FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ YARDIMIYLA BİR İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

Prof.Dr.Hüseyin Alkan
Dokuz Eylül Uni.
Buca Eğitim Fakültesi
Mat.Egit. Ana.Bl.Dalı

ÖZET

Bu calısmada.Fourier Dönüsümleri yardımıyla. integral altı iki deöiskenli fonksiyonların carpımı olan.bir integral denklem cözülmüstür. Bulunan sonuc fonksiyonu.bilgisayarla sayısal olarak cözülebilme avantajına sahip bir fonksiyondur.

SUMMARY

In this study, an integral equation. which the integrand is a product of two variables functions.has been evaluated by using Fourier Transforms.The resut function.has an advantage of being solved as numerically by computer.

GİRİŞ

Uygulamalı Fen ve Mühendislik Bilimleri nin bircogunda. kimi bağıntıların analitik sonuclarını belirleyebilmek oldukca güctür. üstelik. hızlı bilimsel gelismeye paralel olarak. cözümü bu tür zorlukları iceren pek cok yeni bağın tılarla da karsılasılacağı acıktır. Örneğin. ikili. üclü sistemlerin karsılıklı etkilesimlerini ortaya koyan bağın tılar gibi.

Calısmamızda. bu tür etkilesimlerde karsımıza cıkabilecek

$$G_{\ell}^{m} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int F(u,v)\,G(u,v)\,du\,dv \qquad (1)$$

integrali ele alınmakta ve Fourier Dönüsümleri yardımı ile nasıl cözülebileceği tartısılmaktadır.

ÇÖZÜM BASAMAKLARI

Cözüm islemine baslamadan önce ve ilk asamada.

$u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ ve $du\,dv = r\,dr\,d\theta$

bağıntıları ile kutupsal koordinatlar sistemine geçilebilir. Bu koşullar altında, F(u,v) için, $m=2\mu$ gibi çift olması durumunda,

$$F(u,v)=\frac{1}{4^{\mu}(2\mu+1)}\sum_{\ell=0}^{\infty}C^{(\ell)}\sum_{j=1}^{\mu}(-1)^j\frac{\cos 2j\phi}{(2j)!}\frac{B(\mu+j+1,v)}{B(\mu+j+1,\mu-j+1)}(\pi rx)^{2j+1}$$

$$x\,{}_1F_1[\mu+j+1,\;2j+1,\;\mu+j+v+1\;;\;-(\pi rx)^2] \tag{2}$$

ve $m=2\mu+1$ gibi tek olması konumunda da,

$$F(u,v)=\frac{i}{4^{\mu}(2\mu+2)}\sum_{\ell=0}^{\infty}C^{(\ell)}\sum_{j=0}^{\mu}(-1)^j\frac{\cos(2j+1)\phi}{(2j+1)!}\frac{B(\mu+j+2,v)}{B(\mu+j+2,\mu-j+1)}(\pi rx)^{2j+1}$$

$$x\,{}_1F_2[\mu+j+2,\;2j+2,\;\mu+j+v+2\;;\;-(\pi rx)^2] \tag{3}$$

biçiminde yazılabileceği. Fourier Dönüşümlerinden görülebilir[1]. Öteyandan, G(u,v) için benzer dönüşümün,

$$G(u,v)=2\pi y^2 e^{-2\pi i\delta u}\frac{J_1(2\pi ry)}{2\pi ry} \tag{4}$$

şeklinde verildiği bilinmektedir. Bu iki dönüşümü birikte (1) bağıntısında kullanılarak,

$$B_\ell^{2\mu+1}=-\frac{i}{4^{\mu}(2\mu+2)}\sum_{\ell=0}^{\infty}C^{(\ell)}\sum_{j=0}^{\mu}(-1)^j\frac{1}{(2j+1)!}\frac{B(\mu+j+2,v)}{B(\mu+j+2,\mu-j+1)}\frac{1}{2\pi}\,x$$

$$x\int_0^{\infty}(\pi rx)^{2j+1}\,{}_1F_2[\mu+j+2,2j+2,\mu+j+v+2\;;\;-(\pi rx)^2]\,J_1(2\pi ry)\,x$$

$$x\left(\int_{-\pi}^{\pi}e^{-2\pi i\delta r\cos\phi}\cos[(2j+1)\phi]d\phi\right)d(2\pi ry) \tag{5}$$

eşitliği kurulabilir. Denklemdeki ikinci integralin karşılığını Bessel fonksiyonları türünden belirleyebilmek için önce,

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-2\pi i\delta r\cos\phi}\cos[(2j+1)\phi]\,d\phi=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(Z\cos\phi)\cos n\phi\,d\phi-$$

$$-i\int_{-\pi}^{\pi}\sin(z\cos\phi)\cos n\phi\,d\phi \tag{5}$$

biciminde yazılmaları gerekir. Bu yazılımda,

$2\pi\delta r = z \quad \text{ve} \quad 2j+1 = n$

kısaltmalarının yapıldığını hatırlamakta yarar vardır. İkinci aşamada,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin(z\cos x)\cos(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(z\cos x)\cos(nx)\,dx = \pi\sin\left(\frac{n}{2}\pi\right)J_n(z) \\
\int_0^{\pi} \cos(z\cos x)\cos(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(z\cos x)\cos(nx)\,dx = \pi\cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)J_n(z)
\end{aligned} \tag{7}$$

bağıntıları da bu gösterimde kullanılarak[3],

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi i\delta r\cos\phi}\cos[(2j+1)\phi]\,d\phi = -i(-1)^j\, 2\pi J_{2j+1}(2\pi\delta r) \tag{8}$$

dönüsümü bulunur. Burada,

$\cos[(2j+1)\pi/2] - i\sin[(2j+1)\pi/2] = -i(-1)^j$

alındığını, sonucu araştırmak isteyenlere hatırlatmakta yarar vardır.

Tüm bu islemlerden sonra, (5) eşitliğinin alacağı yeni seklin,

$$\begin{aligned}
B_{\ell}^{2\mu+1} &= -\frac{1}{4^{\mu}(2\mu+2)} \sum_{\ell=0}^{\infty} C^{(\ell)} \sum_{j=0}^{\mu} \frac{1}{(2j+1)} \frac{B(\mu+j+2,\nu)}{B(\mu+j+2,\mu-j+1)} \times \\
&\times \int_0^{\infty} (\pi rx)^{2j+1}\, {}_1F_2[\mu+j+2;\, 2j+2,\, \mu+j+\nu+2;\, -(\pi rx)^2] \times \\
&\times J_1(2\pi ry)\, J_{2j+1}(2\pi\delta r)\, d(2\pi ry)
\end{aligned} \tag{9}$$

olacağını görmek güç olmayacaktır. Burada, başlangıçta çift katlı olarak belirlenen integralin, tek katlı bir integrale dönüstüğü görülmektedir. Bağıntıda, integralaltı fonksiyonlardan biri olan Hipergeometrik fonksiyon,

$$\begin{aligned}
{}_1F_2\left[\begin{matrix}\mu+j+2 \\ 2j+2,\ \mu+j+\nu+2\end{matrix}\; -(\pi rx)^2\right] &= \Gamma(2j+\nu+1)(\pi rx)^{-(2j+\nu+1)} \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2j+\nu+1)(2j+\nu+1)_n(j-\mu)_n(\nu)_n}{n!\,(2j+2)_n(\mu+j+\nu+2)_n} J_{2n+2j+\nu+1}(2\pi rx)
\end{aligned} \tag{10}$$

seklinde yazılabilir[3]. Öteyandan.

$$s = 2\pi r y, \quad h = \frac{6}{y}, \quad k = \frac{x}{y}, \quad (x \leq y)$$

$$\Rightarrow \pi r x = \frac{ks}{2}, \quad 2\pi \delta r = hs \qquad (11)$$

dönüsümleri kullanılarak.(9) bağıntısı yeniden,

$$B_{\ell}^{2\mu+1} = -\frac{1}{4^{\mu}(2\mu+2)} \sum_{\ell=0}^{\infty} C^{(\ell)} \sum_{j=0}^{\mu} \frac{1}{(2j+1)} \frac{B(\mu+j+2, \nu)}{B(\mu+j+2, \mu-j+1)} \Gamma(2j+\nu+1) x$$

$$x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2j+\nu+1)(2j+\nu+1)_n (j-\mu)_n (\nu)_n}{n!\,(2j+2)_n (\mu+j+\nu+2)_n} \qquad (12)$$

$$x \int_0^{\infty} \left(\frac{ks}{2}\right)^{-\nu} J_{2n+2j+\nu+1}(ks)\, J_1(s) J_{2j+1}(hs) ds$$

biciminde düzenlenebilir. Bağıntıda, ikinci toplamdaki n' nin gercekte, n=0,1,... ,μ-j olduğunu vurgulamakta yarar vardır.

Benzer bicimde düsünülür ve gerekli cebirsel islemler tamamlanırsa, m=2μ cift değerleri icin de,

$$B_{\ell}^{2\mu} = \frac{1}{4^{\mu}(2\mu+1)} \sum_{\ell=0}^{\infty} C^{(\ell)} \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{(2j)!} \frac{B(\mu+j+1, \nu)}{B(\mu+j+1, \mu-j+1)} \Gamma(2j+\nu) x$$

$$x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2j+\nu)(2j+\nu)_n (j-\mu)_n (\nu)_n}{n!\,(2j+1)_n (\mu+j+\nu+1)_n} x \int_0^{\infty} \left(\frac{ks}{2}\right)^{-\nu} J_{2n+2j+\nu}(ks)\, J_1(S)\, J_{2j}(hs) ds \qquad (13)$$

bağıntısı kurulabilir.

Bu kez Bessel fonksiyonlarının carpımını, Hipergeometrik fonksiyonlar türünden yazarak[4],

$$J_{2n+2j+\nu+1}(ks)\, J_1(s) = 2\frac{k^{2n+2j+\nu+1}}{s} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2n+2m+2j+\nu+3) \frac{\Gamma(2n+m+2j+\nu+2)\Gamma(2n+m+2j+\nu+3)}{m!\,(m+1)!}$$

$$\left[\frac{{}_2F_1(-m, 2n+m+2j+\nu+3; 2n+2j+\nu+2; k)}{\Gamma(2n+2j+\nu+2)} \right]^2 J_{2n+2m+2j+\nu+3}(s) \qquad (14)$$

esitliğine varılacağı görülebilir. Yeni dönüsümlerle (12) bağıntısı,

$$B_{\ell}^{2\mu+1} = \frac{-1}{4\mu(2\mu+2)} \sum_{\ell=0}^{\infty} C^{(\ell)} \sum_{j=0}^{\mu} \frac{B(\mu+j+2,\nu)\Gamma(2j+\nu+1)}{(2j+1)!\,B(\mu+j+2,\mu-j+1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\mu-j} \frac{(2n+2j+\nu+1)(2j+\nu+1)_n\,(j-\mu)_n(\nu)_n}{n!\,(2j+2)_n(\mu+j+\nu+2)_n} \times \qquad (15)$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2n+2m+2j+\nu+3) \frac{\Gamma(2n+m+2j+\nu+2)\,\Gamma(2n+m+2j+\nu+3)}{m!\,(m+1)!} \times$$

$$\times \left[\frac{{}_2F_1(-m,2n+m+2j+\nu+3;2n+2j+\nu+2;k)}{\Gamma(2n+2j+\nu+2}\right]^2 \frac{k^{2n+2j+1}}{2^{-1-\nu}}$$

$$\int_0^{\infty} s^{-\nu-1}\, J_{2n+2m+2j+\nu+3}(s)\, J_{2j+1}(hs)\,ds$$

biçimine getirilir. Görüldüğü gibi son bağıntıda integral-altı fonksiyonu, yine iki Bessel fonksiyonunun çarpımı konumundadır. Watson tarafından verilen dönüşüm bağıntısıyla [5], bu integral de Gamma ve Hipergeometrik fonksiyonlarla yeniden yazılabilir. Bu yazım üzerinde, belirli cebirsel işlemlerin tamamlanması ile,

$$\int_0^{\infty} s^{-\nu-1}\, J_{2n+2m+2j+\nu+3}(s)\, J_{2j+1}(hs)\,ds = \frac{h^{2j+1}\,\Gamma(n+m+2j+2)}{2^{\nu+1}\,\Gamma(2j+2)\,\Gamma(n+m+\nu+2} \qquad (16)$$

$${}_2F_1(-n-m-\nu-1,n+m+2j+2;2j+2;h^2)$$

olduğu görülebilir. Son değeri (15)'in sağ yanındaki yerine aktararak,

$$\alpha_{\ell}^{2\mu+1}(k,h) = \frac{-1}{4^{\mu}(2\mu+2)} \sum_{\ell=0}^{\infty} C^{(\ell)} \sum_{j=0}^{\mu} \frac{B(\mu+j+2,\nu)}{(2j+1)!\,B(\mu+j+2,\mu-j+1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\mu-j} \frac{(2n+2j+\nu+1)(2j+\nu+1)_n(j-\mu)_n(\nu)_n}{n!\,(2j+2)_n(\mu+j+\nu+2)_n}\,\Gamma(2j+\nu+1)$$

$$\frac{k^{2n+2j+1}}{2^{-\nu-1}} \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2n+2m+2j+\nu+3) \times \frac{\Gamma(2n+m+2j+\nu+2)\Gamma(2n+m+2j+\nu+3)}{m!\,(m+1)!} \qquad (17)$$

$$\left[\frac{{}_2F_1(-m,2n+m+2j+\nu+3;2n+2j+\nu+2;k)}{\Gamma(2n+2j+\nu+2)}\right]^2$$

$$\frac{h^{2j+1}}{2^{\nu+1}} \frac{\Gamma(n+m+2j+2)}{\Gamma(2j+2)\Gamma(n+m+\nu+2)}\, {}_2F_1(-n-m-\nu-1,n+m+2j+2;2j+2;h^2)$$

acılımı elde edilir. Benzer bicimde $m=2\mu$ cift degerleri i-cin de.

$$a_{\ell}^{2\mu} = \frac{1}{4^{\mu}(2\mu+1)} \sum_{\ell=0}^{\infty} C^{(\ell)} \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{(2j)!} \frac{B(\mu+j+1,\nu)}{B(\mu+j+1,\mu-j+1)} \Gamma(2j+\nu)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2j+\nu)(2j+\nu)_n (j-\mu)_n (\nu)_n}{n!\,(2j+1)_n (\mu+j+\nu+1)_n} \frac{k^{2n+2j}}{2^{-\nu-1}}$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2n+2m+2j+\nu+2) \frac{\Gamma(2n+m+2j+\nu+1)\,\Gamma(2n+m+2j+\nu+2)}{m!\,(m+1)!} \quad (18)$$

$$\frac{h^{2j}\,\Gamma(n+m+2j+1)}{2^{\nu+1}\,\Gamma(2j+1)\,\Gamma(n+m+\nu+2)} \times$$

$$\times \frac{1}{\{\Gamma(2n+2j+\nu+1)\}^2} \times \{{}_2F_1(-m,m+2n+2j+\nu+2;\,2n+2j+\nu;\,k)\}^2 \times$$

$${}_2F_1(n+m+2j+1,-n-m-\nu-1;\,2j+1;\,h^2)$$

bulunur. Kuskusuz. degisken dönüsümlerini biraz farklı dü-sünerek. görünüm olarak biraz farklı acılımlar da aranabi-lir.

SONUC VE DEGERLENDIRME

Görüldügü gibi oldukca farklı bir yöntemle.bir integ-ral alınmaktadır. Sonuç fonksiyonu.bilgisayarla sayısal o-larak belirlenebilir bir yapıya sahiptir.

Özellikle bilimsel calısmanın ilk asamasında olanlar icin.özel konumlar secilerek denemeler yapılabilir ve sayı sal sonuclar elde edilebilir. Örnegin.m=o,l=1;m=1,l=0 gibi Bu özel durumlarda.yukarıdaki karmasık islemlerin çok daha basit sekle dönüşmesi gerekir.

Deneyeceklere basarılar dilerim.

KAYNAKLAR

[1].E.Kreyszıg;Advanced Engineering Mathematics.John Wiley and Sons,Inc.1993.New York.Toronto.

[2]. I.S.Gradshtyn and I.M.Ryzhik: Tables of series. products integrals.VEB Deutscher Verlag de Wissens Chaften.1957.Berlin.

[3]. Y.L.Luke: The Special Functions and Their Approximations.Volume II, Academic Press,1969. London and New York.

[4]. Z.Kopal; Fourier Analysing of The Light Curves of Eclipsing Variables.XII.Astrophys. Space Sci. 51,1977,Dordrecht-Holland.

[5]. G.N.Watson. A Treatise on the Theory of Bessel Functions.2d.Ed.,Cambridge Univ. Press,1958 Cambridge,England.