



## KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜN SİMETRİ ÖZELLİKLERİ

### (*SYMMETRY PROPERTIES OF THE FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM*)

Olçay AKAY\*

#### ÖZET/ABSTRACT

Bu makalede, kesirli Fourier dönüşümü'nün (KFD) çift ve tek simetrik gerçek sinyaller için simetri özellikleri türetilmektedir. Açık parametresinin  $\phi = \frac{\pi}{2}$  değeri için, KFD'nin simetri özellikleri klasik Fourier dönüşümü'nün simetri özelliklerine indirgenmektedir. Bazı örnekler üzerinden, yakın geçmişte önerilmiş ve sürekli KFD'nin ayrık zamanlı bir yaklaşımı olan bir KFD algoritmasının bu simetri özelliklerini sergilediği de ayrıca gösterilmektedir.

*In this article, we derive symmetry properties of the fractional Fourier transform (FrFT) concerning real signals that possess even or odd symmetry. For the angle parameter value  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , the symmetry properties of the FrFT reduce to the corresponding properties of the classical Fourier transform. Through some examples, it is also shown that a lately proposed discrete FrFT algorithm approximating the continuous FrFT also exhibits these symmetry properties.*

#### ANAHTAR KELİMELER/KEYWORDS

Kesirli Fourier dönüşümü, Simetri özellikleri  
*Fractional Fourier transform, Symmetry properties*

## 1. GİRİŞ

Kesirli Fourier dönüşümü (KFD), geçtiğimiz yıllarda özellikle sinyal işleme ve optik alanlarında oldukça popülerlik kazanmıştır (Özaktas vd., 2001; Namias, 1980; McBride vd., 1987; Almeida, 1994). KFD, klasik Fourier dönüşümünün  $\phi$  ile temsil edilen bir açı parametresi ile genellenmesi olarak düşünülebilir. Bir zaman sinyali olan  $s(t)$ 'nin KFD'si aşağıdaki şekilde tanımlanabilir<sup>1</sup>.

$$(\text{IF}^\phi s)(r) = S^\phi(r) = \begin{cases} A_\phi e^{j\pi r^2 \cot \phi} \int s(t) e^{j\pi t^2 \cot \phi} e^{-j2\pi r t \csc \phi} dt, & \phi \neq n\pi \\ s(t), & \phi = (2n)\pi \\ s(-t), & \phi = (2n+1)\pi \end{cases} \quad (1)$$

Yukarıdaki denklemde;  $\text{IF}^\phi$ , KFD operatörünü,  $S^\phi(r)$  de  $s(t)$ 'nin KFD'sini gösterirken,  $n$  ise herhangi bir tamsayıdır.  $A_\phi = \sqrt{1 - j \cot \phi}$ , KFD'nin birimcil (enerjiyi koruyan) bir dönüşüm olmasını sağlayan bir sabit terimdir. Eşitlik 1'de  $\phi = \frac{\pi}{2}$  kullanılırsa klasik Fourier dönüşümü KFD'nin özel bir hali olarak elde edilir.

$$(\text{IF}^{\frac{\pi}{2}} s)(f) = S^{\frac{\pi}{2}}(f) = \int s(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2)$$

Eşitlik 1'in ikinci satırından anlaşılacağı gibi, zaman sinyali  $s(t)$ , KFD'nin bir başka özel halidir. Limitte  $\phi$  açısı sıfıra (veya  $2\pi$ 'nin tamsayı katlarına) yaklaşırken, KFD  $s(t)$  sinyaline indirgenir (Özaktas vd., 2001; Almeida, 1994). Bir başka deyişle; KFD, açı parametresinin  $\phi=0$  özel değeri için özdeşlik dönüşümüne basitleşir. Benzer şekilde, KFD'nin çıkış değişkeni olan  $r$ ,  $\phi = \frac{\pi}{2}$  için frekans değişkeni  $f$ 'ye,  $\phi=0$  için ise zaman değişkeni  $t$ 'ye dönüşür.

KFD'nin pek çok yararlı özelliği türetilmiştir (Özaktas vd., 2001; Namias, 1980; McBride vd., 1987; Almeida, 1994). Klasik Fourier dönüşümünün özellikleri, KFD'nin özelliklerinde  $\phi = \frac{\pi}{2}$  yerleştirilerek elde edilebilir. Örneğin, gerçek bir sinyal  $s(t)$  için KFD aşağıdaki özelliğe sahiptir (Özaktas vd., 2001; Almeida, 1994).

$$S^\phi(r) = [S^{-\phi}(r)]^* \quad (3)$$

Eşitlik 3'de  $\phi = \frac{\pi}{2}$  yerleştirilirse klasik Fourier dönüşümünün gerçek sinyaller için geçerli olan eşlenik simetri özelliği  $S^{\frac{\pi}{2}}(f) = [S^{-\frac{\pi}{2}}(f)]^* = [S^{\frac{\pi}{2}}(-f)]^*$  şeklinde elde edilir. KFD'nin bir başka ilginç özelliği de, çift simetrik sinyallerin KFD'sinin çift simetrik, tek simetrik sinyallerin KFD'sinin de yine tek simetrik olmasıdır (Özaktas vd., 2001; Almeida, 1994). Ancak, literatürde KFD'nin gerçek çift simetrik ve gerçek tek simetrik sinyaller için ne tür bir özelliğe sahip olduğu açıklıkla belirtilmemiştir.

<sup>1</sup> Makale boyunca integraller  $-\infty$ 'dan  $+\infty$ 'a alınmaktadır.

Bu makalede, KFD'nin gerçek çift simetrik ve gerçek tek simetrik sinyaller için geçerli olan simetri özellikleri türetilmektedir. Ek olarak, bu özelliklerin klasik Fourier dönüşümünün karşılık gelen özelliklerini genellediği gösterilmektedir.

## 2. KFD'NİN SİMETRİ ÖZELLİKLERİ

İlk olarak, gerçek ve çift simetrik sinyaller ele alınsın. Eğer zaman sinyali  $s(t)$  gerçek ve çift simetrik ise

$$s(t) = s^*(t) = s(-t) \quad (4)$$

yazılabilir.

*Özellik 1:* Eğer zaman sinyali  $s(t)$  gerçek ve çift simetrik ise KFD'si

$$[S^\phi(r)]^* = S^{\pi-\phi}(r) \quad (5)$$

özelliğine sahiptir.

*İspat:* KFD'nin Eşitlik 1'in ilk satırında  $\phi \neq n\pi$  için verilen tanımı yeniden yazılarak başlanabilir.

$$S^\phi(r) = A_\phi e^{j\pi r^2 \cot \phi} \int s(t) e^{j\pi t^2 \cot \phi} e^{-j2\pi r \csc \phi} dt \quad (6)$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının karmaşık eşleniği alınırsa

$$[S^\phi(r)]^* = A_\phi^* e^{-j\pi r^2 \cot \phi} \int s^*(t) e^{-j\pi t^2 \cot \phi} e^{j2\pi r \csc \phi} dt \quad (7)$$

ifadesi elde edilir. Eşitlik 4'ü kullanarak Eşitlik 7 yeniden yazıldığında

$$[S^\phi(r)]^* = A_\phi^* e^{-j\pi r^2 \cot \phi} \int s(-t) e^{-j\pi t^2 \cot \phi} e^{j2\pi r \csc \phi} dt \quad (8)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki integrale  $\tilde{t} = -t$  değişken dönüşümü uygulandığında

$$[S^\phi(r)]^* = A_\phi^* e^{-j\pi r^2 \cot \phi} \int s(\tilde{t}) e^{-j\pi \tilde{t}^2 \cot \phi} e^{-j2\pi \tilde{t} r \csc \phi} d\tilde{t} \quad (9)$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadenin sağ tarafı, Eşitlik 6'da  $\phi$  açı parametresi için yazılmış KFD tanımıyla karşılaştırılır ve  $\cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$  ve  $\sin(\pi - \phi) = \sin \phi$  trigonometri formülleri de kullanılırsa, Eşitlik 9'un sağ tarafının  $S^{\pi-\phi}(r)$ 'ye eşit olduğu görülür ve sonuç olarak Eşitlik 5 bulunmuş olur.

İkinci olarak, zaman sinyali  $s(t)$ 'nin gerçek ve tek simetrik olması durumu ele alınacaktır. Bu durumda

$$s(t) = s^*(t) = -s(-t) \quad (10)$$

yazılabilir.

Özellik 2: Eğer zaman sinyali  $s(t)$  gerçek ve tek simetrik ise KFD'si

$$[S^\phi(r)]^* = -S^{\pi-\phi}(r) \quad (11)$$

özelliğine sahiptir.

İspat: Bu kez ispata Eşitlik 7'de  $s^*(t) = -s(-t)$  yerleştirerek başlanabilir. Böylece

$$[S^\phi(r)]^* = -A_\phi^* e^{-j\pi r^2 \cot \phi} \int s(-t) e^{-j\pi t^2 \cot \phi} e^{j2\pi t r \csc \phi} dt \quad (12)$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki ifadeye  $\tilde{t} = -t$  değişken dönüşümünü uygularsak

$$[S^\phi(r)]^* = -A_\phi^* e^{-j\pi r^2 \cot \phi} \int s(\tilde{t}) e^{-j\pi \tilde{t}^2 \cot \phi} e^{-j2\pi \tilde{t} r \csc \phi} d\tilde{t} \quad (13)$$

bulunur. Eşitlik 13'ün sağ tarafının  $-S^{\pi-\phi}(r)$ 'ye eşit olduğu görülebilir. Böylece

$$[S^\phi(r)]^* = -S^{\pi-\phi}(r) \quad (14)$$

ifadesine ulaşılarak ispat tamamlanır.

KFD'nin Eşitlik 5 ve Eşitlik 11'de verilen simetri özellikleri,  $\phi = \frac{\pi}{2}$  özel değeri için klasik Fourier dönüşümünün ilgili özelliklerine indirgenir.  $\phi = \frac{\pi}{2}$  için, Eşitlik 5'teki ilk simetri özelliği  $[S^{\frac{\pi}{2}}(f)]^* = S^{\frac{\pi}{2}}(f)$  eşitliğine dönüşür. Bu eşitlik de gerçek ve çift simetrik bir sinyalin klasik Fourier dönüşümünün gerçek değerli olduğunu belirten özelliktir. Benzer şekilde, Eşitlik 11'de verilen ikinci simetri özelliği de  $[S^{\frac{\pi}{2}}(f)]^* = -S^{\frac{\pi}{2}}(f)$  ifadesine sadeleşir ki bu ifade de gerçek ve tek simetrik sinyallerin klasik Fourier dönüşümünün sanal değerli olduğunu belirten özelliktir. KFD ve klasik Fourier dönüşümünün simetri özellikleri Çizelge 1'de toplu olarak özetlenmiştir.

Çizelge 1. Kesirli Fourier dönüşümü (KFD) ve klasik Fourier dönüşümünün simetri özellikleri (klasik Fourier dönüşümünün simetri özellikleri KFD'nin simetri özelliklerinde  $\phi = \pi/2$  yerleştirerek elde edilebilir).

$s(t)$	KFD simetri özelliği (herhangi bir $\phi$ değeri)	Klasik Fourier dönüşümü simetri özelliği ( $\phi = \pi/2$ )
gerçek ve çift simetrik	$[S^\phi(r)]^* = S^{\pi-\phi}(r)$	$[S^{\frac{\pi}{2}}(f)]^* = S^{\frac{\pi}{2}}(f)$
gerçek ve tek simetrik	$[S^\phi(r)]^* = -S^{\pi-\phi}(r)$	$[S^{\frac{\pi}{2}}(f)]^* = -S^{\frac{\pi}{2}}(f)$

KFD'nin yukarıda türetilen ve Çizelge 1'de gösterilen simetri özellikleri KFD çıkış sinyalleri olan  $S^\phi(r)$  ve  $S^{\pi-\phi}(r)$ 'yi birbiriyle ilişkilendirir. Bu simetri özelliklerini kullanarak, KFD çıkış sinyalleri  $S^\phi(r)$  ve  $S^{\pi-\phi}(r)$ 'nin genlik, faz, gerçek ve sanal kısımları arasındaki bağlantıları çıkarımlamak da mümkündür. Özellik 1'in sonucu olarak elde edilen bağlantılar Çizelge 2'de, Özellik 2'den elde edilen ilişkiler de Çizelge 3'de topluca verilmiştir.

Çizelge 2. Gerçek ve çift simetrik  $s(t)$  için KFD çıkış sinyalleri  $S^\phi(r)$  ve  $S^{\pi-\phi}(r)$  'nin genlik, faz, gerçek ve sanal kısımları arasındaki ilişkiler

$s(t)$ gerçek ve çift simetrik $\Rightarrow [S^\phi(r)]^* = S^{\pi-\phi}(r)$	
Genlik	$ S^\phi(r)  =  S^{\pi-\phi}(r) $
Faz	$\angle S^\phi(r) = -\angle S^{\pi-\phi}(r)$
Gerçek kısım	$\text{Re}\{S^\phi(r)\} = \text{Re}\{S^{\pi-\phi}(r)\}$
Sanal kısım	$\text{Im}\{S^\phi(r)\} = -\text{Im}\{S^{\pi-\phi}(r)\}$

Çizelge 3. Gerçek ve tek simetrik  $s(t)$  için KFD çıkış sinyalleri  $S^\phi(r)$  ve  $S^{\pi-\phi}(r)$  'nin genlik, faz, gerçek ve sanal kısımları arasındaki ilişkiler

$s(t)$ gerçek ve tek simetrik $\Rightarrow [S^\phi(r)]^* = -S^{\pi-\phi}(r)$	
Genlik	$ S^\phi(r)  =  S^{\pi-\phi}(r) $
Faz	$\angle S^\phi(r) = -\angle S^{\pi-\phi}(-r)$
Gerçek kısım	$\text{Re}\{S^\phi(r)\} = -\text{Re}\{S^{\pi-\phi}(r)\}$
Sanal kısım	$\text{Im}\{S^\phi(r)\} = \text{Im}\{S^{\pi-\phi}(r)\}$

Çizelge 3'teki 'Faz' ilişkisi hariç, Çizelge 2 ve Çizelge 3'teki tüm eşitlikler *Özellik 1* ve *Özellik 2*'den kolaylıkla çıkarımlanabilir. Ancak, Çizelge 3'teki 'Faz' ilişkisinin çıkarımı biraz daha çaba gerektirebilir. Bu eşitliğin doğruluğu, aşağıda tekrar yazılan *Özellik 2* aracılığıyla gösterilebilir.

$$[S^\phi(r)]^* = -S^{\pi-\phi}(r) \quad (15)$$

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı, Eşitlik 3'te verilen ve tüm gerçek sinyaller için geçerli olan özellik kullanılarak değiştirilirse

$$[S^\phi(r)]^* = -[S^{\phi-\pi}(r)]^* \quad (16)$$

ifadesi elde edilir. KFD'nin herhangi bir zaman sinyali  $s(t)$  için geçerli olan aşağıdaki özelliği (Özaktas vd., 2001; Almeida, 1994)

$$S^{\phi-\pi}(r) = S^\phi(-r) \quad (17)$$

Eşitlik 16'da kullanılırsa,

$$[S^\phi(r)]^* = -[S^\phi(-r)]^* \quad (18)$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlik 15 ve Eşitlik 18 bir araya getirildiğinde aşağıdaki ifade elde edilir.

$$-S^\phi(-r) = -[S^{\pi-\phi}(r)]^* \quad (19)$$

Son olarak, eksi işaretleri sadeleştirip eşitliğin her iki tarafındaki KFD sinyallerinin bağımsız değişkenlerinin de negatifleri alınırsa,

$$S^\phi(r) = [S^{\pi-\phi}(-r)]^* \quad (20)$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak, bu eşitliğin her iki tarafındaki KFD çıkış sinyallerinin faz kısımları arasındaki ilişki

$$\angle S^\phi(r) = -\angle S^{\pi-\phi}(-r) \quad (21)$$

olarak bulunmuş olur ki bu da Çizelge 3'ün 'Faz' satırındaki ilişkidir.

### 3. ÖRNEKLER

Bu bölümde, Eşitlik 1'de matematiksel tanımı verilen sürekli KFD'nin ayrık zamanlı bir yaklaşımı olarak Özaktaş vd.'nin önerdiği bir algoritmayı kullanarak, bir önceki bölümde türetilmiş ve Çizelge 2 ve Çizelge 3'te özetlenmiş olan simetri özelliklerini sergileyen örnekler verilecektir (Özaktaş vd., 1996). Özaktaş vd.'nin önerdiği ayrık zamanlı algoritma, zaman sinyali  $s(t)$ 'nin  $N$  örnek noktasındaki değerlerini giriş olarak alıp KFD çıkış sinyali  $S^\phi(r)$ 'nin yine  $N$  örnek noktasındaki değerlerini hesaplamaktadır (Özaktaş vd., 1996). Bu bölümde verilen örneklerin grafiksel sonuçlarının kuramsal sonuçlarla ne derece uyumlu olduğunu gözlemleyerek ayrık zamanlı algoritmanın sürekli KFD formülasyonunu gerçeklemede ne oranda başarılı olduğu konusunda da bir fikir edinilmesi mümkün olacaktır. Bu amaçla, gerçek ve çift simetrik bir sinyal olarak kosinüs sinyali ve gerçek ve tek simetrik bir sinyal olarak da sinüs sinyali kullanılacaktır.

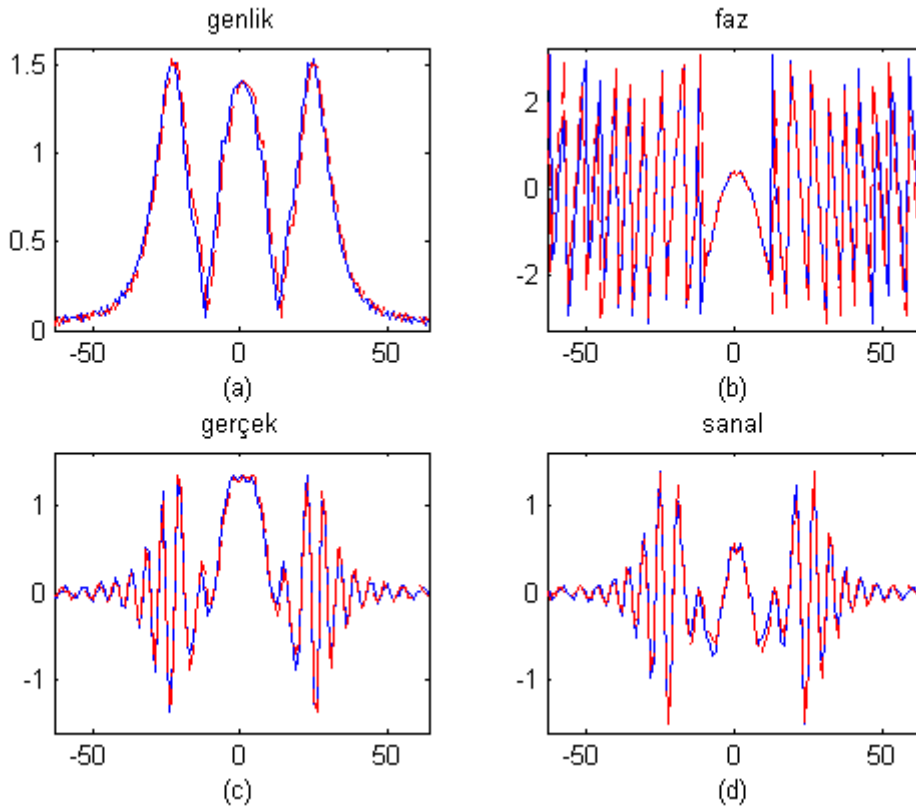
**Örnek 1- Gerçek ve çift simetrik**  $s(t)$ :  $N=128$  örnek uzunluğunda olan ayrık zamanlı gerçek ve çift simetrik bir kosinüs sinyali aşağıdaki şekilde oluşturulabilir.

$$x[n] = \cos(n/16), \quad n = -63, -62, \dots, 63, 64 \quad (22)$$

Daha sonra, Özaktaş vd.'de önerilen algoritma kullanılarak açılı parametreleri sırasıyla  $\frac{\pi}{3}$  ve  $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$  olan KFD çıkış sinyalleri  $S^{\frac{\pi}{3}}(r)$  ve  $S^{\frac{2\pi}{3}}(r)$  hesaplanır. Şekil 1'de, KFD sinyali  $S^{\frac{\pi}{3}}(r)$ 'e ait olan eğriler sürekli çizgi ile, KFD çıkış sinyali  $S^{\frac{2\pi}{3}}(r)$ 'e ait olan eğriler ise kesikli çizgi ile çizdirilmiştir (Özaktaş vd., 1996).

Şekil 1a'da, KFD genlik çıkış sinyalleri  $|S^{\frac{\pi}{3}}(r)|$  ve  $|S^{\frac{2\pi}{3}}(r)|$ , sırasıyla sürekli ve kesikli çizgi kullanılarak, üst üste çizdirilmiştir. Çizelge 2'deki 'Genlik' eşitliğiyle uyumlu olarak her iki eğri de birbirlerini yakından takip etmektedir. Şekil 1b'de sürekli çizgi  $\angle S^{\frac{\pi}{3}}(r)$ 'ye, kesikli çizgi ise  $-\angle S^{\frac{2\pi}{3}}(r)$ 'ye karşılık gelmektedir. Çizelge 2'deki 'Faz' eşitliğini doğrular şekilde, her iki eğri de büyük oranda birbirlerini takip etmektedir. İki eğrinin birbirlerinden daha belirgin olarak ayrıştığı kısımlar ani faz değişimlerinin sıklıkla meydana geldiği iki uç nokta civarındadır. Bu noktalarda, Özaktaş vd.'de önerilen ayrık zamanlı algoritmanın Eşitlik 1'deki sürekli KFD'ye yaklaşımının nispeten daha kötü olduğu sonucuna varılabilir (Özaktaş vd.,

1996). Şekil 1c'de gerçek kısım sinyalleri  $\text{Re}\{S^\phi(r)\}$  ve  $\text{Re}\{S^{\pi-\phi}(r)\}$  birlikte çizdirilmiş olup, iki eğrinin üst üste çakıştıkları görülebilir. Sanal kısım sinyalleri  $\text{Im}\{S^\phi(r)\}$  ve  $-\text{Im}\{S^{\pi-\phi}(r)\}$  Şekil 1d'de üst üste çizdirilmiştir. Sonuç olarak, bu basit örnek Bölüm 2'de türetilip ispatlanan ve Çizelge 1 ve Çizelge 2'de özetlenen *Özellik 1*'i doğrulamakta, böylelikle de, KFD çıkış sinyallerinin faz kısımlarının ani faz değişimlerinin yer aldığı uç noktaları hariç tutulursa, Özaktaş vd.'de önerilen ayrık zamanlı algoritmanın KFD'nin sürekli formülasyonunun iyi bir yaklaşımı olduğunu göstermektedir (Özaktaş vd., 1996). Ayrıca, Şekil 1c ve d'de yer alan  $S^{\frac{\pi}{3}}(r)$  çıkış sinyalinin gerçek ve sanal kısımları çift simetrik olup, çift simetrik sinyallerin KFD'sinin de çift simetrik olduğu gerçeğini sergilemektedir.



Şekil 1: KFD'nin simetri özelliklerinin gerçek ve çift simetrik kosinüs sinyali için gözlenmesi; (KFD çıkış sinyali  $S^{\frac{\pi}{3}}(r)$ 'e ait olan eğriler sürekli çizgi ile, KFD çıkış sinyali  $S^{\frac{2\pi}{3}}(r)$ 'e ait olan eğriler ise kesikli çizgi ile çizdirilmiştir. Yatay eksenler örnek numarasını göstermektedir). (a) Genlikler, (b) Fazlar, (c) Gerçek kısımlar, (d) Sanal kısımlar

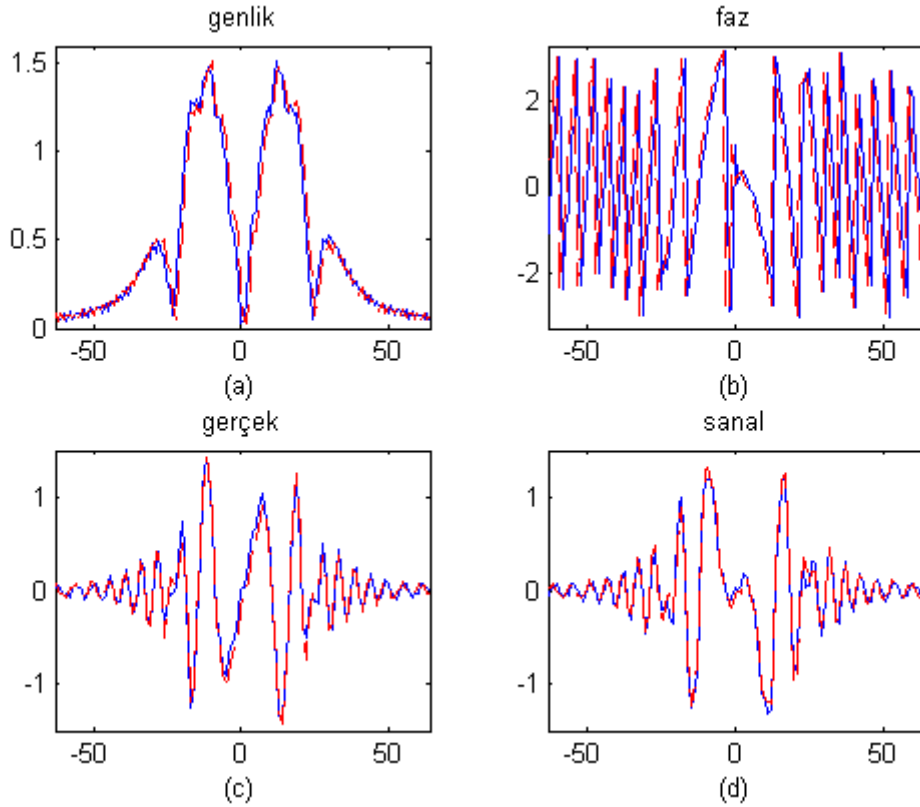
**Örnek 2 - Gerçek ve tek simetrik  $s(t)$ :** Bu örnekte, ise gerçek ve tek simetrik bir sinyal olan sinüs sinyali aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

$$x[n] = \sin(n/16), \quad n = -63, -62, \dots, 63, 64. \quad (23)$$

Sonrasında, Özaktaş vd.'de önerilen ayrık zamanlı algoritma kullanılarak  $S^{\frac{\pi}{3}}(r)$  ve  $S^{\frac{2\pi}{3}}(r)$  hesaplanmıştır (Özaktaş vd., 1996). Şekil 2a, b, c ve d'de KFD sinyalleri  $S^{\frac{\pi}{3}}(r)$  ve

$S^{\frac{2\pi}{3}}(r)$ 'nin farklı büyüklükleri (genlik, faz, gerçek ve sanal kısım) sırasıyla sürekli ve kesikli çizgi ile çizdirilmiştir.

Genlik sinyalleri  $|S^{\frac{\pi}{3}}(r)|$  ve  $|S^{\frac{2\pi}{3}}(r)|$  Şekil 2a'da üst üste çizdirilmiştir. Çizelge 3'deki 'Genlik' satırını doğrular biçimde iki eğri çakışmaktadır. Benzer şekilde, faz sinyalleri  $\angle S^{\frac{\pi}{3}}(r)$  ve  $-\angle S^{\frac{2\pi}{3}}(-r)$  Şekil 2b'de çizdirilmiştir. Çizelge 3'ün 'Faz' eşitliğinden de görülebileceği gibi  $S^{\frac{2\pi}{3}}(r)$ 'nin faz kısmının hem eksen ters çevrilmiş hem de negatifi alınmıştır. Her iki faz sinyali büyük oranda birbirini takip etmektedir. Gerçek kısım sinyalleri  $\text{Re}\{S^{\phi}(r)\}$  ve  $-\text{Re}\{S^{\pi-\phi}(r)\}$  Şekil 2c'de birlikte görülebilirler. Benzer şekilde, sanal kısım sinyalleri  $\text{Im}\{S^{\phi}(r)\}$  ve  $\text{Im}\{S^{\pi-\phi}(r)\}$  de Şekil 2d'de üst üste çizdirilmişlerdir. Hem gerçek hem de sanal kısım grafikleri Çizelge 3'ün son iki satırındaki eşitlikleri doğrular biçimdedir. Son olarak, KFD sinyali  $S^{\frac{\pi}{3}}(r)$ 'nin Şekil 2c ve 2d'de yer alan gerçek ve sanal kısım sinyalleri tek simetrik olup, tek simetrik sinyallerin KFD'sinin de tek simetrik olduğu gerçeğini yansıtmaktadır.



Şekil 2: KFD'nin simetri özelliklerinin gerçek ve tek simetrik sinüs sinyali için gözlenmesi; (KFD çıkış sinyali  $S^{\frac{\pi}{3}}(r)$ 'e ait olan eğriler sürekli çizgi ile, KFD çıkış sinyali  $S^{\frac{2\pi}{3}}(r)$ 'e ait olan eğriler ise kesikli çizgi ile çizdirilmiştir. Yatay eksenler örnek numarasını göstermektedir). (a) Genlikler, (b) Fazlar, (c) Gerçek kısımlar, (d) Sanal kısımlar



#### 4. SONUÇ

Bu makalede, KFD'nin gerçek çift simetrik ve gerçek tek simetrik sinyaller için simetri özellikleri türetilmiştir. Türetilen simetri özellikleri uygun bir şekilde klasik Fourier dönüşümünün simetri özelliklerine indirgenirler. Özel olarak, çıkarılan simetri özellikleri KFD sinyallerinin genlik, faz, gerçek ve sanal kısımlarına göre incelenmiştir. Ayrıca, türetilen bu simetri özellikleri ayrık zamanlı bir KFD algoritması ile denenerek, söz konusu algoritmanın sürekli KFD formülasyonunu oldukça iyi bir yaklaşıklıkla gerçeklediği de gözlemlenmiştir.

#### KAYNAKLAR

- Almeida L. B. (1994): "The fractional Fourier transform and time-frequency representations", IEEE Trans. on Sig. Proc., vol. 42, pp. 3084-3091, Nov. 1994.
- McBride A. C., Kerr F. H. (1987): "On Namias's fractional Fourier transforms", IMA J. Appl. Math., vol. 39, pp. 159-175, 1987.
- Namias V. (1980): "The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics", J. Inst. Math. Appl., vol. 25, pp. 241-265, 1980.
- Özaktaş H. M., Zalevsky Z., Kutay M. A. (2001): "The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing", John Wiley and Sons, 2001.
- Özaktaş H. M., Arıkan O., Kutay M. A., Bozdağı G. (1996): "Digital computation of the fractional Fourier transform", IEEE Trans. on Sig. Proc., vol. 44, pp. 2141-2150, Sep. 1996.