İZDÜŞÜM FONKSİYONLARI İLE ELDE EDİLEN AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLER

Doç.Dr.Şuur NİZAMOĞLU
Dokuz Eylül Üniversitesi
Buca Eğitim Fakültesi
Buca-İZMİR

Öğr.Gör.Hayrettin KÖROĞLU
Dokuz Eylül Üniversitesi
Buca Eğitim Fakültesi
Buca-İZMİR

ÖZET

Bu çalışmada, pozitif birim yarım küre üzerindeki noktalar kümesinden, xy-yz-zx düzlemlerine izdüşüm fonksiyonları tanımlandı. Bu fonksiyonlarla elde edilen doğruların, D-modüldeki karşılıkları bulunarak, çizgiler uzayında birer regle yüzey oluşturuldu. Yüzeylerin açılabilir olması şartı altında birim yarım küre üzerindeki noktaların geometrik yerleri araştırıldı.

SUMMARY

In this study, the projection functions are defined from the set of points on the unitsemi sphere to the plane xy-yz-zx. A corresponding lines are found from the D mod of lines which are obtained by these functions and on the lines spaces a ruled surface is constructed respectively these lines. The locues of the points which are on the unitsemi sphere are investigated under the condition the ruled surfaces are developable.

1-GİRİŞ

R^3 Euclide uzayının yönlü bir doğrusu, D-modül'ün $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\,\vec{a}_0$ ($\vec{a}^2 = 1$, $\vec{a}.\vec{a}_0=0$) dual birim vektörü ile gösterilebilir. Burada $\vec{a}$, yönlenmiş doğru üzerinde birim reel vektör, $\vec{a}_0$. $\vec{a}$ nın orijine göre momenti ve ε da $\varepsilon^2=0$ özellikli Clifford işlemidir. R^3 uzayının bütün yönlü doğrular kümesi ile D-Modül'ün

$$\{\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\,\vec{a}_0 \,/\, \|\vec{A}\| = (1,0);\ \vec{a}, \vec{a}_0\ \varepsilon\ R^3\}$$

dual birim küresinin noktaları arasında bire-bir karşılık vardır. [1]

u, keyfi bir reel parametre olmak üzere

$$\vec{A}(u) = \vec{a}(u) + \varepsilon \vec{a}_0(u) \tag{1}$$

dual birim vektörü, R^3 de bir regle yüzey gösterir. bu dual birim kürede bir eğriye karşılık gelir.

u, v keyfi iki reel parametre olmak üzere

$$\vec{A}(u,v) = \vec{a}(u,v) + \varepsilon \vec{a}_0(u,v) \tag{2}$$

dual birim vektörü, R^3 de bir kongrüans gösterir ve dual birim kürede bir bölgeye karşılık gelir. (1) denklemiyle tanımlanan bir regle yüzeyin açılabilir bir yüzey olması için

$$\delta = \frac{\vec{a}' \cdot \vec{a}_0'}{\vec{a}^2} = 0 \tag{3}$$

koşulu gerçeklenmelidir. [1]. [2].

2-İZDÜŞÜM FONKSİYONLARI İLE ELDE EDİLEN AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLER

$S^+ = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1;\ x,y,z \in R \wedge 0<z<1\}$ pozitif yarım birim küre olsun. Kürenin $A(x,y,z) \in S^+$ noktasından xy, yz ve xz koordinat düzlemlerine sırasıyla

$$f_1^+ : (x,y,z) \longrightarrow f_1^+(x,y,z) = B = (0,y,z)$$

$$f_2^+ : (x,y,z) \longrightarrow f_2^+(x,y,z) = C = (x,0,z)$$

$$f_3^+ : (x,y,z) \longrightarrow f_3^+(x,y,z) = D = (x,y,0)$$

izdüşüm fonksiyonlarını tanımlıyalım.

f_i^+ (i=1,2,3) izdüşüm fonksiyonlarıyla elde edilen B,C,D noktalarından geçen CD, DB, BC doğrularının denklemleri sırasıyla $\lambda, \mu, t \in R$ olmak üzere

CD: $(X=x,\ Y=\lambda y+y,\ Z=-z\lambda)$

BD: $(X=-\mu x,\ Y=y,\ Z=\mu z+z)$

$$BC: (X= tx+x,\ Y=ty\ Z=z) \tag{4}$$

biçiminde olup doğrultu vektörleride

$$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}\,(0,y,-z),\ \vec{\beta}=\vec{\beta}\,(-x,0,z),\ \vec{\gamma}=\vec{\gamma}\,(x,-y,0)$$

şeklindedir.

$$\vec{a}=\frac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|} \qquad \vec{a}_0=\overrightarrow{OD}\wedge\vec{a}$$

$$\vec{b}=\frac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|} \qquad \vec{b}_0=\overrightarrow{OB}\wedge\vec{b} \tag{5}$$

$$\vec{c}=\frac{\vec{\gamma}}{\|\vec{\gamma}\|} \qquad \vec{c}_0=\overrightarrow{OC}\wedge\vec{c}$$

vektörlerini,

$$\|\vec{\alpha}\|^2=l_1^2=y^2+z^2,\quad \|\vec{\beta}\|^2=l_2^2=x^2+z^2,\quad \|\vec{\gamma}\|^2=l_3^2=x^2+y^2 \tag{6}$$

olmak üzere

$$\vec{a}=\vec{a}\,(0,\frac{y}{l_1},-\frac{z}{l_1}) \qquad \vec{a}_0=\vec{a}_0\,(-\frac{yz}{l_1},\frac{xz}{l_1},\frac{xy}{l_1})$$

$$\vec{b}=\vec{b}\,(-\frac{x}{l_2},0,\frac{z}{l_2}) \qquad \vec{b}_0=\vec{b}_0\,(\frac{yz}{l_2},-\frac{xz}{l_2},\frac{xy}{l_2}) \tag{7}$$

$$\vec{c}=\vec{c}\,(\frac{x}{l_3},-\frac{y}{l_3},0) \qquad \vec{c}_0=\vec{c}_0\,(\frac{zy}{l_3}\ \frac{xz}{l_3},-\frac{xy}{l_3})$$

biçiminde yazarsak, R^3 Euclide uzayının CD,DB BC doğrularına D-Modülün

$$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\,\vec{a}_0,\qquad \vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\,\vec{b}_0,\qquad \vec{C}=\vec{c}+\varepsilon\,\vec{c}_0, \tag{8}$$

dual birim vektörleri karşılık getirilmiş olur.

Yarı birim kürenin

$x=\cos\theta\ \sin\phi$

$$y = \sin\theta \sin\phi \qquad \left(0 < \theta < \frac{\Pi}{2}, \; 0 < \phi < \frac{\Pi}{2}\right) \tag{9}$$

$$z = \cos\phi$$

küresel formdaki denklemini gözönüne alırsak, yarım birim küre üzerindeki A(x,y,z) noktası θ ve φ nin fonksiyonları olurlar yani x=x (θ,φ), y=y (θ,φ), z=z (θ,φ) dır. A (θ,φ) noktası yarım birim kürenin noktalarını taradığında (7) ve (8) den elde edilen

$$\vec{A}(\theta,\phi) = \vec{a}(\theta,\phi) + \varepsilon \vec{a}_0(\theta,\phi)$$

$$\vec{B}(\theta,\phi) = \vec{b}(\theta,\phi) + \varepsilon \vec{b}_0(\theta,\phi) \tag{10}$$

$$\vec{C}(\theta,\phi) = \vec{c}(\theta,\phi) + \varepsilon \vec{c}_0(\theta,\phi)$$

D-modülün dual birim vektörleri, R^3 Euclide uzayında, (1) denklemleriyle verilen CD, DB, BC yönlü doğrularını çizerken, çizgiler uzayında [A], [B] ve [C] kongrüanslarını oluştururlar.

Burada θ=θ(φ) fonksiyonunu nasıl belirliyelimki, A (θ,φ) noktası yarım birim küre üzerinde hareket ettiğinde, θ=θ(φ) fonksiyonu (10) denklemlerinde yerlerine taşıdığımızda elde edilen

$$(A): \vec{A}(\phi) = \vec{a}(\phi) + \varepsilon \vec{a}_0(\phi)$$

$$(B): \vec{B}(\phi) = \vec{b}(\phi) + \varepsilon \vec{b}_0(\phi) \tag{11}$$

$$(C): \vec{C}(\phi) = \vec{c}(\phi) + \varepsilon \vec{c}_0(\phi)$$

regle yüzeyleri açılabilir yüzeyler olsunlar.

(A), (B), (C) regle yüzeylerinin açılabilir yüzeyler olması için sırasıyla (3)'den

$$\delta_1 = \frac{\vec{a}' \cdot \vec{a}_0'}{\vec{a}'^2} = 0, \qquad \delta_2 = \frac{\vec{b}' \cdot \vec{b}_0'}{\vec{b}'^2} = 0, \qquad \delta_3 = \frac{\vec{c}' \cdot \vec{c}_0'}{\vec{c}'^2} = 0, \tag{12}$$

koşullarının ayrı ayrı sağlanması gerekir. O halde (6) ve (9) dan

$$x' = -\sin\theta \sin\phi \frac{d\theta}{d\phi} + \cos\theta \cos\phi \qquad l_1 \dot{l}_1 = -xx'$$

$$y' = \cos\theta \sin\phi \frac{d\theta}{d\phi} + \sin\theta \cos\phi \qquad l_2 \dot{l}_2 = -yy' \tag{13}$$

$$z' = -\sin\phi \qquad l_3 \dot{l}_3 = -zz'$$

olmak üzere,

$$\vec{a}'\left(0, \frac{y' l_1 - l_1' y}{l_1^2}, -\frac{z' l_1 - l_1' z}{l_1^2}\right) \tag{14}$$

$$\vec{a}_o'\left(-\frac{(y'z+z'y)\, l_1 - l_1' yz}{l_1^2}, \frac{(x'z+xz')\, l_1 - l_1' xz}{l_1^2}, \frac{(x'y+y'x)\, l_1 - l_1' xy}{l_1^2}\right)$$

$$\vec{b}'\left(-\frac{x' l_2 - l_2' x}{l_2^2}, 0, \frac{z' l_2 - l_2' z}{l_2^2}\right) \tag{15}$$

$$\vec{b}_o'\left(\frac{(y'z+z'y)\, l_2 - l_2' yz}{l_2^2}, -\frac{(x'z+z'x')\, l_2 - l_2' xz}{l_2^2}, \frac{(x'y+y'x)\, l_2 - l_2' xy}{l_2^2}\right.$$

$$\vec{c}'\left(\frac{x' l_3 - l_3' x}{l_3^2}, -\frac{y' l_3 - l_3' y}{l_3^2}, 0\right) \tag{16}$$

$$\vec{c}_o'\left(\frac{(z'y+y'z)\, l_3 - l_3' yz}{l_3^2}, \frac{(x'z+xz')\, l_3 - l_3' xz}{l_3^2}, -\frac{(x'y+y'x)\, l_3 - l_3' xy}{l_3^2}\right)$$

dir.

İlk olarak (A) regle yüzeyin açılabilir yüzey olma koşulunu arıyalım. $\vec{a}'.\vec{a}_o=0$ koşulunda (9), (13), (14) denklemleri gözönüne alınırsa

$$x = \cos\theta \sin\phi = c\varepsilon R$$

ya da

$$\cos\theta \sin\phi \cos\phi \frac{d\theta}{d\phi} + \sin\theta = o$$

birinci basamaktan differensiyel denklemi elde edilir. $x = c\varepsilon R$ den

$$\theta = \arccos \frac{c}{\sin\phi} \tag{17}$$

elde edilir. O halde bu noktalar kümesi, $x = c$

düzlemleriyle, yarım birim kürenin arakesiti olan yz düzlemine paralel yarım çemberler kümesidir.

İkinci denklemin çözümünde ise,

$$\theta = \arcsin \frac{c\left(1 - tg^2 \frac{\phi}{2}\right)}{tg \frac{\phi}{2}} \tag{18}$$

elde edilir.

Sonuç I. A= A (θ,ϕ) noktalarını, yarı birim kürenin, yz düzlemine paralel yarı çemberleri üzerinde ya da (18) gerçeklenecek biçimde kürenin $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$ (ϕ) eğrileri üzerinde seçersek, çizgiler uzayında $\vec{A}=\vec{A}$ (ϕ) regle yüzeyi açılabilir yüzey oluşturur.

İkinci olarak (B) regle yüzeyinin açılabilir yüzey olma koşulunu arayalım. $\vec{b}.\vec{b}'_0 = 0$ koşulunda (9), (13), (15) denklemleri gözönüne alınırsa

$y = \sin\theta . \sin\phi = c\varepsilon R$

ya da

$$-\sin\theta . \sin\phi . \cos\phi \frac{d\theta}{d\phi} + \cos\theta = 0$$

birinci basamaktan differensiyel denklemi elde edilir. $y = c\varepsilon R$ den

$$\theta = \arcsin \frac{c}{\sin\phi} \tag{19}$$

elde edilir. O halde bu noktalar kümesi, $y = c$

düzlemleriyle yarı birim kürenin arakesiti olan xz düzlemine paralel yarım çemberler kümesidir.

İkinci denklemin çözümünden ise

$$\theta = \arccos \frac{c\left(1 - tg^2 \frac{\phi}{2}\right)}{tg \frac{\phi}{2}} \tag{20}$$

elde edilir.

Sonuç 2. A=A (θ,ϕ) noktalarını, yarı birim kürenin, xz düzlemine paralel yarı çemberleri üzerinde ya da (20) gerçeklenecek biçimde kürenin $\vec{\beta}=\vec{\beta}(\phi)$ eğrileri üzerinde seçersek, çizgiler uzayında $\vec{B}=\vec{B}$ (ϕ) regle yüzeyi açılabilir bir yüzey oluşturur.

Son olarak (C) regle yüzeyinin açılabilir yüzey olma koşulunu arıyalım. $\vec{c}_0 \cdot \vec{c}_0'=0$ koşulunda (9), (13), (16) denklemleri gözönüne alınırsa

$$z = \cos\phi = c \varepsilon R$$

ya da

$$\sin^2\phi \frac{d\theta}{d\phi} = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. $z = c\varepsilon R$ ise ϕ = st bulunur. Bu noktalar kümesi, yarı birim kürenin yarım meridiyen kümesidir. İkincisinden ise $\phi \neq 0$ olacağından $\theta = k\varepsilon R$'dır. Bu ise yarı birim kürenin enlemler kümesidir.

Sonuç 3. $A=A$ (θ,ϕ) noktalarını, yarı birim kürenin meridiyenleri ya da enlemleri üzerinde seçersek $\vec{C}=\vec{C}$ (ϕ) [$C=C$ (θ)] regle yüzeyi açılabilir yüzey oluşturur.

KAYNAKLAR

1.Giggenheimer, H.W., **Differential Geometry**, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

2.Blaschke W., **Diferansiyel Geometri** Dersleri., çev., K.Erim, İstanbul Üniv.Yayınları, İstanbul, 1949.