] bir tane; Bana iki tane diklik vardı, üçüncü dikliği ben söyledim değil mi? Başka ikisini verse öbürünü söyleyemez miyim?
53	B-OG	Söyleriz.
54	**GO**	İlla ki bu ikisi verip üçüncüyü [*şekli gösteriyor*] söyleyeceğim diye bir şey yok. Burada da şöyle diyelim hemen bu şekle dayanarak;

		AC dik düzleme, bir de CB dik doğruya derse, ne diyebilirim AB diktir doğruya. th: $\left.\begin{array}{l} AC\perp (D) \\ CB \perp d \end{array}\right\} \Longrightarrow AB \perp d$ ikisi varsa, üçüncüsü vardır. Bir tane daha sonuç yazabilir miyim bu şekilde?
55	OG-11	AB diktir d ise,
56	**GO**	Başka bir sonuç, AB d' ye dik olsun, başka?
57	OG-11	AC d' ye dik olsun.
58	**GO**	Onu teoremde söylemiştik, CD dik olsun d ye bu durumda ne olur?
59	OG-9	AC diktir D ye.
60	**GO**	AC düzleme diktir. Bunları hesap kolaylığı için kullanacağız, dikmeleri kullanacağız, neresi diktir, neresi değildir oralarda kullanacağız.
61	**GO**	Bir uygulama yapalım bununla ilgili, şöyle yazalım; bir E düzlemi içinde ABCD dikdörtgeni ile E düzlemine dikdörtgenin B köşesinden BT ⊥ (E) olacak şekilde çiziliyor. TBA, TBC, TAD, TCD, TBD ve TCA üçgenlerinden hangilerinin dik olduğunu belirleyiniz.
62	**GO**	Birlikte bir şekil çizelim, E de dik değil mi düzleme, düzlem, dikdörtgen çiziyorum ABCD, ne demiştik B köşesinden bir dikme çiziliyor, bunun üzerinde alıyoruz T' yi dışında. Diyor ki burada verilen üçgenler dik üçgen midir?
63	OG-7	Hocam o dikdörtgen değil miydi?
64	**GO**	Dikdörtgen evet, perspektiften dolayı o şekilde çizdim [*paralelkenar gibi*] öyle çizmezsem köşesinden dik olan doğruyu gösteremem. Perspektif bakınca, sen yukarıdan bakıyorsan bir dikdörtgene, o tam dikdörtgen gibi gözükmez. 
65	**GO**	Evet, OG–6, TBA dik üçgen midir?
66	B-OG	Evet.
67	**GO**	Ben OG–6' ya sordum.
68	OG-6	Evet.
69	**GO**	Dik üçgendir neye dayanarak söylüyorsun?
70	OG-6	Hımm, içerideki ABCD dikdörtgen, BT de dik.
71	**GO**	Hı hı.
72	OG-6	Orası dik mi olur? [*kısık sesle*]
73	**GO**	Düzleme dikse, şöyle diyelim, TBA üçgeni dik üçgendir. TB düzleme dikmiş BA da düzlemin içinde bir doğru, o zaman TB, BA ya diktir. Bu şekilde söylenir. Bir doğru bir düzleme dik ise, onun içindeki tüm doğrulara diktir, o yüzden TBA dik açıdır. -Benzer şekilde TBC nasıl üçgendir?

74	B-OG	O da dik.
75	**GO**	O da dik üçgendir, sebep aynı, benzer şekilde diyelim TBC dik üçgendir. Burada da TB gene düzleme dik, BC düzlemin içinde bir doğru o zaman TB, BC diktir, oradan TBC üçgeni dik üçgendir.
76	**GO**	Şimdi TAD üçgenini inceleyelim.
77	B-OG	Değildir, değildir / diktir.
78	**GO**	Neden diktir OG–2 ?
79	OG-2	Hocam çünkü dik olması için AD nin TB ye de dik olması gerek, öyle değil mi?
80	**GO**	Hı hı.
81	OG-2	BC ile AD paralel olduğu için yani kaldırıyoruz böyle açısını değiştiriyoruz.
82	OG-11	Hocam?
83	OG-9	Olmaz ki öyle.
84	OG-11	Hocam söyleyeyim mi?
85	**GO**	Söyle OG–11.
86	OG-11	Gelebilir miyim? [*tahtaya*]
87	**GO**	Gel.
88	OG-11	Şimdi bu ikisinin, aynı şeyi mesela A içinde yapsaydık, yani T’ nin arkasında bir T' [*T üssü*] noktası olsaydı, T'AD dik olurdu ama, bunu çizdiğim zaman şu T doğrusu onların önünde oluyor. Yani şu A geride kalıyor, B nin uzantısı [*TB’ yi kastediyor*.] olduğu için dik olmuyor bence.
89	**GO**	Peki.
90	OG-7	Hocam?
91	**GO**	Evet, OG–7 sen de söyle.
92	OG-7	Hocam ben OG–2 nin dediğine katılıyorum, bence de dik çünkü TA böyle, A… yani şöyle diyorum. [*Tahtaya yürümeye başladı.*] -Yani şöyle, bir üçgen oluşacak ya. [$\widehat{TAD}$’ *yi gösteriyor şekil üzerinde.*]
93	**GO**	Hı hı.
94	OG-7	Şimdi şöyle baktığımız zaman, şöyle bir şey çizdiğimiz zaman. [O *sırada GO kalemle tahtaya ya çiziyor*.] evet, burası dik, üç boyutlu olarak düşündüğümüzde işte burası dik, ayrıca burası da doğrusal oluyor üç boyutlu düşündüğümüzde, oradan buranın da dik olması gerekir ondan dolayı bu üçgen diktir. 
95	**GO**	Bu işi üç dikme teoremine dayandırsak zannedersem ikna oluruz, zaten teorem o yüzden var, yani sana öyle geldi, bana öyle geldi, işte arkada yok önde yok gibi şeylerin daha bilimsel açıklaması teoremlere dayandırmaktır.
96	**GO**	Bakalım, şimdi T noktası, TAD üçgenine bakıyorum değil mi? T noktası düzlemin dışında bir nokta, üç dikme teoremini tekrarlıyorum. TB düzleme dik, sonra BA, AD ye dik, hatta AD nin düzlemde olduğunu da yazalım, AD düzlemde, BA, AD ye diktir, bakın iki tane diklik var, o zaman ne olacak, TA AD ye dik olacak, o yüzden üç dikme teoremi gereğince TAD

		üçgeni dik üçgendir. $\left(\text{th: } \widehat{TAD}? \quad TB\perp(E),\ AD \subset (E),\ BA\perp AD \Longrightarrow TA \perp AD \right)$ Ü.D.T gereğince TAD dik üçgendir.
97	OG-9	Ne taraftan?
98	**GO**	Nasıl?
99	OG-9	Ne taraftan dik?
100	**GO**	TA, AD ye dik. [*Şekle bakıyor.*]
101	OG-9	Nereden dik işte?
102	**GO**	Fark eder mi? [*parmağıyla gösteriyor*] soldan, sağdan sağ dikse, solda diktir değil mi?
103	**GO**	Bunu bir, masada canlandıralım isterseniz. [*Öğretmen masasını ortaya çekiyor.*] -Şu, bahsettiğim dikdörtgen olsun, ABCD dikdörtgeni. [*Masanın yüzeyini gösteriyor.*] -İlk başta dedik ki B köşesinden şöyle bir dikme çiziliyor düzleme [*büyük cetvel ile dikmeyi gösteriyor*] şunu kolayca söyledik değil mi TDA üçgeninin, oradan bir yandan takip ediyorsun dik üçgen olduğunu kolayca söyledik, şu üçgenin de dik olduğunu söyledik şu ön yüzde bakın üçgenin; şimdi ise neye bakacağız? -TAD üçgeni yani şunun, şunu şuraya çiziyoruz ve bunu oraya da birleştiriyoruz. Oluşanın bir dik üçgen olmadığına bakacağız. -Bunu [*cetvel*] biraz daha yanaştıralım mı? Bir tane daha cetvel olsaydı aslında daha iyi olurdu.
104	OG-11	Getirelim mi hocam?
105	**GO**	Yoktu aşağıda. Şöyle, şöyle çizelim, bir kişi tutsun şunu. [*OG–13 kalkıyor.*] -Şurayı birleştirdim ve şurayı birleştirdim. [*TA ve TD' yi gösteriyor.*] Bunun dik üçgen olup olmadığını soruyor. -Şöyle bir şey geliyor: [*Masanın üstünden dosyasını alıp yukarı kaldırıyor ve cetvele yaklaştırıp gösteriyor.*] Şöyle bir düzlem geldiğini düşünün bakın. [*Dosyayı hareket ettirerek TAD düzlemi göstermeye çalışıyor.*] -Tam şu köşede nedir, diktir. [*A' yı kastediyor.*]
106	**GO**	Var mı aklına yatmayan? Varsa kendisi gelsin, denesin, görsün. [*sessizlik*] Peki, o zaman diğerlerini düşünün. [*OG–13' e teşekkür ediyor.*]
107	OG-5	TCD dik oluyor.
108	**GO**	TCD dik midir?
109	OG-5	O şekle göre [*masanın üzerinde çizilen sanal şekil*] dik oluyor.
110	**GO**	Tamam, iş çözüldü diyorsun yani. [*gülerek OG–5 e*] Tamam, kalanları tamamlayın defterinize, en son tartışalım.
111	OG-9	TC de … dik
112	**GO**	TC, CD ye diktir değil mi? Gene üç dikme teoreminden galiba.
113	OG-9	Evet. [*belli bir süre sonra*]
114	OG-5	TCA dik değil galiba.
115	OG-2	TCA dik değil evet. [*GO bu arada yaprak test dağıtıyor.*]
116	**GO**	Evet, TCD üçgeni dik midir?

117	B-OG	Evet.
118	**GO**	Neden diktir? Ya bunun gibi açıklaman olacak, bir doğru bir düzleme dikse içindeki tüm doğrulara diktir, o yüzden bu dik üçgendir diyeceksin ya da üç dikme teoremi diyeceksin, iki türlü açıklama yapıyorsun sen.
119	B-OG	Üç dikme teoremi.
120	**GO**	TCD dik üçgendir, üç dikme teoreminden, yazmayalım bir kez daha konuşalım. [*eski çizdiği şekil üzerinde tahtada*] Şunu siliyorum, şurayı siliyorum. [*Tahtayı sildi.*] -Hazır mı herkes?
121	**GO**	TCD üçgenine bir kez daha bakalım, Ü.D.T den olduğunu görelim. -Şimdi, T noktası düzlemin dışında bir nokta ve düzleme diktir. BC, AD ye diktir. O zaman ne diyelim, çizmeden sadece dik olduğunu söyleyelim. İki tane diklik varsa o noktadan gelen şurası da diktir.
122	OG-11	Evet.
123	**GO**	O zaman TC, TD ye dikse TCD üçgeni dik üçgendir. Ya TAD olsun defterinde ya TCD, bir tanesinin açıklaması tam olarak olsun.
124	OG-11	TAD de onun döndürülmüşü sonuçta.
125	**GO**	Evet. TBD dik üçgen midir?
126	OG-5	Değil.
127	**GO**	Değil midir?
128	B-OG	Diktir, dik üçgen, kesinlikle.
129	**GO**	Şöyle baktın. [M*asanın köşesi ve cetvelle gösteriyor*.] Köşegen çizmiş, buraya diktir değil mi? Yazalım onu da. -TBD dik üçgendir. Ü.D.T den değil di mi bu sefer?
130	B-OG	Hayır.
131	**GO**	BD' yi birleştirince BD düzlemin içinde bir doğrudur, TB BD ye diktir diyoruz. Başka ne kaldı? TCA
132	OG-2	Değil.
133	**GO**	Dik üçgen değildir. Şimdi dağıttığım teksirlerden 2 numarayı defterinize yapın, 1 numaraya bakalım.

4-6		**5 MART-Çrş (Mat-2) DS-4**
1	**MO**	Evet, matrislerde toplama işleminin özellikleri: A,B,C aynı türden matrisler olmak üzere $A=[a_{ij}]_{mxn}$, $B=[b_{ij}]_{mxn}$ türünden, C de $C=[c_{ij}]_{mxn,}$ m x n türünden. Peki, toplamanın sizce matrislerde hangi özellikleri olabilir? [*Tahtaya 1 yazıp sınıfa döndü sordu.*]
2	B-OG	Değişme, birleşme, kapalılık.
3	**MO**	Başka?
4	B-OG	Dağılma var dağılma.
5	**MO**	Daha çarpmayı göstermedim, o çarpma özelliğinden, başka?
6	OG-11	Birim eleman.
7	OG-9	Etkisiz eleman.
8	**MO**	Etkisiz eleman, başka?
9	OG-11	Birim, etkisiz aynı şey işte.
10	**MO**	Başka özellik var düşünün.
11	OG-7	Bir dakika hocam [*defterini karıştırıyor*] bulacağım.
12	**MO**	Toplama işleminin hangi özellikleri var düşünün.
13	B-OG	Kapalılık, yer değiştirme, dağılma.
14	OG-7	Her elemanın tersi vardır.
15	**MO**	Evet, çok güzel! Şimdi matrislerde toplama işleminin değişme özelliği vardır, yani A+B=B+A Bunu nasıl gösteririz, nasıl ispatlarız? Genel ifade olarak hemen bir verelim. Bu matrisin yerine [*A' yı kastediyor*] $[d_{ij}]_{mxn}$ türünden artı $[b_{ij}]_{mxn}$ eşittir.
16	**MO**	Önce bu tarafa bakın [*yazdığı kısmi eşitliğin solunu gösteriyor*] ispatı nasıl yapıyorduk biz?
17	B-OG	Bunu mu göstereceğiz?
18	**MO**	Evet, eşitliğin bir tarafını kullanıp öbür tarafını elde ediyoruz. Eşittir, $[a_{ij} + b_{ij}]_{mxn}$ türünden. Şimdi biz biliyorsunuz, toplamanın içteki normal toplamaydı, toplamanın değişme özelliği var. Bunu $[b_{ij}+a_{ij}]_{mxn}$ yazdım. Buradan bu ifadeyi şu şekilde yazabilir miyim? $=[b_{ij}]_{mxn} + [a_{ij}]_{mxn}$ yazarsam, bu B matrisidir, bu da A matrisidir.
		th: A+B= B+A $[a_{ij}]_{mxn} + [b_{ij}]_{mxn} = [a_{ij}+b_{ij}]_{mxn} = [\, b_{ij} + a_{ij}]_{mxn}$ $= [b_{ij}]_{mxn} + [a_{ij}]_{mxn}$ $= B+A$
19	**MO**	Bakın değişme özelliği olduğunu gösteriyoruz. Matrislerde toplama işleminin değişme özelliği var. Eşitliğin bir tarafını kullanıp öbür tarafını elde ettik. * Daima biliyorsunuz ispatta eşitliğin bir tarafını kullanıp öbür tarafını elde ediyorduk. * Tamam mı! Şimdi ikinciyi siz ispatlayacaksınız, ben yazıyorum. (A+B)+C eşittir birleşme özelliği var. A+(B+C) hadi siz gösterin bakalım.
20	OG-11	Eşitliğin bir tarafını kullanıp
21	**MO**	Evet, eşitliğin sol tarafını kullanıp sağ tarafını elde edeceksiniz.
22	OG-9	Niye, sağ tarafı kullansak?
23	**MO**	Fark etmez öyle de olabilir ama şöyle baktığımızda sol tarafı kullanmak daha rahat. [*10–15 saniye bekliyor.*] Gösterecek olan? [*Öğrenci el kaldırıyor.*] Hadi OG–8.
24	OG-8	Öncelikle yazıyorum.
25	**MO**	Öncelikle yazıyoruz, matrislerin yerine eşitlerini yaz. [*Sınıfa*] Siz de yerinizde yapıyorsunuz, OG–5 [*Uyarı amaçlı ismini söyledi, çünkü OG–5 matris determinant konusunun amacını ve önemini kabul*

		etmiyor. Gereksiz görüyor bunu dersin başında açıkça söylemişti.]
26	OG-5	Deminki gibi olacak hocam.
27	**MO**	Tamam deminkini bir kullan hadi.
28	OG-5	Yaa! [*bunu yapmak sıkıcı anlamında*]
29	**MO**	[*Tahtadaki OG-8'e*] Biraz büyük yaz!
30	OG-8	Tamam.
		(th: $[a_{ij}] + ([b_{ij}]+[c_{ij}]) = [a_{ij}] + [b_{ij}+c_{ij}]$)
31	OG-8	Doğru yapıyorum, değil mi?
32	**MO**	Evet, doğru yazıyorsun. Sonra ikisini topluyoruz.[*OG–8 yazmaya devam ediyor.*]
33	**MO**	[*OG-5'e yönelik şakayla karışık*] OG-5 kafana kitap geliyor bak.
34	B-OG	Ooo, aaa, yaaa!
35	OG-8	Sonra?
36	**MO**	Sonra evet, öbürünü ayırıyorsun.
37	OG-13	Hocam, biz bunu tahtaya yazmasak olur mu? [*tahtadakileri kastediyor*]
38	**MO**	Hayır, hayır olmaz. Bunlar temel kuralları.
39	OG-13	Hayır, kanıtlarını diyorum sadece.
40	**MO**	Hayır, kanıtları da yazıyorsunuz.
41	OG-8	Buradan da,
42	**MO**	Buradan da A+(B+C) yazarız.
		$\left(\text{th:} \quad [a_{ij}] + [b_{ij}+c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}+c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij})+c_{ij}] = (A+B)+C \right)$
43	**MO**	Peki, üçüncüsü, üçüncü özelliğimiz? Neydi toplama işleminin birim elemanı?
44	B-OG	Sıfır.
45	**MO**	Burada da sıfır matrisi, A+0=0+A o da eşittir A mı? Burada [0] matrisi toplama işleminin nesidir? Birim matrisi yani etkisiz matrisidir.
46	OG-5	Ben şunu merak ediyorum hocam, hiç matematikte şu maddeyi 3. Maddeyi sağlamayan, toplama işleminde bir olay var mı?
47	**MO**	Nerede var mı?
48	OG-5	Matematikte herhangi bir konu mesela, A+B=B+A gibi veya dağılma özelliği mesela, onları sağlamayan bir konu var mı matematikte?
49	**MO**	[*yürürken*] Olabilir mi, düşünmek lazım.
50	OG-5	Bana hiç denk gelmedi.
51	**MO**	[*Konuya dönüyor.*] Peki, burada şunun yerine A yazdığımızda sonucu görürüz. [*A yerine matematiksel indisli gösterimi kastediyor.*] Bunun için ispat yapmaya gerek yok. Peki, şurada bakalım, toplama işlemine göre her matrisin bir tersi var, nedir bu tersi sizce?
52	OG-11	Bence satırlar.
53	B-OG	Eksi A
54	**MO**	Eksi A, neden çünkü biz biliyoruz ki,
55	OG-8	Çıkarmadır.
56	**MO**	Çıkarmadır, neden öyle düşünüyoruz, çünkü toplamada bir elemanla tersini topladığımızda birim eleman olacak. Bakın A+(-A) = (-A)+A= neye eşit olacak daima sıfıra * -A' ya biz ne diyoruz, toplama işlemine göre A' nın, A matrisinin tersi diyoruz. * Gerçekten şurası nedir? $[a_{ij}]$, artı öbürü ise eksi A altında a_{ij} olur, burası ne

		olur topladığımda A altında ij, eksi A altında ij' den şurası sıfır olur, bu da sıfır matrisine eşittir.
		(th: $A+(-A) = [a_{ij}]+[-a_{ij}] = [a_{ij}-a_{ij}]=0$)
57	OG-7	Burayı yazmamıza gerek var mı?
58	**MO**	İstiyorsan yazma.
59	OG-5	Üçüncü özelliği kanıtlamadık.
60	**MO**	Kanıtlamak istiyorsan hemen gel buyur, tahta seni bekliyor. [*Öğrenci isteksiz görünüyor.*]
61	**MO**	Skaler ile çarpmanın özellikleri diyoruz şimdi. [*Eline ders notlarını alıyor.*] [*İki kez daha tekrarlıyor.*] A ve B aynı türden matrisler 1) p.(A+B) 2) (p+q).A 3) p.(q.n)
62	OG-11	Özellik mi bunlar?
63	**MO**	Evet, şurada p,q reel sayı, reel sayı bunlar. p.A+q.B yazabiliriz.
64	OG-11	Dağılma özelliği.
65	**MO**	Evet, dağılma özelliği, her bir matris ile ayrı ayrı çarpıyoruz. Bu sefer matrisi skaler üzerine dağıtıyoruz. Burada [*2'de*] p.A+q.A yazıyoruz. Burada ise ne yazabiliriz, üçüncüde (p.q).A yazarız.
66	**MO**	Yerlerine yazıp gösterebiliriz. Şimdi matrislerde çarpma işlemi diyoruz.
67	OG-5	Matrisleri mi birbirleriyle çarpıyoruz?
68	**MO**	Evet, iki matrisin çarpımını yapacağız. Şimdi, yazdık mı başlığı? Hemen yazıyoruz. [*devamını yazma anlamında*] * İki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı, ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır.
69	OG-5	Niye böyle acayip bir şey?
70	**MO**	Öyle kural işte, şimdi örneği yaptığımızda göreceksin neden öyle olduğunu, başka türlü çarpılamıyor. İki matrisi çarpacağız.
		(th: $[a_{ij}]_{mxn} * [b_{ik}]_{nxp}$)
		Bakın, birincinin sütun sayısı ikincinin satır sayısına eşit olacak ancak bu koşulda çarpma yapabiliyoruz, tamam mı? İkisi birbirine eşit olacak o zaman burada çarpım matrisini hemen çarpmayı yapmadan belirleyebiliriz. İkisinde ortak olanları atarsak m x p türünde bir matris elde ederiz.
		(th: $[a_{ij}]_{mxn} * [b_{ik}]_{nxp} = [\ \ ]_{mxp}$)
71	OG-11	Bir dakika.
72	**MO**	Tamam mı, m satır, p sütundan oluşan bir matris elde edeceğiz.
73	OG-11	Bir dakika.
74	**MO**	Daha çarpımı yapmadan çarpım matrisinin nasıl olacağını belirleyebiliriz.
75	OG-11	Yazalım.
76	**MO**	Çocuklar demek ki iki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı, ikinci matrisin satır sayısına eşit oluyor. Tamam mı? Devam ediyoruz yazmaya. Birinci matrisin, yazıyorsunuz, çocuklar. Birinci matrisin her satırı ikinci matrisin her sütununa karşılık gelen elemanı ile çarpılıp toplanarak çarpım matrisin elemanları bulunur, örnek Şöyle küçük matristen başlayalım çarpmaya.

		(th: $\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}6 & 7\\8 & 9\end{bmatrix}$)
77	OG-5	O ikisinin türü eşit olmasın hocam.
78	**MO**	Daha sonra örnek yazacağım, önce bir neyi anlatmak istediğimi görün hepsine. Burada satır sayısı sütun sayısına eşit gene bakın, şöyle 4 tane öğe oluşacak.
		(th: $\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}_{2x2}*\begin{bmatrix}6 & 7\\8 & 9\end{bmatrix}_{2x2}=\begin{bmatrix}- & -\\- & -\end{bmatrix}$)
79	OG-11	Hocam yazalım artık şunları.
80	**MO**	Yazacaksınız sonra çarpacağız.
81	OG-11	Yok, elemanlarını yazalım.
82	OG-9	Ben anlamadım.
83	**MO**	Bak şimdi örnek üzerinde izleyeceksin, o yazdırdığımın anlamını 1–2 örnek yaptık mı göreceğiz. Tamam mı? [*yazdınız mı anlamında*]
84	B-OG	1 saniye. [*8–10 saniye bekliyor.*]
85	**MO**	Ne dedik birinci matrisin her satırını, önce 1. satırdan başlayalım, ikincinin her sütunuyla, önce şöyle alıyorum. [*6, 8 sütununun önüne düşey ok koydu.*] *Bununla bunun karşılıklı elemanlarını çarpacağım. Bunun birincisi ile bunun birincisi bununla bunu çarpacağım ne oldu 2 kere 6, 12 mi oldu?
86	OG-11	Nereye yazacağız?
87	**MO**	3 kere 8, 24 mü oldu? Toplayalım şimdi bunu 12+24=36 bunu birinciye.
88	OG-11	Tamam.
89	OG-9	1 saniye anlamadım ben.
90	**MO**	Tekrar, bir kez daha bakın, oklara bakıyorsunuz.
		(th: $\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}_{2x2}*\begin{bmatrix}6 & 7\\8 & 9\end{bmatrix}_{2x2}=\begin{bmatrix}36 & -\\- & -\end{bmatrix}$) Şu gördüğünüz 1.satırla, şu 1.sütundaki karşılıklı elemanları çarpıyorum, satırın 1.' si ile sütunun 1.' sini çarpıyorum ne yapıyor? 12 mi oldu, satırın 2.' si ile sütunun 2.' sini çarpıyorum 3 kere 8, 24 topluyorum 36, birinci eleman yerine yazıyorum. * Bununla her sütunu çarpacağım için bu sefer, bu satırla buna bakıyorum. [*7, 9'un önüne ok koyuyor.*]
91	OG-11	Haaa!
92	**MO**	Şimdi karşılıklı çarpalım.2 kere 7, 14; 3 kere 9, 27 toplayın bakalım.
93	B-OG	41
94	**MO**	41, 41'i getirip buraya yazıyorum. Geçiyorum 2. satıra. 2. satırla bu ve 2. satırla bunu çarpıyorum.
95	OG-11	Şimdi satır ile sütun eşitliği anlaşıldı.
96	**MO**	4 kere 6, 24; 5 kere 8, 40 mı oldu, burası 64. Şimdi bu satırla öbürü. 4 kere 7, 28;5 kere 9, 45 mi oldu?
97	OG-7	Çok karışık yaa!
98	**MO**	Buradan ne olur? 73 mü oldu?
99	B-OG	Çok karışık.
100	**MO**	Kaç kişi anladı bunu?
101	B-OG	Anladık da işlemler çok karışık.
102	**MO**	Evet, uzun uzun yazmadım çok karışmasın diye ayrı yerde çarpıp topladım * Şimdi yazıyorsunuz.
103	B-OG	Ne yemek var öğlen? Makarna/börek/yoğurt
104	**MO**	Yazın bakalım öğleye çok var daha yemek faslına başladınız şimdiden.

105	OG-7	Var ya bu çarşamba günleri geçmiyor valla geçmiyor yaa!
106	OG-5	5 dakika kalmış.
107	OG-7	[*öğretmen tahtaya yeni soru yazarken*] Hocam biz daha bunu anlamadık siz tahtaya yeni soru yazıyorsunuz ya!
108	**MO**	Tamam, bekleyeceğiz.
109	B-OG	[Kendi aralarında yemek hakkında konuşmaya devam ediyorlar.] Ispanak mı var? Börek?
110	**MO**	Çocuklar yazın. Onu yazın güzelce sonra soruyu alın.
		$\left(\text{th: } \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{3x2} * \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{2x3} \right)$
111	OG-2	Hocam 3'e 3 bir şey mi olacak?
112	**MO**	Evet, 3x3 türünde olacak. Daha çarpmaya başlamadan türünü belirleyeceksiniz ki hatalı çarpma yapmayalım.
113	**MO**	Çocuklar yazdık mı soruyu?
114	OG-2	Yapayım mı?
115	**MO**	Dur, teker teker ben soracağım, siz cevaplayacaksınız. Şöyle aldık [*=matris işareti yazdı*] birincinin sütun sayısı ikincinin satır sayısına eşit. Bunları yok edersek 3x3 türünde, 3 satır, 3 sütundan, şöyle noktaları koyuyorum bir, iki, üç; bir, iki, üç; bir, iki, üç, 3 satır 3 sütunu oluşturduk.
116	**MO**	Şimdi OG-2 söylesin 1.'nin ilk satırıyla, önce ilk sütunu çarpıp birinciye yazalım. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{3x2} * \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{2x3} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}_{3x3}$
117	OG-2	13
118	**MO**	Ne buldun? -8+21;13 oldu. Şimdi OG–9 sen söyle, birinci satırla bu sefer ikinci sütunun karşılıklı elemanlarını çarpıp topluyorum.
119	OG-9	-10+24
120	**MO**	Topladık 14 mü oldu, buraya ne yazdık 14. Peki, OG–13 söylesin, şimdi 1. satırla 3. sütunu çarpıp toplayalım.
121	OG-13	15
122	**MO**	-12+27, o da ne oldu 15. Şimdi tamam mı, burayı anladık mı?
123	OG-11	Hocam ben bir şey soracağım. Biz türünü belirlerken aynı olanları çıkartıyoruz değil mi?
124	**MO**	Bak şimdi 3x2 türünde…
125	OG-11	Tamam tamam, şimdi gördüm.
126	**MO**	Ne yapıyoruz ikinci satırın elemanlarını bulmak için ikinci satırla bunu çarpıyoruz. 4-7; -3, burası -3. Sonra bunla çarparsak 5-8; -3. Sonra burayla çarparsak ne olur! 6-9;-3. Hepsi -3 çıktı, peki son satırın elemanları, hepsi yine çarpılıyor. * Anladık değil mi, anlamayan var mı?
127	B-OG	Hayır

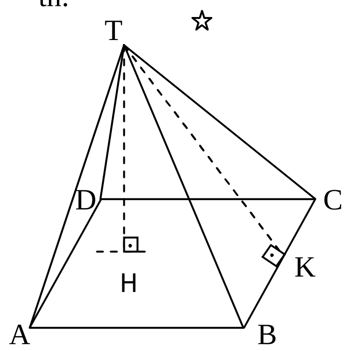
5-8		10 MART-Pzt (Mat-4) DS-5
		[*Öğretmen bir matrisin tersini bulmaya yönelik örneklerden yola çıkarak uygulamalı gösterimler yaptı tahtada öğrencilerle birlikte ve sadece öğrencilerin yaptığı tersini bulma soruları yapıldı.*]
1	**MO**	Bu kenarda dursun. [*OG-11'in yaptığı örnekte bulduğu A^{-1} ifadesini kastediyor.*] Şimdi bulacağımız formülle kıyaslayıp hata var mı, yok mu bakalım. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin çarpma işlemine göre tersinin kuralını bulunuz.
2	OG-5	Her şeyi bizden bekliyorsunuz. [*şaka yoluyla*]
3	**MO**	Evet, bundan sonra sizden bekliyorum. Ben şöyle başlayacağım, siz, $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ olsun, ne yapıyoruz, örneklediğim işleme devam ettireceksiniz aynı şey $A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
4	OG-7	Hocam aynı şey değil mi?
5	OG-5	Öyle bir şey çıkacak ki.
6	OG-7	Nasıl, ne çıkacak a' lı mı çıkacak?
		(th: $A.A^{-1} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$)
7	**MO**	Biz ne yapıyoruz daima x,y,z,t' yi buluyoruz değil mi? Aynı şekilde bulacağız.
8	OG-11	Hocam örnek değil mi bu?
9	**MO**	Hayır, bu kural, ispatlıyorsun.
10	OG-7	İspat de, ispat de. [*başlık at anlamında*]
11	**MO**	Evet, ispatlıyorsun, haydi. Bu da burada dursun [*OG-11'in yaptığı örnek*] kurala göre, bulduğumuz kurala göre doğruluğunu kontrol edeceğiz. Şimdi dinle bakalım, 1. satırla, 1. sütunu çarpıyorum $a.x + b.z = 1$ sonra 1. satırla, 2.sütunu çarpıyorum, $a.y + b.t = 0$ mı oluyor?
12	B-OG	Evet.
13	**MO**	Geçiyoruz öbürüne: c,d ile $c.x + d.z = 0$ mı oldu? $c.y + d.t = 1$ oldu, şimdi buradan denklemleri çözelim.
		th: $\begin{cases} a.x + b.z = 1 \\ c.x + d.z = 0 \end{cases}$ Çocuklar şimdi z' leri yok edelim, bunu d ile bunu –b ile çarpayım. Ne oldu burası $a.d.x + b.d.z = d$ mi oldu! Burada da $-b.c.x - b.d.z = 0$ oldu, taraf tarafa toplarsak bu gitti $(a.d - b.c).x = d$ oldu, buradan da x, $x = \frac{d}{a.d-b.c}$ bulduk.
14	OG-7	Kural bu mu?
15	**MO**	Bir tanesini bulduk.
16	OG-11	Ohhh. [*sevinme anlamında*]
17	OG-5	Vay be!
18	**MO**	Yani burada x yerine gelecek olan ifadeyi bulduk.
19	OG-5	Haydi, şimdi y,z,t' yi bulalım.
20	OG-11	Benimki daha kısa sürdü.
21	**MO**	$c.x + d.z = 0$, $d.z = -c.\frac{d}{a.d-b.c}$ yazayım.
22	OG-5	Heyt bee!
23	**MO**	d' ler sadeleşti. $z = \frac{-c}{a.d-b.c}$

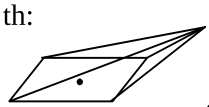
24	B-OG	Oley! Onu da bulduk.
25	**MO**	Geçelim öbürüne $a.y + b.t = 0$, $c.y + d.t = 1$ bunu d ile bunu –b ile çarparsak yine burada ne olur $a.d.y + b.d.t = 0$ ve $b.c.y - b.d.t = -b$, taraf tarafa toplarsam buradan da; $a.d - b.c = -b$ mi oldu?Buradan da $y = \frac{-b}{a.d-b.c}$ bulduk. Teker teker buluyoruz.
26	OG-8	Bir tek t kaldı.
27	OG-11	Paydaları eşit.
28	**MO**	Şurada $b.t = -a.y$ yazayım, şunu kullandım bakın. $\cancel{b}.t = -a.\frac{-\cancel{b}}{a.d-b.c}$ olur, b'ler sadeleşti $t = \frac{-a}{a.d-b.c}$ oldu.
29	OG-11	Hiçte şaşırmadım ha!
30	OG-13	Ohh! [*onu da bulduk anlamında*]
31	**MO**	Yerine yazalım,
		$\left(\text{th:} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{a.d-b.c} & \frac{-b}{a.d-b.c} \\ \frac{-a}{a.d-b.c} & \frac{-a}{a.d-b.c} \end{bmatrix} \right)$
32	B-OG	Yanlış mı hocam?
33	**MO**	Bir yerde işlem hatası mı yaptık?
34	OG-11	Allah hocam! [*yani çok şey yazdık, hata nerede bulmak zor anlamında*]
35	**MO**	1 bölü a.d- b.c parantezine alabilir miyim içeriyi?
36	**MO**	[*işlemleri izledi ve hatanın* $t = \frac{+a}{...}$ *olması gerektiğini – olmasından kaynaklandığını buldu.]* Buradan paranteze alırsak $\frac{1}{a.d-b.c}\begin{bmatrix} a & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ oldu.
37	B-OG	Tamam.
38	**MO**	Şimdi ilk baştaki matrisi yazalım ve kurala göre ne olduğunu bulalım.
39	OG-7	Oley!
40	**MO**	a ile d yer değiştirdi bakın, c ile b de işaret değiştirdi sonra her bir terim $1/_{a.d-b.c}$ ile çarpıldı bakın.
41	**MO**	Peki, bu matrisin 2x2 türünde bir matrisin tersi yoktur desem neresi 0 olur sizce?
42	B-OG	$a.d - b.c$
43	**MO**	$a.d - b.c$ sıfır olursa bu matrisin tersi yoktur…
44	OG-11	Allahtan sınavda böyle şeyler çıkmıyor.
45	**MO**	Nereden biliyorsun sormayacağımı? Ne fark eder ha sayı vermişim ha harf vermişim. Deminki örneği formülle de yaparak kontrol edin bakalım.
46	B-OG	Aynı çıktı, doğruymuş.
47	**MO**	Şimdi bir kez daha tekrar ediyorum.
48	B-OG	5 dakika kaldı, süre çok az kaldı.
49	**MO**	Dinle, 2x2 türündeki bir matrisin tersini bundan sonra şu formülü kullanarak bulacaksınız, nasıl buluyoruz? Asal köşegen üzerindekilerin yerlerini değiştiriyoruz, sonra her birini 1 bölü $a.d - b.c$ ile çarpıyoruz. Eğer a.d- b.c sıfır oluyorsa bu 2x2 türündeki matrisin tersi yoktur.
50	**MO**	Size 2x2 türünde bir matris verildiğinde önce $a.d - b.c$ ye bakacaksınız sıfırdan farklı mı diye, sıfırdan farklıysa o zaman tersini bulacaksınız.

		Şimdi şöyle, artık bu formülü kullanıyoruz bakın bu kadar ispat yaptık bunları gösterdik. Şöyle bir matris verdiğimizde;
51	OG-5	Zil çalacak.
52	**MO**	Çalsın. A= , bir rakam söyle, OG-5 sende söyle… [*Örnek yazdı ve hemen çözümü yaptı.*]

6-11		17 MART-Pzt (Mat-3) DS-6
1	**MO**	[*Başlık yazdı: Determinantlar*] Ben şöyle yazayım [*tahtaya*] n x n türünde kare matrisler kümesinden reel sayılara tanımlanan fonksiyona determinant fonksiyonu denir. Determinant kare matrisler kümesinden reel sayılara tanımlanan özel bir fonksiyon. Bu kümenin bir elemanı A altında n x n ise, A n x n türünde ise bunu reel sayılara dönüştüreceğiz.
		th: D: kare matrisler kümesi → R $A_{n\,x}$ → R
2	OG-11	Özel bir fonksiyon.
3	OG-2	Hocam onu özellikle mi "determinan" olarak yazdınız?
4	**MO**	Şöyle D harfi ile gösterdim.
5	OG-2	Şu şu determinant!
6	**MO**	Determinant, pardon unutmuşum, eksik yazmışım ve bu determinantı, A matrisinin determinantını şöyle yazıyım detA diyeceğiz, o da eşittir 2 dik çizgi ortaya A yazacağız. [*detA*=|*A*|]
7	**MO**	Tamam mı?
8	B-OG	Tamam.
9	**MO**	A kare matrisinin determinantı, başına detA eşittir dik çizgi A, yani şu ifadeyi gördüğünüzde [|*A*|], A' nın determinantını anlayacağız, tamam mı? Böyle köşeli yapmıyoruz bakın, köşeli yaptığımızda o matris oluyordu.
10	OG-9	1 saniye hocam bir yazalım isterseniz.
11	**MO**	Hadi yaz, şimdi burada
12	OG-9	Hocam?
13	**MO**	Evet.
14	OG-9	Sorayım mı?
15	**MO**	Evet, sor.
16	OG-9	Bir kare matrisin tersini alırken $\frac{1}{A}$, o determinant…
17	**MO**	İşte o determinant oluyor, şimdi 1x1 türünde bir matrisin determinantını alacağız, sonra 2x2 türündeki bir kare matrisin determinantını tanımlayacağız, sonra 3x3 türündeki ve sonra ondan daha büyük olanları da sırayla tanımlayacağız. Şimdi 1x1 türünde bir matris alalım, bunu şöyle verdim bakın 5, 1x1 türünde bir matris, bunun determinantı, detA=5 yazdık bu da 5 tamam mı? Şöyle genellesem bakın, $A = [a_{11}]_{1x1}$ detA=$\|a_{11}\| = a_{11}$dir. 1x1 türündeki matrisin determinantını bu şekilde veriyoruz, tamam mı? Tek bir tane olduğu zaman. Yazdık mı?
18	OG-9	1 saniye.
19	**MO**	1satır, 1 sütundan oluşuyor, tek bir öğesi var, determinantı da kendisi oluyor gördüğünüz gibi.
		th: 1) A=$[5]_{1x1}$ detA=|5|=5 A=$[a_{11}]_{1x1}$ detA=$\|a_{11}\|$=a_{11} 2)
20	OG-3	Hocam bunlar özellik mi?
21	**MO**	Tabi, bunlar alt tanımlar yani, 1x1 türünü verdik, şimdi 2x2 türünü verelim, şöyle alıyoruz A matrisi $a_{11}, \dots, a_{22}$
22	OG-11	Direk yazsak, değer versek?
23	**MO**	Değerde vereceğim şimdi, bu şekilde 2x2 türünde aldık, bunun determinantı detA=$a_{11}, \dots, a_{22}$, dik çizgimizi koyduk, asal köşegen yönünde okumuzu koyuyoruz. a_{11} ile a_{22} yi çarptık, eksi diyoruz, yedek köşegen

		üzerindekilerin çarpımı $a_{12} .\ a_{21}$ yazıyoruz.
		(th: 2) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ detA=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$)
24	OG-8	Yani bir matrisin tersini bulurken, aynı zamanda biz onun determinantını buluyoruz.
25	**MO**	İşte onun için onu tanımladık direk vermedik, ispatladık o nedenle yaptık, mesela biz ne demiştik, şöyle yazmamış mıydık bakın A eşittir a,b,c,d böyle dersek bunun determinantı detA eşittir a,b,c,d o da eşittir a.d- b.c dir.
		(th: A= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ detA=$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$)
26	**MO**	Bunu bu şekilde tersini verirken determinanttan hiç bahsetmeden ispatlayarak bunu elde etmiştik, şimdi örnek yapalım. A= $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ determinant A nedir diye soralım…

7-25		8 NİSAN-Salı (Geo-1) DS-7
1	**GO**	[*Öğretmen piramitin tanımını yazdırdı ve tabanlarına göre adlandırıldığını ifade etti, üçgen ve beşgen piramit çizdi.*] -Bir tane dikdörtgen piramit çizelim onun üzerinde bazı elemanları tartışalım. T noktasına piramitin tepesi denir, ABCD dikdörtgenine piramitin neyi denir?
2	B-OG	Tabanı.
3	**GO**	Tabanı denir. TA, TB, TC, TD bunlara ne denir?
4	OG-9	Yanal ayrıtlar olabilir mi?
5	**GO**	Yan ayrıt, piramitin yan ayrıtı. Peki, TAB üçgeni, TBC, TDC, TAD üçgeni bunlara da piramitin yan yüzleri denir.
6	OG-7	Yani yanal alanı değil mi hocam?
7	**GO**	Yan yüzü, yanal alan değil.
8	OG-7	Tamam.
9	**GO**	Bir piramitin tabanı değişebilir ama yan yüzleri nedir?
10	OG-9	Üçgen.
11	**GO**	Üçgendir değil mi! Tabanı kaç gen olursa olsun tabanı, daima üçgendir.
12	OG-8	Peki, yuvarlak olursa tabanı?
13	B-OG	Koni.
14	**GO**	Onun adı koni, piramitin özel bir hali. T noktasından taban düzlemine dik indirdiğimde oluşan doğru parçasına ise TH' ye piramitin yüksekliği denir. Tepe noktasından tabana inilen dikme. Peki, şu ne olabilir, şunun adı ne olabilir? [*BC' ye dik indi.*] * O da yüksekliktir değil mi?
15	OG-9	Aynı değil, ama o.
16	**GO**	Yan yüz yüksekliğidir o zaman, piramitin yan yüz yüksekliği. Herhalde her elemanını tartıştık.
17	OG-9	Bunlarda cisim köşegeni diye bir şey yok değil mi hocam?
18	**GO**	Cisim köşegeni diye bir şey yok. Şöyle yazalım, tabanı düzgün çokgen ve yükseklik ayağı tabanın merkezinde olan piramite düzgün piramit denir. th:  T, piramitin tepesi ABCD, piramitin tabanı [TA],[TB],[TC],[TD] piramitin ayrıtları *T A Đ*TAB, TBC, TCD piramitin yan yüzleri [TH] piramitin yüksekliği [TK] piramitin yan yüz yüksekliği
19	**GO**	Diyor ki, tabanı düzgün çokgen olacak, tepe noktası, tam merkezin hizasında olacak onu demek istiyor, yani tepe noktası şöyle yerde de olabilirdi,

		th:  bu da bir piramittir ama düzgün değildir. Tepe noktası burada olmayacak tam merkezin hizasında olacak. ∗ Çizelim bir tane, az önce çizdiğimiz benziyordu aslında [☆] Tabanın merkezinde, tepe noktası da burası.
20	**GO**	Piramitin düzgün olması ne işe yarar? Ne farkı vardır? Şundan [*düzgün olmayanı gösteriyor*] ne farkı ya da ne gibi farklılıkları vardır? İkisi arasında [*öğrenci elini kaldırıyor*] evet, OG-8.
21	OG-8	Yanal yüzleri ikizkenar üçgenler olabilir.
22	**GO**	Değil mi?
23	OG-8	Tam ortada aldığımızda
24	**GO**	Yazalım öyleyse. Düzgün piramitin yan yüzleri ikizkenar üçgendir. Yan yüzlerin ikizkenar olması nelerin eşitliğini gösterir? Şöyle [*şekli*] harflendirerek konuşalım. ∗ Yan ayrıtları birbirine eşittir. th: böylece yan ayrıtları birbirine eşit olur. $\lvert TH \rvert = \lvert TB \rvert = \lvert TC \rvert = \lvert TD \rvert$ Beşgen ise beş ayrıt birbirine eşit olur. Peki, bu yan yüzleri ikizkenar üçgenler dedik, farklı ikizkenar üçgenler mi?
25	B-OG	Aynı.
26	**GO**	Birbirinin aynısı değil mi bunlar, o zaman yan yüzleri birbirine eş ikizkenar üçgenlerdir diyelim, buradan da birbirine eşitse yan yüz yükseklikleri de nedir, birbirine eşittir. th: ayrıca yan yüz yükseklikleri de eşit uzunluktadır. ∗ Bizim ilgi alanımızda düzgün piramitler var bununla uğraşacağız. ∗ Şöyle diyelim: [*Tahtaya ‘<u>teorem</u>’ i yazdı.*]
27	**GO**	Bir piramitin hacmi taban alanı ile yükseklik. Prizmanın hacmi neydi?
28	OG-9	Taban alanı çarpı yükseklik.
29	**GO**	Burada taban alanı ile yüksekliğin çarpımının üçte biridir. th: <u>Teorem</u>: bir piramidin hacmi taban alanı ile yüksekliği çarpımının üçte biridir. Haftaya bunun ispatını istiyorum, araştırın, bunun ispatını yapacaksınız, boşluk bırakın biraz, yarım sayfa kadar herkes dosya kâğıdında yazılı olarak getirsin, birinizi kaldıracağım anlattıracağım.
30	OG-7	Hocam şimdi aklıma bir şey geldi de.
31	**GO**	Söyle.
32	OG-7	Şimdi koninin hacmi silindirin hacminin üçte biri kadardı.
33	**GO**	Evet.
34	OG-7	Buradan bir yaklaşım yaparsak mesela şeyden kare piramitten bir tane çevrel çember geçirsek ondan sonra onu silindir gibi yapsak, sonra?
35	**GO**	O dediğini nereden biliyorum, koninin silindirin hacminin üçte biri

		olduğunu, o da aynı hesap olmuş oluyor değil mi? Yani bir şeyi kabul ediyorum ama ben şu an onu bilmiyorum onu daha önce ispatlamadım, üçte biri olduğunu ispatlamadık daha sonra ispatlarsam bunu da ispatlamış olurum. ∗ Peki, bunu [*teoremi*] kullanacağız yalnız ispatlamadık [*henüz*] ama kullanacağız [*şimdi*]. ∗ Soru diyelim.
36	**GO**	Bir düzgün kare piramitin
37	**GO**	Yalnız şöyle bir ispat istemiyorum, deneysel bir ispat. Daha önce şöyle olmuştu; Yükseklikleri aynı tabanları aynı olan bir piramit ile bir prizma aldılar. İçine su doldurdular. Piramiti üç kerede doluyor diye gösterdiler. Deneysel olarak aslında o da güzel ama geometrik istiyorum tamam mı! ∗ O fiziksel bir ispat oluyor, matematiksel bir ispat olmuyor.
38	**GO**	Şöyle diyelim, bir düzgün kare piramitin taban ayrıtı 10 cm, cisim yüksekliği 12 cm olduğuna göre. a) hacmi b) yan yüz yüksekliği c) yan ayrıt uzunluğu d) alanı bulunuz. ∗ Piramitte alan diye bir şey gördük mü?
39	B-OG	Hayır.
40	**GO**	Demek ki özel bir şey yok çünkü tabanına göre değişir, tabanda ne varsa ona göre değişir.

8-29		16 NİSAN-Çrş (Mat-1) DS-8
1	**MO**	[*Başlangıçta 3–4 dakika ligdeki takımlar üzerinden futbol konulu konuşmalar oluyor aralarında.*] Hadi çocuklar, OG–4 defterini bir çıkar, OG–5 defterler çıkacak sen konuşuyorsun.
2	**MO**	Logaritma p tabanında, log p tabanında p. kuvvetten kök içinde, tekrar p. kuvvetten kök içinde, iç içe n tane p. kuvvetten kök var bunun –n olduğunu gösteriniz. th: $\log_p \log_p \underbrace{\sqrt[p]{\sqrt[p]{\dots\sqrt[p]{p}}}}_{\text{n tane}} = -n$ olduğunu gösteriniz.
3	OG-7	Soru bu yani?
4	**MO**	Evet, soru bu.
5	OG-2	Neyle gösterelim tümevarımla mı?
6	**MO**	Hayır hayır işlem yapacaksınız.
7	OG-13	İspatla mı yapacağız?
8	**MO**	Bugün logaritma soruları çözeceğiz.
9	OG-8	Haa böyle köklü olduğunda p üzeri +1 oluyordu herhalde.
10	**MO**	Öyle mi oluyordu bir düşünün bakalım.
11	OG-8	p üzeri -1 mi oluyordu acaba?
12	OG-7	Evet, -1' di.
13	**MO**	Peki, şöyle kural öğretmemiş miydik? n. kuvvetten kök içinde, n. kuvvetten kök içinde x dediğimizde iç içe köklerde kök kuvvetlerini çarpmıyor muyduk?
14	OG-8	Bunu mu kullanıcaz?
15	**MO**	Tabi.
16	OG-2	Hocam p üzeri n mi diyeceğiz?
17	**MO**	Ne?
18	B-OG	p üzeri n.
19	**MO**	p üssü n, yani n tane p. kuvvetten kökü çarptığınızda n tane p çarpı, p çarpı, p çarpı gelmeyecek mi orası?
20	B-OG	Evet.
21	**MO**	O da p üzeri n. kuvvetten kök olmayacak mı?
22	**MO**	Hadi, gayet kolay bir soru, siz orada –n olduğunu gösteriniz deyince korkmayın.
23	OG-8	Bir de hocam şey vardı, siz bize 9. sınıfta köklülerde öğretmiştiniz sürekli kök içinde oluyordu sonsuza gidiyordu.
24	**MO**	Tamam, o ayrı bak, onla alakalı değil
25	OG-7	O köklü sayı. [*o, o konudaydı anlamında*]
26	OG-2	Buldum ben galiba.
27	**MO**	Hadi [*sınıfa yönelik*] OG-3 ne yaptın? [*çözdün mü?*]
28	OG-2	Yapayım mı hocam?
29	**MO**	Hadi.
30	OG-2	Şimdi şurası şey değil mi! p$\sqrt[n]{p}$
31	**MO**	Hı hı.
32	OG-2	Böyle, o zaman p üzeri 1 bölü p üzeri n, bu da böyle oluyor kök içinde 1 bölü şey değil mi?
33	**MO**	Hı hı.

EK-6
Transkript Metni

34	OG-9	Buldum hocam.
35	OG-2	Sonra $\log_p \log_p p^{\frac{1}{p^n}}$
36	OG-9	Ben de öyle yaptım.
37	OG-2	Bu p, p şey oluyor, direk katsayıya gidiyor Yani log p tabanında $\frac{1}{p^n}$
38	**MO**	Hı hı.
39	OG-2	Burada da yani log,… -n
40	**MO**	-n, güzel aferin OG–2.
		th: $\log_p \log_p \underbrace{\sqrt[p]{\sqrt[p]{\dots\sqrt[p]{p}}}}_{\text{n tane}} = -n$ $p\sqrt[n]{p}$ $p^{\frac{1}{p^n}}$ $\log_p \log_p p\,\frac{1}{p^n}$ ∗ Anladık mı çocuklar?
41	B-OG	Evet. [*MO çözümü yine adım adım tekrar anlatıyor.*]

9-33		28 NİSAN-Pzt (Mat-3) TES-1 ve DS-9
1	OG-13	Bunları yazalım mı hocam?
2	**MO**	Yazmayın, defterinize yazın isterseniz ama bunları sizin tartışmanızı istiyorum, ben karışmayacağım, önce baştan başlayacağız, önerme nedir? Hadi çocuklar!
3	OG-5	Defter çıkaracak mıyız?
4	OG-9	Hocam bunları deftere yazmaya gerek var mı?
5	**MO**	Başlıklarını yaz yeter.
6	**MO**	Önce önerme nedir den başlayacağız, şöyle herkes bir fikrini söyleyecek.
7	OG-3	Yeni konuya mı geçtik? Tümevarım tekrarı yapmadan önce.
8	OG-11	Yazalım mı hocam bunları?
9	**MO**	Ya şöyle bir başlıklarını yaz.
10	**MO**	OG- 5 hadi bir önerme nedir? Düşündüğünü söyle bakayım.
11	OG-8	Ben söyleyeyim mi hocam?
12	OG-3	Kesin doğru ya da kesin yanlış yargı bildiren cümlelerdir.
13	OG-8	Hayır, doğru önerme yanlış önerme olabilir, bence hüküm bildiren cümlelerdir.
14	OG-11	O da [*OG–3 ü kastediyor*] onu dedi.
15	**MO**	Hüküm bildirecek ama nasıl bir hüküm bildirecek?
16	OG-3	Ya kesin doğru, ya kesin yanlış.
17	OG-2	Kesin bir hüküm.
18	**MO**	Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildirecek, peki OG–2 söyle bakalım, bir tane önerme söyle.
19	OG-2	Salı hafta içi bir gündür.
20	**MO**	Salı hafta içi gündür
21	OG-7	Doğru bir önerme.
22	**MO**	Evet, başka?
23	OG-11	Bütün Fenerliler buruktur.
24	**MO**	Genelleme yapmıyoruz, bak genelleme demedik biz önerme dedik.
25	OG-8	Peki, bugün günlerden çarşambadır desek bu doğru bir önerme mi olur, yanlış bir önerme mi?
26	**MO**	Bu önerme ama yanlış bir önerme.
27	OG-8	Bugün pazartesi, ama çarşamba günü çarşamba, yani bu kesin doğru veya yanlış değil.
28	**MO**	Bugün pazartesidir dersek doğru olmaz mı?
29	OG-8	Yarın ben o cümleyi kursam?
30	**MO**	Haa, o gün kurarsan yanlış olur.
31	**MO**	Şey, OG–6 bir önerme söylüyordu.
32	OG-6	Türkiye’nin başkenti Ankara’dır
33	**MO**	Evet peki… Teorem nedir?
34	OG-2	İddia.
35	OG-11	Süper.
36	**MO**	Çocuklar, söz alarak konuşun lütfen.
37	OG-5	Aksiyom.
38	**MO**	Aksiyom, peki aksiyom nedir?
39	OG-7	Belit, belit.
40	**MO**	Belit ne demek? [*MO ilk kez duyuyor*.]
41	OG-9	Ya hocam doğruluğu tam olarak ispatlanamayan…
42	OG-3	Ama yanlışlığı da ispatlanamayan…

EK-6
Transkript Metni

43	**MO**	1 dakika, 1 dakika lütfen çocuklar söz alarak konuşun, OG–9 bir şey söyledi.
44	OG-9	Doğruluğu ya da yanlışlığı kesin olarak ispatlanamayan fakat sezgisel olarak kabul edilen.
45	**MO**	İspatlanamayan değil de, yani… birazcık daha doğruluğu açıkça görülen desek.
46	OG-9	Doğruluğu açıkça görülen, yani doğruluğu sezgisel olarak görülen…
47	OG-6	Ama kanıtlanmayan/ kanıtlanamayan…
48	**MO**	Niye kanıtlanmasın, kanıtlanabilir.
49	OG-7	Kanıtlarsak yasa olur.
50	B-OG	Kanıtlanmaz.
51	OG-9	Öyle şey olmaz hocam. [*kanıtlanmaz anlamında*]
52	**MO**	Hıı, peki bir tane aksiyom söyleyin bakalım.
53	OG-11	1 dakika, 1 dakika bir şey söyleyeceğim, ama bir şey söyleyeceğim.
54	OG-1	Nokta, nokta.
55	**MO**	Nokta bir aksiyom mu? Nokta tanım.
56	OG-7	Söyleyeyim mi? Üçgenin iç açıları toplamı 180^0 dir.
57	**MO**	O teoremdir.
58	OG-11	Ama hocam biz teorem kanıtlansa yasa olur dedik, kanıtlanmış ama öyle.
59	OG-1	Doğru parçası, doğru parçası…
60	**MO**	1 dakika [*OG–8 elini kaldırıyor*] evet, [*OG-8'e*]
61	OG-8	Dikdörtgenin alanı a.b' dir.
62	**MO**	O ispatlanır.
63	OG-8	Biz bunu ispatlayamadık.
64	OG-2	İspatlanmıyor ama doğruluğu veya yanlışlığı görülüyor.
65	OG-11	İspatlanmış, ispatlanmış söyleyeyim mi?
66	**MO**	1 dakika, söyle OG–11.
67	OG-11	Şimdi bir tane AB doğru parçası var diyelim a uzunluğunda.
68	OG-4	Ondan b tane.
69	OG-11	Ondan b tane üst üste.
70	**MO**	Haa, koydun.
71	OG-11	İşte a.b
72	OG-4	Biz onları kabul ediyoruz ama.
73	OG-2	Evet, işte.
74	OG-11	Evet.
75	OG-2	Evet, o ispat değil yani.
76	OG-9	Biz doğru açının değerine [*ölçüsüne*] 180^0 dediğimiz için o 180^0 dir.
77	**MO**	Peki, şöyle bir aksiyom, doğruluğu apaçık görülen bir aksiyom söyleyecek olan yok mu?
78	OG-11	Doğruluğu apaçık görülen?
79	**MO**	Yani öyle bir cümle söyleyeceksiniz ki...
80	OG-11	İki noktadan yalnız bir doğru geçer.
81	**MO**	Evet, iki noktadan yalnız bir doğru geçer. Peki, teorem nedir?
82	OG-11	Teorem böyle içinde sayısal bir şey…
83	OG-5	Kesin olarak kanıtlanamayan ama sezgisel yolla bilinen.
84	OG-2	O belit yaa!
85	B-OG	Hayır, o değil ya, hayır. [*OG-5'in cümlesine yönelik*]
86	OG-8	Hocam hocam? [*Elini kaldırıyor söz istiyor*.]
87	**MO**	OG–7 söylesin.
88	OG-7	Şimdi, mesela bir tane işte tasarının kanun, yasa olması için %100 kanıtlanması gerekiyor, her yapıldığı deneyde aynı sonucu vermesi gerekiyor.

EK-6
Transkript Metni

		Teoremde de mesela %98 olarak %99 olarak kanıtlanıyor ama yine de yani bazı kuşkular var ufakta olsa ve hiç bir türlü şekilde çürütülemiyor bu teorem oluyor.
89	**MO**	[*Sınıfta yoğun bir tartışma, konuşma oluyor*.] Tamam, bir dakika herkes fikrini söyleyecek.
90	OG-5	Teoremle, teori aynı şey mi?
91	**MO**	Teori ile teorem aynı şey midir? Herkes fikrini söyleyecek.
92	OG-11	Hayır hocam.
93	**MO**	Katılıyor musunuz?
94	OG-11	Ben bir şeye katılmıyorum.
95	**MO**	Söyle.
96	OG-11	Şimdi %99 kesin kabul şey ya da ispatlanamayan falan diyoruz ama mesela Melanous Teoremi biz onu %100 doğru olarak kabul edip kullanıyoruz, her seferinde aynı sonucu veriyor. %100 doğrudur o ama niye o zaman kesin değil diyoruz?
97	OG-7	Ama hocam.
98	**MO**	[*OG-7'ye*] senin teorem tanımın o, ben bir şey söylemedim.
99	OG-7	Ama o yasa olarak, hala pürüzler var ama.
100	**MO**	Nasıl pürüzler ama?
101	OG-11	Abi o teoremle aynı teorem değil.
102	OG-7	İşte bende onu diyecektim, bence fen bilimlerinde kullanılanlar somut, matematik hani soyut ya ondan dolayı işte bu teorem oluyor o paradigma gibi oluyor yani tam kesin olamıyor.
103	**MO**	Hadi OG–1 konuşsun bakalım, OG–1 teorem nedir senin için?
104	OG-1	Tam kesin olarak ispatlanmamış.
105	**MO**	Teorem ispatlanmamış!!! Hıı?
106	OG-13	Tam olarak. [*ispatlanmamış*]
107	OG-9	Ama teoremleri ispatlıyoruz derste.
108	OG-8	Doğruluğu ispatlanamayan ama eldeki verileri sağlıyor, bizim bulduğumuz şey eldeki verileri sağlıyor.
109	**MO**	Bir üçgenin iç açıları toplamının 180^0 oluğunu ispatlayamıyor musun?
110	OG-11	İspatlarız, çiz bir çember.
111	OG-8	Onu ispatlarız ama yani, Melanaus Teoremi, [*ama*] o teoremi de ispatlarız.
112	**MO**	Yaa!
113	OG-7	Ama şeyi ispatlayamayız, bir çember niye 360^0 .
114	**MO**	Niye ispatlayamayız?
115	OG-7	Niye, nasıl ispatlayacağız?
116	OG-13	Niye o eskiden biliniyormuş.
117	OG-7	Ben diyorum 720^0derece.
118	OG-11	İlk başta 450 imiş hatta.
119	OG-7	Hayır, 400 müş. [*Tartışma çıkıyor*.]
120	**MO**	Her bir ağızdan bir şey çıkmasın, söyle. [*OG–6' ya*]
121	OG-6	Hocam 400 küsur müymüş neymiş, o da tam her şeye bölünmüyormuş, 360 güzel, 3' e bölünüyor demişler, 4' e, 2' ye [*de bölünüyor*].
122	OG-11	Sırf o yüzden hocam, çok sayıya bölünebiliyor [*diye*].
123	**MO**	Ama ben dairenin alanının ispatlandığını biliyorum.
124	OG-11	Alanı değil 360^0 diyoruz.
125	**MO**	360^0 mi? [*onu*] Kabul ediyoruz.
126	OG-6	Kabul yani.
127	OG-7	Yalnız bir şey diyeceğim onlar [*geçmişte bunu ifade edenler*] o 360^0

		hesaplıyorlar da, önce çemberin 360^0olduğunu söylüyorlar, ona göre materyaller oluşturuyorlar daha sonra bu materyallerle ölçüyorlar.
128	OG-12	Açıları da kendilerine göre belirliyorlar.
129	0G-7	Evet, o materyalleri zaten önce çembere göre ayarlamış oluyorlar.
130	OG-2	Hocam o zaman çember şey olsaydı, 400^0 olsaydı, üçgenin iç açıları toplamı da 180^0 olacak mıydı?
131	OG-11	Hayır, 200^0 olurdu.
132	OG-9	200^0 olurdu.
133	**MO**	Peki, önerme ile teorem ilişkili mi?
134	OG-9	Evet, hocam ilişkilidir, çünkü teoremler önermelerden doğar.
135	**MO**	Efendim, anlayamadım.
136	OG-9	Yani hocam ilişkilidir bence çünkü.
137	**MO**	İlişkilidir, neden ilişkilidir?
138	OG-9	Teoremler önermelerden doğar, bir bilim adamı ortaya bir önerme atar onun ispatlanması yolunda teoremler oluşturulur.
139	**MO**	Başka? [*fikri olan*] [*Bazıları OG-9'a katıldığını söylüyor.*] Evet, güzel bir görüş, başka görüşü olan?
140	OG-7	Bence teoremler önermelerle ifade edilir.
141	**MO**	Teoremler.
142	OG-7	Önermelerle ifade edilir.
143	**MO**	Mesela nasıl ifade ediliyor, bir teorem söyleyin hipotezini hükmünü göreyim.
144	OG-8	Pisagor teoremi örneğin.
145	**MO**	Pisagor teoremi. Ama nerede, bir dik üçgende.
146	OG-7	Bir dik üçgende iki dik kenarın kareleri toplamı, hipotenüsün karesine eşittir, diyoruz mesela.
147	**MO**	Peki, bu teoremin hipotezi neresi? [*3–4 saniye sessizlik oluyor.*]
148	OG-8	Eşittir cümlesi.
149	OG-2	Formül işte hipotez $a^2 = b^2 + c^2$
150	**MO**	Hipotez nedir? [*sınıfa*] Verilen değil mi?
151	B-OG	Evet.
152	**MO**	Hüküm nedir? İstenen değil mi?
153	B-OG	Evet.
154	**MO**	Peki, bir dik üçgende dediniz ki Pisagor teoremini söylediniz.
155	OG-8	$a^2 + b^2$ hipotez, c^2 hüküm mü? Oluyor.
156	**MO**	[*Hayır, anlamında kafasını sallıyor.*] Başka?
157	OG-11	Söyleyeyim mi?
158	**MO**	Söyle.
159	OG-11	ABC üçgeninin dik üçgen olması; a,b nin dik kenar, c nin hipotenüs olması.
160	**MO**	Verilen üçgenin dik üçgen olması hipotezdir, verilendir.
161	**MO**	Bu dik üçgen desem 90^0'ın karşısı yani A açısını 90^0 kabul ediyorsam o zaman $a^2 = b^2 + c^2$ olur. [*OG-8'e bakıyor.*] Hipotez nedir teoremde verilendir yani, hüküm nedir? İstenendir. Peki, bir teorem daha söyleyin bakalım hipotezine hükmüne ayırabileceğimiz.
162	OG-11	Tamam, söyleyelim.
163	**MO**	Söyle bakalım.
164	OG-7	Mesela kosinüs teoremi.
165	**MO**	Kosinüs teoremi.
166	OG-7	Bir üçgenin mesela atıyorum, bir üçgenin kenarları a, b ve c olsun

EK-6
Transkript Metni

167	**MO**	Evet.	
168	OG-7	Oradan $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$	
169	**MO**	Peki, ispat nedir? İspat.	
170	B-OG	Kanıtlama.	
171	**MO**	Kanıtlama.	
172	OG-8	Bir tarafı kullanarak diğer tarafa ulaşma. [*OG-2 de benzer bir şey söylüyor*]	
173	OG-11	Yalnızca bir tarafı kullanacağız ama.	
174	**MO**	Bir tarafı kullanarak dediğiniz nedir? Acaba hipotezi mi kullanacağız?	
175	B-OG	Hipotezi, hipotezi, hükmü.	
176	**MO**	Haa, hipotezi kullanarak hükmü elde etmeye ispat mı diyoruz?	
177	B-OG	Evet.	
178	**MO**	Pekâlâ, biz bu senenin matematik dersinde [*daha önce*] tümevarımla ispat yaptık değil mi? Tümevarım bir ispat şekli değil mi? Neydi tümevarım, hatırlayan var mı? [*Söz istiyorlar*.]	
179	**MO**	OG–8 söyleyecek.	
180	OG-8	k=1 için doğruluğunu gösteriyoruz, k=k için doğruluğunu kabul ediyoruz.	
181	B-OG	n, n eşittir [*OG-8 in sözünü düzeltiyorlar*].	
182	OG-8	n=k için doğruluğunu kabul ediyoruz, n=k+1 i k cinsinden yazıp eğer doğruluğunu görürsek o zaman doğrudur diyoruz.	
183	**MO**	Peki, hatırladığınızdan, şöyle kolay bir tane, hatırladığınızdan yazayım [*bu esnada notlarına bakıyor*] bir tane.	
184	OG-5	Bir de tümdengelim var.	
185	OG-8	O felsefede.	
186	OG-4	Matematikte tümdengelim var mı? [*Öğretmen kâğıttakilere göz gezdiriyor, hafif bir gürültü var, soru ihmal ediliyor*.]	
187	**MO**	$\forall\, n \in N^+$ için $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ olduğunu.	DS-9
188	OG-7	Yazıyor muyuz?	
189	**MO**	Evet, tümevarımla ispatlayınız.	
190	OG-9	İspatlayayım mı? Geleyim mi?	
191	OG-7	Bunun formülü var zaten.	
192	**MO**	Hadi OG–8. [*tahtaya kalk anlamında*]	
193	OG-13	Sağlıyor işte 1 için sağlıyor.	
194	OG-7	Aynısı defterde var bunun.	
195	**MO**	Defterde yok bu, defterdekiler toplam, çarpım sembolleriyle ilgili kurallardır.	
196	OG-7	Bulayım mı?	
197	**MO**	Bunu vermedim ben.	
198	OG-7	Verdiniz.	
199	OG-8	Vermediniz. [*Aynı anda tahtada çözüm yapıyor*.]	
200	OG-6	Hepsinde yöntem aynı ki 1 koyuyorsun, k koyuyorsun, k+1 koyuyorsun.	
201	**MO**	Tamam, siz de yerinizde çözüyorsunuz. Ne yaptık? [*Tahtaya bakıyor*.] n=1 için doğruluğunu gördük, n=k için doğru olduğunu kabul ettik, n=k+1 için doğruluğunu göstereceğiz.	

EK-6
Transkript Metni

		th: $n=1$ için $1^2=\frac{1(1).(3)}{3}=1$ $n=k$ için $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$ $n=k+1$ için $1^2+2^2+\cdots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$ ☆
202	OG-5	OG–8 tahtaya çok büyük yazıyor devamına yer kalmayacak.
203	**MO**	Sen kendin yaz, kendin çöz biliyorsun bunu. [*OG-5’e*]
204	OG-5	Buradan bile [*en önde oturuyor*] göremiyorum.
205	**MO**	Bildiğin için çözmeye gerek görmüyorsun! [*OG-5’e*]
206	OG-8	Ben bunu (☆) göstereceğim, şu k^2ye kadar olan yere bunu yazacağım, k+1’ in karesini açacağım bunu elde edeceğim.
207	**MO**	Tamam göster.
208	OG-12	Hocam, şurada son terimin karesi k+1’ in karesi olmayacak mı?
209	**MO**	Efendim?
210	OG-12	n = k demedik mi, o zaman?
211	OG-6	2^2 demiş, yanlış yazmış OG–8, 3^2 olacak.
212	**MO**	Evet, tek sayıların karesi olacak.
213	OG-13	Hocam OG–12 farklı bir şey söyledi.
214	**MO**	Söyle.
215	OG-12	Hocam n = k demedik mi? O zaman son terim $(2k-1)^2$ olmayacak mı?
216	**MO**	Haa şurası, orayı düzelt bak baştan yaz, [*OG-8’e*] düzgün yaz. [*5–6 saniye sonra*] 2k+1 mi yazdı, şuraya bir bakalım.
		th: $n=k$ için $1^2+3^2+\cdots+(2k-1)^2=\cdots$ $n=k+1$ için $1^2+3^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\cdots$ k+1 yazarsak 2k+1 mi oldu şurası tamam 2k+1 yazmışsın.
217	OG-8	Buralar doğru zaten.
218	**MO**	Tamam, onlar doğruydu.
219	OG-8	Öbür tarafa şunu yazdım, artı, bölü 3.
220	OG-7	Hocam k+2 için demeyecek mi?
221	**MO**	Efendim?
222	OG-7	n= k+2 için demeyecek mi? $1^2, 3^2, 5^2, k^2, (k+2)^2$
223	**MO**	Bizim tümevarımımız neydi, n=1 için doğru, doğruluğunu göstereceğiz, n=k için n yerine k yazıp doğru kabul edeceğiz.
224	OG-7	Niye hocam biri tek oluyor diğeri çift, atıyorum mesela k=10 ise.
225	**MO**	Nasıl oluyor ya, bir daha iyi bak lütfen.
226	OG-9	Ya oğlum k+1 için 4k+1 olmayacak mı?
227	**MO**	Sonuçta sen yerine koyduğunda geliyor bak oraya.
228	OG-8	2’yi koyduğunda 3 ediyor, 3’ü koyduğunda 5 ediyor.
229	**MO**	Bu şekilde doğru değil mi? Payda eşitle bu tarafta, sol taraftan devam ediyorsun sağ tarafa dokunmuyorsun.
		th: $\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+(2k+1)^2=\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$
230	OG-8	Ona dokunmayacağım da düşünüyorum nasıl.
231	**MO**	Payda eşitle 2k+1 parantezine al.

EK-6
Transkript Metni

232	OG-8	[*Bazı işlemler yapıyor.*] Onu da buraya alayım.
233	**MO**	Sonra orada toplama yap tekrar çarpanlarına ayır bakalım.
234	OG-8	2k+1, $2k^2 + 5k + 3$ bölü 3.
235	**MO**	5k+3' lü kısmı çarpanlarına ayır bakalım.
236	OG-8	(2k+1)(2k+3)(k+1) bölü 3, eşittir deyip bunu da yazayım mı?
237	**MO**	Evet, eşit olduğunu görelim.
		(th: $\frac{(2k+1)(2k+3)(k+1)}{3} \overset{\surd}{=} \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$)
238	OG-8	Şunu da yapayım (√) sağlandığına dair.
239	**MO**	∀n∈ N^+için $3^{2n} - 1$ sayısının 8 ile bölündüğünü tümevarımla gösteriniz.
240	OG-11	Tümevarımla değil direk gösterelim.
241	**MO**	Hayır, tümevarımla gösteriniz. [*Aynı anda tahtaya yazıyor.*]
242	OG-12	9 ise eğer o da.
243	OG-11	Yani 9 mod 8 de 1' dir, 1-1.
244	**MO**	Hayır, tümevarımla istiyorum, tümevarımla istiyoruz beyler [*10–12 saniye sonra*] ne yapıyoruz? n sayma sayısı olduğu için,
245	OG-11	Hocam biz yapalım.
246	**MO**	Hadi siz yapın.
247	OG-11	Hocam bir şey söyleyebilir miyim?
248	**MO**	Söyle.
249	OG-11	Şimdi biz k için doğru olduğunu kabul ediyoruz ya, kabul etmemize gerek yok, k için doğru her zaman.
250	**MO**	Kabul edeceğiz.
251	OG-11	Kesin doğrudur ki k için.
252	**MO**	1) n=1 için doğruluğunu göstereceğiz [*Yazıyor.*]
253	OG-12	[*OG-11'e*] iyi de bilmiyoruz ki kabul ediyoruz.
254	**MO**	$3^2 - 1 = 8$ bu da 8'e tam bölünür, bir tam sayıdır doğruluğunu gösterdik.
255	OG-11	Tamam, o doğru.
256	**MO**	n=k için $3^{2k} - 1$ 'in 8'e bölündüğünü kabul ediyoruz, 8' e bölünüyor A gibi bir pozitif tamsayı çıkıyor, yani bunun anlamı nedir?
257	OG-7	Yapayım mı?
		(th: 1) $n = 1 \quad 3^2 - 1 = \frac{8}{8} = 1 \in Z^+$ 2) $n = k \quad \frac{3^{2\,k} - 1}{8} = A \in Z^+ \longrightarrow$)
258	**MO**	$3^{2k} - 1 = 8.$A şeklinde, bunun içinde [$3^{2k} - 1$ *i kastediyor*] bir 8 çarpanı var ki 8'e tam bölünüyor. Yani bölünsün bakın kabul ettik, yani $3^{2k} - 1$'in bir a sayısının 8 katı olduğunu gösterdik. Şimdi ondan sonra, ben önce yazayım siz ispatlayın bakalım. n= k+1 için $3^{2k+2} - 1$'in ben ne ile bölündüğünü göstereceğim?
259	B-OG	8'e.
260	**MO**	8'e bölündüğünü gösterelim.
261	OG-11	Söyleyeyim mi hocam nasıl yaptığımı?
262	**MO**	[*Bazı öğrenciler de fikirlerini söylüyor ve birbirlerine ("hocam ben daha farklı yaptım", "B mi diyeceksin") yanıt veriyor.*] Bakın sizin buradaki düşünceniz şey, $3^{2k+2} - 1$ ' in içinde bir 8 çarpanı olduğunu, bir sayının 8 katı olduğunu göstermektir [*göstermek olmalıdır anlamında*].

EK-6
Transkript Metni

		Evet, OG–12.
263	OG-12	[*Tahtaya kalkıyor.*] Buna [$3^{2k+2}-1$ *i gös.*] bölü 8 eşittir B diyelim.
264	**MO**	Güzel düşünce.
265	OG-12	$3^{2k+2}-1=8.B$
266	**MO**	Modla çözmüyoruz beyler.
267	OG-12	$3^{2k}-1=8.A$
268	**MO**	Bir tarafı kullanıp diğer tarafı elde edeceksin.
269	OG-12	Şimdi şu bilgiyi,
270	**MO**	Bu tarafta düzenle, o bilgiyi kullanacaksın [*tahtanın boş kısmında yapmasını istiyor.*] düzenle, yerine koy.
		th: 3^{2k+1}-1=8B ☆ $\Longrightarrow$ 9.3^{2k}-1 = 8B 3^{2k}-1=8A Peki, şunu şu tarafa atsan da 3^{2k} yerine değerini yazsan nasıl olur? Daha kolay gelmez mi?
271	OG-12	Hocam taraf tarafa çıkartayım.
272	**MO**	Tamam, çıkar, o da güzelmiş [*2 saniye*] ama bak sen taraf tarafa çıkarırsan☆ bunu da kullanırsın.
273	OG-12	Tamam, ama 8(B-A) olduğu için.
274	**MO**	Ama sen işte bunu ne yazdın? B olsun, B olduğunu göstereceksin sen daha, B olduğunu kabul ediyorsun, B olduğunu göstereceksin. O zaman sen burada ne yapacaksın, bunu bu tarafa at ya [*-1'i 8A yanına*]
275	OG-12	$3^{2k}=8A+1$ dir.
276	**MO**	Yerine koy şurada (☆)
277	OG-12	9.(8A+1)-1= 8B 72A+9-1= 8B 8(9A+1)= 8B $\underbrace{9A+}_{Z^+}1=\underbrace{B\;}_{Z^+}$
278	**MO**	Dinle bakalım [*sınıfa*], biz burada B olduğunu göstereceğiz ya,
279	OG-11	Hocam bunun 2. yolunu göstereyim mi?
280	**MO**	Bekle. [*OG-11'e*] Şöyle düşünüyoruz! n=k için doğru olsun, yani $3^{2k}-1$, 8'in katı bir sayı olduğunu kabul ettik. Buradan n yerine k+1 yazdık, $3^{2\,k\,+\,2}-$ 1'in 8'e bölündüğünü göstereceğiz. O halde şu kısmı anladık [$3^{2\,k\,+\,2}-1=8B$]. Şimdi şuradan da doğru olarak kabul ettiğimiz ifadeyi aldı arkadaşınız. Buradan $3^{2\,k}=8A+1$ olduğunu bulduk, bunu burada getirdik yerine yazdık, gördüğünüz gibi 3 üzeri 2k+2, eksi 1 sayısının 8'in katı olduğunu gördük, yani B=9A+1, her halükarda bu bir [*9A+1 i kastediyor*] tamsayıdır, yani bu ifade daima 8'e bölünür.
281	OG-11	Göstereyim mi?
282	**MO**	Göster, [*bakıyor*] modlu düşünmeyeceksin ama peki, arkadaşınız modlu bir ispat yapmış.
283	OG-11	n=1 için $3^2-1\equiv 0\ (m\ o\ \ 8)$ sağlıyor.
284	**MO**	Sağlıyor, evet.
285	OG-11	n=k için, bu soru aslında biraz saçma, tümevarımla çözülmez, göstereceğim. n=k için $3^{2k}-1\equiv 0\ (m\ o\ \ 8)$ biz bunu normalde tümevarım ile soru çözerken kabul ediyoruz değil mi?

		Kabul etmemize gerek yok bu her zaman doğrudur, neden? $(3^2)^k - 1$ bu $9^k - 1$ dir. 9^k mod 8'de 1^k'dır o da 1'dir. 1 eksi 1, 0'dır.
		th: $n = 1$ için $3^2 - 1 \equiv 0\ (mod\ 8)$ $n = k$ için $3^{2k} - 1 \equiv 0\ (mod\ 8)$ $\underbrace{\underbrace{\underbrace{(3^2)^k}_{9^k}}_{1^k}} - 1$ 1-1 ≡ 0
286	**MO**	Çürütelim biz onu, şöyle tümevarımla ispat yapımı 3 aşamadan oluşur.
287	OG-11	Çürütelim. [*mi?*]
288	**MO**	Biz onu adım adım gösteriyoruz.
289	OG-11	Ama biz onu kabul ediyoruz.
290	**MO**	Biz onu kabul ederek hiçbir şey yapmadan…
291	OG-11	Ama kabul etmemize gerek yok, öyledir zaten.
292	**MO**	Zaten sağladığı için bu böyledir [*OG–11 in yaklaşımını kastediyor*] diyoruz, ilkeleri adım adım uyguluyoruz, hadi devam et.
293	OG-11	Neyse, n=k+1 için biz göstereceğiz şu ( ) olsun. Zaten oluyor. $3^{2k+2} - 1 \overset{?}{\equiv} 0\ \ (mod\ \ 8)$ $9.3^{2k} - 1 \equiv 0$
294	OG-3	Bizim yaptığımız.
295	**MO**	Aynı şeyi göstermiyor musun?
296	OG-11	Ama benim göstermek istediğim bu. [*n=k için olan kısımdaki iddiası*] Bunu her zaman sağlıyor, [$\underbrace{9}_{1}.\underbrace{3^{2k}}_{1} - 1 \ \equiv 0$] şu 1, şu da 1, $1 - 1 \equiv 0$
297	**MO**	Ee ne olmuş, bitti. Ben tümevarımla ispat istiyorum.
298	OG-7	Bu da tümevarımla ispat oluyor ki hocam.
299	**MO**	Hayır, siz bir tarafı hep sıfır kabul ediyorsunuz, oysa tümevarım üç aşamalı bir ispat yöntemidir. Bunun için 1 olarak göstereceğiz, bunun için k doğru olarak kabul edeceğiz k+1 için sol tarafta ikincisinde doğru kabul ettiğini kullanıp üçüncüsünün doğru olduğunu göstermenin ispatıdır.
300	OG-13	Hocam orada da öyle ama o tarafı kullandı.
301	**MO**	Sen öbür tarafın tam göründüğünü kabul edip, A gibi bir reel sayı olarak ya da A gibi bir tamsayı olarak değil sıfır tamsayısı olarak kabul edip ona göre işlem yapıyorsun, oysa onu herhangi bir A sayısı olarak kabul ediyoruz. Yani bir şeyi öğrendiğinizde bir başka şeyi de o açıdan bakarak çözme mantığını geliştirmeniz lazım.
302	OG-11	Ama OG–12' nin yaptığı da doğru.
303	**MO**	OG–12 tabi, o tam tümevarım şekliyle çözdü.
304	**MO**	Bir tane daha yapalım, $\forall n \in N$ için $12^n + 10$ sayısının 11 ile bölündüğünü tümevarım ile gösteriniz.
305	OG-12	OG–11 gene aynı şey.
306	**MO**	Altını çiziyorum [*tümevarım kelimesinin altını çizdi*] gösteriniz.
307	OG-5	Hocam tümevarımla gösterilecek tabi ki çok şey var ama bunları da tümevarımla göstermenin manası yok ki!
308	**MO**	Tümevarım ispatını yerleştiriyor, mantığını.
309	OG-5	Mesela güzel formüller gösterebiliyoruz tümevarımla.
310	**MO**	Tamam, bak şimdi daha başka formüllerde yazacağım. Yani bir şeyi bir yoldan izleyip hep aynı şeyi kullanmayın, mantığınızı

		başka açıdan da geliştirmeniz lazım.
311	OG-2	OG–11 bu olmaz galiba. [*senin yönteminle*]
312	OG-11	Oluyor, 12 ne 11+1 ya 1^n [*1–2 kişi de olur diyor.*]
313	**MO**	Tümevarımla gösteriyorsunuz.
314	OG-3	Ben yapayım mı bunu?
315	**MO**	Hadi yap.
316	OG-3	n=1 için 12+10
317	**MO**	Şimdi bakalım bir dakika, bir dakika n ne; bir yerde bir şeyimiz var şuraya bir bakalım. Bak n nerden başlıyor doğal sayılardan, doğal sayılar nerden başlar sıfırdan, sıfırdan başlıyorsun.
318	OG-5	Yaa ne olacak ki!
319	**MO**	Tümevarımda bu böyle, verilen kümeye göre başlayacaksınız.
320	OG-3	$n = 0\ i\c{c}i\imath \rightarrow \frac{1+1\ (}{1\ 1} = 1$
321	OG-8	n = 0 için mi? [*Şaşırıyor.*]
322	**MO**	Tabi sayma sayıları vermedim, doğal sayıları verdim.
323	OG-8	Haaa, doğru.
324	OG-6	Ben 1 ile yaptım 1 ile olmaz mı?
325	**MO**	Ama kümenin ilk elemanından başlıyoruz, öyle anlatmadık mı?
326	**MO**	[*tahtadaki bitince*] Evet, bölündü yani şunun 11’in katı olduğunu gösterdin.
		th: $n = k\ i\c{c}i\imath\ \frac{1\ ?^{k}+1\ (}{1\ 1} = \mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad 12^k = 11.\mathrm{A} - 10$ $n = k + 1\ i\ \c{c}i\ n\ \frac{12.12^k + 10}{11} = \frac{12(11.\mathrm{A} - 10) + 10}{11}$ $= \frac{132.\mathrm{A} - 110}{11} = 12\mathrm{A} - 11$
327	**MO**	$\forall n \in N^+\ i\c{c}i\imath\ P(n)\colon \overbrace{n! \leq n^{n-1}}^{\#}$ olduğunu tümevarımla gösteriniz.
328	OG-9	Negatif doğal sayı var mı? [N^+ *yazıldığı için.*]
329	**MO**	Hayır, pozitif doğal sayılar bak, sayma sayıları yani şu kısmı # tümevarımla gösteriniz.
330	OG-9	Aaa, hocam eşitsizlik sormayın tümevarımla yaa!
331	**MO**	Yaa işte esas burada başlıyor yorumlar bakın.
332	OG-9	Hocam 2. ya da 3. yazılı da çıkmaz değil mi?
333	**MO**	Son yazılıda soracağım, evet şu soruya bakıyoruz hadi.
334	OG-11	Ben yaptım.
335	**MO**	Yapanlara bir bakalım. [*Defterine bakıyor.*] [*Öğrenci adım adım açıklıyor defterden hoca takip ediyor.*] Bak şimdi sen her iki tarafı birden kullanıyorsun. Neydi bir tarafı kullanıp diğer tarafı göstereceksin.
336	OG-7	Hocam ben yaptım, hocam.
337	OG-11	İkisini de sola alıp sıfır mı yapacağım?
338	**MO**	[*OG–7 nin defterindeki çözüme bakıyor ve açıklamalarını dinliyor sonuna gelince*] Biraz daha ilerlet sen. [*Tahtaya kaldırmıyor.*]
339	OG-7	Hocam oradan artık [*sonuç açık anlamında*] hocam!! Hocam bakar mısınız?
340	OG-5	Ben yaptım.
341	OG-11	Hocam hocam valla gösterdim, hocacım hiç sağı-solu kullanmadım.
342	**MO**	[*OG–11 hocanın yanına gelip defterinden gösteriyor.*] Bir dakika OG–11 artistlik yapmayalım lütfen. [*Öğrenci gösterip yerine dönüyor.*]
343	OG-7	Hocam bir bakar mısınız? [*Öğretmen gelip yeniden inceliyor.*]

344	**MO**	Orada eşit değil de küçük eşit yazmalısın.
345	OG-7	Fark eder mi?
346	**MO**	Eşit değil ki, onu neye göre yazdın?
347	OG-3	Şurası zaten bundan büyüktür, o yüzden bu da bundan büyüktür.
348	**MO**	Büyüktür şeklinde düşüneceğiz [*OG-3'e*] güzel düşündün bak güzeldi. $n = 1$ için $1! \leq 1^0,\ 1 \leq 1$ her zaman doğru mu? Geçiyorum. $n = k$ için $k! \leq k^k$ doğru olsun. $n = k + 1$ için $(k+1)! \leq (k+1)^k$ oldu. Bu ifadenin doğru olduğunu göstereceğiz, önce bir yazalım. Peki.
349	OG-12	İkinciyi k+1 ile çarpalım.
350	**MO**	Evet, çok güzel, amacımız burada tümevarımı kullanırken...
351	OG-5	Niçin ikinciyi k+1 ile çarpıyoruz?
352	**MO**	1 dakika, 1dakika bir tarafı kullanacaksın, biz neden n=k için doğru kabul ettik! Bunu kullanmak için tümevarımda. Ne yapacağız? Her iki tarafı $k!\,(k+1) \leq k^{n-1}(k+1)$ bunun her iki tarafını k+1 ile çarpacağız.
353	OG-4	İyi de biz ikinciyi kullanıyoruz.
354	**MO**	İkinciyi kullanacağız, doğru kabul ettiğimizi kullanmıyor muyuz tümevarımda, kullanıyoruz. Burası ne oldu bakın [k!(k+1)].(k+1)! oldu ≤ bunu da açarsak bakın, $[k^{k-1}.(k+1)] \ldots \leq \overbrace{k^k + k^{k-1}}^{☆}$ mi oldu! Peki, şimdi OG–3 ün dediği yorumu yapabilir miyiz? Yapabiliriz. Şu ifade [☆] neden küçüktür sizce? Bakın ≤ (k+1)' in k. kuvvetinden küçük değil midir? th: $(k+1)! \leq k^k + k^{k-1} \leq (k+1)^k$ Bunu açtığımızda bakın burada k+1 tane terim vardır. k+1 tane terimin 2 tanesi bu değil midir? O halde bakın A, B den; B de C den küçükse buradan biz ne yazabiliriz? $(k+1)! \leq (k+1)^k$ her zaman için yazabiliyoruz. Ne yapıyoruz biz tümevarım prensibinde doğru kabul ettiğimiz şeyi kullanıyoruz, biz bunu nasıl kullanıyoruz [*2. adımı gös.*]? Ya bunu olduğu gibi yazıp her iki tarafı çarpıyorduk, ya da bunun baş kısmını açıyorduk öyle kullanıyorduk ikisi de doğru diyorduk. Anladık. [*mı?*]
355	B-OG	Evet.
356	**MO**	Yani sen [*OG-11'e*] orada ikisini birden kullanıyorsun bir doğruluk gösteriyorsun ama tümevarımı kullanmıyorsun, tam tümevarım şeklinde düşünmüyorsun. Anladık mı bunu?

10-37		30 NİSAN-Çrş (Mat-1) TES-2 ve DS-10
1	**MO**	İspat yapma yöntemleri nelerdir?
2	OG-11	Bir tarafı kabul edip öbür tarafı elde ediyoruz.
3	OG-2	Tümevarım.
4	OG-8	Doğrudan ispat var, dolaylı ispat var öyle ikiye ayrılıyor.
5	OG-11	Evet.
6	OG-8	Olmayana ergi ile ispat vardı.
7	**MO**	Bir daha söyle.
8	OG-8	Aksine yöntemi ile ispat vardı.
9	**MO**	Aksine yöntemi [*onaylama anlamında*] bakın gayet güzel, OG–11' in dediği gibi sol tarafı kullanıp sağ tarafı elde etme.
10	OG-11	Ya da sağ tarafı kullanıp.
11	**MO**	Sol tarafı elde etmede ispat yöntemleri neydi OG–8 bir söyleyelim bakalım.
12	OG-8	İkiye ayrılıyordu, aksine ispat, bir de doğrudan ispat diye.
13	OG-2	Aksine ispat sağlama mıydı hocam?
14	OG-8	Doğrudan ispatlar ayrılıyordu bir de, yok olmayana ergi ile ispat vardı, ondan sonra aksine örnek vererek ispat vardı başka.
15	**MO**	Bir şey söylemişti OG–2.
16	OG-2	Aksine ispat sağlama gibi mi?
17	**MO**	Aksine ispat sağlama gibi değil, tam tersi bir örnek verip doğruluğunu gösteriyorsun.
18	OG-11	Ama yanlışlığı da olabilir.
19	**MO**	Ya da yanlışlığını gösteriyorsun, peki başka, biz tümevarımla ispat yapıyor muyduk?
20	OG-11	Tümevarımla da olur da, bir şey söyleyebilir miyim?
21	**MO**	Söyle.
22	OG-11	Mesela olmadığını yani her x, o x' in dışında hiçbir değerin sağlamadığını, kesin olarak sağlamadığını gösterirsek bu da ispat olur değil mi? Tam tersinin kesin olduğunu.
23	OG-7	Yanlışlığını yani diyor.
24	**MO**	Olabilir niye olmasın.
25	OG-11	Ama olmayabilir, bütün x' ler sağlamayabilir.
26	**MO**	Sağlamayabilir, peki başka, var mı başka?
27	OG-11	Tümevarımla yapabiliriz.
28	**MO**	Evet, tümevarımı bu sene kullanıyoruz.
29	OG-2	Tümdengelim [*OG–7 de söylüyor aynı anda.*]
30	**MO**	Tümdengelim nedir?
31	OG-6	Genelden özele.
32	**MO**	Nasıl? Bir örnek verin.
33	OG-5	Tümden işte, geriye doğru.
34	OG-3	Yani bir şeyi kabul edip özele iniyoruz.
35	OG-7	Şöyle bir şey olabilir mi? Mesela biz tümevarımla şeyi ispatlıyorduk ya?
36	**MO**	Neyi?
37	OG-7	Mesela 1^2+2^2+3^2+… öyle gidiyor ya mesela bunun işte $n.(n+1).(2n+1)/6$ olduğunu söylemiştik.
38	**MO**	Hı hı.
39	OG-7	Mesela $n.(n+1).(2n+1)/6$ neyi, neyi verir bize diye gidip oradan 1^2+2^2+… falan diye.
40	**MO**	Bulabilir miyiz?
41	OG-8	Şey diye görmüştük felsefede.
42	**MO**	Ne diye görmüştünüz?

43	OG-8	11-Fen çalışkandır. OG–1 11-Fen' in öğrencisidir, o zaman OG–1 çalışkandır, bunu tümdengelim olarak gördük.
44	**MO**	Gördünüz, felsefede görüyorsunuz ispatları. Peki, ispatı kim ya da kimler yapabilir?
45	OG-7	Herkes yapabilir. [*Sonra 1–2 kişi daha söylüyor*.]
46	**MO**	1 dakika, herkes diye değil.
47	OG-11	Bilim adamları.
48	OG-5	Matematik hakkında uzman olanlar.
49	OG-7	Bir eğitim alıp bu konuyu sindirebilen insanlar.
50	**MO**	Bunları bir isimlendirelim, kimler olabilir?
51	OG-3	Öğrenciler.
52	**MO**	Arkadaşınız öğrenciler dedi.
53	OG-7	Ama her öğrenci değil, yalnızca Fen Lisesi öğrencileri.
54	**MO**	Niye Anadolu Lisesi'nde de ispat yapılmıyor mu yani? Peki, OG–1 sen söyle bakalım, başka kimler yapabilir?
55	OG-1	Öğretmenler yapabilir.
56	**MO**	Öğretmenler, başka?
57	OG-11	Bilim adamları.
58	OG-5	Profesörler.
59	OG-2	Doçentler, profesörler.
60	**MO**	Peki, bir teoremin kaç tane ispatı olabilir?
61	B-OG	n tane, x tane. [*OG–3: n≥O mı?*]
62	**MO**	Sizce bir teorem verdiğimiz zaman birden fazla ispat yapabilir miyiz?
63	OG-3	Ya ispatlanamaz, ya bir tane ispatı olur, ya da birden çok olabilir.
64	OG-11	Bu şunun gibi ya bir tane üçgen çizilebilir, ya sonsuz üçgen çizilebilir, ya da hiç üçgen çizilemez.
65	OG-7	O teoremine göre değişir.
66	**MO**	Teoremine göre değişir, güzel. Peki, en önemli soruya geldik, ispat sizin için ne kadar önemlidir?
67	**MO**	OG–8 söylesin bakalım.
68	OG-8	Özellikle benim için çok önemli, en azından bir Fen Lisesi öğrencisi için önemli, ya ispat bir şeyin kanıtıdır yani, onun doğru olduğuna bir dayanaktır; ben bir şey söylerim, ispatını yapmadıkça doğrudur ya da yanlıştır karşımdakine açıklayamam doğrudur ya da yanlış olduğunu.
69	**MO**	Peki, ispatladığınız bir şeyi problemlerde daha hızlı… [*2–3 saniye bekliyor*.]
70	B-OG	Çözebiliyoruz.
71	**MO**	Kullanabiliyoruz.
72	OG-7	Kısa bir yoldan yapabiliyoruz.
73	**MO**	Başka, ispat sizler için ne kadar önemli bir şeydir derken benim için hiç önemli değildir diyen olur mu içinizde? Mesela Fen Lisesi öğrencisi olarak, olmasa da olur diyen!
74	OG-13	Fen Liselerinde olabilir ama bu sınıfta olmaz.
75	**MO**	Neden bu sınıfta olmaz?
76	OG-5	Hocam hayatta önemli olmayabilir ama burada önemli.
77	**MO**	Niye hayatta önemi olmayacak, belki gerçek hayatta karşılaştığın problemlere sorgulayıcı bakmayı öğreneceksin.
78	OG-5	Bakkala gidince.
79	OG-7	Arkadaşım ispatı yapmadıkça onun öyle olduğunu anlayabilir misin?
80	**MO**	İspatın size kazandırdığı bir şey şu olamaz mı, yani hayatta karşılaştığın şeylere sorgulayıcı yaklaşmaz mısın?
81	OG-11	Dediğiniz gibi sorgulama, araştırma, yeni yeni şeyler bulma şeyini arttırır.

82	OG-7	Soyut zekâmızı geliştirir.	
83	**MO**	OG–5 için hayatta karşılaşırsa	
84	OG-5	Büyük bir sürpriz olacak.	
85	**MO**	Peki, OG–4 için, OG–4 senin için,	
86	OG-4	Ben mühendis olacağım ya, mesela sıfırdan bir projede bir şeyleri kendi kendime ispatlamam lazım olabilir mesela, ispatta kullandığım şeyleri orada da kullanabilirim, bakış açısını.	
87	**MO**	Tabi, yani bir şey üretirken de doğru, makine mühendisi olacak OG–4 bir parça üretirken o parçayı nerede kullanacağını, nasıl kullanacağını belli bir teoriye oturtması lazım değil mi? Peki, başka mühendis olacaklar vardı!	
88	**MO**	[*OG–2 elini kaldırıyor.*] Evet, OG–2.	
89	OG-2	Ben de, işim gereği kullanırım.	
90	OG-5	Ben de hocam bilgisayarı kazanırsam matematikle uğraşacağım yani.	
91	**MO**	Tabi bilgisayar mühendisliği matematik, yani baya bir yüzdesi.	
92	**MO**	Bu günlük tartışmamız bu kadar, şimdi toplam, çarpım sembolü ile ilgili soru çözüyorduk, devam edelim. 1.2+2.3+3.4+…+n.(n+1)=$n.(n+1).(n+2)/3$ olduğunu göstermiş miydik?	**DS-10**
93	B-OG	Evet, gösterdik.	
94	**MO**	Gösterdik mi, o zaman bunu kullanarak şunu istiyorum; Olduğuna göre (n+1).(n+2)+(n+2).(n+3)+…+(2n-1).2n in sonucu kaçtır? Öbürünü kullanıp bunun sonucunu bulacaksınız.	
95	OG-11	Bunu toplam sembolü ile gösteremez miyiz?	
96	**MO**	Gösterirsin.	
97	OG-7	Ben bir şey söyleyeyim ama olur mu bilmiyorum, söyleyeyim mi?	
98	**MO**	Söyle.	
99	OG-7	$(2n-1).2n.(2n+1)/3$ mü?	
100	B-OG	Hayır.	
101	**MO**	Hayır, 1'den başlaman lazım onu söylemen için.	
102	OG-7	Onu buna bölsek hocam.	
103	**MO**	Şimdi dedi ki OG–7 bunu, şuradan genelleyiverdi ama burada kural 1.2+2.3 den başlıyor, (n+1).(n+2) diye devam ettireceksiniz.	
104	OG-7	Çıkaracağız, çıkaracağız.	
105	**MO**	Evet, hadi.	
106	OG-6	n^2+n i çıkarmayacak mıyız?	
107	**MO**	1' den başlayarak yazın gösterin bakalım hadi,	
108	OG-5	Uzun oluyor.	
109	**MO**	Hayır, hiçte uzun değil, bunu nasıl yazarsınız? Şuradan bakın, * (1.2+2.3+3.4+…+n.(n+1)+(n+1).(n+2)+(n+2).(n+3)+…+(2n-1).2n 'i nasıl yazarsınız?	
110	OG-9	$(2n-1).2n.(2n+1)/3$ diye yazarım	
111	**MO**	Evet, onu yazdıktan sonra şurası belli bakın, çıkaracaksınız bunun eşitini yazabilirsiniz.	
112	OG-7	Hocam 1 dakika bulacağım şimdi.	
113	**MO**	Tamam, burayı siz yazacaksınız bakın, ben yazmıyorum, o zaten verilmiş. [*Sıraların yanında dolaşıyor, defterlere göz atıyor usulca.*] Şimdi ortak çarpan parantezine al, açmadan önce ortak çarpan parantezine alıyorsun. [*OG-7'ye söylüyor*]	
114	OG-7	$7n^3-3n^2-4n/3$	

115	**MO**	Evet, çok güzel onu da n parantezine alıp çarpanlarına ayır, hadi.
116	OG-7	[*Tahtaya kalkıyor.*] bunun (*) eşiti şudur; = $(2n-1).2n.(2n+1)/3$ - $n.(n+1).(n+2)/3$ eşiti bu
117	**MO**	Bunun işlemlerini hesapladı arkadaşınız, ne buldun onu yaz. [*3-4 sn sonra*] n parantezine al onu, öbürünü de çarpanlarına ayır bakalım.
118	OG-7	$7n^3-3n^2-4n/3$
		th: $\frac{7n^3-3n^2-4n}{3}=\frac{n.(7n^2-3n-4)}{3}=\frac{n((7n+4).(n-1))}{3}$ 7n 4 n 1
119	**MO**	Bunu anladık değil mi çocuklar?
120	B-OG	Evet.
121	**MO**	n doğal sayı olmak üzere, $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2$ [**] toplamının değeri nedir? [*Tahtaya yazdı.*] [*13–15 saniye bekliyor.*] Burada bir ufak yol göstereyim mi size?
122	B-OG	Hayır.
123	**MO**	Hayır dediler.
124	OG-8	Ya 1' den n' e kadar olanı çıkartacaksın işte n.(n+1).(2n+1) bölü 6 formülünü kullanarak
125	**MO**	Hı hı, güzel düşündün OG–8 aferin [*8–10 saniye*] gene bunu (**) direk, toplam biçiminde nasıl yazarsınız? Toplam biçiminde yazıp bu ifadeyi verecek toplamı yazabilirsiniz, oradan işlem yapabilirsiniz. [*8–10 saniye*] n' den başlayıp 2n'e kadar gidebilirsiniz.
126	OG-11	n' den başlıyor ama 1 den başlamıyor ki!
127	**MO**	Tamam, olsun onu sonra ele alabilirsin.
128	OG-11	Ben öbürünü daha çok sevdim. [*arkadaşının defterinde yazanı*]
129	**MO**	Tamam, öyle de düşünebilirsin, ben size kısıtlama getirmiyorum nasıl isterseniz öyle düşünün.
130	OG-3	$14n^3+15n^2+n/6$
131	**MO**	Çarpanlarına ayır onu, bakalım ne çıkacak.
132	OG-3	$n.(14n+1).(n+1)/6$
133	**MO**	Evet, hadi gel.
		th: $\underbrace{\underbrace{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}_{\text{n-1 tane } \frac{(n-1)(n).(2n-1)}{6}}+n^2+(n+1)^2+\ldots+(2n)^2}_{\frac{(2n).(2n+1).(4n+1)}{6}}$ $\frac{(4n^2+2n).(4n+1)-(n^2-n)(2n-1)}{6}=\frac{16n^3+12n^2+2n-2n^3+3n^2-n}{6}$ $=\frac{n.(14n^2+15n+1)}{6}=\frac{n.(n+1).(14n+1)}{6}$
134	**MO**	Evet, güzel, bir tane daha yazalım.
135	**MO**	$\sum_{k=1}^{n} k.k!$ =(n+1)!-1 olduğunu gösteriniz. Tümevarımla istemiyorum yalnız, tümevarım gösterebilirsiniz ama tümevarımla değil toplam sembolünü kullanarak göstermenizi istiyorum.
136	OG-11	Mod da kullanmayalım.
137	**MO**	Evet, mod da kullanmayın, onun ne işi var şimdi.
138	OG-8	[*18–20 saniye*] Yapayım mı hocam?
139	**MO**	Bir [*defterine*] bakayım, … [*baktıktan sonra*] olmaz.
140	**MO**	Ben bir tane bir yere bir noktaya yardım edeyim siz ondan sonrasını götürün.

		$\sum_{k=1}^{n}(k+1-1).k!$ yazayım. k+1' i bir düşünün 1'i de ayrı düşünün dağıtın k!' li ondan sonra bakın bakalım.
141	B-OG	Haa.
142	**MO**	Yani orada +1, -1 ekleyince sonuç değişir mi! k! İle (k+1) i çarp, sonra -1' i çarp, toplamın çıkarma üzerine dağılımını yaz, götürecek onlar birbirini.
143	OG-11	Başka türlü yapılmaz mı hocam?
144	**MO**	Tümevarımla ispat yapılır.
145	OG-11	Hayır, hayır yine bu şekilde gideceğiz ama
146	**MO**	Onu sen düşüneceksin, ben böyle düşündüm, sen de düşündüğünü ispatlayabiliyorsan kutlarım o zaman seni. [*OG–12 yaptıklarını gösteriyor, MO onaylıyor, OG–12 tahtaya kalkıyor.*] OG–5 sohbet etmek yerine şununla [*soruyu*] ilgilen, bir şey yok deme bir şey var.
		(th: $\sum_{k=1}^{n}(k+1-1).k!$= (k+1)!-k!) [*OG–12 tahtaya yazar yazmaz hemen yanına gidiyor ve bölüyor.*]
147	**MO**	Tamam, o (k+1)! ve k! doğru ama başındaki $\sum$ nerede? [*OG–12, $\sum$' yı yerine yazıyor.*] Şimdi dağıt bu toplamı, toplamı dağıt önce ikisine, … artı, … ,artı
148	OG-12	Hatta paranteze alsak daha iyi olur.
149	**MO**	Evet, onu söylemiştim bende sana [*defterine bakarken*] zaten.
		(th: $\sum(k+1)!-k!$= (2!+3!+…+n!+(n+1)!-(1!+2!+…+n!)) = (n+1)!-1! Şimdi şuraya bir bakın bakalım çocuklar, bunu anladık mı?
150	B-OG	Evet.
151	**MO**	k+1 ile k! ayırdık sonra teker teker yazdık, sadeleşti bakın sonuçta k, 1' den n' e kadar k.k! in (n+1)!-1 olduğunu göstermiş olduk. O zaman şöyle soruları kullanabilir miyiz? $\sum_{k=1}^{100}k.k!$ nedir dersem, bunu bakın (n+1)!-1 yani 101!-1 yazabilirsiniz bakın ispatladığınız bir şeyi kullanacaksınız.
152	OG-11	Hocam yazalım mı?
153	**MO**	Tabi yazın onu da uygulayın. [*8–10 saniye*] Tamam mı? Bakın bu eklediğimiz +1, -1' i başka soruda da kullanabiliriz.
154	OG-5	Başka soruda kullanmayalım artık.
155	**MO**	Kullanalım bakın tamamen değişik burada. [*Aynı anda tahtaya soruyu yazıyor.*]
156	**MO**	$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{99}{100!}$ toplamı neye eşittir? [*Kitaptan yazıyor.*] Bunu toplam biçiminde ifade edin önce, evet bunu toplam olarak yazıyorsunuz onun üzerinden sonucu bulacaksınız. [*10–15 saniye sınıfta başka konuşmalar oluyor.*] Şu verilen ifadeyi toplam biçiminde ifade edin önce, hadi! Toplamdan sonuca gidin.
157	OG--	Böyle mi oluyor?
158	**MO**	Bakayım, tamam, sen bunu n' e kadar yaz önce formülde sonra 99' a geç.
159	OG-4	Ben yaptım buraya kadar ama sonra ne yapacağız? [*Defterini gösteriyor.*]
160	**MO**	99 la düşünme bunu, k=1 den n' e kadar düşün, ondan sonra sen formülü buna uygula k+1-1 buradan…
161	**MO**	[*Sınıfa dönüyor.*] Burada 99' a kadar değil de bu toplamı 1' den n' e kadar düşünüp bir formül elde edip, elde ettiğiniz formülü ona uygulayın.
162	OG-7	$\frac{1}{98!}$ çarpı 100

163	**MO**	Yok. [*doğru yanıt değil*] Şimdi şunu anlatalım bakalım dinleyin. [*Tahtaya geçiyor.*] Bu formülü kullanabileceğim genel bir formül elde edelim. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ yazdık mı? Şimdi yukarıya [*paya*] bir +1, bir -1 ilave edeyim, ilave edebilir miyiz bunu!
164	B-OG	Evet, ederiz.
165	**MO**	Şimdi bunu $\frac{k+1}{(k+1)!}$-$\frac{1}{(k+1)!}$ yazabilirim, buda eşittir, sadeleştirirsem bunu.
		(th: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$) $\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$ oldu, şimdi bunu da şu şekilde yazayım, önce buradakileri yazayım sonra eksi deyip buradakileri yazayım. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$bunu açtım bakın. [$\frac{1}{k!}$‘ i *gösteriyor.*] eksi, şimdi burada yerine koyalım 1’ den itibaren $\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}$ yazarsam bakın şurası şöyle buraya kadar gitti. $\frac{1}{1!}$=1 dir. Burası 1-$\frac{1}{(n-1)!}$ olur mu? Demek ki biz şunu bulduk bakın $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ ‘ i n 1-$\frac{1}{(n-1)!}$ olduğunu bulduk.
		(th: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}=(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})$-$(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!})$= 1-$\frac{1}{(n+1)!}$) Bu formülü kullanıp neyi bulalım? $\sum_{k=1}^{9}\frac{k}{(k+1)!}$ ‘in değerini bulabilirsiniz. Bulun bakalım nedir, formülü kullanıyorsunuz bakın, ne yazıyoruz 1-$\frac{1}{10!}$ anladık?
166	OG-9	Bu kadar sormaz herhalde. [*Yazılıyı kastediyor.*] OG–5’ e
167	**MO**	1 ekleyip, 1 çıkartıyoruz.
168	OG-5	[*OG–9’ a*] umarım öyledir.
169	OG-4	Sınavda böyle gelmez herhalde. [*Hocaya iletiyor.*]
170	OG-7	[*OG–4’ e*] herhalde canım sınavımızda limit bile yok arkadaşım.
171	OG-8	Siz onları düşünmeyin de hocamız bizi seviyor bize bir kıyak yapacak [*sınıf gülüyor.*]
172	**MO**	Nasıl bir kıyak yapayım?
173	OG-7	Mesela 20 soru olabilir.
174	OG-13	20 soru olacak zaten oğlum.
175	OG--	25 olacak hali yok ya.
176	**MO**	20 mi istiyorsunuz?
177	OG-7	Evet, hocam mesela ÖSS’de çıkmış soruları sorabilirsiniz.
178	OG-3	Evet, güzel olur.
179	**MO**	ÖSS mi istiyorsunuz?
180	OG-5	Evet, ama öyle 50 sene önce çıkmış olanlardan değil.
181	OG-7	ÖYS‘ de çıkmış sorular değil de ÖSS sadece.
182	OG-13	Hocam limit soracak mısınız?
183	**MO**	Hayır, bu sınavda sormayacağım, limiti tekrarlayacağım ondan sonra.
		(th: $\sum_{k=1}^{9}\frac{3n+2}{n.(n+1).(n+2)}$= ? *MO yazdı.*)
184	**MO**	Evet, bu soru TÜBİTAK sorusu, ama basit kesirlerine ayırarak yapacaksınız, n de 1’ den 9’ a kadar zor bir soru değil ama.
185	OG-9	Yerine koyarak yapamaz mıyız?
186	**MO**	Evet, yapabilirsin ama uzun olur, basit kesirlerine ayırarak daha kolay olur.

EK-6
Transkript Metni

187	OG-8	n, n+1, n+1 artı 1 diye mi ayıralım?
188	**MO**	Neydi bu nasıl ayırıyorduk basit kesirlere? $A/_{n}$, $B/_{n+1}$ artı C bölü böyle ayırmıyor muyduk? Sonra payda eşitleyip n' e değerler vermiyor muyduk?
189	OG-7	$3n+2/_{n}$, $3n+2/_{n+1}$, $3n+2/_{n+2}$ şeklinde mi yapacağız?
190	**MO**	Hayır, ayırıyoruz.
191	OG-8	Haa, payda eşitliyoruz.
192	**MO**	Biraz uzun ama böyle yapınca kolay geliyor.
193	OG-11	Hocam bunun pratiği vardı, mesela $A/_{n}$ yazdık ya 1 saat şey yapmıyorduk, n yerine sıfır koyuyorduk oradan.
194	**MO**	Nasıl istiyorsanız öyle yapın serbest bırakıyorum ama basit kesirlerine ayıracaksınız.
195	OG-8	Sıfır verdim.
196	**MO**	Sıfır ver, sonra -1 ver, sonra -2 ver.
197	OG-8	A, 1 geliyor arkadaşlar.
198	OG-11	B de 1geliyor.
199	OG-8	C kaç geliyor? Onu da başka biri bulsun.
200	**MO**	A, 1 mi geldi? B de 1 doğru.
201	OG-11	Bir saniye C' yi biz bulalım.
202	OG-3	C, -2
203	**MO**	C, -2
204	OG-11	Bravo OG–3.
205	**MO**	Sonra yerine yazın onu.
206	OG-9	Ben hiç anlamıyorum bu konuyu hocam yaa.
207	**MO**	Neresini anlamadın OG–9.
208	OG-9	Hocam basit kesirlere ayırmayı anlamıyorum.
209	**MO**	Basit kesirlere ben ayırayım sen payda eşitle, bak $3n+2/n.(n+1).(n+2)$, sen [*OG-9'a*] lise 1 de görmedin mi basit kesirlere ayırmayı?
210	OG-9	Hayır.
211	**MO**	Neden?
212	OG-9	Göstermediler ondan.
213	**MO**	[*Tahtaya yazarken aynı anda açıklıyor.*] bunu (n+1).(n+2) ile çarptım, bunu, n.(n+2) ile çarptım, bunu n.(n+1) ile çarptım o zaman 3n+2 eşittir. A.(n+1).(n+2) artı B.n.(n+2), artı C.n.(n+1) bu basit kesirlere ayırmayı seneye integralde özellikle göreceksiniz bakın. Şimdi burada ne verebilirsiniz? Sıfır verebilirsiniz bakın, n' e -1 verip -2 verip A' yı, B' yi, C' yi bulacaksınız.
		th: $\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$ n= 0 (n+1).(n+2) n.(n+2) n.(n+1) n= -1 n= -2 3n +2=A.(n+1).(n+2)+B.n.(n+2)+C.n.(n+1)
214	**MO**	A' yı 1 buldunuz, B' yi 1, C' yi ne buldunuz -2, o zaman bakın şu toplamı nasıl yazacağız. $\sum_{n=1}^{9}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2})$ diye yazdınız buradan sonra değerler verebilirsiniz ya da şunu.
215	OG-11	Tek tek yazsak, hocam çözeyim mi? [*tahtada*] biraz önce yaptığımız yöntemle yazsak götürüyorlar birbirlerini.

216	**MO**	Tabi götürecekler artık birbirini, 1’ den 9’ a kadar açık yazabilirsiniz, hatta açık yazmayı şöyle de yapabilirsiniz. Bakın rahat götürsün diye. $\sum_{n=1}^{9}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\sum_{n=1}^{9}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ yazabilirsiniz. Birinciye değerler verip, ikinciye değerler verip çıkartabilirsiniz. İki tane olduğu için payı 1 olsun diye ayırıyorum, şimdi götürttünüz sonucunu bulun bakalım. Sonucunu bulacaksınız bunun. [*10–12 saniye*] haydi çocuklar buldunuz mu?
217	OG-11	$^{79}/_{110}$ mu?
218	**MO**	Hayır, $^{189}/_{110}$
219	OG-11	Aaa bir de 1 var, tamam.

11-38		30 NİSAN-Çrş (Mat-2) DS-11
1	**MO**	$\sum_{k=1}^{n} k!\,(k^2+k+1)$ toplamının değeri nedir?
2	OG-11	Hocam yine mi toplam sembolü?
3	OG-4	k–1 ile mi çarpacağız?
4	**MO**	Bilmem, hadi çocuklar.
5	OG-8	[*15–16 saniye*] Bence bir k ekleyip bir k çıkartalım.
6	**MO**	Çok güzel düşündün, şu araya, hadi düşündüğünü yap bakalım. Ne olur bir k ekleyip, çıkarırsak?
7	OG-9	k+1'in karesi.
8	**MO**	$\sum_{k=1}^{n} k!\,(k^2+k+k-k+1)$ ne oldu burası $(\mathrm{k}+1)^2-\mathrm{k}$ mı oldu? Bu şekilde mi geldi, şimdi k! ile çarpın bakın onu. Dağıtın k!'i, bunu yaparsak;
9	OG-4	Orası (k+1)!
10	**MO**	Evet, $\sum_{k=1}^{n}$ $\mathrm{OG-4}$ söyle bakayım.
11	OG-4	(k+1)!
12	**MO**	$\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+1)!$ gerisi $-$ k.k! olur mu şöyle; peki, buna değerler verin götürecektir bunu.
13	OG-7	Hocam formülü vardı.
14	**MO**	Şuraya ayrı değerler verin, şuraya da ayrı değerler verin götürtenlere bakın ne gelecek. th: $\sum_{k=1}^{n}[\underbrace{(k+1)(k+1)}_{\text{ע}}!-\underbrace{k\,.\,k}_{\text{ג}}!]$
15	**MO**	Bak çok güzel OG-8 orada yolu buldu.
16	OG-4	k! parantezine alınır mı?
17	**MO**	k! parantezine alma değerler verdiğinde gidecektir onlar, hiçbir işlem yapma, şuraya (ג) değerler verdik, 1 verdik burası işte 2.2! mi oldu, artı burası 2 verirsek 3.3! mi oldu,
18	OG-7	(n+1)! mi çıkıyor hocam?
19	**MO**	Hayır değil, başka.
20	OG-3	(n+1).(n+1)!
21	**MO**	Bir daha bir şey var. [*yanında anlamında*]
22	OG-7	Hocam bir bakar mısınız?
23	**MO**	Niye [*yani neden bir şey varsa açıklama anlamında*] şuraya n verirsem (n+1).(n+1)! eksi parantez açıyorum (1.1!+2.2!+…+n.n!) olunca şuradan bakın 2! olunca buradan bakın gitti. [*götürttü*] Siz neyi görmediniz, -1'i görmediniz. Buradan ne olur (n+1).(n+1)!-1 oldu bu sorunun cevabı. th: ~~2.2!+3.3!+…+n.(n!)+~~(n+1).(n+1!)-(1.1!+~~2.2!+…+n.n!~~) (n+1)(n+1)!-1
24	OG-7	Hocam bir bakabilir misiniz?

25	**MO**	Bakalım, bak bu sorunun yöntemini OG-8 buldu.
26	OG-7	Şuradan yapmayı düşündüm. [*Defterini gösterdi.*]
27	**MO**	Nereden yapmayı?
28	OG-7	Şuradan yapmayı düşündüm.
29	**MO**	[*8–10 saniye karşılıklı, yapılan üzerinde konuşuyorlar, MO kalemi alıp OG-7'nin defteri üzerinde işlem yaparak açıklıyor*]… buradan ne geldi, olmadı bir yerde hata yapmışsın, kontrol et; şurası da k.k! değil. Tamam mı çocuklar anladık mı?
30	**MO**	1.2003+2,2002+3,2001+…+2002,2+2003,1 sayısının kaç tane asal sayı böleni vardır?
31	OG-3	2003 yılında çıkmış bir olimpiyat sorusu.
32	**MO**	Evet, bu 2003 Tübitak sorusu kolay, toplamla yazacaksınız. Bu kolay bir soru zor değil, toplam biçiminde yazacaksınız bunu. O şekilde yazdığınızda zaten geliyor. Bakın bu soru da Tübitak sorusu ama hiç bir şey yok, bunu toplam biçiminde yazın, toplam sembolünü kullandığınızda çıkıyor hemen.
33	OG-8	1.n+2.(n-1)+
34	OG-9	Sus lütfen defterine yaz.
35	**MO**	Haydi, [*10–12 saniye*] 1. sayı bakın.
36	B-OG	Hocam 1 dakika, 1saniye hocam.
37	OG-3	n.2004-n diye yazdım.
38	**MO**	Evet, çok güzel, formülden [*Sonra dolaşırken OG-12'nin defterine bakıyor.*] tamam, güzel OG–12 bundan sonra beklenir mi yan*i şimdi.* [*Sonra kalemi eline alıp OG-12'nin defteri üzerinde yazarak anlatıyor.*]
39	OG-11	Hocam, hocam yapayım mı?
40	**MO**	Hadi gel. [*OG–11 tahtaya yazarken, MO bu sefer OG-8'in defterine bakıp takıldığı yerden yine kalemi alıp yazarak açıklamaya başlıyor.*] $\left(\text{th: } \sum_{k=1}^{2003} k\,(2004-k) = 2004 \sum_{k=1}^{2003} k - \sum_{k=1}^{2003} k^2 \right)$ [*tahtaya yazıldıktan sonra*] oradan formülleri yazalım.
41	OG-11	n.(n+1)/2, n (n+1) (2n–1)/6
42	**MO**	Hangisi, ikincisi 2n+1 olacak.
43	OG-11	-1 değil mi?
44	**MO**	Hayır, 2 katının 1 fazlası. $\left(th: \quad 2004.\frac{200.200}{2} - \frac{200.200.400}{6} \right)$ Şimdi burada önce ortak çarpan parantezine al.
45	OG-11	$\frac{200.200}{2}\left(2004 - \frac{400}{6}\right)$ doğru değil mi hocam?
46	**MO**	Doğru, şu şöyle yine sadeleştir önce. [*2 ile 2004'ü*]
47	OG-11	6002'den 4007'yi çıkaralım 2005, bu 3'e bölünür mü ya!
48	**MO**	Tamam, bölünmesin öyle yaz. $\left(th: \quad = 2003.1002.\frac{200}{3} \right)$ Hangisi 3'e bölünür bunlardan, böl bakalım.
49	OG-11	Buradan 334 gelir, 334.2003.2005 bunun kaç tane asal sayı böleni vardır diyor.
50	**MO**	Şimdi asal çarpanlarına ayıracaksın; 2005, 5'e bölünür o, 334 asal mıdır?
51	OG-11	1 dakika bilmiyoruz.

EK-6
Transkript Metni

52	OG-3	Değildir. 2 çarpı 167, 167 asal.
53	**MO**	Şuraya yaz 2.167
54	OG-11	167'ye bakalım; 14, 20'lerde bir şey olsa.
55	**MO**	Hayır.
56	OG-11	Bölünmez.
57	**MO**	2003, bak 2003 dursun şimdi 2005, 5'e bölünür.
58	OG-11	401.
59	**MO**	Evet, onu da yaz 401 çarpı 5, çarpı 2003. [th: 334.2003.2005 2.167.401.5.2003] Şimdi 2003 ile 401 asal mı kontrol et.
60	OG-11	Asal.
61	**MO**	Nereden bildin?
62	OG-11	Biliyorum bu olimpiyat sorusu, bunlardan çok çözdüm. [*Esprili olarak söylüyor.*]
63	OG-8	Kökünü al 2003'ün ona kadar [*kök değeri*] olan sayılara bölünüyor mu bak.
64	**MO**	Bak arkadaşın bir yol önerdi sana. [th: $\underbrace{2.\ 167.\ 401.\ 5.\ 2003}_{5}$ ▨ S.G]
65	OG-11	5'dir.
66	**MO**	Tamam mı? Arkadaşınız bir yol önermişti bakın, bir daha söyle OG–8.
67	OG-8	Asal olup olmadığını anlamak için önce sayının karekökünü alıyoruz, 1'den o kareköke kadar olan sayıları deniyoruz bölünebiliyor mu diye, eğer bölünemiyorsa o sayı asaldır.
68	OG-2	Geçen sene GO söylemişti.
69	**MO**	$\forall n \in N^{+}$ için $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n} = \cos n\theta + i\sin n\theta$ olduğunu tümevarımla gösteriniz.
70	OG-11	Evet, [*ifade*] doğru.
71	**MO**	Bunu ben karmaşık sayılarda göstermiştim, ama şimdi tümevarımla istiyorum, hadi. [*4–5 saniye*] Bunu karmaşık sayılarda kuvvet alırken biliyorduk bakın, hadi şimdi tümevarımla gösteriyorsunuz.
72	OG-7	OG–5 yapsın bunu.
73	OG-5	Önce yerimde yapayım.
74	OG-7	Direk tahtada yaparsın.
75	**MO**	Önce yerinde yapsın bakalım, biz bunu karmaşık sayılarda nasıl ispatlamıştık? Genelleyerek ispatlamıştık; 2.kuvveti, 3.kuvveti, 4.kuvveti diye alıp sonra genellemiştik değil mi ama şimdi tümevarımla istiyoruz.
76	OG-8	n=1 için
77	**MO**	n=1 için doğru olduğunu göstericeğiz, n=k için doğruluğunu kabul edeceğiz,
78	OG-11	Aaa bir dakika ya.
79	OG-3	Çok basit ki.
80	OG-11	Çok basit, tümevarımsız çıkıyor hem de.
81	**MO**	Tümevarımla istiyorum.
82	OG-11	n' le şey yapınca açıyı n ile çarpmış oluyoruz. 1.doğru zaten, bunu da kabul ettik bu da bunun üzeri k çarpı bunun üzeri 1' dir.
83	OG-5	CIS' ten çok kolay çıkıyor.
84	OG-11	Tamam, CIS' ten yapacağız zaten.

		Hocam bir şuna [*defterine*] bakar mısınız?
85	**MO**	Bakalım, taraf tarafa çarpmayacaksınız. [*OG-5‘e yönelik*]
86	OG-3	Her iki tarafını cos+sin ile çarpacağız.
87	**MO**	Hı hı, cos+sin ile çarpılacak.
88	OG-11	CIS^n dedin bunun n.kuvveti CISnα bunu da açtık mı zaten.
89	**MO**	Ya onun öyle olduğunu biliyorsun, tümevarımla göstereceğiz. Biz onun öyle olduğunu ispatladık, kullanıyoruz da karmaşık sayılarda, benim istediğim o değil ki bunun tümevarımla ispatı diyorum. Ne yapacağız? n=1 için doğruluğunu göstereceksen, n=k için doğru olduğunu kabul edeceksin, k+1 için doğru olduğunu göstereceksin.
90	OG-5	CIS yaptık mı çıkıyor onu biz de biliyoruz. [*OG-11’e*]
91	**MO**	CIS istemiyorum.
92	OG-8	Buradan bir yarım açı formülü falan kullanacağız herhalde.
93	**MO**	Hayır, hiç gerek yok.
94	OG-8	O zaman çarpımın toplamı, toplamın çarpımı.
95	**MO**	[*Defterine bakıyor OG-8’in.*] Tamam, oraya kadar yapmışsın doğru, n yerine k+1 koydun mu sen buraya?
96	OG-8	k+1 geldiğinde,
97	**MO**	Sen önce k+1 olarak yaz da ondan sonra göster. [*5–6 saniye*] Hadi bakayım.
98	OG-12	Nasıl olacak formül gerekli yaa.
99	**MO**	Sen formülünü yaz, eşittir bu tarafa da yazacaksın şunu [*OG-12’ye*] eşitliğin bu tarafına yazdın mı, yazmadın, (k+1) θ+isin$(k+1)\theta$ ne yaparsın şunun iki tarafını?
100	OG-12	Hı hı
101	**MO**	Ayırdın hı hı, hayır bunu… kullanabilirsin biliyorsun sen bunu kullanmasını, hadi. Hadi OG–10 başlıyoruz. k=1 den, trigonometriden bir geçiş yapalım da kendimize gelelim. [*Yanında arkadaşı ile konuştuğu için direk OG-10’ u seçti.*] th: n=1 için $(\cos\theta+i\sin\theta)^1 = \cos\theta+i\sin\theta$ eşitlik sağlandı. th: n=k için $(\cos\theta+i\sin\theta)^k = \cos k\theta+i\sin k\theta$ n=k+1 için, « n yerine k+1 yazıyoruz ilk eşitlikte, şurada $(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}$ n yerine $\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$ th: $(\cos\theta+i\sin\theta)^k.(\cos\theta+i\sin\theta)$ « Bunun yerine eşitini alabilir miyim şuraya? Şunu yazabilirsin sen bunu karmaşık sayı olarak çarpmayı biliyorsun, şöyle parantez içine koy. Nasıl çarpıyoruz şu ikisinde θ’ları topluyoruz. th: $\underbrace{(\cos\theta+i\sin\theta)^k}.(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(\cos k\theta+i\sin k\theta).(\cos\theta+i\sin\theta)$ $\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$
102	**MO**	Evet, şimdi n=k için doğru olsun dedik, k+1 için yazdık, burada bir tanesini ayırdık $(\cos\theta+i\sin\theta)^k.(\cos\theta+i\sin\theta)$ yazdık. Bunun yerine 2 deki ifadenin eşitliğin sağındaki halini yazdık, biz zaten 2 sayının kutupsal biçimde çarpımını biliyoruz, çarptığımızda sonucu bulduk.
103	OG-8	Ben anlamadım, çarpımı anlamadım.
104	**MO**	Şu çarpımı mı anlamadın? Peki, biz kutupsal biçimde çarpmayı nasıl

EK-6

Transkript Metni

		yapıyorduk? Kutupsal biçimde 2 karmaşık sayıyı çarparken argümentlerini toplamıyor muyduk? O halde kθ ile θ' yı toplarsak (k+1)θ olmaz mı? Hadi, bir örnek daha yapıp sizi bırakayım.
105	B-OG	Sağ olun hocam, teşekkürler hocam.
106	OG-5	Gerçi bir örnek yapmak 10 dakika alıyor zaten.
107	**MO**	O size bağlı. n>1 ve n∈N için $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ olduğunu tümevarımla gösterelim.
108	OG-11	Doğru. [*önerme için*]
109	OG-5	Belli zaten.
110	OG-3	Evet, açık zaten hocam.
111	**MO**	Ne gerek var değil mi, belli olan bir şeyi ispatlamaya. [*kinaye*]
112	B-OG	Evet.
113	OG-11	Valla bunu da göremeyen.
114	**MO**	Bakın n 1'den büyük, n=1 için denemeyeceksiniz, n=2 için doğru olduğunu göstereceksiniz. Tümevarımla gösteriyoruz.
115	OG-3	Apaçık ortada bu ama.
116	**MO**	Bu apaçık ortada olan şeyi tümevarımla göster.
117	OG-5	Ya o eşitsizlik olmasa çok daha güzel olacaktı da.
118	OG-11	Hocam önce şunu toplama dönüştürüp oradan tümevarıma geçsek olmaz mı?
119	**MO**	Hayır, böyle kullanacaksınız.
120	OG--	Şey diyeceğiz herhalde burada n=k+1> n=k diyeceğiz, onu varsayarak yapacağız.
121	**MO**	Bilmiyorum artık, n=2 için bir kere doğru olduğunu görün n yerine k koyun doğru kabul edin, önce bir bunları yazın tümevarımın aşamalarını yazın, n=k+1 yazın doğru olduğunu gösterelim şimdi onun.
122	OG-7	Hocam bir şey sorabilir miyim?
123	**MO**	Sor [*yanına gelip defterine bakıyor*] ha sen bunu buldun, buraya kadar geldin güzel, şimdi şunu kullanacaksın, aşağı al bunu $1/\sqrt{1}+1/\sqrt{2}+\ldots+1/\sqrt{k}>\sqrt{k}$ mı oldu, şimdi buradan sonra bir şey düşünelim. 1 bölü ne olabilir $\sqrt{k\ +1}$ büyük, neyden büyüktür $\sqrt{k\ +1}-\sqrt{k}$ dan büyüktür, 2'den büyük değer veriyorsun ya kendin gördün bak. Taraf tarafa topla bakayım bunu, toplarsan şu geldi mi, bu gitti mi?
124	OG-7	Evet, anladım.
125	**MO**	Haydi. [*Tahtayı gösteriyor.*]
126	OG-7	Ben mi yapayım?
127	**MO**	Hı hı, ben birazcık OG-7'ye yardım ettim ama çoğunu kendisi yaptı, düşündüğü şeyi de kendisi söyledi. [*OG–7 tahtaya yazarken*] n=2 için doğru evet, n=k için doğru olsun yazalım, yazalım bu doğru olsun dediğimiz ifade nedir? [*Öğrenci yazdı.*] Evet, bu doğru, şimdi n=k+1 için yazalım.
128	OG-9	Taraf tarafa çıkarsak ne olur?
129	**MO**	Hayır, 3.yü kullanmayacaksın, ikiyi kullanacaksın burada 3 için ama 3'ü kullanmayacaksın. th: n=2 için $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\Rightarrow 1+\sqrt{2}>2,\quad \sqrt{2}>1$ n=k için doğru olsun. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$ n=k+1 için $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k\ +1}$ bunu göstermek için şu doğru olduğunu bildiğimiz ifadeyi altına bir yazalım. [*OG–7, 3.satırın altına 2.satırı yazdı.*] Şimdi bundan sonra şöyle düşündük

		bakın, (∗) $\frac{1}{\sqrt{k\ +1}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ dır. Taraf tarafa toplayın bakalım şimdi [*2. satırdaki ifadesini kastediyor.*] 2'den büyük değerler verdiğinde o sağlar (*) bakın, sağlayacaktır.
130	OG-3	Bunu nereden bulduk?
131	OG-11	Neye göre yazdık onu?
132	OG-9	Ben hiç bir şey anlamadım ya.
133	**MO**	Kendimiz düşündük.
134	OG-3	Nasıl düşündük işte.
135	**MO**	n' e 2 verdik, k verdik, k+1 verdik; k' ya 3 verdiğimizi düşünün bunun her zaman (*) olduğunu şu koşula göre bakalım.
136	OG-3	Tamam, orasını anladım da nasıl yazdık onu (*) işte?
137	OG-11	Düşünmüş işte.
138	**MO**	Nasıl düşüneceksin şu verilene göre ben şurada [*3.satır sonunu gösteriyor.*] k+1'i elde edecek miyim? Burada ne var [*2.satırın sonu*] $\sqrt{k}$ var, burada ne var $1/\sqrt{k}$ var, yani şu $\sqrt{k}$'yı [*2.satırın en sonundaki*] götürecek bir şey yazmam lazım.
139	OG-3	Haa.
140	**MO**	Anladın mı şimdi nereden geldiğini, evet topladığımızda doğruluğunu göstermiş olduk. th: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$ + $\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k\ +1} - \sqrt{k}$ $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$
141	OG-9	Hocam burada taraf tarafa çıkarıyor muyuz?
142	**MO**	[*Yanına gelip defterinde açıklıyor.*] Hayır, çıkarmıyoruz, ama $\sqrt{k}$ 'lar çıkarılmış olacak.

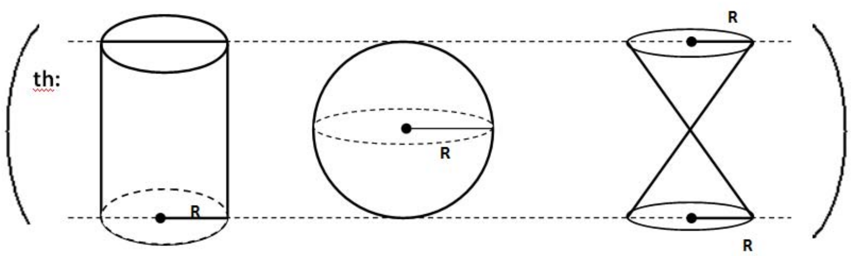
EK-6
Transkript Metni

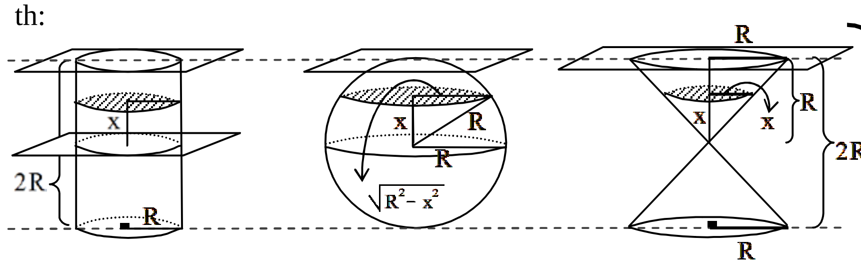
12-41		**7 MAYIS-Çrş (Mat-1) TES-3**
1	**MO**	Sizce ispat yapmanın öğrencilere faydası var mıdır?
2	OG-9	Bence yoktur.
3	OG-8	Bence vardır, çünkü yani o ispatı yaparken, görürken yani onu kim ispatladıysa onun nasıl düşündüğünü, matematiğe bakış açısını da görmüş oluyoruz.
4	**MO**	Ne kazandırır sizce, yani bir ispat yöntemini öğrendiniz, size ne kazandırdı?
5	OG-5	Daha iyi anlamış oluruz, bence tek artısı o başka bir artısı yok.
6	OG-7	Farklı yollardan çözüme gitmeyi öğretir.
7	**MO**	Evet, güzel.
8	OG-9	Bence, şey anlamadığımız bir şey üzerinde nerden geldiğini anlarız.
9	**MO**	Peki, ispat sizin için ne kadar önemlidir? Yani matematik öğrenirken ya da başka bir fen dersini öğrenirken ispat sizin için önemli mi? Önemli ise ne kadar önemli?
10	OG-9	Önemlidir hocam çünkü bir şeyin nereden geldiğini yani mantığını anlarız. Mesela bir matematik ispatı yapıyorsak, matematiğin mantığını anlarız, bakış açılarını öğreniriz.
11	OG-5	Öbür türlü ezberlemiş oluruz.
12	OG-8	Mesela ben bir şeyin ispatını görmediğimde onu unutuyorum, ispatı gördüğümde unutmuyorum.
13	**MO**	Peki, OG-13 söylesin bir de onun görüşünü alalım.
14	OG-13	Hocam baya önemlidir [*biraz esprili söylüyor*], hayata hazırlar, değişik açılardan bakmayı öğretir.
15	OG-6	Sorgulama gücünü geliştirir.
16	**MO**	Peki, ispat yapmayı seviyor musunuz? Gerçek düşüncelerinizi söyleyin.
17	OG-3	Kim sevmez! [*gülüyor*]
18	**MO**	OG-3 dedi ki kim sevmez!
19	**MO**	Peki, matematikte neleri ispatlarız?
20	OG-7	Valla mümkün olabilen her şeyi ispatlarız.
21	OG-5	İspatlanabilmesi mümkün olan her şeyi!
22	OG-3	Sağ ve sol varsa mutlaka ispatlarız.
23	**MO**	Ne demek sağ ve sol?
24	OG-3	Yani bir tarafı kullanarak diğer tarafı elde ediyorduk ya, orada yani.
25	**MO**	Yani onu öğrendin, sağlama yapmıyorsunuz değil mi? Bir tarafı kullanıp diğer tarafı elde ediyorsunuz.
26	OG-9	Hocam sağlama ispat değil midir yani?
27	**MO**	Sağlama ispat olabilir mi?
28	OG-11	İspatı doğrulamadır.
29	**MO**	Evet.
30	OG-9	Ne bileyim sağlatıyoruz bir şeyi, bulduğumuz sağlıyorsa demek ki doğrudur.
31	OG-11	Ama her x için sağlar mı? Orada **her** önemli!
32	**MO**	Çocuklar bugün üslü, köklü sayıları tekrar edeceğiz, önce bunları anlatacağım sonra soru çözeceğiz. Önce köklü sayılara örnek vererek kısa kısa, bir kurallarını kısaca hatırlatalım sonra köklü sayılar ile ilgili değişik sorular çözelim. …[*xxx yayıncılıktaki matematik–1 den ne kadar soru varsa köklü sayılarla ilgili çözüyorsunuz, bu hafta bitecek-dedi.*]

13-43		12 MAYIS-Pzt (Mat-3) TES-4
1	**MO**	Bir ispat yapılırken nelerden yararlanılır?
2	OG-8	Bir ispat yapılırken o konuya ait özelliklerden yararlanılabilir, örneğin logaritma yapıyorsak taban değiştirme olabilir mesela, ayrıca başka ispatlanmış şeyleri de kullanabiliriz.
3	**MO**	İspatladığımız diğer teoremleri de kullanabiliriz.
4	OG-7	Mesela bir konuda ispat yaparken o konuyla bağlı olmayan farklı yollardan gidebiliriz, mesela atıyorum logaritma ile ilgili bir ispat yaparken tümevarımı kullanmak hani, aynı konu için de değil taban değiştirme gibi farklı bir konuyu da kullanabiliriz. [*konu olarak tümevarımı kastediyor*.] Ondan sonra matematiksel simgelerden yararlanabiliriz.
5	**MO**	Evet, başka düşüncesi olan arkadaşımız var mı? [*yok*]
6	**MO**	Peki, ispat yapılırken işe nasıl başlarız?
7	OG-6	Önce dinç bir kafa olması lazım.
8	**MO**	Ben ciddi ciddi soruyorum.
9	OG-6	Bir tarafı ellemeden diğer taraftan başlarım.
10	**MO**	Diğer tarafta nasıl başlarsın işte?
11	OG-6	Yorum yok.
12	**MO**	Peki, OG–13 söylesin bakalım nasıl başlarız?
13	OG-13	n=1 deriz ya da aaa başlarız işte bir şekilde hocam!
14	**MO**	Nasıl? Diyelim ki şöyle söyleyeyim, bir üçgenin iç açıları toplamı 180˚dir. Bunun işte önce hipotezini, hükmünü ayırarak başlamaz mısınız?
15	OG-2	Evet, bölüm bölüm. [*Bir öğrenci "paralel çizerek" dedi.*]
16	**MO**	Nasıl bölüm bölüm?
17	OG-2	Bölümlendiririz.
18	**MO**	Bölümlendirirken neden bahsettin?
19	OG-11	Önce verilenleri bir toplarız, bizden istenene ulaşmaya çalışırız.
20	**MO**	Ha, verilenleri kullanıp isteneni elde etmeye çalışırız.
21	OG-9	Ama nasıl başlarız, amacı bilmek sorun.
22	**MO**	Mesela biz geçen sene trigonometride kosinüs teoremini ispatladık, nasıl başladık? Hatırlayan var mı?
23	OG-9	Verilenleri yazdık önce.
24	**MO**	Ne verilmiş, bir ABC üçgeninde, işte $a^2=b^2+c^2-2bc.CosA$ yazıp bunu nereden, bunu bulmak için ne yaptık? Bir üçgen çizmedik mi? Sonra üçgeni kullanmadık mı?
25	OG-9	Evet, sonra a,b,c' leri vermiş yerleştirdik.
26	**MO**	İspatlar arasında iyi daha iyi, şık daha şık gibi ayrımlar olabilir mi?
27	B-OG	Olabilir, evet, tabi ki.
28	**MO**	Nasıl olabilir?
29	OG-8	İspatın gösterimi olarak daha güzel, yani şöyle diyebiliriz; $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ karşılık $a=\frac{bc}{b+c}$ yerine $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ olarak gösterirsek daha şık gösterim olabilir, yaparken de deneyerek yapma var, deneyerek ispat o kadar şık bir yöntem değil, onun yerine her şeyi göstererek yaparsak o zaman daha şık olur.
30	**MO**	Peki, OG–3 bir şey söyleyecekti.
31	OG-3	Mesela bana göre çember çizilerek yapılan bir şey daha güzel oluyor.
32	**MO**	Geometride peki, sizce geometrideki ispatlar mı daha şık, matematiktekiler mi?
33	B-OG	Hayır, hayır. [*kıyaslamıyoruz anlamında*] Geometridekiler daha kolay oluyor.

EK-6
Transkript Metni

34	OG-5	Bunlar göreceli şeyler hocam, kişiden kişiye değişir, mesela bence çember çizilmiş çok karışmış cebirsel bir sürü ifade kullanmaktan ziyade en kolay anlayacağım şey daha şık gelir, OG–3'e gelmeyebilir.
35	**MO**	Peki, OG–5 'e katılıyor musunuz?
36	B-OG	Evet, hayır…
37	OG-5	Ya bir örnek vereceğim mesela bir kızı herkes beğenmeyebilir, bu da onun gibi mesela güzel olup olmadığına.
38	OG-4	Hayır, matematik kesindir.
39	OG-5	Bu kesin değil.
40	**MO**	[*OG-4'e*] Şimdi ispatları karşılaştırıyoruz şık, daha şık gibi, tabi katıldığım bir yön olabilir güzel bir konuya değindi.
41	OG-11	Deneyerek yapmak, sonsuz kere deneyerek ispatlayabiliriz ama birde normal yöntemle ispatlasak, ispatlanması gereken yöntemle ispatlarsak daha şık olur, OG-8'in dediği gibi.
42	**MO**	Peki, tamam, genelleme ile ispat arasında bir ilişki var mıdır?
43	OG-3	Var.
44	OG-5	Muhakkak var.
45	**MO**	Neden OG–3?
46	OG-3	Genelleme yapılarak ispata ulaşır.
47	OG-4	Hayır, ispat yaparak genelleme olur.
48	OG-8	İspatla ulaşınca genelleme yaparsın.
49	OG-3	Haa, evet.
50	OG-4	İspat genellenirse ispat olur. [*Sınıfta gülüşmeler oluyor.*]
51	**MO**	Ne dedin?
52	OG-4	İspat belli bir kısım sayıları sağlamayacak, bütün her şeyi sağlarsa harbi ispat olur. [*Gene gülünüyor harbi kelimesine.*]
53	OG-7	Bir de bir genellemeyi bozmak için de ispat yapılabilir.
54	**MO**	Ne yönden nasıl bir şey mesela?
55	OG-7	Mesela, bütün ördekler beyazdır diyorlar, ama mesela doğada beyaz olmayan ördekler de var, bu bir genelleme ama yanlış çünkü doğada bir tane siyah ördek gösterdim işte ispat yanlış genelleme olmuyor.
56	**MO**	Peki, ispat yapmanın bize günlük yaşamımızda yararı olur mu?
57	B-OG	Olur, evet.
58	**MO**	Söz almadığım [*yorum*] kişilerden yorumlar alalım OG–12 ne diyorsun?
59	OG-12	Olur.
60	**MO**	Olur deme sadece bir örnek ver.
61	OG-12	Mesela ispatladıktan sonra onun kısaca formülünü buluyoruz ya günlük yaşamda da hiç uğraşmadan hız kazanarak şey yaparız yani. Hız kazandırır bize.
62	**MO**	Peki, günlük yaşantıda hız kazandıracak bir örnek verirsen beni hakikaten mutlu edersin.
63	OG-8	Trigonometride ispat yaptık, artık ispatıyla uğraşmadan kolayca yapıyoruz.
64	OG-9	Mesela ÖSS de oturup ispatlamıyoruz.
65	OG-3	Günlük yaşantımızda ÖSS' yi kazanmamız lazım, ÖSS' yi kazanmak için hızlı olmamız lazım, hızlı olmak için ispatladığımızdan direk bildiğimiz için kullanabiliriz.
66	**MO**	Evet, güzel, şimdi üslü sayılar yapıyoruz [*başlık anlamında*] defterlerimizi açıyoruz. Örnek üzerinden anlatacağım, kurallarını vermeyeceğim, üslü sayılara yönelik kurallarla ilgili örnekler yapıp sonra üslü denklemlerden sorular çözeceğiz.

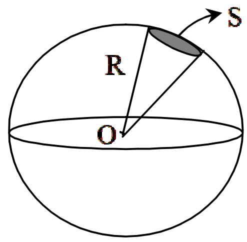
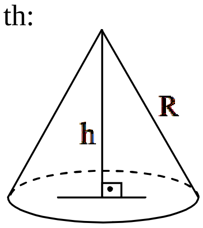
14-46		13 MAYIS-Salı (Geo-2) DS-12
1	**GO**	[*Tahtada Cavalieri İlkesi başlığı var.*] Yükseklikleri aynı olan
2	OG-7	Yazıyoruz değil mi?
3	**GO**	Hı hı yazalım, yükseklikleri aynı olan iki cisim, tabana paralel düzlemlerle kesildiğinde oluşan kesitlerin alanları daima birbirine eşit ise bu iki cismin hacimleri de eşittir.[*Kendi ders notu olan bir kâğıttan okuyarak yazdırdı.*]
4	**GO**	Hacmi kabaca ne olarak düşünebiliriz demiştik? Alanlar toplamı olarak düşünebiliriz demiştik değil mi? Şimdi her birini paralel düzlemle kesip iki şekli karşılaştırdığımda sürekli birbirine eşit çıkıyorsa alanları toplamı da eşit çıkacaktır, yükseklikler de eşit, o hâlde, kesit alanlar *kesit alanlar* da eşit.
5	**GO**	Şu şekilde örnekleyebiliriz, [*öğretmen masasından bir nesne alıyor*] bunu şurada göstereyim. [*masanın üzerine geri bırakıyor*] Bunun bir hacmi var değil mi! Şöyle yaptığımda, biraz bozduğumda, kaydırdığımda hacmi değişti mi?
6	B-OG	Hayır.
7	**GO**	Niye değişmedi, çünkü herhangi bir eksiltme ya da ekleme olmadı, sadece kaydırma oldu, yani kesit alanlara baktığında hala ne aynı, eski şekille şimdiki şekil hala aynıdır.
8	**GO**	Şimdi bu ilkeyi kullanarak kürenin hacmini ispatlayalım. Kürenin hacmi diyoruz. [*başlık atın anlamında*] Yarım sayfalık bir yer ayırın hepsi aynı yerde olsa iyi olur. Bir tane silindir çiziyorum, bir tane küre çiziyorum bir de şöyle bir kum saati çiziyorum. [*çizdi*] Yüksekliklerini aynı tutmaya çalıştığıma dikkat edin. [*50–60 saniye bekliyor çizmeleri için.*]
9	OG-3	Hocam bunların yarıçapı
10	**GO**	Yarıçapları hepsinin R olacak. [*Şekillerde R' leri yerleştiriyor.*]  Yükseklik de otomatikman belirlenmiş oluyor.
11	B-OG	2R
12	**GO**	Evet, 2R, silindirin, kürenin ve koninin yarıçapları hep R olarak alınıyor. Bu durumda, yükseklik 2R olacaktır. Bunu çizdiyseniz önce beni takip edin sonra yazarsınız. En üstten bir düzlemle kestiğimde, tam silme bir şekilde [*her üç şeklin üzerine de tavana üç düzlem çiziyor*] aynı düzlem devam ediyor aslında, şu kesitin alanı [*silindirin*] $\pi.R^{2}$'dir. Bunun [*silindir*] kesitlerinin alanı hiç değişmez değil mi! Dairelerin alanı değişmedikçe, bunun [*küre*] değişir, bunun da [*koni*] değişir. Buna [*küre*] bakalım sıfır, bunun en tepesinde nedir bir nokta vardır, kesitin alanı sıfırdır. Bunun [*koni*] alanı $\pi.R^{2}$'dir. Böyle bir şey bulduk. [*Her bir şeklin altına bulduklarını yazdı.*] En altta da aynı şey olmaz mı?
13	B-OG	Olur.

14	**GO**	Yazmıyorum ayrıca yazmama gerek yok, gene $\pi.R^2$, o, $\pi.R^2$ olacaktır. Tam ortada ne olur; bunun kesit alanı her yerde $\pi.R^2$ idi, bunun ki tam ortada $\pi.R^{2'}$dir, bununki de tam ortada şurada sıfırdır. Şimdi herhangi bir yerde, daha doğrusu ne üstte ne ortada, bunun dışında herhangi bir yerde, şöyle x birim uzaklıkta bir yerde olsun. Şu kesitin alanı nedir? Her yerde $\pi.R^2$ demiştik silindirde, şimdi bunu [*kürede*] hesaplayalım. x birim uzaklıkta şöyle bir kesit, az evvel [*bir önceki ders*] sayısal bir örneğini çözmüştük bunun. [*Kesit alanı bulmayla ilgili*]
15	OG-5	Pisagorla.
16	**GO**	Evet, pisagor yapacağız, şurası büyük R' dir, o zaman şurası $\sqrt{R^2-x^2}$ dir, nedir bu kesitin alanı? $\pi.(R^2 - x^2)$ karekökten kurtuldu. Oraya [*koni*] bakalım, x birim yukarıdan alıyorum, şurası x, şimdi şöyle devam ettirdiğimde
17	OG-8	Bu güzel bir şeymiş, R- x olacak orası.
18	**GO**	Şunun tamamı [*koninin yüksekliği*] 2R idi değil mi! O zaman şurası da R değil midir? Şu uzunluk yarısı R' dir. Burası R, burası R o zaman burası kaç derece?
19	B-OG	45°
20	**GO**	45° o zaman burası x ise, şurası da x' dir. Bu kesitin alanı nedir o zaman? $\pi.x^{2}$' dir. th:  -en üst $\pi.R^2$ = 0 + $\pi.R^2$ -tam orta $\pi.R^2$ = $\pi.R^2$ + 0 -herhangi bir yer $\pi.R^2$ = $\pi.(R^2-x^2)$ + $\pi.x^2$ Şimdi herhangi bir yeri de alıp üçünü de gördük, aslında sadece bunu almamız [*x' li olan*] yeterliydi ama bunları da gördük.
21	OG-3	Orada [*koni için*] R' ye 2R olduğunu vermiş değil mi?
22	**GO**	Şu koniler eşit, yoksa rastgele olursa olmaz, zaten ortadaki o ya.
23	OG-2	Ama hocam orası [*koni yüksekliği*] 3R olsaydı; x, x olmayacaktı [x x] değil mi?
24	**GO**	Yükseklik 3R olsaydı mı? Hayır, yükseklik otomatikman küreden ötürü 2R oldu.
25	OG-2	Haa doğru tamam.
26	**GO**	O yüzden 2R oldu, keyfi değil yani. Şimdi baktığımızda bununla bunun toplamı, [*küre en üst ve koni en üst değeri*] ikisinin toplamı neyi verdi? Soldakini [*silindir en üst*] verdi. Bunla bunun toplamı [*orta değerler*] gene soldakini verdi. Bunla bunun toplamı [*herhangi bir yer*] gene soldakini verdi, o zaman matematiksel işlemleri gösterelim. [*Şekilde "+" ve "=" işaretlerini yerleştirdi.*]
27	**GO**	Bu eşitliklerden ötürü o zaman şunu yazabilirim; silindirin hacmi, kürenin hacmi artı konilerin hacmine eşittir, doğru mu? (th: $H_{sil} = H_{küre} + H_{koni}$) Bu durumda böyledir. Silindirin hacmi $\pi.R^{2}.h$. Yükseklik kaçtı burada 2R yani $\pi.R^2$ 2.R eşittir kürenin hacmini arıyorum zaten, koninin hacmi π.taban alanı çarpı yükseklik, yükseklik R, ancak bundan iki tane var $\pi.R^2$.R.2'dir.

EK-6

Transkript Metni

		İşlem yaparsak bunu öbür tarafa atarsak $\pi.R^3$… o zaman $H_{küre} = {}^4/_3\ \pi.r^3$ tür.
28	OG-5	Vay be kim bulmuşsa helal olsun.
29	OG-4	Güzel sonuç.
30	**GO**	İntegralsiz ispatı bu. İntegral bilmediğiniz için öyle yapamıyoruz.
31	OG-5	İlk bulan adam böyle mi bulmuş hocam?
32	**GO**	Değil integralle bulmuş, bu sonradan yapılan bir ispattır. İntegralsiz nasıl yapılabilir diye düşünüldüğünde yapılan bir ispattır.
33	**GO**	İntegral zaten toplamaya yarar; alan toplarsın, uzunluk toplarsın onları toplamı bir şey ediyorsa alan ediyorsa, hacim ediyorsa anlamlı bir şey çıkar ortaya.
34	OG-9	[*55–60 saniye sonra*] hocam integral ile yaparken hangi alanları topluyor ki? Sadece küre üzerinde mi çalışıyordu o zaman.
35	**GO**	Tabi, küreyi eksenlere oturtursun. 3 boyutlu analitik düzleme, x, y,z eksenine orda sınırları belirleyip, oradan fonksiyonu yazıyorsun, fonksiyon olarak denklemini yazıyorsun kürenin.
36	OG-9	Kürenin de denklemi var yani.
37	**GO**	Doğrunun var biliyorsun, çemberin de var karmaşık sayılardan gördünüz. Her şeyin denklemi vardır. Elipsin denklemi vardır. Elipsi biliyorsun [*değil mi vurgusu var*] her şeyin denklemi yazılmıştır yani. At eğerinin [*semer*] bile denklemi var; onun dahi denklemi var.
38	OG-9	Bizim de denklemimiz var o zaman.
39	**GO**	Var, her şeyin olduğuna göre; hareketli şeyleri bile denklemle ifade ediyorlar artık.
40	OG-9	Doğrudur.
41	**GO**	Bırak sabit şeyleri, hareketli şeyleri bile denklemle yazıyorlar ki geleceğe dönük şeyler yapılsın, tahminler yapılabilsin. Geleceğe dönük tahminler yapanlar, fütüristler vardır gelecek tahmincileri denklemleri kullanarak gelecek tahmin ederler.
42	**GO**	[*başlık*] Kürenin alanı
43	OG-5	Kürenin alanı, acayip bir şeydir herhalde.
44	OG-8	$4.\pi.r^2$
45	**GO**	Aslında… gene, neyse [*bir yandan küre çiziyor*]
46	OG-3	Açık şekli de olmaz bunun.
47	**GO**	Açık şekli de olmaz.
48	OG-8	Harbiden haa.
49	OG-7	Kürenin açık şekli olur mu?
50	**GO**	Olmaz, ancak yarım daireyi 360^0 çevirdiğimizde bir küre yüzeyi elde etmiş oluyoruz. Şöyle bir koni alıyoruz, şu alana S diyorum. Bunun gibi bir sürü koni ile yüzeyi tarayabilirim. Tarayabilir miyim?
51	B-OG	Evet.
52	**GO**	Bence biraz boşluk kalır.
53	OG-4	Evet, yuvarlaklar arasında.
54	**GO**	Değil mi, koninin tabanıyla küre yüzeyi arasında.
55	OG-3	Tam oturmaz.
56	**GO**	Tam oturmaz, bir boşluk kalır, tavanı biraz bombeli olmuş olur değil mi! Peki ben bu koniyi mümkün olduğunca küçültsem bu hata sıfıra yaklaşır mı?
57	B-OG	Evet.
58	**GO**	Hemen hemen hatasız gibi olur değil mi! O zaman limit durumu devreye girecek, sonsuza giderken gibi bir şey söyleyeceğiz ki o hatayı sıfıra indirmiş

		olacağız, gerçekten sonsuza götürdüğümde o hata hiç kalmayacak. Bu konileri ne kadar küçük yaparsan, o kadar hatasız bir şey elde etmiş olursun. Bunların hepsini tek tek toplayacağız. Şöyle yazalım; th: 
59	**GO**	Şöyle yazalım; sonsuz çoklukta koninin hacimleri toplamı kürenin hacmini verir. O zaman bu konilerin hacmini toplayacağız, neydi formül?
60	B-OG	Taban alanı çarpı, yükseklik
61	**GO**	Taban alanına S demişiz, ama bana bu S’ lerin toplamı lazım değil mi? Peki, koni sayısı sonsuza giderken yükseklikte, koninin yüksekliği, R’ ye yaklaşmaz mı? (th: koni sayısı $\rightarrow \infty$ $h_k \rightarrow R$)
62	OG-5	Evet, o yüzden R kabul edeceğiz.
63	OG-9	R’ ye yakınsar ya.
64	**GO**	Evet, sonsuz durumda R kabul ediliyor. Normalde yükseklik nedir? Buraya R demiştik, R’ den küçüktür değil mi! Ancak ben bunu giderek küçültürsem, bu R’ ye o kadar yaklaşır. th:  Sonsuz durumunda da ne oldu, birbirine eşit oldu. Peki, kürenin hacmi = konilerin hacimleri toplamı. Kürenin hacmi $\frac{4}{3}\pi.r^3$ tür, konilerin hacimleri toplamı, bunları toplam sembolüyle yazalım $\pi.r^2 \frac{h}{3}$ ’tü. Taban alanına S dedim, şuraya indis verirsek j=1 den S_j çarpı, koninin yüksekliği için ne demiştim R, çarpı R bölü 3 yazabilirim. th: $\frac{4}{3}\pi.R^3 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{S_j.R}{3}$ Bunların hepsini toplayacağız. Buradaki indis j, S’ yi sayıyor. O zaman R ve 3 sabit.
65	OG-8	Başa alalım.
66	**GO**	Dışarı alınabilir. $\frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{R}{3}\sum Sj$, R‘ ler gider… o zaman $4.\pi.R^2 = \sum Sj$’ lerin toplamı bu Sj’ lerin toplamı nedir? Küre yüzeyinin alanı, o halde küre yüzeyinin alanı neye eşitmiş $4.\pi.R^2$. th: $4.\pi.R^2 = \sum_{j=1}^{\infty} Sj$ = küre yüzeyinin alanı

EK-6

Transkript Metni

67	OG-8	Şeydeyken siz bize bilgi vermiştiniz dairenin alanı, çemberin çevresine, yani alanın türevini aldığımızda çevreyi veriyordu.
68	**GO**	Evet.
69	OG-8	$\pi.r^2$, $2.\pi.r$. Burada aldığımızda $3.\pi.R^2$ yapıyor.
70	**GO**	($\frac{4}{3}\pi.R^3$) ün R' ye göre türevini alırsan, 3'ler gitti $4.\pi.R^2$ kaldı. Yani aynı şey geçerli oluyor, hacmin türevini aldığınızda alanı veriyor.
71	OG-9	Her zaman olur mu? Her zaman geçerli midir?
72	**GO**	Küre için geçerli.
73	OG-9	Yani mesela silindir?
74	**GO**	Diğerleri için değil. Kürede çünkü tek değişken var diğerlerinin olması imkânsız.

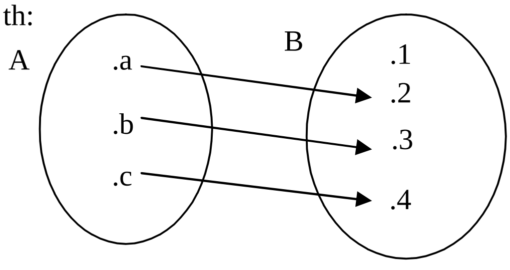
15-47		14 MAYIS-Çrş (Mat-1) TES-5
1	**MO**	İspat hangi seviyede matematik öğrenirken öğrenilmelidir? İlkokulda mı, ortaokulda mı, üniversitede mi? Lisansüstü mü?
2	OG-8	Bence ilkokul birinci sınıfa başlarken öğrenilmeli. [*Sınıf gülüyor.*]
3	**MO**	Nasıl oluyor?
4	OG-8	Matematiğin en alttan köklü bir şekilde yapılandırılması için bence ispat şarttır. Ben ilkokul birinci sınıfta bilmem neyin şu teoremle ispatı demiyorum, 1. sınıfa uygun olarak yani çocukların anlayabileceği bir şekilde ispattan bahsediyorum.
5	**MO**	Şimdi şöyle OG-8, söyledi illa ispat çok ağır bir düzeyde olmak zorunda değil ama çocuğun seviyesine göre.
6	OG-6	Birinci sınıfta nasıl ispat olacak yaa?
7	OG-5	Ya var zaten yaptırıyorlar bize zaten.
8	**MO**	Sence hangi seviyede?
9	OG-5	Üniversite ideal hocam, ya zaten biz bir şekilde şuradan geliyor falan diye yapalım ama iyice ağır ispat üniversitede anca o da matematiğe girersek yoksa ağır.
10	**MO**	Evet, OG–7.
11	OG-7	Bence ispat böyle soyut zeka ile yapılan bir şey olduğu için yani soyut zekanın gelişimine bağlı olarak 8. sınıf veya 9. sınıf lisede falan başlaması gerekir.
12	**MO**	Evet başka?
13	OG-4	OG-5'in dediğine göre hocam aslında neydi o sayılan?
14	B-OG **MO**	Abaküs.
15	OG-4	Abaküsle de yaptırıyorlar 1. sınıfta ispatı.
16	**MO**	Ama adı ispat değil, değil mi?
17	OG-5	Yani var yaptırıyorlar aslında.
18	**MO**	Peki, OG-13?
19	OG-13	Ben mi, bence ispat lisenin son döneminde, üniversiteye hazırlık olsun diye öğretilmeye başlanmalı, yaz tatilinde olabilir mesela.
20	**MO**	Peki, OG-2'nin görüşünü alalım.
21	OG-2	Valla ispat yaş tanımaz ya.
22	**MO**	Yaş tanımaz ne demek, açar mısın?
23	OG-2	Yani her yaşta ispat yapılabilir yani.
24	**MO**	OG-6 ilkokul 1 de olmaz diyor, kaçıncı sınıfta olmalı OG-6?
25	OG-6	Çocuk belli bir zekâ düzeyini aştıktan sonra yani.
26	**MO**	Çocuk belli bir zekâ düzeyini nasıl aşar?
27	OG-6	Büyüdükçe, örneğin yazı yazmayı bilmeyen bir çocuk nasıl ispat yapacak ki? Daha toplama, çıkarma öğreniyor ama öğrendikten sonra belli bir gelişim gösterir.
28	**MO**	Peki, günlük yaşamda kullanılan ispat, ispatlama ifadeleri ile matematiksel ispat arasında fark var mıdır? Varsa nelerdir?
29	B-OG	Vardır.
30	OG-13	Günlük yaşamda nasıl ispat kullanıyoruz ki?
31	**MO**	Nasıl kullanıyoruz?
32	OG-8	Günlük yaşamda kullanılan ispatlar yani, genelde insanların düşünerek kafasından doğru veya yanlış olduğunu bilmeden yorum yaparak birbirlerine söylemesinden, yani bak diyor örneğin çok su içersek diyor böyle böyle olur, enzimler şöyle çalışır diyor, sağlıklı olur diyor ama aslında o bir ispat değil. Yani gerçek yani bizim yaptığımız anlamda bir ispat değil sadece

		kafalarından düşünerek yapıyorlar, matematik anlamda her şey yerine oturuyor.
33	**MO**	Evet.
34	OG-7	Bence günlük hayatta işin içine biraz felsefe de giriyor yani ondan dolayı tam bir ispat yapılması söz konusu olamaz. Mesela atıyorum ben OG-13'ün ayakkabısı siyah diyorum ama renk körü bir insana göre o siyah olmayabilir yani.
35	OG-5	Renk körü insan sarı görür.
36	OG-3	Mesela yani. [*OG-7'nin ifadesi doğru olsun anlamında*]
37	OG-7	Ama matematikte öyle değil, bir şeyin bir ölçüsü var neyse o yani.
38	**MO**	Tabi matematikte, önce matematiksel ispat denilince verilen vardır bir de buna bağlı olarak istenen vardır. Verilenleri kullanır ispatlarsınız dimi! Ama günlük yaşamda tabi mutlaka ortada bir veri vardır ama dediği gibi OG-7'ye katılıyorum biraz felsefi yönü de vardır yani. -Başka, OG-12'nin görüşünü alalım bu konuda.
39	OG-12	Ben başka bir soruya cevap versem?
40	**MO**	Buna da verebilirsin illa doğru ya da yanlış olacak diye bir kaide yok.
41	OG-12	Neyse günlük yaşamda ispat arkadaşın dediği gibi, bir de kesin bir sonuç var, kesin bir sonuç yok, tek farkı o.
42	**MO**	Peki, kesinlik diyorsun matematiksel ispatta kesinlik var günlük yaşamdakinde yok diyorsun, günlük yaşamdakinde yorumlar mı daha etkili diyorsun! Kesinlik olmayabilir!
43	OG-2	Bir de şey hocam, matematiksel ispatta belirli şeyleri kabul ederek ispatlıyoruz.
44	OG-9	Bazı kavramları, hocam bence matematikte de kesinlik yok.
45	**MO**	Niye?
46	OG-9	Bazı kavramları kendimiz yaratıyoruz.
47	**MO**	Neyi yaratıyoruz mesela söyler misin?
48	OG-9	Mesela 1'e bir dediğimiz için o, 1'dir.
49	**MO**	Nasıl yani?
50	OG-9	Yani 1 rakamına dediğimiz için o, 1.
51	**MO**	E tabi ki başka ne diyebiliriz? Tam anlamadım.
52	OG-9	Ya hocam bazı kavramları biz şey yapıyoruz.
53	**MO**	Ama tüm dünyada kabul edilmiş.
54	OG-13	Doğada var mı? Yok mesela.
55	OG-9	Doğada yok, insan diyor onu, o yüzden kesin değil.
56	OG-3	Sen 1 diyorsun, İngiliz "one" diyor, farklı işte.
57	OG-2	Hocam o zaman çoğu ispatta n = R (Reel sayılarda) diyoruz, kısıtlı bir yerde ispat yapabiliyoruz ama.
58	**MO**	Ama kısıtlı bir yer olur mu, reel sayılar şu anda kullanılan, karmaşık sayılar haricinde.
59	OG-2	Uzayda üç boyutlu sayılar varmış bir sürü.
60	**MO**	Ama kısıtlı bir alanda bile ispat yapıyorsun değil mi?
61	OG-7	Ama hocam doğayı da kısıtlayabiliriz.
62	**MO**	Peki, OG-1'in görüşünü alalım bir de [*öğrenci biraz uykulu gibi*] Hadi OG-1 görüşünü alalım, şöyle birkaç şeyde sen söyle bakalım.
63	OG-1	Ne söyleyeyim?
64	**MO**	Ne söylüyorsun, mesela bir örnek ver bakalım, günlük yaşamda nasıl ispat yapıyoruz?
65	OG-1	Ben kullanmam ki.
66	**MO**	OG-1 kullanmaz, ne kullanıyorsun OG-1?

67	OG-1	Hazır ispatlanmış verilmiş zaten.
68	OG-6	Hayır, mesela, adım Ahmet diyorum, nasıl ispatlayacağım bunu? Nüfus cüzdanımı gösteririm devletten onaylanmış.
69	**MO**	[*OG-1'e*] İspatlıyormuşuz bak gördün mü? Demek ki günlük yaşamda da ispat var yani.
70	**MO**	Peki, ispat yapmak çok karışık bir süreç midir?
71	OG-3	Doğru.
72	**MO**	Doğru mu? Söyle bakalım OG–8 görüşlerin güzel.
73	OG-8	Karışık kavramı subjektif kavramdır, öğrendikten sonra hiçbir şey karışık değildir. [*sınıftan: of be, vay, pes …*]
74	**MO**	Yani sence ispat yapmak karışık bir süreç…
75	OG-8	Değildir.
76	**MO**	Peki, OG-8'in bu görüşüne katılan var mı?
77	B-OG	Yürekten katılıyoruz. [*biraz kinayeli*] [*sessizlik oluyor*]
78	**MO**	Neden katılmıyorsun OG–3? [*OG-3 hayır dedi.*]
79	OG-3	Hocam karışık çünkü
80	OG-4	Aslında ispatına göre değişir hocam, çok zor, karışık bir ispat da olabilir, çok kolay bir ispat da olabilir, ilköğretimde bile yapılıyor.
81	**MO**	Peki, evet ya da hayır, zor mudur değil midir ne diyorsunuz?
82	B-OG	Zordur.
83	**MO**	Peki, bir ispatın yapılışını anlamak için çok iyi matematik bilmek gerekir mi?
84	OG-9	Hayır.
85	B-OG	Evet.
86	OG-2	Neyi ispatlayacağımıza bağlı.
87	OG-3	İspatına göre değişir.
88	OG-13	Hocam şöyle ispatlayabilir miyiz onu? [*Sınıf gülüyor.*]
89	**MO**	Neyi?
90	OG-13	1, 1'dir. [*Parmağı ile gösteriyor.*]
91	**MO**	İspat [*mı*] yapmış oldun!
92	OG-13	Biz burada yazıyla 1 diyoruz [*defterini gösteriyor*] burada parmaklarımla.
93	**MO**	Görsel yapmış oldun. Yani sence çok iyi matematik bilmek gerekmiyor, karışık değil yani.
94	OG-13	Bazıları için gerekli ama çok ileri şeylerde değil.
95	OG-5	Kesin bir şey söylenemez.
96	**MO**	Peki, OG-4 sen ne söyleyebilirsin? Bu ifade doğru mu yanlış mı?
97	OG-4	Hocam bence ispatına göre değişir, bence yanlış hocam mesela basit ispatlar da var sonuçta onları yapmak için karmaşık sayı bilmek gerekmez.
98	**MO**	Peki, ispatlar olmadan da matematik yapılabilir, katılıyor musunuz?
99	B-OG	Hayır.
100	OG-3	İspatsız matematik;
101	OG-6	Susuz çöle benzer. [*Esprili olarak söylüyorlar ve sınıf gülüyor.*]
102	OG-8	Kanatsız kuşa benzer. [*Esprili olarak söylüyorlar ve sınıf gülüyor.*]
103	**MO**	Bu soruya gerçekçi olarak yaklaşacak biri var mı?
104	OG-6	Niye, yapılır yani. [*bence*]
105	**MO**	Yapılır değil mi! Ne yapılır mesela?
106	OG-6	Anlamadan yapılır, onun nerden geldiğini anlamazsın, ama yaparsın. Sonuca ulaşırsın.
107	OG-12	Ama o, formülden de ispatla çıktı yani. [*ispatlandığı için*]
108	OG-6	Tamam, da hazır formülü kullanırsın sen!
109	OG-9	Ama o formülü ispatla buluyorsun.
110	OG-3	İspatlaman lazım. [*formülü*]

EK-6
Transkript Metni

111	OG-6	Tamam, bir işlem var sonuca ulaşmak istiyor formülü buluyor.
112	OG-4	Tamamda formülü bulmak için ispat lazım işte.
113	OG-6	Hazır bulunmuş ama zamanında.
114	OG-3	Zamanında ispat yapılmış işte. [*OG-6'ya karşılık*]
115	**MO**	Zamanında yapılmış.
116	OG-6	Ben şu andan konuşuyorum.
117	OG-7	İyi ama yanlışı yapa yapa doğruyu bulmuşlar zamanında, ispatsız da matematik oluyor yani.
118	**MO**	Yani siz bu soruya katılmıyorsunuz bu durumda. [*Çoğunluğa göre değerlendirdi.*] - Şimdi fonksiyonlara başlayalım, önce fonksiyonların lise1 kısmını sonra lise son fonksiyonlarını işleyeceğiz.

16-48		14 MAYIS-Çrş (Mat-2) DS-13
1	**MO**	Tamam mı, yazdık mı? Fonksiyon türleri diyoruz. [*bu başlığı yazın anlamında*] Şimdi söyleyin bakalım, fonksiyon türleri nelerdi?
2	OG-8	Birebir.
3	OG-6	Örten.
4	**MO**	Evet, başka?
5	OG-13	Sabit.
6	OG-4	Sıfır fonksiyonu.
7	**MO**	Sıfır fonksiyonu da bir sabit fonksiyon!
8	OG-8	Permütasyon var mı?
9	**MO**	Permütasyon fonksiyon, başka?
10	OG-8	Sürekli. [*fonksiyon*]
11	**MO**	Hayır.
12	OG-9	Yok, artık. [*OG-8'e yönelik*]
13	**MO**	Bir tane daha var.
14	OG-6	Birim mi?
15	**MO**	Birim fonksiyon evet, başka?
16	OG-3	Bir tane daha mı var?
17	**MO**	Bir tane daha var haydi hatırlayalım.
18	OG-8	Haa değişken fonksiyon.
19	**MO**	İçine fonksiyonumuz vardı.
20	B-OG	Haa, evet.
21	**MO**	Fonksiyon türleri [*aynı anda tahtaya yazıyor*] 1) Birebir fonksiyon -şimdi bir fonksiyonun; f, A dan B ye bir fonksiyon olsun, tanım kümesinin farklı elemanları, kabaca bir tanımlarsak 1-1 fonksiyonu, farklı elemanların görüntüleri de farklı ise fonksiyona 1-1 denir. Her $x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f\ (x_2)$ ise f fonksiyonuna 1-1 fonksiyon denir. -Ya da bunun tam tersi şöyle de yapılabilir bakın. $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ ise f, 1-1'dir.Tanım kümesindeki her iki farklı elemanın görüntüsü farklı ise fonksiyon 1-1'dir.
		th: 1) Birebir fonksiyon: $f: A \to B$ $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ iken $f\ (x_1) \neq f\ (x_2)$ ise fonksiyon 1–1 fonksiyondur. $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ ise f, 1–1' dir.
22	**MO**	Önce şöyle şemayla gösterelim.
		th:  1-1; a, b den farklı görüntüler farklı; a, c den farklı; b, c den farklı görüntüsü farklıdır.
23	OG-4	Ama örten değil.
24	**MO**	Ama örten değil şu anda.
25	OG-7	Eğer B kümesinde 1 olmasaydı örten mi olacaktı?

26	**MO**	Evet, 1 olmasaydı örten olacaktı. [*soru*] R’ de 3x+5 fonksiyonunun 1–1 olup olmadığını irdeleyiniz.
		th: R’ de f(x) = 3x+5 fonksiyon 1–1 olup olmadığını inceleyiniz.
27	OG-6	1-1dir.
28	**MO**	Şimdi bunu tanım kullanarak ispatlamanız lazım, şu tanımlardan bir tanesini kullanarak ispatlamanız lazım. Eğer x_1’ i; x_2 den farklı kabul ediyorsanız $f(x_1)$ in $f\ (x_2)$ den farklı olduğunu göstereceksiniz, eğer x_1 ile x_2 nin görüntülerini eşit kabul ediyorsanız x_1 in x_2 ye eşit olduğunu göstereceksiniz, hangisini kullanalım?
29	OG-9	Bence 2.yi kullanalım.
30	**MO**	Tamam diyelim ki x_1 farklı x_2 olsun, şimdi ne yapmam lazım? 3 ile çarpmam lazım her iki tarafı üç ile çarparsam…
31	OG-8	Haa doğru, $3x_1$ eşit değildir $3x_2$.
32	**MO**	x_1, x_2 den farklıysa 3 katları da farklıdır değil mi? Şimdi her iki tarafa ne ekleyeceğim?
33	B-OG	5
34	**MO**	$3x_1 + 5$ farklı $3x_2 + 5$, şurası $f(x_1)$ dir bakın, şurası $f(x_2)$ dir. Gördüğünüz gibi x_1 i, x_2 den farklı kabul edip,
35	OG-7	İspatladık.
36	**MO**	Görüntülerinin de farklı olduğunu ispatlamış olduk, bu nedenle bu fonksiyon 1-1 fonksiyondur.
		th: $\left(\begin{array}{c} x_1 \neq x_2\ o\ l\ s \\ 3x_1 \neq 3x_2 \\ \underbrace{3x_1 + 5}_{f\ (x_1)} \neq \underbrace{3x_2 + 5}_{f\ (x_2)} \end{array} \right)$ ★ Peki öbürünü, siz öbür tanımı kullanarak ispatlayın bakayım. Yani $f(x_1)$ i $f(x_2)$ ye eşit kabul edeceksiniz.
37	OG-4	Aynısı.
38	OG-8	x eksi 5 bölü 3 dememiz lazım.
39	**MO**	Ne diyeceksiniz? $f(x_1) = f(x_2)$ yani x yerine x_1 yazacaksınız $3x_1 + 5$, $3x_2 + 5$ eşit olduğundan $x_1, x_2\ y$
40	OG-9	İspatlayayım mı?
41	**MO**	İspatla hadi ikinci tanımı kullanalım.
42	OG-9	[*Öğrenci tahtaya kalktı ★ üzerinde tüm ≠ ifadeleri yerine = yazdı.*] İşte oldu hocam.
43	**MO**	Öyle ispatlamayacağız tersinden gideceğiz.
44	OG-12	Oldu hocam işte.
45	**MO**	Olur mu? Bunu kullanıp [$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$] , bunu göstereceksin [$x_1 = x_2$]
46	OG-9	Neyi? Buradan başlayıp, bunu göstereceğim! [*MO’ un gösterdiği gibi eliyle gösteriyor ve şaşırıyor.*]
47	OG-2	Yaz tam tersinden yaz.
48	OG-9	Öyle yapacağım zaten.
49	OG-8	En alttan başlayacaksın. [*OG-9’a*]
50	**MO**	Birbirine eşitini verdi çok güzel.
51	OG-9	$f(x_1) = f(x_2)$ olsun.
52	**MO**	Hemen yerine yazalım.
53	OG-8	$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$
54	**MO**	$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$ sadeleşebilir, altına $3x_1 = 3x_2$ yaz adım adım 3’ler

		sadeleşebilir, $x_1 = x_2$
		th: $f(x_1) = f(x_2)$ $3x_1 + \cancel{5} = 3x_2 + \cancel{5}$ $\cancel{3}x_1 = \cancel{3}x_2$ $x_1 = x_2$ ✓
55	**MO**	R’ de $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun 1–1 olup olmadığını inceleyelim bakalım.
56	B-OG	Hayır / değildir / olmaz.
57	OG-9	İkisi aynı.
58	**MO**	Değildir, farklı olan iki elemanın görüntüleri aynı oldu. Nasıl bir ispat yapmış olduk? Örnek vererek ispat mı? Tanımı kullanın bakalım, tanımı kullanarak ispat istiyorum burada, 1. yi kullanacaksınız yani $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ olup olamadığını göstereceksiniz ya da $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ olduğunu kullanın, bu daha iyi ikinciyi kullanın bence.
59	OG-8	Ya burada içinde, mutlak değer içinde kökü olduğundan dolayı
60	OG-3	Hocam x_1 eşit değildir eksi…
61	**MO**	Öyle değil, öyle değil şunu kullanarak istiyorum: $f(x_1) = f(x_2)$ yi kabul edip $x_1{}'i$ ı $x_2{}'$ ye eşit olduğunu gösterebilirseniz 1-1dir. Hadi bunu kullanın burada.
62	OG-6	Nereye eşit oluyor? Mutlak değer falan mı geliyor?
63	**MO**	Tabi, mutlak değere gireceksiniz.
64	OG-9	Eksi ve artı olacak.
65	OG-6	%50,1-1’dir.
66	**MO**	%50,1-1’dir değildir! Ya 1–1’ dir ya da değildir.
67	OG-2	Hocam ancak $x_1 = x_2$ olursa [*1–1*] olur bence.
68	OG-12	Değil bence.
69	**MO**	Şöyle bakalım, ${x_1}^2 + 1 = {x_2}^2 + 1$, sadeleşti ${x_1}^2 = {x_2}^2$ oldu, buradan $\lvert x_1 \rvert = \lvert x_2 \rvert$ oldu. Buradan bakın 2 tane değer var: $x_1 = x_2$ veya $x_1 = -x_2$ Buradan iki görüntü olduğunu anlıyoruz, OG–3 ne dedi farklı elemanların görüntüleri de farklıdır. -x olarak -2’ yi alalım, ne olur? Birde x olarak 2’ yi alalım. f(-2)=5’dir, f(2) yine 5’dir. İkisini birbirinden farklı bakın, -2≠2 iken f(-2)=f(2) oldu oysa farklı olduğunu göstermen lazımdı demek ki bu fonksiyon 1-1 değil.
		th: $\underbrace{f(x_1) = f(x_2)}$ ${x_1}^2 + \cancel{1} = {x_2}^2 + \cancel{1}$ ${x_1}^2 = {x_2}^2$ $\underbrace{\lvert x_1 \rvert = \lvert x_2 \rvert}$ $x_1 = x_2 \lor x_1 = -x_2$ $x_1 = -2 \qquad f(-2) = 4 + 1 = 5$ $x_2 = 2 \qquad f(2) = 4 + 1 = 5$ $-2 \neq 2\ i\ k\ e\ n\ \ (-f2) = f\ (2)$
70	**MO**	İçine fonksiyon [*Başlık yazıp, şekil üzerinde çok kısa açıklıyor.*]

17-50		26 MAYIS-Pzt (Mat-4) TES-6 (Yazılı Uygulama)
1		-- **Teorem:** İki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır ispatlayınız -- [*MO sınıftaki her öğrenciye ispatı yapması için tek tek kâğıt dağıtıyor.*]
1	OG-13	Hocam?
2	**MO**	*Örnek verin kendinize göre bir yorumlayın bakalım.*
3	OG-13	Örnek versek olur mu?
4	**MO**	*Tabi, ne istiyorsan, nasıl düşünüyorsan!*
5	OG-3	İyide o ispat olmaz ki!
6	**MO**	*Ne demek istedim, örnek ver derken kafanda bir şey canlandır.*
7	OG-13	1 ile 2 arasında $\sqrt{3}$ var, irrasyonel sayı olur mu?
8	**MO**	*Bilmem artık sen karar ver.*
9	OG-8	İrrasyonel köklü sayı oluyor, yani 4 ile 16 arasında 9 var öyle düşünelim, 2 ile…
10	**MO**	*Herkes kendi yorumunu kendisi yapsın. [Açıklama yapmayın anlamında.]*
11	OG-1	İrrasyonel ne?
12	**MO**	*İrrasyonel köklü sayılar* $\sqrt{3}$ *,* $\sqrt{2}$*,* $\sqrt[3]{3}$ *gibi.*
13	OG-1	Bir iki sayıyla göstersek olur mu?
14	**MO**	*Artık siz kendinize göre kendi kanıtınızı yapın bakalım.*
15	OG-4	x ‘li falan göstermek lazım.
16	**MO**	*Birbirinize bakmadan herkes kendi kendine yapsın.*
17	OG-5	Hocam irrasyonel sayı köklü sayı değil mi?
18	OG-2	Hocam doğru değil ki bu. [*Verilen önermeyi kastediyor.*] -1 ile -2 arasında.
19	**MO**	*İyi düşün bakalım.*
20	OG-2	Eksi kök yok ki.
21	OG-8	- $\sqrt{3}$ [*var*]
22	B-OG	*i* var.
23	OG-9	Karmaşıklarda irrasyonel.
24	OG-3	Hocam buradaki bir [*ifadesi*] sadece bir [*tane*] anlamında mı, 2, 3, 4 tane de olabilir mi?
25	**MO**	*Bir tane vardır diyor yani.*
26	OG-9	En az 1.
27	OG-3	En az 1, çok sayıda var işte. [*çünkü*]
28	OG-8	- $\sqrt{3}$ irrasyonel sayı mı?
29	B-OG	Evet.
30	OG-6	İspatladım işte.
31	**MO**	*Biraz daha düşün. [Kâğıda bakıyor.]*
32	OG-9	Mesela ben 1 ile 2 arasında $\sqrt[3]{3}$ olduğunu gösterdim.
33	OG-5	En ücra sayıların arasında bile var.
34	OG-3	Olmasaydı desek,
35	**MO**	*Olmayana ergiyle ters örnekle de ispat yapabilirsin.*
36	OG-1	Bir yanlış gösterirsek doğru olduğunu ispatlamış olur muyuz?
37	**MO**	*Tabi onu da kullanabilirsin.*
38	OG-2	Hocam iki rasyonel sayının ardışık olması gerekli mi?
39	**MO**	*Yaa kendi düşüncenize göre bir şey gösterin bakalım, ne düşünüyorsunuz, ne gösterebiliyorsunuz.*
40	OG--	0 ile 1 arasında var mı?
41	OG-4	Var.

EK-6
Transkript Metni

42	OG-5	Her yerde var her yerde.
43	OG-4	½ nin karekökü irrasyonel oluyor yine değil mi?
44	OG-7	Hocam bir bakar mısınız? [*Kâğıdı gösteriyor.*]
45	OG-9	Her sayının karekökü irrasyonel sayı değil midir?
46	**MO**	*[OG–7' ye] Ama sen söylüyorsun [yazdıklarına bakıyor] örnek ver bir şeyler yap, ne yapıyorsun genelliyor musun? Aksine mi örnek veriyorsun? Çelişkiyle mi yapıyorsun ispatı?*
47	OG-3	Sözel olarak anlatabilir miyiz?
48	OG-5	[*OG–9 'a*] 4 yerine 4,5 un karekökünü al bakalım.
49	OG-9	Her sayının karekökü irrasyonel değildir o zaman.
50	OG-6	1 ile 2 arasında $\sqrt{3}$ var, karesini alarak kanıtlayabiliriz.
51	OG-3	Hocam aslında üçgenle falan olur mu acaba?
52	**MO**	*Olabilir bak güzel bir düşünce geldi.*
53	OG-5	Sayı doğrusu üzerinde ispatlayabilir miyiz?
54	OG-7	Ben öyle yaptım.
55	**MO**	*Olabilir, yani bakın bir sürü ispat çeşidinden bahsetmedik mi! Aksine örnek verme dedik, genelleme dedik, çelişki dedik, tümevarım dedik, değil mi?*
56	OG-5	Hocam bu, sayı doğrusu üzerinde!
57	**MO**	*Sizden istediğimiz şu; mantığınıza uygun şekilde kendiniz bir düşünün, ben size söyledikten sonra sizin ispatlamanızın hiç anlamı yok ki,*
58	OG-1	Hocam 1/∞ tanımsız mıydı?
59	**MO**	*1/∞ sıfırdır.*
60	OG-4	Çünkü sayı bölü sonsuz sıfırdır.
61	OG-13	0 ile 1 arasında var mı?
62	OG-3	Var $\sqrt{3}/100$
63	OG-5	Önemli olan düşünmemiz değil mi hocam?
64	**MO**	*Tabi, nasıl düşünüyorsun, nasıl düşünebileceğin.*
65	OG-4	Bir şey düşünemiyorum yaa.
66	**MO**	*Düşünürsün [dene] OG–4.*
67	OG-3	Haa, şöyle galiba.
68	OG-4	Buldum be.
69	**MO**	*Artık ne düşünüyorsanız, hangi bilgileri kullanıyorsanız, sizi serbest, özgür bırakıyoruz, benim ağzımdan bir şey alamazsınız siz kendiniz yapın.*
70	OG-9	Burada…[*kâğıdındakini gösteriyor MO' ya*]
71	**MO**	*Yani hep kareköklü sayılar mı irrasyoneldir? Küp kökler, dördüncü, beşinci kuvvetten kökler irrasyonel değil midir?*
72	OG-2	Onlar da var ama biz bir tane gösterdik mi tamam işte.
73	B-OG	Hayır /olmaz/tam tersi olur.
74	**MO**	*Genelleyeceksin bence.*
75	OG-2	İki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır diyor, bir tanesini göster tamam doğru işte.
76	OG-13	Hayır, bir tane yanlış çıkarsa.
77	OG-2	Hayır, iki rasyonel sayı arasında bir tane bul yeter, yani onu doğrular.
78	OG-6	Tamamını doğrulamaz ki.
79	OG-2	Tamamını demiyorum parça parça.
80	OG-1	Bir tane olmayanını gösterirsen kanıtlamış olursun.
81	OG-2	İyi de o değil ki buradaki.
82	OG-1	Olmayana ergi yöntemi işte.
83	OG-3	Hayır, eğer olmasaydı diyeceğiz, olmazdı diyeceğiz, bu yüzden olmalıdır diyeceğiz. Ama nasıl diyeceğiz? [*Olmayana ergi yönteminin nasıl uygulanacağını açıklıyor.*]

EK-6
Transkript Metni

84	**MO**	*Nasıl diyeceğiz, çelişki çıkacak oradan.*
85	OG-12	Ne değişecek olsaydı da aynı bence.
86	**MO**	*[OG-3'e] sen o düşündüğünü yap doğru düşünüyorsun bence.*
87	OG-1	Ama aynısı.
88	OG-4	Yaa, ben zihnimde çözdüm ama buraya [*kâğıda*] aktaramıyorum.
89	**MO**	*Zihnindekini kâğıda dökersen çok mutluluk duyacağım, bana söyleme kâğıda yaz.*
90	OG-3	Bir şey buldum, öyle bir şey olmasaydı [*önermenin ifadesini kastediyor*] bunlar aynı sayı olurdu doğru mu?
91	**MO**	*Bilmem, senin yorumların.*
92	OG-4	Ooo, matematiği çürüttün valla.
93	OG-13	Zil çalacak hocam. [*az zaman kaldı anlamında*] yardımcı olun [da *yapalım*.]
94	**MO**	*Hayır, bu sizin işiniz. Doğru ya da yanlış ne düşünüyorsunuz, sizin görüşleriniz lazım.*
95	OG-4	Yaa, şöyle işte ben sözel olarak ifade edeyim de; her iki rasyonel sayı arasında.
96	**MO**	*Tek bana değil, kâğıdına da anlat.*
97	OG-4	Ama hocam anlatamıyorum oraya işte.
98	**MO**	*Bana anlattıklarını oraya da anlat.*
99	OG-4	Her iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır. O rasyonel sayı da bir sayının karekökü.
100	OG-5	Bir şeyler yazdım kendi çapımda, sayı doğrusundan gittim ben.
101	OG-7	Bende.
102	OG-8	Ben bir şey yapamadım.
103	OG-3/6	…
104	OG-8	Zaten doğru olduğunu kanıtlayın demiyor ki gösteriniz diyor, ben de örnekle gösterdim.
105	**MO**	*Örnekle göstermek, göstermek mi oluyor? Biz öyle mi yapıyoruz?*
106	OG-2	Hocam i, 0 ile -1 arasında bir sayı değil mi?
107	**MO**	*i,* $\sqrt{-1}$ *demek*
108	OG-2	Yani 0 ile -1 arasında mı?
109	**MO**	*Bilemem.*
110	OG-2	Ya o zaman sıfırdan küçük şeyler için olmuyor. [*Önerme geçersiz anlamında.*]
111	OG-3	[*8-10 saniye sonra*] Ama iki farklı rasyonel sayı arasında diyor değil mi? Aynı sayı olmaz.
112	OG-8	O iki sayının karesini al, arasındaki sayılardan birinin kökünü al olur işte.
113	OG-1	Hocam sonsuzun karekökü sonsuz mudur?
114	**MO**	*[Evet anlamında başını sallıyor.]* $+\infty$*' dan bahsediyorsan tabi [eğer].*
115	OG-1	Buldum galiba, bakar mısınız?
116	**MO**	*Bakayım.*
117	OG-1	Şimdi bu bir sayı (sonsuzdan küçük bir değer) bu da sonsuz arasında bir değer.
118	**MO**	*Rasyonel sayı için sonsuzdan mı gidiyorsun [yola çıkıyorsun anlamında] yani?*
119	OG-1	Evet. [*MO negatif bir ifadeyle bakıyor OG-1'e.*]
120	OG-4	Hocam her iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır değil mi? Bunu ispatlamama gerek yok burada değil mi?
121	**MO**	*Hayır, [gerek] yok.*
122	OG-9	-1 ile 0 arasında var mı?
123	OG-4	-1 ile 0 arasında -1/2 var.

EK-6
Transkript Metni

124	OG-12	-0.01 de [*mesela anlamında*]
125	OG-2	Hayır, irrasyonel sayı yok.
126	OG-12	Onu köklü yazabilirsin nasıl olsa.
127	OG-2	Köklü yaz ne oluyor [*o zaman*], kaçın karesi -1 dir?
128	OG-4	OG–2 bak $\sqrt{\frac{1}{2}}'i$ onun arasındaki sayı.
129	OG-13	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ al.
130	OG-4	Hayır, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ alınca, 0 ile 1 arasında oluyor, *i'* li alınca.
131	OG-2	İyi de i, 0 ile 1 arasında değil işte.
132	OG-4	*i* sanal bir sayı [*OG–2 'ye söylüyor sonra MO' ya dönüyor*] *i* diye bir sayı yok değil mi hocam?
133	B-OG	Var var.
134	OG-13	Kök -1'dir o.
135	**MO**	*Kök içerisinde -1'i "i" kabul ediyoruz işte.*
136	OG-4	Var mı? [*MO' ya*]
137	OG-8	Ben şöyle yazdım [*Kâğıdı eline alıp, okuyor.*] Her iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır. Bu rasyonel sayıları irrasyonel biçimde yazabiliriz. Bu yazdığımız irrasyonel sayılar, rasyonel sayının arasında olduğundan [*ifade = önerme doğrudur anlamında.*]
138	**MO**	*[i üzerine tartışmalar devam ediyor.] Kendinize ait bir düşünce üretemiyorsunuz yani.* *Peki, size bir şey söyleyeyim, bir rasyonel sayıyla irrasyonel sayının toplamının yine irrasyonel olup olmadığına bakın bakalım.*
139	OG-7	O doğru, çünkü onu şöyle düşünebiliriz.
140	**MO**	*İspatlayacaksınız.* [*Zil çalıyor.*] Tamam, kâğıtları verin, toplayalım şunları hemen.

18-51		27 MAYIS-Salı (Geo-1) TES-7
1	**GO**	Daha önce matematikte ispatlar yaptınız, şimdi de geometri ile ilgili ispatlar yaptınız; matematikteki ispatlar ile geometrideki ispatlar arasında sizce ne gibi farklılıklar var?
2	OG-5	Geometride ispat yapmak daha zor!
3	**GO**	Neden açıklar mısın?
4	OG-5	Daha uzun, daha karmaşık bir süreç, uğraş gerektiriyor.
5	**GO**	Uğraş derken?
6	OG-5	Mesela tümevarımda biz kolaylıkla yaparız o tip ispatları ama burada daha fazla uğraş gerekiyor, belli bir yolu yok uğraşarak bulunuyor.
7	**GO**	Peki, OG–12.
8	OG-12	Matematikte önemli olan işlem, işlemi bildikten sonra uzun olanları bile yapabiliyorsun ama geometride hem şekli çözeceksin hem de işlemler var.
9	**GO**	Evet, OG–4.
10	OG-4	Hocam geometride hem cebir var ispatta, hem de şekil var, mesela A,B,C gibi harfler veriyoruz ve onların arasında işlemler yapıyoruz. Matematikte öyle değil, şekil yok en azından.
11	**GO**	İşlem var, peki şey dikkatinizi çekti mi? Sözel verilen, şekil vermemiş onlarlar [*ispatlar*] için öyle sorular için ne dersiniz?
12	OG-9	[*Parmağını kaldırıyor ve GO sözü ona veriyor.*] Hocam geometri ispatlarında hem geçmişten gelen bilgilerimizle yorum yaparak o soru için ayrı bir şekil çizmemiz gerekiyor, o şekil üzerinden sorularını bulmamız gerekiyor.
13	**GO**	İlk aşama ne olmuş oluyor? Tarif edileni anlayıp, kâğıda dökebilmen gerekiyor, olimpiyat çalışmalarında bununla karşılaşmıştınız, başka [*OG–8 el kaldırıyor*] OG–8.
14	OG-8	Ben [*geometri ile matematikteki*] yöntemler arasındaki farklılıklara değinmek istiyorum.
15	**GO**	Evet.
16	OG-8	Geometrideki ispat yöntemleri arasında alanlara parçalama, açıortaylardan yararlanma, kenarortaylardan yararlanma tarzında veya Pisagor'u sağlayarak iki eş üçgenlerden yararlanarak gösterebiliriz; fakat matematikte bunları yapamayız, matematik daha fazla sayılara dayanıyor.
17	**GO**	Evet, OG–3.
18	OG-3	Bence; matematikteki ispat daha zor geometridekinden, yani geometride bir şeyi görünce gerisi geliyor.
19	OG-12	Göremezsen.
20	OG-3	Göremezsen gelmiyor.
21	**GO**	Yani ya tam oluyor, ya sıfır.
22	OG-13	Matematikte belli bir yere kadar götürebilir.
23	**GO**	Yarım puan alabilirsin. [*gülüyor aynı zamanda*]
24	OG-6	Matematikte daha yöntemler belirli böyle, mesela tümevarım kalıplaşmış çoğu şeyde ispatlar da kullanılıyor.
25	**GO**	Ama mesela tümevarımla ispatlayacağını söylüyor mu [*soru*] sana?
26	OG-6	Söylemiyor ama.
27	**GO**	Sen onu sezebiliyorsun, yöntemini belirleyeceksin sonra.
28	OG-6	Evet, geometride ise önce göreceksin, ona göre şekil ve yorumlar yapacaksın.
29	**GO**	OG-7.
30	OG-7	Ben şöyle düşündüm; matematikte daha önce ispatlanmış şeyden gidebiliriz, işimizi kolaylaştırır ispat yaparken, ama geometride daha önce ispatlanan şeyi de ispatlamamız gerekiyor ispat yaparken, ondan dolayı daha karmaşık.
31	**GO**	Daha karmaşık, OG–11.

EK-6
Transkript Metni

32	OG-11	Şey gibi mesela hocam, matematikte ispat yaparken nereye gideceğimizi biliyoruz, yani direk işlemi yaparak sonuca varabiliriz, ama geometride ne tür bir ek çizim, bir sentetik çözüm yapacağını bilemiyor insan [*sentetik lafına sınıftaki öğrenciler gülüyor*], yani nasıl bir hareket yapacağını bilmiyor.
33	**GO**	Sezgilerini.
34	OG-11	Sezgilerini evet, alışmış olmak,
35	**GO**	Tecrübelerini kullanmak gerekiyor.
36	OG-11	O şekilde.
37	**GO**	OG-2
38	OG-2	Hocam bir de geometride matematikten daha kesin sonuçlar elde ederiz, çünkü geometri sonuçta görsel bir ders olduğu için görerek yapıyoruz ama matematikte bir şeyi ispatlamak için önce belli kuralları kabul etmeniz gerekiyor, ona göre doğru olup olmadığı ispatlanıyor.
39	**GO**	Hı hı.
40	OG-2	Ama geometri kadar kesin, ispat kesin sonuç veremiyor.
41	**GO**	Peki, şu mu daha cazip geliyor size mesela bir sözel ispat yazmıştık, |GI|=b-a/3 olduğunu kanıtlayınız demiştim, yani size bir şey söylüyor ve onu bulmaya çalış diyor. Bu mu size daha cazip geliyor yoksa GI uzunluğunu a ve b türünden ifade ediniz [*mi?*]
42	B-OG	a ve b türünden ifade ediniz.
43	**GO**	Yani hangisi daha heyecan verici geliyor size bulmak? [*için*]
44	B-OG	a ve b türünden.
45	**GO**	Şimdi peki şeyin kolaylığı yok mu? Size böyle bir şey vermesinin kolaylığı olmaz mı? b-a/3 olduğunu kanıtlayınız.
46	OG-3	b-a/3 diyor ya mesela bize bir oran bulmamız gerektiğini gösteriyor, bana öyle geldi, mesela paralel çizebiliriz.
47	**GO**	Değil mi? ne olduğunu kanıtlayınız deyince yardımcı olmuş oluyor sanki! Ama diğeri daha mı şey?
48	OG-4	Psikolojik olarak.
49	OG-11	Heyecan verici.
50	OG-8	Hocam bu b-a/3 ü verdiğinde biz kendimizi onu elde etmeye odaklıyoruz ama diğerinde daha özgür tarzda a ve b' yi istediğimiz şekilde şey yapabiliriz kural olmadan.
51	**GO**	Seni sınırlaya da bilir, bunu kanıtlayınız demesi, yardımcı da olabilir, yani düşüncelerini engelleye de bilir yardımcı da olabilir.
52	OG-5	Ben şöyle düşünüyorum; o zaten olan bir şey, o zaman fazla bağlantılılığı yok olan bir şey, soru ile bağlantı kuramıyorum.
53	**GO**	Biri bulmuş ben …
54	OG-5	Evet, nasıl mesela bir soruyu siz sorduğunuzda bir arkadaşım cevap verdiğinde içim [*isteği*] kaçıyorsa bu da aynı durum baş gösteriyor bende.
55	**GO**	Ama bir soru size soruluyorsa cevabı vardır. Mesela ben kaç cm diye sorduğunda ben onun cevabını biliyorum.
56	OG-5	Var ama bizim onu görmemiz, var mı yok mu diye değil bizim onu bulmaya çalışmamız daha önemli olmayan bir şeyi bulmaya çalışmak.
57	**GO**	Başka karşılaştırdığımız ya da genel olarak ispat ile ilgili fikirleriniz, ispatlamak iyidir, gereklidir, kimin işine yarar?
58	OG-7	Matematikçilerin işine yarar.
59	OG-4	Hocam, ben bunu söylemiştim önceden ama ispat yapmak bir şeyin çözümü için farklı yollarla düşünülebilir mesela mühendislikte proje yapacak bir insan ona yardımcı olur mesela, ufkunu geliştirir, daha mesela bir şeyi yapacak, daha gelişmişini yapabilir.
60	**GO**	Evet, etraflıca düşünüyorsun, evet OG–8. [*Elini kaldırdı.*]

EK-6
Transkript Metni

61	OG-8	Daha önce söylemiştim ama bu sefer farklı bir şey söyleyeyim, ispat aslında günlük hayatımızda çok işimize yarayabilir, örneğin OG–3 arkadaşımızın projesindeki gibi oyunlara daha önceden kafa yorarsak ve o oyunlar üzerinde ne yaparsak biz kazanırız diye düşünürsek, oyunlarda da daha başarılı oluruz.
62	**GO**	Düşünce sistemi, düşünce şeklidir.
63	OG-13	Mesela satrançta da var öyle şeyler, daha önce ispatlanmış bir şeyler var; üç dört hamlede oyunu bitirebilecek hamleler var, mesela onlar ispatlanmış daha önce ve öyle yapılırsa oyun bitiyor yani.
64	OG-9	Çoban matı.
65	OG-11	Bazen formül aklına gelmiyor mesela sınavda, bir saat formülü ispatladığım bile oluyor yani.
66	**GO**	Tabi eğer ispatla hiç uğraşmadıysan, unuttuğun formülü çıkarmak için hiçbir şansın kalmıyor, hafızanın dışında, hafızanı kullanmanın dışında bir yetenektir ispatlamayı öğrenmek.
67	OG-11	Evet, daha zor oluyor hocam.
68	**GO**	Trigonometride mesela şeyi söylemişimdir yazın yaptığımız çalışmada o dönüşüm, ters dönüşüm formülleri, eğer toplam fark formüllerini biliyorsan alt alta topla çıkar, unuttuğun zaman sana cevap verir.
69	OG-11	Daha riskli oluyor.
70	OG-7	Mesela biz tümevarımla ilgilendik bu yıl matematik derslerinde falan, geometride mesela hocam sonuç neyse o yani, atıyorum mesela sonuç $3\sqrt{3}$ çıkıyor $3\sqrt{3}$, ama yani matematikte ispat yaparken sonucu nasıl buluyorsak mesela (k+1).(k+2) çarpı … bölü 3 gibi onu daha değişik şekilde de bulabiliriz yani.
71	**GO**	Tabi birkaç farklı ispat! Geometri de de [*bu durum*] sanki olur gibi geliyor bana.
72	OG-11	Hatta daha fazla olur.
73	**GO**	Bir kaç farklı çeşit ispat.
74	OG-11	Bir alan hesaplaması mesela…
75	**GO**	Bir alan kullanırsın, bir başka yöntem kullanırsın eşlik, benzerlik kullanırsın.
76	OG-8	Dörtgenin alanında yapmıştık, hem paralel çizerek kanıtlamıştık, hem de alt taban artı üst taban.
77	**GO**	Özellikle o dörtgenlerdeki özelliklerde 2–3 yöntem olabilir.
78	OG-8	Bir de hocam geometride ispat, bir şeyin ispatı başka bir sorunun çözümünde yardımcı da olabilir.
79	**GO**	O kesin, o konuda her zaman size söylediğim bir şey vardı ilk günden beri, ispatları boşuna yapmıyoruz. Onlar sizin çözüm teknikleriniz olacak sorularda. Direk özellik soran bir soruyla kolay kolay karşılaşmazsınız, birinci testlerde görürüsünüz onu kitaplarda ve sınavlarda göremezsiniz; yani-şunun uygulaması çıktı yok öyle bir şey dış kuvveti uyguladın bitti bir soru, öyle bir soru fazla göremezsiniz.
80	OG-4	Ama hocam, ÖSS' de bir soruyu yaparken ispat kullanmak, bir sürü zaman götürüyor.
81	**GO**	Aslında şeyi geometride dediğim şeyi çok kısa bir sürede çıkarabilirsin Senin düşünme gücünü geliştirir [*ispat*], şeyle sınırlı değilsin soru çözmekle sınırlı değilsin daha üst düzeyde bir iş yapıyorsun [*ispat yaparken*], bu [*ÖSS sorusu*] sana daha kolay gelecek, hiç alakasız şeylerde olmadığı için seni başka yere götürmeyecek.

EK-7

Matematik ve Geometri Derslerindeki İspat ve İspatlamaya Yönelik Söylemler İçerisinde Yer Alan Sözcüklerin Listesi ve İfade Kesitleri

MATEMATİK			
(DS-1)	*Gösteriniz*	|r|<1 olmak üzere $A=\sum_{n=1}^{n} n.r^{n-1}$ in değerinin $\frac{1}{(1-r)^2}$ olduğunu gösteriniz.	*(3)*
	İspat	İspat yapacağız	*(8)*
	Teorem	Tanım ya da teorem deyin	*(10)*
	Formül	… çünkü bizim bir formülümüz vardı neydi o?	*(20)*
	İspat	$1+r+r^2+r^3+\ldots$, bunun biz $\frac{1}{1-r}$ olduğunu biliyoruz. Daha önce de ispatladık.	*(21)*
	Formül	Sonuç nedir burada şimdi? Direk formülü kullanabilirim.	*(48)*
	Kanıt /ispat	Peki, kanıtı yazın. Anladık mı ispat yöntemini.	*(55)*
	Formül	Buradan kullanabileceğimiz bir formül elde etmiş olduk. Tamam mı çocuklar!	*(59)*
	Formül	Direk formülü eğer bu formülü bulmasaydık yöntemin kendisini kullanacaktık bakın.	*(64)*
(DS-4)	*Gösteriniz /ispat*	Şimdi matrislerde toplama işleminin değişme özelliği vardır, yani A+B=B+A Bunu nasıl gösteririz, nasıl ispatlarız? Genel ifade olarak hemen bir verelim. Bu matrisin yerine [*A' yı kastediyor*] $[d_{ij}]_{mxn}$ türünden artı $[b_{ij}]_{mxn}$ eşittir.	*(15)*
	İspat/ gösteriniz	Matrislerde toplama işleminin değişme özelliği var. Eşitliğin bir tarafını kullanıp öbür tarafını elde ettik. * Daima biliyorsunuz ispatta eşitliğin bir tarafını kullanıp öbür tarafını elde ediyorduk. * Tamam mı? Şimdi ikinciyi siz ispatlayacaksınız, ben yazıyorum. (A+B)+C eşittir birleşme özelliği var. A+(B+C) hadi siz gösterin	*(19)*
	Kanıt	Hayır, kanıtları da yazıyorsunuz.	*(40)*
	İspat	şunun yerine A yazdığımızda sonucu görürüz. Bunun için ispat yapmaya gerek yok.	*(51)*
	Kanıt	Kanıtlamak istiyorsan hemen gel buyur, tahta seni bekliyor.	*(60)*
(DS-5)	*Formül*	[*OG-11'in yaptığı örnekte bulduğu A^{-1} ifadesini kastediyor.*] Şimdi bulacağımız formülle kıyaslayıp hata var mı, yok mu bakalım. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin çarpma işlemine göre tersinin kuralını bulunuz.	*(1)*
	İspat	Hayır, bu kural, ispatlıyorsun.	*(9)*
	İspat	Evet, ispatlıyorsun, haydi. Bu da burada dursun [*OG-11'in yaptığı örnek*] kurala göre, bulduğumuz kurala göre doğruluğunu kontrol edeceğiz.	*(11)*
	Formül	Dinle, 2x2 türündeki bir matrisin tersini bundan sonra şu formülü kullanarak bulacaksınız, nasıl buluyoruz?	*(49)*
	Formül/ ispat	Size 2x2 türünde bir matris verildiğinde önce $a.d-b.c$ ye bakacaksınız sıfırdan farklı mı diye, sıfırdan farklıysa o zaman tersini bulacaksınız. Şimdi şöyle, artık bu formülü kullanıyoruz bakın bu kadar ispat yaptık bunları gösterdik.	*(50)*
(DS-6)	*İspat*	İşte onun için onu tanımladık direk vermedik, ispatladık o nedenle yaptık, mesela biz ne demiştik, şöyle yazmamış mıydık bakın A eşittir a,b,c,d böyle dersek bunun determinantı detA eşittir a,b,c,d o da eşittir a.d- b.c dir.	*(25)*
	İspat	Bunu bu şekilde tersini verirken determinanttan hiç bahsetmeden ispatlayarak bunu elde etmiştik, şimdi örnek yapalım.	*(26)*
(DS-8)	*Gösteriniz*	$\log_p.\log_p \sqrt[p]{\sqrt[p]{\ldots\sqrt[p]{p}}}=-n$ olduğunu gösteriniz.	*(2)*
	Gösteriniz	Hadi, gayet kolay bir soru, siz orada –n olduğunu gösteriniz deyince korkmayın.	*(22)*

EK-7

Matematik ve Geometri Derslerindeki İspat ve İspatlamaya Yönelik Söylemler İçerisinde Yer Alan Sözcüklerin Listesi ve İfade Kesitleri

(DS-9)	*İspat/ tümevarım*	$\forall\, n \in N^+$ için $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ olduğunu. Evet, tümevarımla ispatlayınız.	*(187)* *(189)*
	Gösteriniz /tümevarım	$\forall$n$\in N^+$için $3^{2n} - 1$ sayısının 8 ile bölündüğünü tümevarımla gösteriniz.	*(239)*
	Tümevarım/ gösteriniz	Hayır, tümevarımla gösteriniz.	*(241)*
	Tümevarım/ gösteriniz	Hayır, tümevarımla istiyorum, tümevarımla istiyoruz beyler, ne yapıyoruz? n sayma sayısı olduğu için,	*(244)*
	İspat	… yani $3^{2k} - 1$'in bir a sayısının 8 katı olduğunu gösterdik. Şimdi ondan sonra, ben önce yazayım siz ispatlayın bakalım. n= k+1 için $3^{2k+2} - 1$'in ben ne ile bölündüğünü göstereceğim?	*(258)*
	Gösteriniz	Ama sen işte bunu ne yazdın? B olsun, B olduğunu göstereceksin sen daha, B olduğunu kabul ediyorsun, B olduğunu göstereceksin. O zaman sen burada ne yapacaksın, bunu bu tarafa at ya	*(274)*
	İspat	Göster, modlu düşünmeyeceksin ama peki, arkadaşınız modlu bir ispat yapmış.	*(282)*
	Çürütme/ ispat	Çürütelim biz onu, şöyle tümevarımla ispat yapımı 3 aşamadan oluşur.	*(286)*
	Gösteriniz	Biz onu adım adım gösteriyoruz.	*(288)*
	Tümevarım/ ispat	Ee ne olmuş, bitti. Ben tümevarımla ispat istiyorum.	*(297)*
	Tümevarım/ ispat	Hayır, siz bir tarafı hep sıfır kabul ediyorsunuz, oysa tümevarım üç aşamalı bir ispat yöntemidir. Bunun için 1 olarak göstereceğiz, bunun için k doğru olarak kabul edeceğiz k+1 için sol tarafta ikincisinde doğru kabul ettiğini kullanıp üçüncüsünün doğru olduğunu göstermenin ispatıdır.	*(299)*
	Tümevarım	O [OG-12] tam tümevarım şekliyle çözdü.	*(303)*
	Tümevarım/ gösteriniz	$\forall n \in N$ için $12^n + 10$ sayısının 11 ile bölündüğünü tümevarım ile gösteriniz.	*(304)*
	Tümevarım/ gösteriniz	Altını çiziyorum [*tümevarım kelimesinin altını çizdi*] gösteriniz.	*(306)*
	Tümevarım/ ispat	Tümevarım ispatını yerleştiriyor, mantığını.	*(308)*
	Formül	Tamam, bak şimdi daha başka formüllerde yazacağım. Yani bir şeyi bir yoldan izleyip hep aynı şeyi kullanmayın, mantığınızı başka açıdan da geliştirmeniz lazım.	*(310)*
	Tümevarım/ gösteriniz	Tümevarımla gösteriyorsunuz.	*(313)*
	Tümevarım/ gösteriniz	$\forall n \in N^+$ için $P(n): n! \leq n^{n-1}$ olduğunu tümevarımla gösteriniz.	*(327)*
	Gösteriniz	Bak şimdi sen her iki tarafı birden kullanıyorsun. Neydi bir tarafı kullanıp diğer tarafı göstereceksin.	*(335)*
	Gösteriniz	$n = k + 1$ için $k + 1! \leq (k+1)^k$ oldu. Bu ifadenin doğru olduğunu göstereceğiz, önce bir yazalım.	*(348)*
	Tümevarım	Evet, çok güzel, amacımız burada tümevarımı kullanırken...	*(350)*
	Tümevarım	1 dakika, 1dakika bir tarafı kullanacaksın, biz neden n=k için doğru kabul ettik! Bunu kullanmak için tümevarımda.	*(352)*
	Tümevarım	İkinciyi kullanacağız, doğru kabul ettiğimizi kullanmıyor muyuz tümevarımda, kullanıyoruz. … Ne yapıyoruz biz tümevarım prensibinde doğru kabul ettiğimiz şeyi kullanıyoruz, biz bunu nasıl kullanıyoruz. Ya bunu olduğu gibi yazıp her iki tarafı çarpıyorduk, ya da bunun baş kısmını açıyorduk öyle kullanıyorduk ikisi de doğru diyorduk. Anladık. [*mı?*]	*(354)*
	Tümevarım	Yani sen [*OG-11'e*] orada ikisini birden kullanıyorsun bir doğruluk gösteriyorsun ama tümevarımı kullanmıyorsun, tam tümevarım şeklinde düşünmüyorsun. Anladık mı bunu?	*(356)*

EK-7

Matematik ve Geometri Derslerindeki İspat ve İspatlamaya Yönelik Söylemler İçerisinde Yer Alan Sözcüklerin Listesi ve İfade Kesitleri

(DS-10)	*Gösteriniz*	Toplam, çarpım sembolü ile ilgili soru çözüyorduk, devam edelim. 1.2+2.3+3.4+…+n.(n+1)=$n.(n+1).(n+2)/3$ olduğunu göstermiş miydik?	*(92)*
	Gösteriniz	Gösterdik mi, o zaman bunu kullanarak şunu istiyorum; Olduğuna göre (n+1).(n+2)+(n+2).(n+3)+…+(2n-1).2n in sonucu kaçtır?	*(94)*
	Gösteriniz	$\sum_{k=1}^{n} k.k!$ =(n+1)!-1 olduğunu gösteriniz. Tümevarımla istemiyorum yalnız, tümevarım gösterebilirsiniz ama tümevarımla değil toplam sembolünü kullanarak göstermenizi istiyorum.	*(135)*
	Tümevarım/ ispat	Tümevarımla ispat yapılır.	*(144)*
	İspat	Onu sen düşüneceksin, ben böyle düşündüm, sen de düşündüğünü ispatlayabiliyorsan kutlarım o zaman seni.	*(146)*
	Gösteriniz /ispat	k+1 ile k! ayırdık sonra teker teker yazdık, sadeleşti bakın sonuçta k, 1' den n' e kadar k.k! in (n+1)!-1 olduğunu göstermiş olduk. O zaman şöyle soruları kullanabilir miyiz? $\sum_{k=1}^{100} k.k!$ nedir dersem, bunu bakın (n+1)!-1 yani 101!-1 yazabilirsiniz bakın ispatladığınız bir şeyi kullanacaksınız.	*(151)*
	Formül	Bakayım, tamam, sen bunu n' e kadar yaz önce formülde sonra 99' a geç.	*(158)*
	Formül	k=1 den n' e kadar düşün, ondan sonra sen formülü buna uygula k+1-1 buradan…	*(160)*
	Formül	Bu formülü kullanabileceğim genel bir formül elde edelim. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ yazdık mı? Şimdi yukarıya [*paya*] bir +1, bir -1 ilave edeyim, ilave edebilir miyiz bunu!	*(163)*
(DS-11)	*Formül*	Evet, çok güzel, formülden [*Sonra dolaşırken OG-12'nin defterine bakıyor.*] tamam, güzel OG–12 bundan sonra …	*(38)*
	Tümevarım/ gösteriniz	$\forall n \in N^+$ için $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ olduğunu tümevarımla gösteriniz.	*(69)*
	Tümevarım	Bunu ben karmaşık sayılarda göstermiştim, ama şimdi tümevarımla istiyorum, hadi.	*(71)*
	İspat/ tümevarım	Önce yerinde yapsın bakalım, biz bunu karmaşık sayılarda nasıl ispatlamıştık? Genelleyerek ispatlamıştık; 2.kuvveti, 3.kuvveti, 4.kuvveti diye alıp sonra genellemiştik değil mi ama şimdi tümevarımla istiyoruz.	*(75)*
	Tümevarım	Tümevarımla istiyorum.	*(81)*
	Tümevarım/ gösteriniz /ispat	Ya onun öyle olduğunu biliyorsun, tümevarımla göstereceğiz. Biz onun öyle olduğunu ispatladık, kullanıyoruz da karmaşık sayılarda, benim istediğim o değil ki bunun tümevarımla ispatı diyorum. Ne yapacağız? n=1 için doğruluğunu göstereceksen, n=k için doğru olduğunu kabul edeceksin, k+1 için doğru olduğunu göstereceksin.	*(89)*
	Tümevarım/ gösteriniz	n>1 ve n∈N için $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ olduğunu tümevarımla gösterelim.	*(107)*
	İspat	Ne gerek var değil mi, belli olan bir şeyi ispatlamaya. [*kinaye*]	*(111)*
	Tümevarım/ gösteriniz	Bakın n 1'den büyük, n=1 için denemeyeceksiniz, n=2 için doğru olduğunu göstereceksiniz. Tümevarımla gösteriyoruz.	*(114)*
	Tümevarım	Bu apaçık ortada olan şeyi tümevarımla göster.	*(116)*
	Tümevarım	Bilmiyorum artık, n=2 için bir kere doğru olduğunu görün n yerine k koyun doğru kabul edin, önce bir bunları yazın tümevarımın aşamalarını yazın, n=k+1 yazın doğru olduğunu gösterelim şimdi onun.	*(121)*
(DS-13)	*İspat*	Şimdi bunu tanım kullanarak ispatlamanız lazım, şu tanımlardan bir tanesini kullanarak ispatlamanız lazım. Eğer x_1' i; x_2 den farklı kabul ediyorsanız $f(x_1)$ in $f\ (x_2)$ den farklı olduğunu göstereceksiniz, eğer x_1 ile x_2 nin görüntülerini eşit kabul ediyorsanız x_1 in x_2 ye eşit olduğunu göstereceksiniz, hangisini kullanalım?	*(28)*
	İspat	Görüntülerinin de farklı olduğunu ispatlamış olduk, bu nedenle bu fonksiyon 1-1 fonksiyondur. … Peki öbürünü, siz öbür tanımı kullanarak ispatlayın bakayım. Yani $f(x_1)$ i $f(x_2)$ ye eşit kabul edeceksiniz.	*(36)*

EK-7
Matematik ve Geometri Derslerindeki İspat ve İspatlamaya Yönelik Söylemler İçerisinde Yer Alan Sözcüklerin Listesi ve İfade Kesitleri

	İspat	İspatla hadi ikinci tanımı kullanalım.	*(41)*
	İspat	Öyle ispatlamayacağız tersinden gideceğiz.	*(43)*
	Gösteriniz	Olur mu? Bunu kullanıp $[3x_1 + 5 = 3x_2 + 5]$, bunu göstereceksin $[x_1 = x_2]$	*(45)*
	İspat /gösteriniz	Değildir, farklı olan iki elemanın görüntüleri aynı oldu. Nasıl bir ispat yapmış olduk? Örnek vererek ispat mı? Tanımı kullanın bakalım, tanımı kullanarak ispat istiyorum burada, … olup olmadığını gösteriniz ya da …	*(58)*

GEOMETRİ			
(DS-2)	*Teorem*	Peki, şöyle bir teorem yazalım, dikme ve eğikler ile ilgili bir teorem.	*(1)*
	İspat	Bir düzleme dışındaki bir noktadan dikme ve eğikler çizildiğinde, 3 şeyi ispatlayacağız. a) Dikme eğiklerden kısadır. b) Uzunlukları eşit olan eğiklerin ayakları, dikme ayağından eşit uzaklıktadır. c) Eğik ayağı, dikme ayağından uzakta olan eğik diğer eğiklerden daha uzundur.	*(2)*
	İspat	Her biri için ayrı bir şekil çizerek ispatlayacağız. Herkes kendi başına uğraşsın.	*(3)*
	İspat	Evet, o zaman şöyle yazalım. (th: $\lvert A\ ł\rvert > \lvert AA'\rvert$) -İspatla ilgili sorusu olan var mı?	*(45)*
	İspat	İspatlarda daha önce yapmıştık.	*(49)*
	İspat	İspatı yaparken tabi bir kendimizi ikna etmek var, açıklama yapmak var, bir de ispat yapmak var. -İspat yaptığın zaman onun herkesçe aynı olması gerekir, ortak bir dille yazmamız gerekir.	*(51)*
	İspat	Peki, şimdi b' yi bu şekilde ispatlamaya çalışalım.	*(56)*
	İspat	Önce bir arkadaşlarına açıkla bakalım neden olduğunu sonra da ispatını yapalım, önce açıklama yapalım.	*(67)*
	İspat	Kenar kenar eşitliğinden eşliğinden desek olur mu? -Bu üçgenle bu üçgen kenar-kenar eşitliğine sahiptir oradan. -Şimdi bunu arkadaşlarına açıkladın, yazalım ispatını yapalım. -İspat denen şey şu, düzleme bir ad ver, D düzlemi de, tamam. - $A\ ı'$ diktir D düzlemi diyelim. Şekilde verilenleri yazıyla yazalım	*(71)*
	Teorem	Sonra başka ne veriliyor teoremde?	*(72)*
	Gösteriniz	Bunlar verilenler, benim merak ettiğim ne? … Neyi göstermeye çalışıyorum?	*(74)*
	Gösteriniz	Yok, göstermek istediğim nedir? Bak [*Tahtada b şıkkını göstererek okuyor.*] Dikme ayağından eşit uzaklıktadır.	*(76)*
	Gösteriniz	$A'B$ uzunluğu eşittir $A'C$ uzunluğu. Bunu göstermeye çalışıyorum tamam mı?	*(77)*
	İspat	Soldaki a kısmına hipotez denir. Sağdaki b kısmına ispatlamamız gereken şey.	*(78)*
	İspat	Evet, orada direk sonucu yazabilirsin. $A'B$ eşittir $A'C$. İspat bitti, bitti işaretini koy.	*(80)*
(DS-3)	*Teorem*	Üç dikme teoremi (Ü.D.T)	*(24)*
	Teorem	Bu da bir teorem, ancak meşhur diğerlerine göre daha meşhur bir teorem; şöyle diyelim: Bir D düzlemi dışındaki bir A noktasından düzleme ve düzlemdeki bir d doğrusuna iki dikme çizilirse dikme ayaklarını birleştiren doğru parçası d doğrusuna dik olur.	*(25)*
	Teorem	Ne diyor teoremin sonunda bu dikme ayaklarını, dikme ayakları nelerdi C ile B, C ile B' yi birleştirdiğimde ne olurmuş, nereye dik olurmuş? d doğrusuna.	*(27)*
	İspat	İspat diyelim. [*yazalım anlamında*] Verilenler neler bir yazalım, şekle göre yazalım. A noktası düzlemin dışında bir noktaymış. A eleman değil D düzlemi. d doğrusu düzlemin içindeymiş, onu yazdık. Başka ne verilmiş?	*(35)*

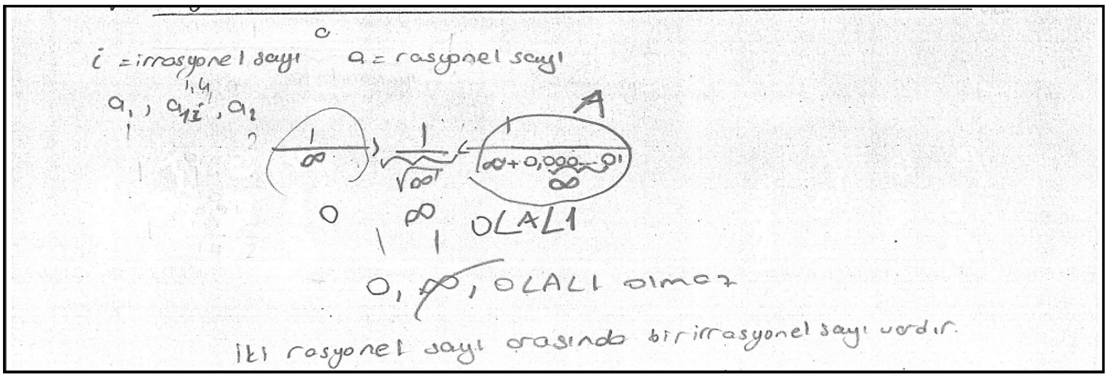
EK-7
Matematik ve Geometri Derslerindeki İspat ve İspatlamaya Yönelik Söylemler İçerisinde Yer Alan Sözcüklerin Listesi ve İfade Kesitleri

	Gösteriniz	Evet, AC dik d, göstermek istediğimiz şey ne?	*(39)*
	Teorem	Şimdi üç dikme teoremi neydi bir kez daha bakalım. Bir nokta var düzlemin dışında, düzleme dik indiriyorsun, sonra düzlemin içindeki doğruya dik indiriyorsun ve dikme ayaklarını birleştirdiğinde bunların dik olduğunu söylüyor. -Bu, bana uzunluk hesaplarında lazım olacak	*(52)*
	Teorem	Onu teoremde söylemiştik, CD dik olsun d ye bu durumda ne olur?	*(58)*
	Teorem	Bu işi üç dikme teoremine dayandırsak zannedersem ikna oluruz, zaten teorem o yüzden var, yani sana öyle geldi, bana öyle geldi, işte arkada yok önde yok gibi şeylerin daha bilimsel açıklaması teoremlere dayandırmaktır.	*(95)*
	Teorem	Üç dikme teoremini tekrarlıyorum. TB düzleme dik, sonra BA, AD ye dik, hatta AD nin düzlemde olduğunu da yazalım, …	*(96)*
	Teorem	TC, CD ye diktir değil mi? Gene üç dikme teoreminden galiba.	*(112)*
	Teorem	TCD dik üçgendir, üç dikme teoreminden, yazmayalım bir kez daha konuşalım. Hazır mı herkes?	*(120)*
(DS-7)	*Teorem*	Teorem: bir piramidin hacmi taban alanı ile yüksekliği çarpımının üçte biridir. Haftaya bunun ispatını istiyorum, araştırın, bunun ispatını yapacaksınız,	*(29)*
	İspat	O dediğini nereden biliyorum, koninin silindirin hacminin üçte biri olduğunu, o da aynı hesap olmuş oluyor değil mi? Yani bir şeyi kabul ediyorum ama ben şu an onu bilmiyorum onu daha önce ispatlamadım, üçte biri olduğunu ispatlamadık daha sonra ispatlarsam bunu da ispatlamış olurum. ∗ Peki, bunu [*teoremi*] kullanacağız yalnız ispatlamadık [*henüz*] ama kullanacağız [*şimdi*]. Soru diyelim.	*(35)*
	İspat	Yalnız şöyle bir ispat istemiyorum, deneysel bir ispat. Daha önce şöyle olmuştu; yükseklikleri aynı tabanları aynı olan bir piramit ile bir prizma aldılar. İçine su doldurdular. Piramiti üç kerede doluyor diye gösterdiler. Deneysel olarak aslında o da güzel ama geometrik istiyorum tamam mı! O fiziksel bir ispat oluyor, matematiksel bir ispat olmuyor.	*(37)*
(DS-12)	*İlke*	[*Tahtada Cavalieri İlkesi başlığı var.*] Yükseklikleri aynı olan iki cisim, tabana paralel düzlemlerle kesildiğinde oluşan kesitlerin alanları daima birbirine eşit ise bu iki cismin hacimleri de eşittir.	*(1-3)*
	İspat	Şimdi bu ilkeyi kullanarak kürenin hacmini ispatlayalım. Kürenin hacmi diyoruz.	*(8)*
	İspat	İntegralsiz ispatı bu. İntegral bilmediğiniz için öyle yapamıyoruz.	*(30)*
	İspat	Değil integralle bulmuş, bu sonradan yapılan bir ispattır. İntegralsiz nasıl yapılabilir diye düşünüldüğünde yapılan bir ispattır.	*(32)*

EK-8

Araştırmacı Tarafından Belirlenen İspat Problemine Yönelik Öğrencilerin Yazılı Kâğıtları Kesitleri

OG-1



i = irrasyonel sayı a = rasyonel sayı

a_1, a_{1i}, a_2

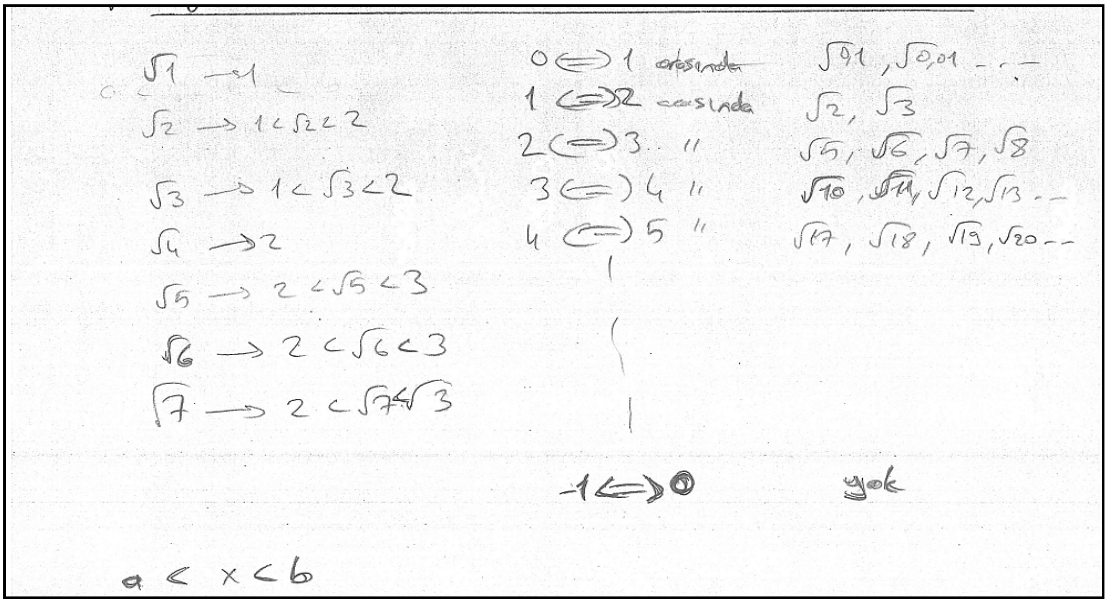
$\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\sqrt{\infty}}$ < $\frac{1}{\infty + 0{,}000\ldots 01}$

0, ∞ OLALI

0, ∞, OLALI olmaz

iki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır.

OG-2



$\sqrt{1} \to 1$

$\sqrt{2} \to 1 < \sqrt{2} < 2$

$\sqrt{3} \to 1 < \sqrt{3} < 2$

$\sqrt{4} \to 2$

$\sqrt{5} \to 2 < \sqrt{5} < 3$

$\sqrt{6} \to 2 < \sqrt{6} < 3$

$\sqrt{7} \to 2 < \sqrt{7} < 3$

$0 \Leftrightarrow 1$ arasında $\sqrt{0{,}1}$, $\sqrt{0{,}01}$ ...

$1 \Leftrightarrow 2$ arasında $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

$2 \Leftrightarrow 3$ " $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$

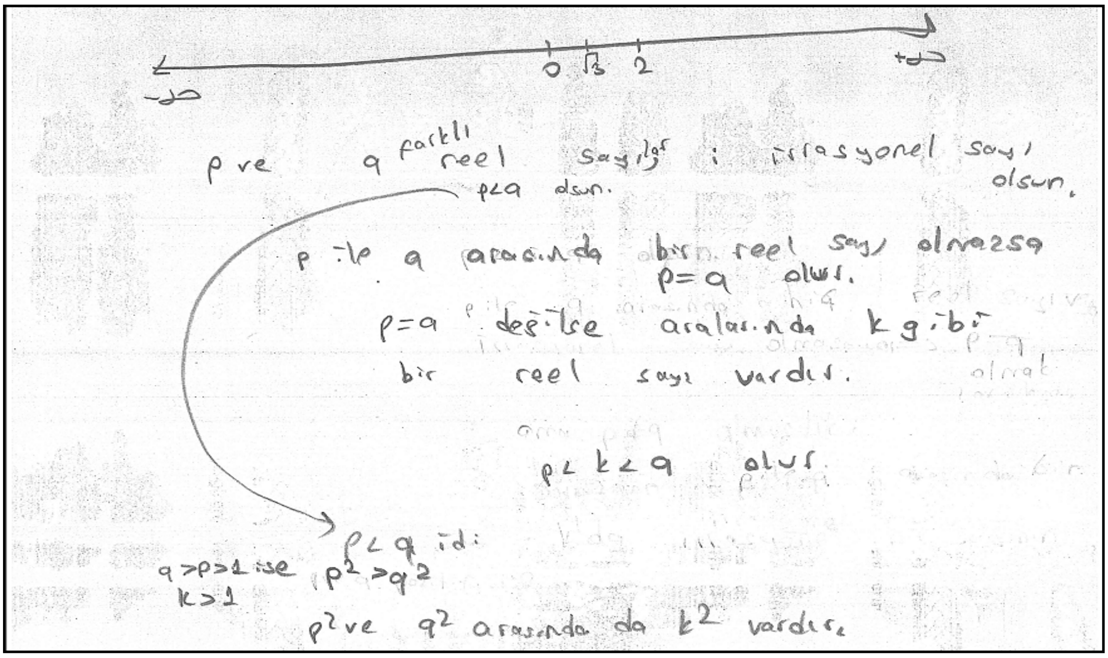
$3 \Leftrightarrow 4$ " $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$ ...

$4 \Leftrightarrow 5$ " $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt{20}$ ...

$-1 \Leftrightarrow 0$ yok

$a < x < b$

OG-3



$-\infty$ 0 $\sqrt{3}$ 2 $+\infty$

p ve q farklı reel sayılar; irrasyonel sayı olsun. p<q olsun.

p ile q arasında bir reel sayı olmazsa p=q olur.

p=q değilse aralarında k gibi bir reel sayı vardır.

$p < k < q$ olur.

$p < q$ idi

$q > p > 1$ ise $p^2 > q^2$

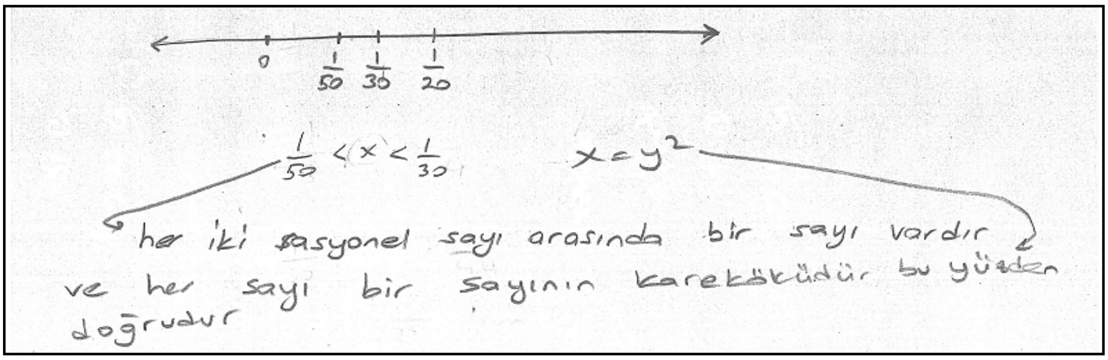
$k > 1$

p^2 ve q^2 arasında da k^2 vardır.

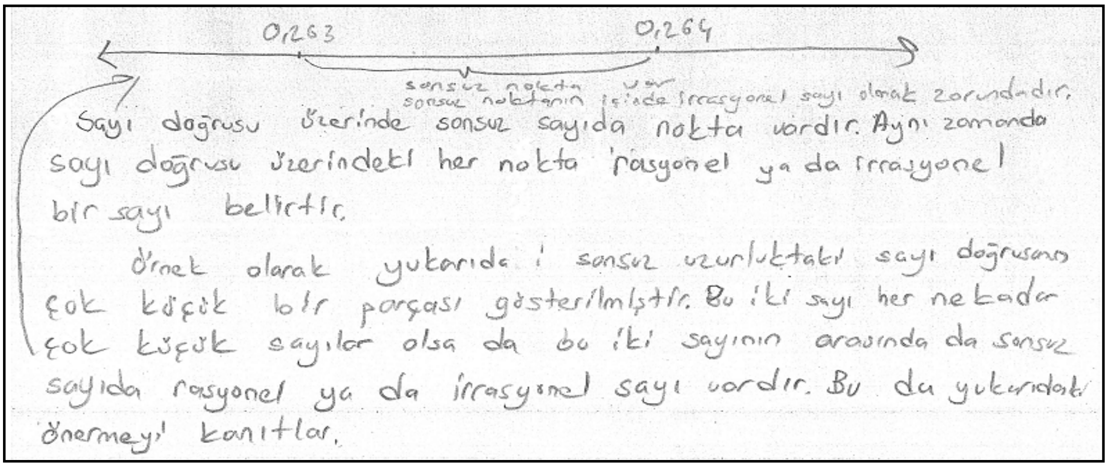
EK-8

Araştırmacı Tarafından Belirlenen İspat Problemine Yönelik Öğrencilerin Yazılı Kâğıtları Kesitleri

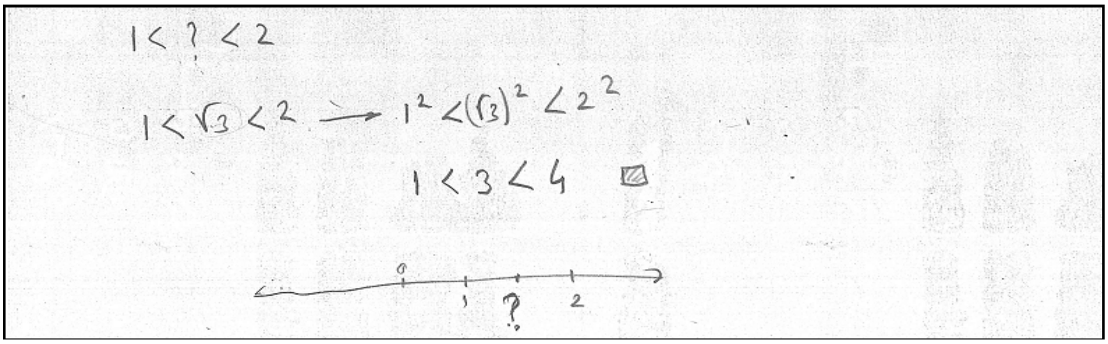
OG-4



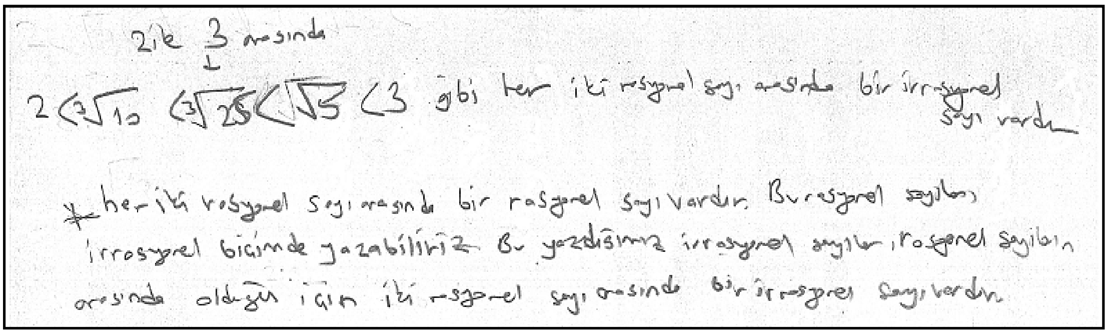
OG-5



OG-6



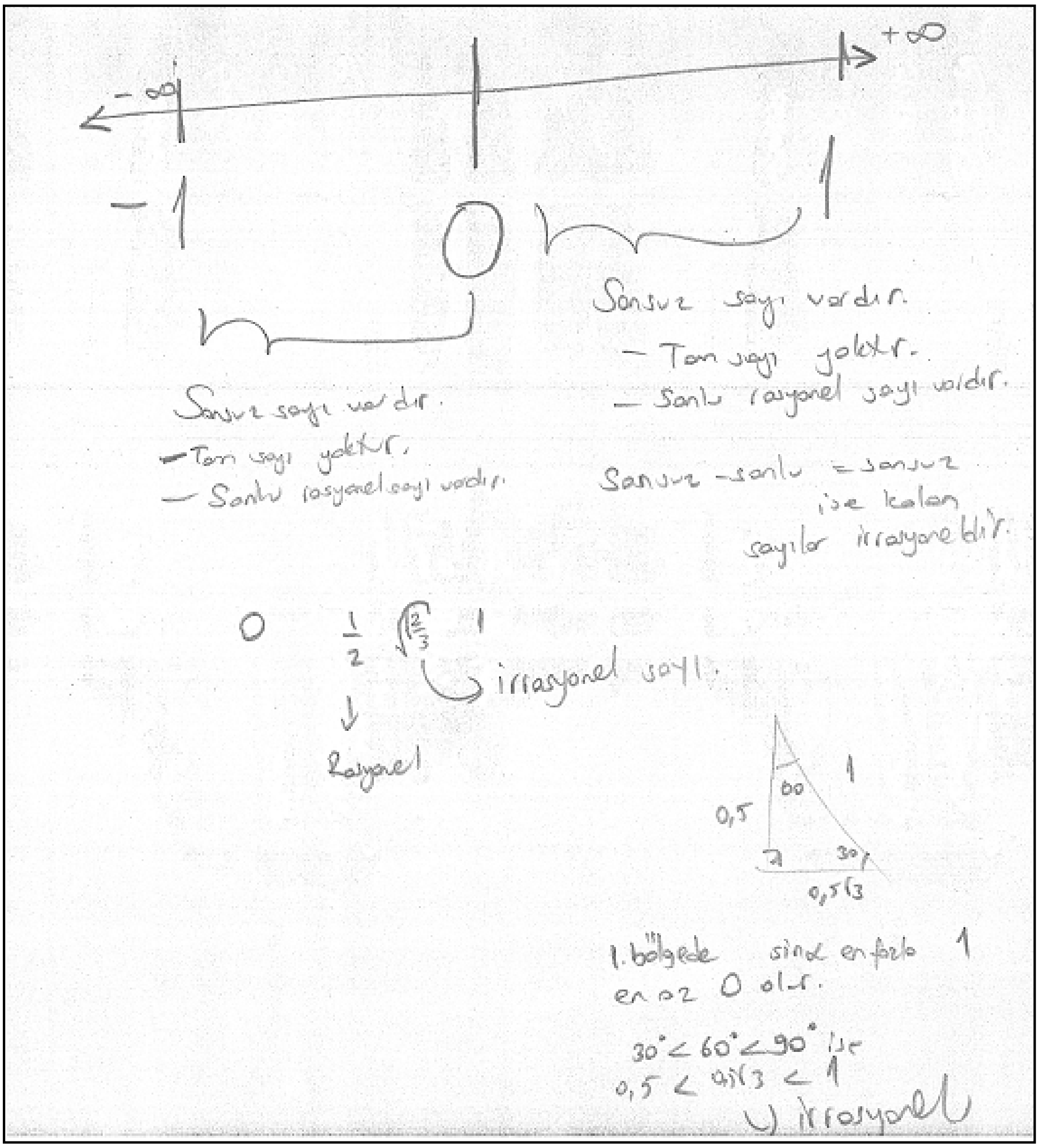
OG-8



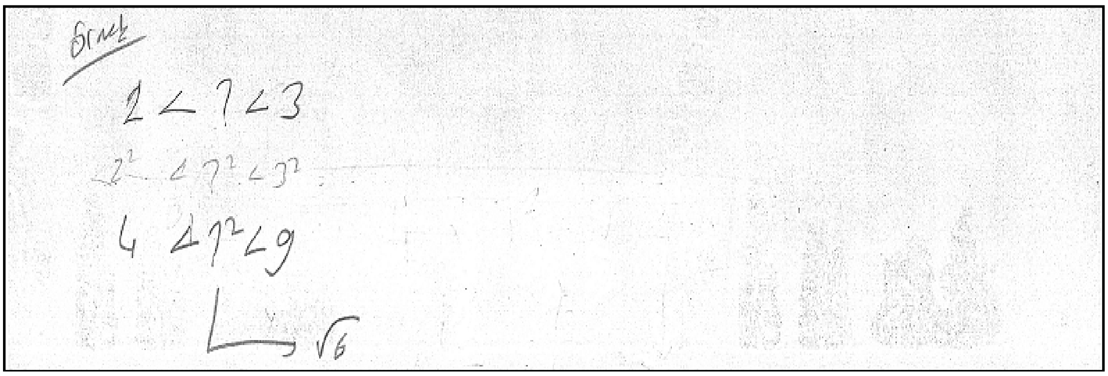
EK-8

Araştırmacı Tarafından Belirlenen İspat Problemine Yönelik Öğrencilerin Yazılı Kâğıtları Kesitleri

OG-7



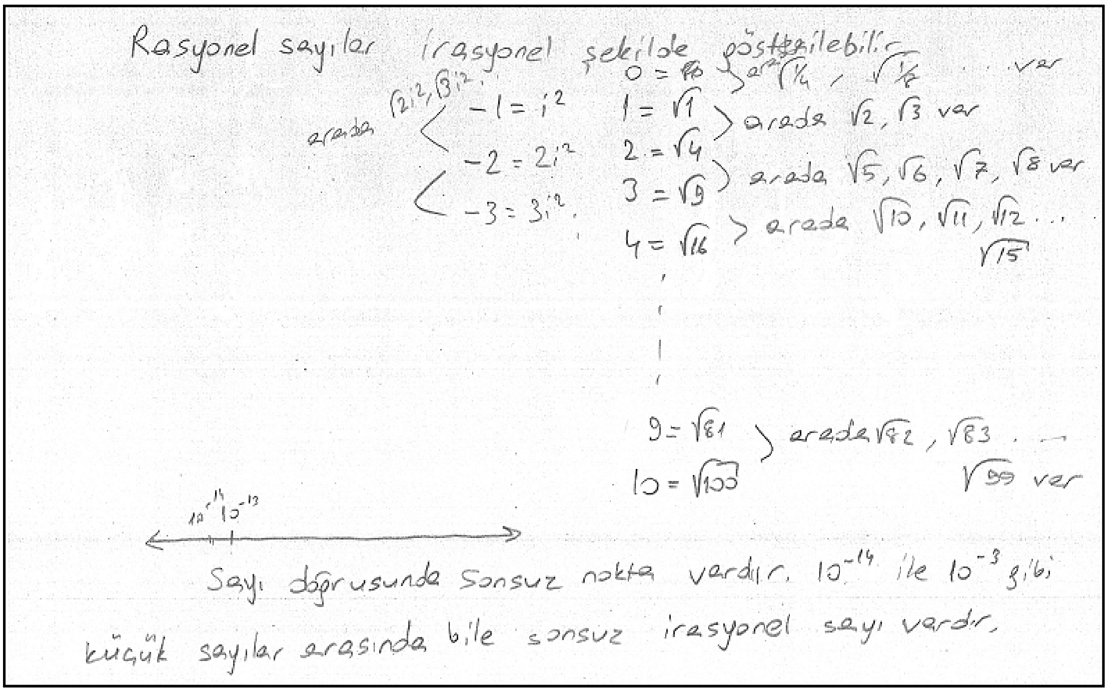
OG-13



EK-8

Araştırmacı Tarafından Belirlenen İspat Problemine Yönelik Öğrencilerin Yazılı Kâğıtları Kesitleri

OG-12



Rasyonel sayılar irasyonel şekilde gösterilebilir

$0 = \sqrt{0}$ } arada $\sqrt{1/4}$, $\sqrt{1/2}$ ... var

arada $\sqrt{2}i^2$, $\sqrt{3}i^2$ $\langle$ $-1 = i^2$ $\quad 1 = \sqrt{1}$ } arada $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ var

$-2 = 2i^2$ $\quad 2 = \sqrt{4}$

$\langle$ $-3 = 3i^2$ $\quad 3 = \sqrt{9}$ } arada $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ var

$4 = \sqrt{16}$ } arada $\sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}$ ... $\sqrt{15}$

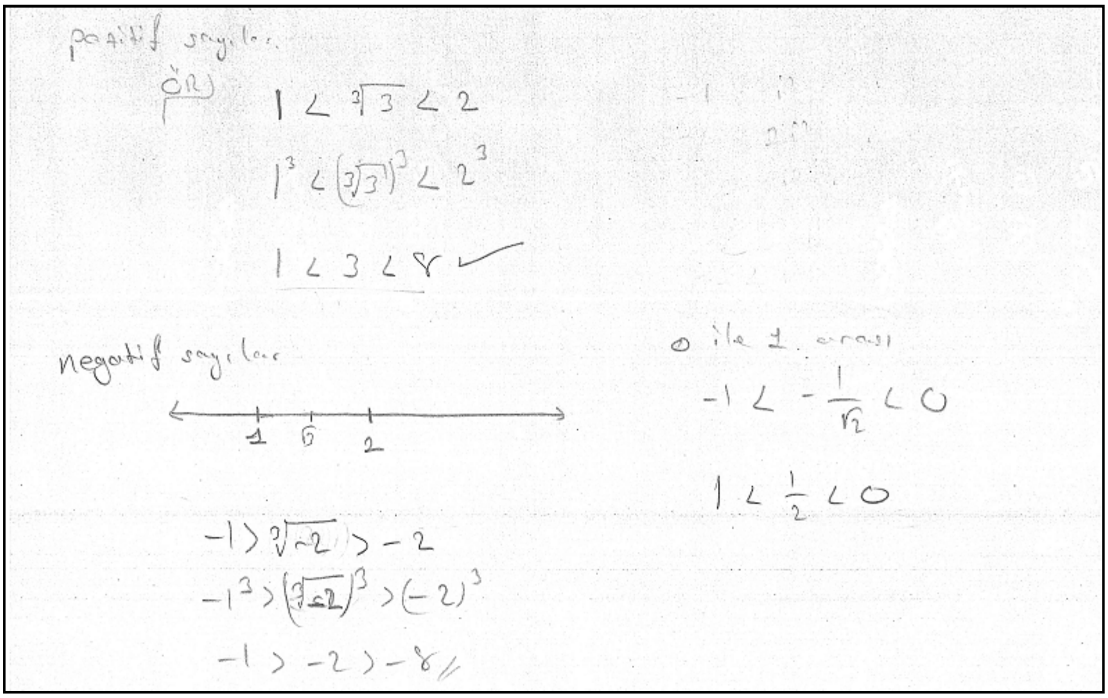
$9 = \sqrt{81}$ } arada $\sqrt{82}$, $\sqrt{83}$ ... $\sqrt{99}$ var

$10 = \sqrt{100}$

10^{-14} 10^{-13}

Sayı doğrusunda sonsuz nokta vardır. 10^{-14} ile 10^{-3} gibi küçük sayılar arasında bile sonsuz irasyonel sayı vardır.

OG-9



pozitif sayılar

ÖR)

$1 < \sqrt[3]{3} < 2$

$1^3 < (\sqrt[3]{3})^3 < 2^3$

$1 < 3 < 8$ ✓

negatif sayılar

$1 \quad \sqrt{3} \quad 2$

$-1 > \sqrt[3]{-2} > -2$

$-1^3 > (\sqrt[3]{-2})^3 > (-2)^3$

$-1 > -2 > -8$ //

0 ile 1 arası

$-1 < -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$

$1 < \frac{1}{2} < 0$