T.C.

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

EKONOMETRİ PROGRAMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAYESYEN MODEL ile DOĞRUSAL REGRESYON MODELLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI ÜZERİNE BİR UYGULAMA

Nicat GASIM

Danışman

Prof.Dr.M.Vedat PAZARLIOĞLU

İZMİR-2013

YÜKSEK LİSANS
TEZ/ PROJE ONAY SAYFASI

2010800209

Üniversite	: Dokuz Eylül Üniversitesi
Enstitü	: Sosyal Bilimler Enstitüsü
Adı ve Soyadı	: NİCAT GASİM
Tez Başlığı	: Bayesyen Model ile Doğrusal Regresyon Modelerinin Karşılaştırılması Üzerine Bir Uygulama
Savunma Tarihi	: 02.09.2013
Danışmanı	: Prof.Dr.Mehmet Vedat PAZARLIOĞLU

JÜRİ ÜYELERİ

Ünvanı, Adı, Soyadı	**Üniversitesi**	**İmza**
Prof.Dr.Mehmet Vedat PAZARLIOĞLU	DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ	....
Doç.Dr.Kadir ERTAŞ	DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ	....
Prof.Dr.Bülent MİRAN	EGE ÜNİVERSİTESİ	....

Oybirliği (X)
Oy Çokluğu ( )

NİCAT GASİM tarafından hazırlanmış ve sunulmuş "**Bayesyen Model ile Doğrusal Regresyon Modelerinin Karşılaştırılması Üzerine Bir Uygulama**" başlıklı Tezi**( )** / Projesi**( )** kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Utku UTKULU
Enstitü Müdürü

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Bayesyen Model ile Doğrusal Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması Üzerine Bir Uygulama" adlı çalışmanın, tarafımdan, akademik kurallara ve etik değerler uygun olarak yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanmıış olduğumu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Tarih

…/…/……

Nicat GASIM

İmza

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Bayesyen Model ile Doğrusal Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması Üzerine Bir Uygulama

Nicat GASIM

Dokuz Eylül Üniversitesi

Sosyal Bilimler Enstitüsü

Ekonometri Anabilim Dalı

Ekonometri Programı

Bu çalışmanın amacı Bayesyen yaklaşımın temel özelliklerine işaret ederek, regresyon analizini Bayesyen ilkelere göre gerçekleştirmektir. Bayesyen yaklaşımın ön bilginin kullanılmasına olanak vermesi sayesinde regresyon analizinde çok daha etkin parametre tahmini yapılabilmektedir. Parametrelere ilişkin çıkarsama, hipotez testi veya güven aralıkları hesabı ön bilgi ve örneklem bilgisine dayandırılarak yapılır. Tekrarlanan davranışları göz önünde bulundurarak çıkrasama sürecine gitmeye gerek duyulmaz. Bayesyen yaklaşım özellikle ekonometrik modellerde karşılaşılan sorunlarda çözüm olabilmektedir. Örneklemin büyük veya küçük olması Bayesyen regresyon modelleri için sorun değildir. Her iki durumda yöntem çalışmaktadır. Ayrıca bilgisayarların gelişmesi ve yazılımdaki ilerlemelerle Bayesyen yaklaşımın uygulanmasında artık hesaplamaya ilişkin hiç bir sorunla karşılaşılmamaktadır.

Dünya ekonomilerinde özellikle 1980-1990'ların sonlarında yaşanan krizlerin nedeni olarak kriz yaşayan ülkelerde var olan dış dengesizlik dolayısıyla verilen yüksek cari açıklar gösterilmiştir. Geçmiş dönemde savunulan cari dengeye ulaşma biçimleri yüksek hacimli sermaye hareketleri nedeniyle gerçerliliğini yitirmiştir. Bu dönemden sonra modern bir yaklaşım olan dönemlerarası tüketim yaklaşımı popüler hale gelmiştir. Buna göre cari açık veren ülke dönemlerarası bütçe kısıtını tatmin edebiliyorsa bu durumda

cari işlemler açığı sürdürülebilir olmaktadır. Türkiye ekonomisi de 1994, 2001 ve 2008 kirizlerinde sermaye çıkışları yaşamış ve cari açığını bu dönemlerde sürdürülemez hale getirmiştir. 2001 yılından sonraki dönemlerde Türkiye'de rekor düzeyde cari işlemler açıkları gerçekleşmiştir. Bu da geçmiş dönem cari açıkların sürdürülebilirliğinin sorgulanmasına neden olmaktadır.

Bu çalışmada, Türkiye'nin cari açığının nedenlerini EKK ve Bayesyen Regresyon yöntemiyle analiz edilmiştir. Bu amaçla kurulan her iki regresyon modelinde Türikiye'nin dış ticaret hacmi ve GSYH'sı bağımsız değişken olarak modele alınmıştır. Çalışmada 1980-2012 dönemleri için yıllık veriler kullanılmıştır.

Çalışmadan elde edilen sonuçlara göre, Türkiye'nin cari açığı ile dış ticaret hacmi ve GSYH'sı arasında eşbütünleşme ilişkisi vardır.

Anahtar Kelimeler; Klasik Regresyon, Bayesyen Regresyon, Cari Açık, Johansen Eşbütünleşme Testi

ABSTRACT

Master Thesis

An Application on Comparison of Bayesian Model with Linear Regression Models

Nicat GASIM

Dokuz Eyul University

Graduate School of Social Science

Department of Econometrics

The purpose of this study is to carry out regression analysis in the line with Bayesian principles by pointing out the main features of Bayesian approach. In regression analysis, Bayesian approach can realize more effective parameter estimation by means of providing the opportunity to use prior information. The inference about parameters, hypothesis testing or confidence interval are performed on the basis of the both prior information and sampling information we have. There is no need to apply the inference procedure in terms of their behavior in repeated. Bayesian approach especially provides solutions to the problems that are met in size. Any longer, there is no difficulty to comute numerical integration of the applications within the Bayesian context as the technical impovements of computer effort and software products are increased.

World economies have financial crisis experience; especially Latin America and Southeast Asian countries because of having external imbalances at the end of 1980's and 1990's. The ways of theoretical current account adjustment have become invalid since high volume of capital inflows raised. However in the last period intertemporal consumption theory became more popular in the economic literature. In this view if a debtor country satisfies ist intertemporal budget constraint then ists curren account deficit will be sustainable. Also Turkish economy hax experience of high volume capital outflows therefore current account deficits were become unsustainable in 1994, 2001 and 2008 years. Afer 2001's Turkey's current account deficits have

reaching maximum levels so that Turkey's current account position is argued again.

In this study is to analyze the reasons of Turkey Account Deficit with the OLS and Bayesian regression method. For this purpose both the foreign trade volume and GDP include the each model as independent variables.

Keywords; OLS, Bayesian Regression, Current Account Deficit, Johansen Cointegration Test

BAYESEYEN MODEL ile DOĞRUSAL REGRESYON MODELLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI ÜZERİNE BİR UYGULAMA

İÇİNDEKİLER

KISTALTMALAR

ABD	**AMERİKA BİRLEŞİK DEVLETLERİ**
ADF	**GENİŞLETİLMİŞ DİCKEY-FULLER (TESTİ)**
EKK	**EN KÜÇÜK KARELER (YÖNTEMİ)**
GLS	**Genelleştirilmiş En Küçük Kareler**
GSYH	**Gayri Safi Yurtiçi Hasıla**
IMF	**Uluslararası Para Fonu**
MCMC	**Morkov Zinciri ve Monte Carlo**
NSE	**Sayısal Standart Hatalar**
OHK	**Ortalama Hata Kareleri**
RNE	**Oransal Sayısal Etkinlik**
SSE	**Hata Kareler Toplamı**
TCMB	**Türkiye Cumhuriyeti Merkez Bankası**
TUİK	**Türkiye İstatistik Kurumu**
TÜFE	**Tüketici Fiyat Endeksi**
VEC	**Vektör Hata Düzeltme**

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

GRAFİKLER LİSTESİ

EKLER LİSTESİ

GİRİŞ

Dünya ekonomilerinde özellikle 1970'lerin sonlarına doğru petrol şoklarının işsizlik ve enflasyon sorunları nedeniyle Keynesyen politikaların etkisinin kaybedip, özellikle M.Freidman sayesinde monetarist yaklaşımların ve böylece rasyonel bekleyiş düşüncesinin önünü açmıştır. Buna göre dünya ekonomilerinde liberallerşme hareketleri yaşanmıştır. Bunun ilk yansıması olarak sermaye hareketlerinin hacminde artışlar kaydedilmiştir. Günümüzde ise sermaye hareketlerinin çok hızlı ve yüksek hacimli bir biçimde gerçekleşmesi dünyada küresel bir ekonomik yapıyı ortaya çıkarmıştır. Küreselleşen dünya ekonomilerinde sermaye hareketlerinin bir neticesi olarak ülkelerin cari işlemler dengelerinde bozulmalar yaşanmıştır. Cari dengelerinde büyük bozulmalar yaşayan Latin Amerika, Güney Doğu Asya ve bazı Avrupa ülkeleri finansal krizler yaşamışlardır. Dolayısıyla son zamanlarda Türkiye' de de tartışmaya başlayan cari açıkların ekonomiler için büyük preblemlere neden olup olmadığı tartışmaya başlanmıştır.

Cari işlemler açığı özellikle gelişmekte olan ülkeler için önemli bir sorun oluşturmaktadır. Düşük gelirli ülkelerin, tasarruf oranlarının düşük olması, kalkınabilmesi için kaynak ihtiyacı doğrumaktadır. Söz konusu kaynak ihtiyacı yüksek tasarruf oranlarına sahip gelişmiş ülkelerden, tararruf oranları düşük olan az gelirli ülkelere kaynak aktarımını gerçekleştirir ki, bu da sermeye hareketleri vasıtası ile olmakatdır. Yatırım talebinn artması veya tasarruf oranlarında azalma nedeniyle işlemler dengelerinde açık verilmesine sebebiyet verir. Oluşan bu cari açıkların ne zaman krize neden olacağı ekonomi çevrelerinde sıkça tarışılmaktadır. Uygulamalı çalışmalara bakıldığında az ve orta gelire sahip ülkelerin verdiği cari açıkların GSYH'ya oranlarının %4 veya %5'i geçtiği zaman ekonomilerde bozucu etkilerinin veya kriz oluşturucu nitelikte olabileceğinden dolayı dikkatle izlenmesi gerektiği ortaya konulmuştur(Milessi vd, 1996, Summer 1996, Edwards 2001, Freund, 2005,). Ancak bu çalışmada bunun kesin bir eşik değer olarak görülmediğini belirtmek gerekir. Uygulamalı çalışmaların ulaştığı ortak sonuç bu doğrultuda olduğu için analizde bu ayrıntıya dikkat edilmiştir.

Türkiye ekonomisi 1980'lerin sonlarına doğru hızlı bir liberalleşme hareketi yaşamıştır. Böylece ekonomik politika yapıcıları, dış ticaret rejimi ve sermaye girişleri üzerindeki kısıtlamaları kaldırarak ekonominin dış hassasiyerlerini de artırmıştır. Türkiyenin eknonomik yapısının liberal hale getirilmesine paralel olarak cari dengesinde de bozulmalar yaşanmıştır. Türkiye kriz yıllarında daralmalar hariç cari işlemler dengesinde sürekli açık vermiştir. İlk olarak dikkati çeken cari açıkların kriz yılları öncesinde yani 1994, 2001 ve 2008 yıllarından önce artmasıdır. Türkiye'de 1993 yılında cari açığın GSYH'ya oranı %3.5, 2000 yılında %1.37, 2007 yılında ise %3.73' e ulaşmıştır. Bu da aslında kriz yıllarından önce cari açıkların iyi yönetilemediğini ortaya çıkarmaktadır. Bununla beraber Türkiye'nin son üç yılda cari açıkları rekor düzeylere ulaşmıştır. 2012 yılında cari açığın GSYH'ya oranı %5.05'e yükselmiştir. Bu durumda cari açık yeni bir ekonomik kriz getirirmi? sorusunu cevaplamak gerekir. Bu nedenle Türkiye'de cari açık sorunu güncel hale gelmiştir.

Çalışmanın temel amacı da geçmiş dönemde verilen cari açıkların sürdürülebilirliğini analiz etmketir. Bu amaçla uygulamalı bir biçimde Türkiye'nin cari açığının sürdürülebilirliği Klasik ve Bayesyen yaklaşımlar yardımıyla incelenmiştir. Ayrıca cari işlemler dengesinin yapısı ortaya konulmuş ve cari açığın nasıl meydana geldiği araştırılmıştır. Çalışmanın birinci bölümünde Klasik ve Bayesyen yaklaşımlarla ilgili temel kavramlar, ikinci bölümde Bayesyen Regresyon, üçüncü bölümde Cari açık, dördüncü bölümde ise uygulama ve sonuçlar ana hatlarıyla incelenmiştir.

BİRİNCİ BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1.TAHMİN

Ana kitle hakkında bilgi veren karakteristik değere parametre denir. Ancak ana kitleyi gözlemlemek her zaman mümkün olmadığından, parametre değerlerine de ulaşmak mümkün değildir. Bu nedenle ana kitleden elde edilen örnekler yardımıyla ana kitle parametreleri hakkında tahminde bulunmak mümkün olabilmektedir. Şöyleki, örnekten elde edilen ortalama $\hat{\mu}$ ve varyans $\hat{\sigma}^2$ değerlerinden hareketle ana kitle ortalaması μ ve ana kitle varyansı σ^2 hakkında sonuç çıkarılabilir. Örnekten hareketle parametre değerlerinin tahmin edilmesi anakitle dağılımı hakkında yapılan varsayıma bağlı olmaktadır. Eldeki mevcut örnekten anakitle dağılımı hakkında yapılan varsayımlara bağlı olarak çok sayıda parametre tahmini yapılabilir. Dolayısıyla bir parametrenin alması tüm olası sonuçları içeren bir küme elde edilir. Bu kümeye yani Bir θ parametresinin alması olası tüm $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ değerlerini içeren kümeye "parametre uzayı" denilir ve Ω tüm pozitif reel sayılar kümesinden oluşur. X rastsal değişkeninin olasılık fonksiyonu $f(x)$ olsun ve $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$, ise, sözkonusu olasılık dağılımına tabi bir ana kitleden çekilen bir dizi gözlem olsun. $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$'in reel değerli bir fonksiyonu $\mathrm{s}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$ olsun. Bu durumda $\mathrm{s}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$ bir istatistik olarak adlandırılır. Anakitle bütünüyle gözlenemediği kabul edildiğinden dolayı, anakütle dağılımını niteleyen parametrelerin tahmini değerleri istatistikler yardımı ile gerçekleştirilmeye çalışılır.

Bir parametre tahmini ya nokta tahminler ya da aralık tahminler olarak elde edilebilir. Ancak her iki durumun temelinde nokta tahmin bulunmaktadır. Bu nokta tahminlerin parametre değerini en iyi şekilde temsil etmesi için tahmin edicilerinin sapmasızlık, tutarlılık ve etkinlik özelliklerine sahip olması gerekmektedir.

1.1.1. Sapmasızlık

$\Theta=\mathrm{s}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$, tahmin edicisi yada istatistiği, $E(\Theta)= \theta$ koşulunu sağlıyorsa, θ parametresinin sapmasız tahmin edici olarak tanımlanır.

Θ' sapmasız bri tahmin edisi olması durumunda, hata kareleri ortalaması aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathrm{E}\lfloor(\Theta-\theta)^2\rfloor = \mathrm{E}\{[\Theta-\mathrm{E}(\Theta)]^2\} = \mathrm{Var}(\Theta)$$

Θ, θ'nın sapmasız bir tahmin edicisi ise, kareler ortalaması hatası varyansına eşittir.

1.1.2. Etkinlik

Θ_1 tahmin edicisi, aşağıdaki durumda, Θ_2 tahmin edicisine göre, θ parametresinin daha etkin bir tahmin edicisi olarak adlandırılır.

1. Θ_1 ve Θ_2, θ' nın sapmasız tahmin edicileri ise
2. $\mathrm{Var}(\Theta_1) < Var(\Theta_2)$

1.1.3. Tutarlılık

Θ ; θ' nın sapmasız bir tahmincisi olmayabilir. Başka bir deyişle E(Θ)$\neq 0$ olur. Bununla birlikte örnek büyüklüğü arttırıldığında Θ ile θ arasındaki fark sistematik olarak azalabilir. n büyüylüğündeki rastgele bir örneğe dayalı olarak θ' nın Θ_n tahmin edicisi, her küçük $\varepsilon > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\Theta_n-\theta| < \varepsilon) = 1$ veya eşlenik olarak $\lim_{n\to\infty}(|\Theta_n-\theta| \geq \varepsilon) = 0$ oluyorsa, Θ_n θ' nın tutarlı bir tahmin edicidir denir. Aşağıdaki eşitlikler tutarlılığı tanımlamak için yeterlidir.

1. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\Theta_n) = \theta$
2. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\Theta_n) = \theta$

1.2. En Küçük Kareler Yöntemi

En Küçük Kareler Yöntemi (Least Squares), doğrusal (ya da doğrusal olmayan), çoklu regreson modellerinin çözümlemesinde kullanıldığı gibi, çok denklemli ekonometrik modellerin çözümünde de kullanılır. Kurulan regresyon modellerinde gözlemlerin, anakütle gözlem değerlerinden herhangi şekilde alınmış gözlemler olduğu düşünülür. Kurulan regresyon modeli eldeki örnekten harekle oluşturulmaya çalışılır. Bu nedenle kurulan modeldeki değerler tahmini değerler olacaktır. Tahmin edilmeye çalışılan açıklanan (veya bağımlı) değişken alacağı değer; açıklayıcı (veya bağımsız) değişken (veya değişkenlerin) gözlem değerleri yarımı ve genellikle, doğrusal bir fonksiyon aracılığı ile tahmin edilir. Bu regresyon denkleminde bulunan sabitlerin (gözlem değerleri yardımı ile) tahmin edilmesi uygun bir matematiksel tahmin modeli oluşturulmaya çalışılır. Ancak tahmini değerler ili gözlem değerleri nadiren birbirleri ile çakışacağından ayrı bir notasyona ihtiyaç vardır. Genellikle tahmini değerler 'şapka' notasyonu ile ifade edilirler. Sözgelimi θ parametresinin eldeki örnekten hareketle hesaplanmış olan bir tahmincisi $\hat{\theta}$ ile gösterilir. Mesela $\hat{\theta} = 3$ olduğunda bu özel 3 değeri; θ'nın bir tahmini değeri (veya kestirimidir). Özetlemek gerekirse θ bir parametre, $\hat{\theta}$ ise bir formül veya istatistikdir. Bu yüzden; $\hat{\theta}$; θ'nın değerinin bir tahmincisi yada kestirimcisidir (estimator). Bu tahmincinin farklı gözlem değerlerine göre farklı θ tahmini değerleri vereceği açıktır. Bu tahmini değerlerin her birisine de θ'nın birer tahmini (estimate) denir. Tek açıklayıcı değişkenli doğrusal regresyon modeli ele alınacak olursa, kurulan ana kütle regresyon modeli

$$\mathrm{Y_i} = \alpha + \beta \mathrm{X_i} + \mathrm{u_i}$$

örnek regresyon tahmini modeli ise,

$$\hat{\mathrm{Y}}_\mathrm{i} = \hat{\alpha}_\mathrm{i} + \hat{\beta}\mathrm{X_i} + e_i$$

denklemleri ile ifade edilmektedir. Burada α ve β anakütle regresyon modelinin parametreleri iken, $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ ise sözkonusu parametrelerin tahmincileridir.

Regresyon analizi için kurulan modelde, bağımlı ve bağımsız değişkenin (veya değişkenlerin) yanısıra hata terimi olarak isimlendirilen ve anakütle regresyon denkleminde $\mathrm{u_i}$ şeklinde ifade edilen rassal değişken yer almaktadır. Sözkonusu hata terimi modele rassal olma özelliğini katan değişkendir. Çünkü bilindiği gibi model kurmaya klasik yaklaşımda α ve β parametreleri sabittir. Aynı zamanda açıklayıcı değişken veya değişkenlerin değerleri sabit kabul edilmektedir. Dolayısıyla bağımlı değişkenin rassal değişken olabilmesi için geriye sadece hata teriminin rassal değişken olması koşulu kalmaktadır. Örnek regresyon modelinde ise bağımlı değikenin gözlenen değerleri ile tahmin edilen değerleri arasında genellikle bir fark bulunur. Bu farklar hata terimleri veya kalıntılar (residuals) olarak adlandırılır. Kalıntılar $\mathrm{e_i}$ notasoynu ile ifade edilir. Kalıntılar bağımlı değişkenin gerçek değerlerinden model sonrası elde edilecek olan tahmin değerlerini çıkartılarak hesaplanır ve aşağıdaki şekilde formüle edilir.

$$e_i = Y_i - \widehat{Y}_i$$

Hata terimlerinin karelerinin toplamını minimum yapan yöntemler arasında en çok kullanılanlardan bir tanesi en küçük kareler yöntemidir. Bu yöntem kısaca kalıntı kareleri toplamı adı da verilebilecek aşağıdaki fonksiyonu minimum yapmayı sağlayacak olan paremetre tahminlerini verir:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

Burada Q fonksiyonu en küçük kareler fonsiyonudur ve parametrelerin en küçük kareler tahminleri bu fonksiyonu eşzamanlı olarak minimize eden parametre tahminlerinin bulunması ile gerçekleştirilir. 2 nolu yukarıdaki tek açıklayıcı değişkenli doğrusal regresyon modeli

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \text{ ve } \frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}} = 0$$

Türev işlemleri sonucunda elde edilen denklemlerin eşzamanlı olarak çözülmesiyle tahmin edilir.

1.3.En Çok Benzerlik Yöntemi

R.A.Fisher' e göre geliştirilen bu yöntemde parametre tahminleri, elde bulunan gözlemleri eşzamanlı (veya birlikte) elde etme olasılığını maksimum yapacak şekilde gerçekleştirilir. Bu da olabilirlik (likelihood) fonksiyonu adı verilen bir fonksiyon yardımı ile yapılır. $X_1, X_2, \ldots, X_n$; θ parametreli bir dağılımdan gözlemlenmiş n birimlik bir örneği oluştursun. Olabilirlik fonksiyonu $f = (X_1, X_2, \ldots, X_3, \theta)$ şeklindedir. Maksimum olabilirlilik (maximum likelihood) yöntemine göre olabilirlik fonksiyonunu maksimize edecek $\hat{\theta}$ değeri bulunmaya çalışılır.

1.4. Bayesyen Tahmin

Klasik yaklaşıma göre bir anakütleyi veya olasılık dağılımını şekillendiren parametreler sabittir. Bayesyen yaklaşıma göre ise bu parametrelerin bizzat kendileri de olasılık dağılımına uymaktadırlar. Dolayısıyla parametrelerin kendileri de birer raslantı değişkenleridirler.

Bilinmeyen θ parametresinin olsılık fonksiyonu $f(\theta)$ olsun. Bu durumda θ parametreli bir dağılımdan gözlenen ($X_1, \ldots, X_n$) değerlerinin birleşik olasılık dağılımı bir anlamda koşullu bir olasılık fonksiyonu olacaktır ve $f(X_1, X_2, \ldots, X_n|\theta)$ şeklinde yazılabilecektir. Yine koşullu olasılık formülünden yola çıkarak $(X_1, \ldots, X_n)$ ve θ 'nın birleşik olasılık fonksiyonu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta)\, f(\theta)$ şeklinde ifade edilebilir. Yine bazı marjinal olasılık fonksiyonları bu birleşik fonksiyon yardımı ile bulunabilir.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{R_0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) d\theta$$

Burada R, θ' nın değer aralığıdır. Parametre sürekli olduğu için integral alımaktadır. Buradan diğer koşullu olasılık fonksiyonları da aşağıdaki örnekte olduğu gibi hesplanabilirler:

$$f\left(\theta \middle| x_1, x_{2,} \ldots, x_n\right) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) f(\theta)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

Yukarıdaki olasılık fonksiyonu θ 'nın son (posterior) olasılık fonksiyonu olarak tanımlanır. Gözlem öncesi (prior) $f(\theta)$, $X_1, \ldots, X_n$ sonuçlarının gözlenmesinden önce θ konusundakı bilgileri ifade eder. Son olasılık dağılım fonksiyonu $f\left(\theta \middle| x_1, x_{2,} \ldots, x_n\right)$, ise örnekteki bilgiler ile ön $f(\theta)$' dan yararlanarak buluna bilmektedir. Başka bir deyişle son dağılım, ön dağılımdan gelen bilgiler ile örnekten gelen bilgilerin bir sentezini oluşturmaktadır. θ 'nın koşullu ortalaması aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\theta_B = E(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{R_0} \theta f(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\theta$$

Başka bir deyişle bu beklenen değer son dağılımın beklenen değerine eşit olmaktadır. Bu beklenen değer θ'nın Bayes tahmini olarak da adlandırılmaktadır.

$$\Theta = \mathrm{E}(\theta|\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$$

1.5. Bayesyen İstatistiğin Gelişim Süreci

Bu bölümde Bayesyen istatistiğin tarihsel gelişim sürecine kısaca değinilmiştir. Bayesyen yaklaşımın ana hatları incelenerek, sözkonusu yaklaşımın düşünce sistematiği ve istatiksel kavramlara bakış açısına yer verilmiştir.

İstatistik tarihine baktığımız zaman iki farklı felsefi yaklaşımın olduğu görülmektedir. Klasik (Frekansçı) yaklaşım ve Bayesyen yaklaşım. İstatistik disiplininin başlanğıç aksiyomlarının yorumlanmasında, pek çok konu ve kavramın ele alınışında bu yaklaşımlardan biri diğerine alternatif olmuştur. Ancak zaman içerisinde Klasik yaklaşım bu alanda çalışanların çokluğu ve algılanması daha kolay olduğu için Bayesyen yaklaşımdan daha popüler hale gelmiştir.

İstatistiğin bir bilim dalı olarak ortaya çıkması P.S.Laplace, C.F.Gauss, A.de Morgan ve A.M.Legendre gibi bilim adamlarının çalışmalarına bağlıdır. Bu bilim adamlarının yanı sıra F.Galton, R.A.Fisher, E.S.Pearson, J.Neyman ve F.Y.Edgeworth'un istatistiğin gelişmesinde önemli katkıları vardır.

Bayesyen yaklaşım ilk defa, İngiltere'de yaşayan bir rahip, aynı zamanda matematikçi olan Thomas Bayes(?-1761) tarafından yazılan ve ölümünden birkaçyıl sonra arkadaşı Richard Price'nin bulup yayınladığı bir denemeyle ('An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chance') ortaya konmuştur.[1] Bu deneme sonucu istatistikte Bayesyen yaklaşımın temelini oluşturan Bayes teoremi bulunmuştur. Teoremin adı Thomas Bayesin adı ile anılsa da, teoremin Thomas Bayes tarafından bulunduğuna dair şüpheler vardır. Teoremin ortaya çıkmasının öncesinde (1730'larda), teoremin yakın çevrede başka bilim adamları tarafından tartışıldığı ve sonuçlandırıldığı öne sürülmektedir. David Hartley tarafından - Bayes'in ölümünden 12 sene önce – 1749 çıkarılan kitabın bir yerinde yazar, 'ters olasılık' sorunun çözümü için birisiyle görüştüğünü, tartıştığını belirtiyor ve çozüm yolunu kısaca veriyor. Bu kişinin kimliği ile ilgili araştırmalarda, bu kişinin

[1] Oya Ekici. Bayesyen Regresyon ve WinBUGS ile Bir Uygylama. İstanbul Üniversitesi.Sosyal BilimlerEnstitüsü. Ekonometri Anabilim dalı. Yüksek Lisans Tezi. İstanbul,2005. S.2

Bayes’den başka isimlerden şübhelenilmişdir.[2]

İstatistik tarihine bakıldığında 18.yüzyılın sonlarından 20.yüzyılın başlarına kadar istatistiksel çıkarsamanın Bayesyen yaklaşımın etkisinde olduğu görülmektedir. 1764’te Bayes teoremi sürece katkıda bulunurken, yine yakın dönemde bağımsız bir şekilde başlayıp devam eden daha detaylı ve özgün analizleriyle Laplace etkili olmuştur. 1800’lerin sonlarında Edgeworth , A.Wald, Galton ve Pearson taraf;ndan, benzerlik temelli çıkarsama yöntemi Fisher tarafından geliştirilmiştir.[3] Klasik yaklaşımda kavramlar ve çıkarsama yöntemleri Bayesyen yaklaşımdan farklıdır. Klasik yaklaşımın önde gelen isimlerinden olan Pearson, Neyman ve Fisher Bayesyen yaklaşıma ve ‘ters olasılık’ konusuna oldukça eleştirel tutumlarıyla dikkat çekmiş ve Bayesyen yaklaşıma olan güveni sarsmaya çalışmışlardır. Bu sebebten dolayı 1920-1950 dönemi Bayesyen yaklaşımın gelişmesini olumsuz yönde etkilemiştir.

Belirtildiği gibi, bir dönem klasik yaklaşımın etkisi ile geri planda kalan Bayeseyen yaklaşıma F.P.Ramsey’in ‘Gerçeklik ve Olasılık’ (‘Truth and Probability’) adlı denemesi ile tekrar ilgi duyulmaya başlanmıştır.[4] Bunun yanı sıra 1900’lerin ortalarında H.Jeffreys (‘Ters olasılık’taki mantıksal eksiklikleri gidermiş, objektif yaklaşımlı Bayesyen analizi geliştirmiş ve Bayesyen regresyon konusunda ilk çalışmayı yapmıştır. Ayrıca Bayesyen hipotez testini geliştirmiştir.), I.J.Good, L.J.Savage, B.de Finetti (Subjektif yaklaşımlı Bayesyen analizi geliştirmiştir.), D.V.Lindley ve R.Schlaifer (Bayesyen yaklaşım çercevesinde, İşletme ve endüstriyel sorunlara yeni yaklaşımlar geliştirmiştir.) gibi bilim adamlarının da klasik teknikte gözlenen eksikliklere cevap verir nitelikteki çalışmaları, Klasik yaklaşımdan önemli ölçüde etkilenen Bayesyen yaklaşıma olan ilginin yeniden canlanmasını sağlamıştır. 1950’ lerden sonra Bayesyen model seçimi ve hipotez testi geliştirilmiştir. Tüm bu süreç içerisinde teorik altyapı daha ayrıntılı olarak yapılandırılmıştır. Fakat bazı matematiksel yapıların çözümünün sağlanamaması önemli bir engeldi ve model seçiminde elde edilen bazı son (posterior) yapıların integral hesaplamalarının çözümlemesi imkansızdı. Ancak N.Metropolis (Mstkob Zinciri Monte Carlo

---

[2] Stephen Stingler ‘Who Discovered Bayes’s Theorem,’ The American Statistician, Sayı.37, No.4, November 1983, s.290-296

[3] Jeff Gill, Bayesian Methods, New York, Chapman&Hall, 2002, s.14.

[4] Anscombe F.J, ‘Bayesian Statistics,’ The American Statistician, Sayı.15, No.1, Feb.1961,s.21.

tekniğinde temel oluşturacak çalışmaları gerçekleşrimiştir.) W.K.Hastings (Markov Zinciri Monte Carlo tekniğinin istatistik alanındakı uygulamalarını geliştirmiştir.), P.H.Peskun ve S.Geman'ın çalışmalarıyla, A.E.Gelfand ve A.F.M.Smith'in katkılarıyla bu sorun aşılmıştır.

Doğal olarak artık modern Bayesyen istatistik, simülasyon tekniklerine bağlı olan uygulamalarla kendini daha iyi açıklamaktadır. Bilgisayar yazılımlarındaki gelişmelerle Bayesyen istatistiğin metematikle ilgili alanlarında karşılaşılan hesaplama güçlükleri de ortadan kalkmıştır.[5]

1.6. Bayesyen Çıkarsamanın Temelleri ve İstatistiksel Kavramlarla İlişkin Yorumları

Bir yöntem olarak istatistik, degerlendirilirken ve ele alınırken, bilim felsefesinde yer alan yaklaşımlar göre farklı düşüncelerin etkisinde kalmıştır. Ancak elbette ki bilim üretme sürecinde, bunların yön verici olduğu söylenemez. Bilim kendi başlangıc dinamiğine sahiptir. Bilim felsefesinde sözü edilen yaklaşımlar (veya yöntemler), bilgiyi oluşturmakta kullanılan ve yöntembilim tartışmalarında oynadıkları merkezi rolden dolayı birer akıma dönüşen tümevarım ve tümdengelimdir[6]. İstatistik, bu yöntemlerin dışında, bilim felsefesindeki bazı ilkelerin değerlendirilmesine göre de kendi içinde birbirinden farkı yorum ve uygulamalar geliştirmiştir. Örneğin nedensellik ilkesi. Neredeyse tüm araştırmalarda cevaplanması istenen soru budur: Hangi olay veya olgu, diğerinin ortaya çıkmasına sebep olmuştur? Bu ve benzeri sorulara cevap ararken olaylar arasındaki ilişkinin deterministik mi yoksa stokastik mi olduğu benimsenen yoruma göre degişmektedir.

İstatistikte çelişki doğuran düşünce tarzları, zaman içerisinde belirginleşerek daha öncede söz edildiği gibi iki farklı yaklaşımın ortaya çıkmasına neden olmuştur. Klasik yaklaşım tümdengelim mantığına dayanırken, Bayesyen yaklaşım tümevarım mantığına dayanmaktadır. Aynı zamanda Klasik yaklaşım nedensellik ilkesinin deterministik yorumuna, Bayesyen yaklaşım ise olasılık yorumuna daha yakındır.

Belirsizliğin değerlendirilmesi: Bayesyen yaklaşımın ana fikri teori, önerme ve nedensellik ilişkisi ile bağlı her hangi bir belirsizlik olasılıklarla ifade edilmelidir. Basit bir örnek olarak tüketim modeli gösterile bilir. Çeşitli tüketim modellerinde

[5] Gary Koop, Bayesian Econometrics. John Willey& Sons Ltd.England 2000, s.6
[6] Ömer Demir, Bilim Felsefesi,3.baskı, Vadi Yayınları, Ankara 2000, s.25.

tüketimi belirleyen değişkenler arasında farklılıklar vardır: ‘Tüketimin temel belirleyicilerinden biri sürekli gelirdir’ yaklaşımı bunlardan biridir. Bayes’de bu ifadeyle ortaya konan ilişki olasılıklarla tanımlanır. Lindley’ in de belirtiği gibi ‘Etrafımız belirsizliklerle sarılmıştır ve bu belirsizlikler hayatımızda hakim bir rol oynamaktadır. Bayesyen paradigma olasılık sayesinde onları anlamaya, idare ve kontrol etmeye yarayan güçlü bir araç sağlar’[7]. Klasik yaklaşım belirsizliklerde deterministik davranır. Varsayımlar doğrultusunda söz konusu belirsizliği, orada iddia edilen ilişkiyi, sıkıkıklarına göre değerlendirerek, kabul edilmesi veya redd edilmesi yönünde karar verir. Tüketim modeli örneğinde ilişkiyi açıklayacak verilere dayanarak, ‘Tüketimin belirleyicisi sürekli gelirdir’ veya ‘Tüketimin belirleyicisi sürekli gelir değildir’ şeklinde karar çıkarılır.

Olasılık: Olasılığın Mantıksal Teori, Klasik Teori, Frekansçı Teori, Subjektif Teori gibi teorilerle ortaya konan birbirinden farklı tanımları mevcuttur. Bayesyen yaklaşım bunlardan Subjektif tanımı kabul etmektedir. Bu yaklaşımı esas alarak gelişen Bayesyen istatistikte bir olayın olasılığı, o olaya ilişkin inanç derecesi (ön biligi, prior) ile denemeden elde edilen sonuçların (verilerin) birleştirilmiş halidir. Bir araya getirme işlemi, Bayes teoremine, dolayısıyla koşullu olasılığa dayanmaktadır. Bayesyen istatistikte olasılık daha öncede söylendiği gibi ‘tümevarım olasılığı’dır. Amaç en kesine en yakın sonuca ulaşmaktır.

Tablo 1: Klasik Yaklaşım ve Bayesyen Yaklaşıma Göre Işleyen Süreçler

Klasik Yaklaşım	**Bayesyen Yaklaşım**
Varsayımlarla	Varsayımlarsız
Deneme	Deneme
Yanlışlama	Doğrulama
p(t,g)=0	$\frac{1}{2} < \mathrm{p(t,g)} < 1$

‘t’ bir teori ve ‘g’ onunla ilgili gözlemler ise farklı olasılık yaklaşımlarına göre süreç Tablo 1’deki gibi özetlenir.

[7] Dennis Lindley, ‘Theory and Practice of Bayesiaan Statistics,’ The Statistician, 32, 1983,s.1.

Parametre: Bayesyen yaklaşımda olasılık dağılımına sahip olan bir raslantı değişkeni gibi algılanır. Dolayısıyla parametrenin tahmincisi için de bir ön olasılık dağılımı belirlenir. Mevcut veri ile birleştirilerek, parametre tahmincisinin son olasılık dağılımı elde edilir. Kısaca özetleme yaparsak, Bayesyen yaklaşımda parametre ile ilgili tüm çıkarsama işlemleri, son dağılıma dayanarak yapılır. Klasik yaklaşımda ise paametre, bilinmeyen bir sabit olarak görülür. Parametre tahmni sadece mevcut veriye dayanarak hesaplanır.

Nokta Tahmini: İstatistiğin tahmin problemlerinden biri de nokta tahminidir. Bayesyen yaklaşımda ilgilenilen parametrenin nokta tahmini son dağılımın beklenen değerine (posterior mean) eşittir. Karar teorisi açısından bakıldığında, kayıp fonksiyonunun beklenen değeri (lose function mean), optimum tahmini verir: y gözlemler, θ parametre ve $\hat{\theta}$ bu parametrenin gözlemlerden elde edilen tahmini $(\hat{\theta} = \hat{\theta}(y))$ iken, son olasılık dağılımı $(p|y)$, kayıp fonksiyonu $L = L(\hat{\theta}, \theta)$ 'dır. Optimum tahmin ise

$$EL(\hat{\theta}, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\hat{\theta}, \theta) p(\theta|y)\, d\theta$$

şeklinde gösterilir. Nokta tahmini başlığı altında istatistikte tahminin değerlendirilmesinde kullanılan, Bayesyen ve Klasik yaklaşım için birbirinden faklı önem derecelerine sahip bazı kıstaslara da değinimiştir.

Yeterlilik. İlgilenilen parametreye ilişkin sahip olunabilecek tüm bilgiyi içerisinde bulunduran istatistik, yeterli istatistikdir. Bayesyen ve Klasik yaklaşım bu konuda hemfikirdir. Fakat yeterlilik, Klasik nokta-tahmin sürecinde sadece bir varsayımken, Bayesyen yaklaşımda ispatı bulunmaktadır. Aslına bakıldığında ise yeterlilik Klasik yaklaşımla pek bağdaşmaz. Çünkü yeterliliğin özünde, parametrenin koşullu olasılığı vardır. Bir parametrenin olasılığının olması da Klasik yaklaşımla taban tabana zıttır. Parametre θ, örnek değerleri $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ iken t de, t=t(X), X'in fonkisiyonu bir yeterli isatistiği gösteriyorken;

Yeterliliğin anlamını açıklayan matematiksel ilişkiler;

1) $P(X|t\&\theta) = P(X|t)$ diğer bir ifadeyle
   $\left(f(X_1, X_2, \dots, X_n|t) = \frac{f(X_1, X_2, \dots, X_n, t)}{g(t)} = \frac{f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{g(t)}\right)$ ve

2) $\mathrm{P}(\theta|\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\theta|\mathrm{t})$'dir

Birinci ifade benzerlik açısından yazılan ifadeye göre, parametre(θ) ve yeterli istatistik(t) veri iken X'leri gözlemenin olasılığına eşittir. Başka bir ifade ile X'in koşullu olasılık dağılımı parametrelerden bağımsızdır. Parametre olmazsa bile 'yeterli' istatistik aynı ilişkiyi sağlar.

İkinci ifade ise normal koşullu olasılık ile bakarak aynı kavramı açıklar. Gözlemler (X) veri iken parametrenin (θ) olsılığı; yeterli istatistik (t) veri iken elde edilen parametre olasılık değerine eşittir. Yani gözlemler yerine 'yeterli' istatistik de parametrenin olasılığını açıklasa aynı olacaktır.

Yukarıdaki eşitliklerden yola çıkarak, Bayes teoreminin ispatı[8], θ,t ve X'in her değeri için

$$\mathrm{P} = (\mathrm{X}|\theta\&\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{P}(\theta|\mathrm{X}\&\mathrm{t}) * \mathrm{P}((\mathrm{X}|\mathrm{t}))}{\mathrm{P}(\theta|\mathrm{t})}$$

Denklemde $\mathrm{P}(\mathrm{X}|\theta\&\mathrm{t})$ olasılığı, $\mathrm{P}(\theta|\mathrm{X})'$ e eşittir. Çünkü t, X'den hesaplanmıştır. Bayes teoreminde yerine konulacak olursa,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}|\theta)\&t = \frac{\mathrm{P}(\theta|\mathrm{X}) * \mathrm{P}(\mathrm{X}|\mathrm{t})}{\mathrm{P}(\theta|\mathrm{t})}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu aşamada basit sadeleştirme yapmakla birinci eşitlik kullanılırsa ikinci eşitlik; ikinci eşitlik kullanılırsa birinci eşitlik sağlanmış olur. Bununla da yeterliliğin ispatı yapılmış olur. Son olarak vurgulamak gerekir ki, yeterlilik ön dağılımın elde edilmesinde üstlendiği rolden dolayı Bayesyen yaklaşımda büyük önem arz etmektedir.

Sapmasızlık: Tahmincinin beklenen değerinin, parametrenin gerçek değerine eşit olması demektir. θ parametresinin tahmincisi olan $\hat{\theta}$ parametresinin sapmasızlığını

$$\mathrm{E}(\hat{\theta} = \theta)$$

şeklinde göstermek olur.

[8] Colin Howson ve Peter Urbach, a.g.e.,s.226-227

Klasik yaklaşımda sapmasızlık iyi bir tahmincide aranan özelliklerden biridir. Fakat son dağılımın ortalaması olan Bayesyen tahminciye bakıldığında tahmincinin sapmasız olmadığı (sapmalı olduğu) görülmektedir. Bayesyen tahmincinin sapmalı olduğu aşağıdaki gibi ispatlanabilir.[9]

Y gözlemlerden elede edilen tahmin, $f(y|\theta)$ bu gözlemlerin olasılık yoğunluk fonksiyonu, θ ise parametredir. $E_\theta(Y) = \theta$ Klasik yaklaşımdakı sapmsızlığı göstermektedir. Bayesyen nokta tahmin (son dağılımın otralaması) ise aşağıdaki şekilde ifade edilemektedir.

$$E(\theta|y) = \int \theta\, P(\theta|y) d\theta$$

Yukarıda gösterilen son dağılımın ortalamasının sapmasız olması için aşağıdaki eşitsizliğin sağlanması gerekir.

$$E_\theta = [E(\theta|Y)] = \int \theta\, P\lfloor(\theta|y)d\theta\rfloor f(y|\theta)dy = \theta$$

Bu ifadede thaminci olarak Y yerine, son dağılımın ortalaması koyulmuştur.

Bayes tahmincisinin beklenen değerinin parametre değerine eşit olup olmadığını göstermek için Y tahmincisinin varyansından hareket ederek aşağıdaki ifade elde edilmiş olur. İlk önce ifade θ' ya göre koşullu hale getiriilir.

$$E[(Y-\theta)^2] = E[Y^2 - 2Y\theta + \theta^2]$$

$$= E\big[E\big((Y^2 - 2Y\theta + \theta^2)\big|\theta\big)\big]$$

Beklenen değeri alınır.

$$= E[E(Y^2|\theta) - 2\theta^2 + \theta^2]$$

Burada ($E(Y|\theta) = E_\theta Y = \theta$) varsayılır

$$= E[E(Y^2|\theta) - \theta^2]$$

$$= E(Y^2) - E(\theta^2)$$

[9] George Casella, Roger L. Berger, Statistical İnference, Belmont, California, Duxbury Press,1990 .s343-344

Benzer biçimde ifade Y'ye göre koşullu hale getirilirse, aşağıdaki eşitlik elde edilmiş olur.

$$E[(Y-\theta)^2] = E\left[E\left((Y^2 - 2Y\theta + \theta^2 | Y)\right)\right]$$

$$= E\left(Y^2 - 2Y^2 + E(\theta^2|Y)\right)$$

$$= E(\theta^2) - E(Y^2)$$

Her iki eşitliğin sapmasız olup olmadığını değerlendirelim.

Eğer $E(\theta^2) = E(Y^2)$ eşitliği sağlanıyorsa, başka bir değişle $E[(Y-\theta)^2] = 0$ ise, tahminci Y, parametre θ'ya eşit demekdir. Bunun gerçekleşme olasılığı $P(X = \theta) = 1$ anlamına geliryor ki, bunun da gerçekleşmesi imkansızdır. Dolayısıyla hem $E(Y|\theta) \neq \theta$ ifadesi, hemde $E(\theta|Y) \neq Y$ ifadesi kabul edilmelidir. Gösterilen ifadelerden görüldüğü üzere son dağılımın ortalaması saplamlıdır.

Bayesyen yaklaşımda, Klasik yaklaşımdan farklı olarak sapmasızlık gerekmez. Bunun ana nedeni Bayesyen yaklaşımdan parametre tanımının tamamen farklı olmasıdır. Tahmini Bayesyen yaklaşıma göre elde edip, sonucu Klasik yaklaşım tahmincilerinde aranan özelliklere göre değerlendirmek pek doğru değildir.

Genellikle sapmalı tahmincilerin sapmasız tahmincilere göre ortalama hata karesi (OHK) daha küçüktür. Sapmalı tahmincilere örnek olarak Ridge tahmincisi gösterile bilir. Ridge tahmincisinin OHK'sı sapmasız tahmincilerin OHK'dan daha küçüktür. Vurgulamak gerekir ki sapmasız tahminciler kullanıldığında karşılaşılan bazı problemler, sapmalı tahminciler kullanıldığında ortadan kalkmaktadır. Klasik yaklaşımla çözülemeyen bazı problemlerin Bayesyen yaklaşımla çözülebilmesinin nedenlerinden biri de budur.

Tutarlılık: Tutarlılık kriteri tahmincinin limitteki özelliğidir. Örneklem büyüklüğü sonsuza gittikçe, tahmincinin değeri ile gerçek parametre değeri arasındaki farkın, epsilon gibi bir sayından küçük olma olasılığı 1'e yaklaşır. θ parametre, $\hat{\theta}$ bu parametrenin tahmincisi ve ϵ başlagıçta belirlenen sıfırdan büyük herhangi bir sayı iken,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \epsilon\right) = 1$$

Tutarlılık Klasik yaklaşımda önemli bir özellik olsa da, Bayesyen yaklaşımda tutarlılığın ilgilenilen bir özellik olması tartışma konusudur. Bir görüşü göre tahmincinin tutarsızlığı gözardı edilebilir. Zira Klasik yaklaşım tutarlılığın gerekliliğini yeterince açıklayamamaktadır.[10] Bir başka görüşü gore ise paametrik Bayesyen analizde daima tutarlı tahminci elde edilir ve bu önem verilmesi gereken bir konudur. Bunun da ötesinde parametrik olmayan Bayesyen analizde karşılaşılan, Diaconis ve D.Freedman'ın işaret ettiği[11] tutarsızlık sorunu önemle ele alınmalıdır. J.Berger bu değerlendirmeleriyle tutarlılığa vurgu yapmıştır.[12]

Bayesyen yaklaşımda, başka bir tanımla tutarlılığı ifade eden önemli diğer bir kavram da yine 'tutarlılık' olarak çevrilebilecek 'coherence'dir. Bu anlamda tutarlılık ilgilenilen belirsiz önermelerin ortaya koyduğu olasılık sonuçlarının birbiriyle çelişkili olmaması fikrine dayanır.

Etkinlik: Yine Klasik disiplin içinde anlamlı sayılabilecek değerlendirme ölçütlerinden bir olan etikinlik ile, tahmincinin mümkün ola en küçük varyansa sahip olması şartı aranmaktadır. Klasik yaklışımda sapmasız tahmincilerden biri tercih edilecekse, varyansı küçük olan, başka bir ifadeyle olasılık dağılımı daha dar aralıkta yayılan, tahminci seçilir. Bilindiği gibi ortalama hata karesi de etkinliği ölçmektedir. Klasik yaklaşımın iddiasına göre, Bayes tahmincisinin (son dağılımın ortalamasının) ortalama hata kareleri hesaplandığında, elde edilen sonuç söz konusu tahmincilerin etkin olmadığını göstermektedir. Klasik yaklaşım bunu şöyle açıklamaktadır; Bayesyen analizde, hemen hemen ön dağılımın yol açtığı etki ile kalın kuyruklu olan son dağılımdan yapılan tahmin büyük ölçüde sapmalıdır. Bununla beraber etkinliği de sağlayamamaktadır. Bazı durumlarda aynı ön dağılımla hesaplanan parametrenin son dağılımının ortalaması, ortalama hata karesi kriterine göre iyi bir tahminci değilken, modu, iyi bir tahminci olabilmektedir.[13] Fakat Klasik yaklaşım sadece ortalamayı göz önünde bulundurarak Bayes tahmincisinin iyi bir tahminci olamdığını söylemektedir. Klasik istatistikçiler üstü kapalı bir şekilde de olsa ön dağılımın buna neden oludğunu savunmaktadırlar.

---

[10] Colin Howston ve Peter Urbach, a.g.e.,s.222-233.

[11] Diaconis, P., Freedman, D., 'On İnconsistent Bayes Estimation of Location,' Annals of Statistics, Sayı.14, No.1, March 1986,s.68

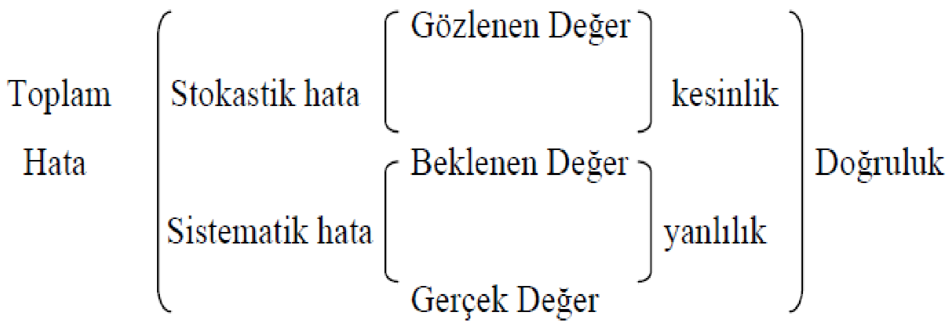
[12] J.Berger, 'Discussion;On the Consistensy of Bayes Estimates,' The Annals of Statistics, Sayı.14, No 1, March 1986,s.31-33

[13] Box, G.E.P, Tiao, G.C., Bayesian İnference İn Statsitical Analisis, Üiley Classics Library Edition, New York, John Wiley& Sons?1992, s.310-312

Bayesyen anlayışta ortalam hata karesi keyfi bir kriterdir. Son dağılımın ortalaması, son dağılımın sadece bir ölçüsüdür. Ortalama bazen bilgi veren bir toplanma ölçüsü olurken, bazen de göz ardı edilmesi gereken bir ölçütdür. Dolayısıyla, dağılımın tamamı göz önünde bulundurularak, parametreye ilişkin çıkarsama yapılmalıdır. Dağılımın bir ölçüsü keyfi bir kritere göre değerlendirilmemelidir.[14]

Kesinlik: Keskinlik varyans ile ters ortantılıdır. Bir değerlendirme ölçütü olarak kesinlik, istatistikte tahmin kriterleri olarak kabul edilen diğer kavramlarla karşılaştırılmalı daha iyi anlatılabilir. Kısaca ifade etmek gerekirse kesinlik, hatanın olasılıklı kısmını içerir ve sistematik hatanın yapılmadığı varsayılırsa, gerçek değerden sapmayı ifade eder. Tümüyle Bayesyen yaklaşımla yapılan bir analizde varyans yerine kesinlik alınarak, gerçek değerin olasılığı hesplanır.

Şekil 1: Kesinlik Kriteri



Güven aralığı: İstatistiksel tahmin sürecinde önem arz eden konulardan biri de parametreler için güven aralıklarının hesaplanmasıdır. Güven aralığı-Klasik yaklaşım ifadesiyle parametrelerin belirli değer arasında yer aldığı, Bayesyen yaklaşıma göre ise belirli değerler arasında yer alma olasılığını ifade etmekle beraber anakütleyi tanıma ve tanıtmada önemli rol üstlenmektedir. Klasik yaklaşımda kullanılan 'güven aralığı' (confidense interval) yerine Bayesyen yaklaşımda

[14] Box,G.E, Tiao, G.C,a.g.e.,s.312

‘güvenilir aralık’ (credible interval), ‘Bayesyen aralık’ (Bayesian interval) veya ‘En Yüksek Son Yoğunluk Aralığı’ (The Highest Posterior Density İnterval) tanımları kullanılmaktadır.

Her iki yaklaşım güven aralığını farklı şekilde tanımlamakla beraber, güven aralıklarının yorumunu da farklı şekilde yapmaktadır. Klasik yaklaşım kendi içinde iki farklı yorum yapmaktadır. Subjektif yaklaşıma göre %95-lik anlamlılık düzeyinde yorum, %95 güvenle söylenebilir ki parametre bu aralıkta yer alacak şeklinde yapılır. Neyman tarafıdan kabul etdirilen ve şu an hakim olan , ‘Tekrarlanan denemeler sonucu, farklı veri setine dayalı aralıkların %95’i parametrenin gerçek değerini içerir.’ yorumudur.Aynı anlamlılık düzeyinde güven aralığının Bayes yorumu, güven aralığının son dağılımın ortalamasını içermesi olasılığına olan inancı göstermektedir.

Bayes yaklaşımında hesaplanan son dağılım $p(\theta|y)$’ göre, y veri iken parametre θ’ nın, parametre uzayının belirli $\overline{R}$ altbölgesinde bulunması olasılığı;

$$P\{\theta \in \overline{R}|y\} = \int_{\overline{R}} P(\theta|y)\, d\theta\text{’dır}$$

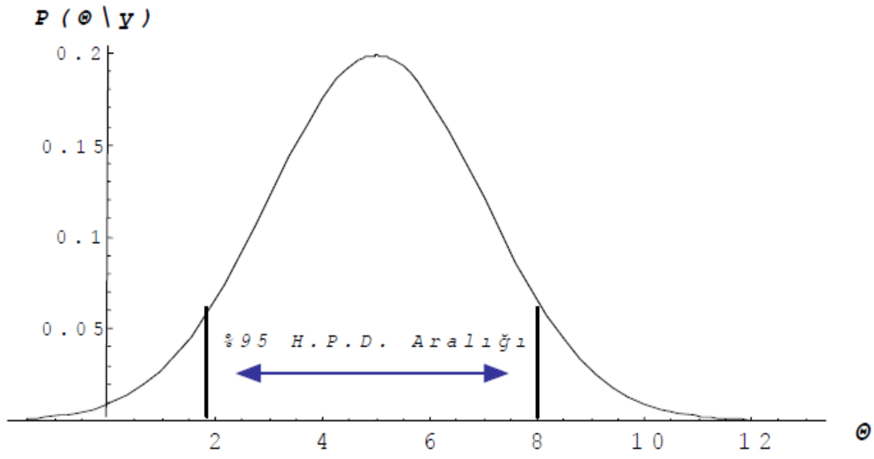
Yukarıdaki ifade de, kapsanacak olasılık miktarı 0,95 olarak belirlenirse;

$$P\{\theta \in \overline{R}|y\} = \int_{\overline{R}} P(\theta|y) d\theta = (1-\alpha) = 0{,}95$$

aranılan bölgenin sınırlarına ya da aralığın değerlerine ulaşılabilir. Bu bölge ‘En Yüksek Son Yoğunluk’ bölgesi olarak adlandırılır. Çüçkü bölge içindeki her bir noktanın olasılık yoğunluğu, dışındaki noktaların her birinden daha büyüktür. Ayrıca içereceği olasılık miktarı veri iken, bölge parametre uzayında mümkün olan en küçük hacime sahip bölgedir; aralık da mümkün olan en dar aralıktır.[15]

[15] Box, G.E.P, Tiao, G.C., a.g.e., s.122-123.

Şekil 2: Güven Aralığı



Hipotez testi: İstatistikte anakütleyi analmaya ve çözmeye çalışırken parametrelere ilişkin iddiaların yer aldığı bazı önermelerden yararlanılır. Hipotez olarak adlandırdığımız bu önermelerde ortaya atılanlar araştırmacının karar vermesini sağlayan bir test sürecinden gerçer; hipotez testi sürecinde parametreinin iddia edilen değere eşit olup olmadığı veya sözü edilen aralıkta ulunup bulunmadığı test edilir ve böylelikle anakütle ili ilgili belirsizlik bir parça aydınlatılmış olur.

Bayesyen yaklaşım olasılık teorisine daha geniş bir mantıksal açıdan bakması nedeniyle, hipotezlere olasılık tayin eder. Klasik Aristo mantığına göre bu değerin 0 veya 1 olması değil, 0-1 aralığında değerler alması söz konusudur.[16] Yani bir hipotez kabul ya da reddedilemez, onun sahip olduğuna inanılan olasılığı belirlenir. Ancak bu noktada belirtmek gerekir ki, Bayesyen yaklaşım, çift taraflı hipotez testi söz konusu olduğunda yetersiz kalmaktadır. Bunun nedeni sürekli bir dağılımda parametrenin '0'a eşit olma olasılığı '0' dır. Buna önerilen çözüm regresyon katsayısı için '0'a yakın bir değer almaktır.

Bayesyen yaklaşımda bilinen süreç burada da geçerlidir. Hipotezlerin ön olasılıkları belirlenir ve ardından son olasılıklara ulaşılır. Burada karar verilirken son olasılığı en fazla onan hipotez, en iyi seçim olacaktır. Bayesyen yaklaşımda hipotezlerin olasılıkları karşılaştırılarak karar verilidiği için genellikle 'hipotez testi'

[16] Michael D.Alder, Workshop on Intelligent System, December 2003, http:// www.maths.uwa.edu.au/mike/mumford/workshop_session1.pdf

yerine 'hipotezlerin karşılaştırılması' ifadesi benimsenmektedir.[17] h_0 ve h_1 hipotezleri, y gözlemleri, θ ve ϕ parametreleri, θ_0 ve ϕ_0 bu parametrelerin belirli değerlerini gösterirken;

$$\frac{P(h_0|y)}{P(h_1|y)} = \frac{P(h_0)}{P(h_1)} * \frac{P(y|\theta = \theta_0)}{P(y|\phi = \phi_0)}$$

Sonucuna göre değerlendirme yapılır. Bu ifade aşağıdaki şekilde açıklana bilir;

Son bahis oranı=ön bahis oranı*bayes faktör

(posterior odds= prior odds*bayes factor)

Yukarıdaki eşitlikte $P(h_0) = P(h_1)$ ise veya bilgi vermeyen ön dağılım için $P(h_0) = P(h_1) = \frac{1}{2}$ ise son bahis oranı Bayes Faktörüne eşit çıkar. Bu durum da bayes faktör, Benzerlik Oranı ile aynı olur.

Klasik yaklaşımda hipotez testi süreci Fisher'in çalışmalarıyla başlamış ve gelişmiştir. Ona göre araştırmacı reddetmesi gereken hipotezı h_0 olarak belirler. Bu yaklaşımıyla Fisher'in Popper'in yanlışlaması ile paralellik taşıdığı söylenebilir. Gerekliyse başlanğıç varsayımı yapılır ve hipotez belirlenir. Kullanılaca test istatistiği örnekten elde edilen bigiyle hesaplanır. Benimsenen testin önem düzeyinde dayanarak, kurulan h_0 kabul veya reddeilir. Ancak daha sonra Neyman ve Pearson çalışmalarıyla bu konunun geliştirilmesine önemli katkı sağlamışlardır. Neyman ve Pearson sıfır hipotezinin alternatif hipotezle karşılaştırılması gerektiğini düşünmüşlerdir. Yine hipotezler ya kabul ya da redd edilecektir. Test süreci de aynıdır. Ancak burada çıkarım yapılırken iki tip hata ortaya çıkmaktadır: Birinci tip hata (h_0 doğru iken hipotezi reddetme) ve ikinci tip hata (h_0 yanlışken hipotezi kabul etme). Karar verirken, testin gücünü (yanlış olan h_0'ı reddetme olasılığını) maksimum yapmak gerkmektedir. Ancak aynı zamanda h_0'ı reddederken, h_0'ın doğru olma olasılığının da minimum olması gerkmektedir. Daha önce de değinildiği gibi Benzerlik Oranı istatistiği de hipotezlerin karşılaştırmasına olanak verir; h_0 hipotezi altında, parmatrenın verilen bir değere eşit olma olasılığının en yüksek olduğu benzerlik tahiminin, parametrenin tüm mümkün değerleri için en yüksek

[17] Arnold Zellner, An İntroduction to Bayesian İnference in Econometrics, New York, John Wiley & Sons, 1971, s.292.

benzerlik tahmini değerine oranlanması ile bulunur.

Hipotezlerle ilgili karar vermede görüldüğü üzere, Bayesyen ve Klasik yaklaşım tamamen birbiriden farklıdır. Daha önce de denildiği gibi, hipotezlere olasılık tayin ederek tekrarlanan denemelerin sonuçları ışığında en yüksek olasılık deeri olanı seçmek (Bayes'in kesinliğe ulaşma hedefi doğrultusunda) yöntem olarak tümevarım ile paralellik gösterirken; yanlışlanması istenen hipotezi belirleyerek, tekrarlanan denemelerle bunun reddedilmesi yoluna gidilmesi tümdenglimci yöntem ile paralellik göstermektedir. Bu paralellik etkileşimin değil, benzerliğin ifadesidir.

1.7. Bayes Teoremi

Klasik regresyon çözümlemesinin alternatif çözüm yöntemi olarak bilinen Bayesyen yaklaşım, Bayes teoremini kullanarak hipotez testlerine, nokta ve güven aralığı tahminlerine bir seçenek sunar. Bayesyen yaklaşımın temelinde konu ile iligili tüm bilgilerin çözümlemeye katılması varsayımı yer almaktadır. $y = (y_1,, \dots, y_n)$, olasılık dağılımı $\left((y|\theta)\right)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ parametresine bağlı n tane gözlemin oluşturduğu bir vektör olsun. İstatistiksel çıkarsamalarda amaç, parametreler hakkında tahminler yapmaktır. Klasik istatistikte parametrelerin sabit ve bilinmeyen değerler olduğu, y gözlenen veri sitnin ise raslantı vektörü olduğu varsayılır. Klasik istatistikte bilinmeyen parametreler tahmin edilirken genellikle En Çok Olabilirlilik (Maximum Laklihood) ya da En Küçük Karaler(Least Squares) yöntemleri kullanılır. Daha önce de vurğulandığı üzere Bayesyen yakaşım klasik yaklaşımdan çok farklıdır. Bilinmeyen θ parametre vektörü, raslantı vektörü olarak nitelendirilirken, gözlenen y verisi bilinen sabit değerler olarak nitelendirilir. Bayeseyen yöntemle araştırmaya başlamadan önce ilgilenilen parametre ile ilgili gerek teorik gerekse de önceki çalışmalardan elde edinilen bilgiler ön bilgi olarak adlandırılır. θ parametresine ilişkin ön bilginin formüle edilmesiyle p(θ) ön dağılımı elde edilir. Bayesyen yaklaşımın temel amacı, y verisi gözlendikten sonra, θ parametresinin ön dağılımı ile veriden elde edilen bilginin birleştirilmesiyle parametrenin son dağılımını bulmaktır. Son dağılım Bayes teoremi kullanılarak aşağıda verildiği şekilde hesaplanır.

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)} \qquad (1.7.1)$$

Bayes teoremi olasılık aksiyomlarından yola çıkarak, iki koşullu dağılım arasında ilişki kurar. Eşitlik (2.1)'de $p(y) \neq 0$ ve aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

$$p(y) = E[p(y|\theta)] = c^{-1} = \begin{cases} \int_{\theta} p(y|\theta)p(\theta)d\theta, & \theta \text{ sürekli ise} \\ \sum_{\theta} p(y|\theta)p(\theta), & \theta \text{ kesikli ise} \end{cases} \qquad (1.7.2)$$

p(y) kestirim dağılımı olarak bilinir ve θ parametresini içermediği için sabit değer olarak değerlendirilir. Bayes teoremini yeniden yazarsak,

$$p(\theta|y) = cp(y|\theta)p(\theta) \qquad (1.7.3)$$

Eşitlik (2.3)'te c, $p(\theta|y)$ son dağılımının tanım aralığında integralinin ya da toplamının 1'e eşit olmasının sağlayan 'normalleştirme katsayısı'dır. Bu durumda son dağılım aşağıdaki gibi ortantı biçiminde yazıla bilir.[18]

$$p(\theta\,|y) \propto p(y|\theta\,)p(\theta\,) \qquad (1.7.4)$$

Eşitlik (2.4)'teki $p(y|\theta\,)$, y verildiğinde θ'nın olabilirlik fonksiyonu $I(\theta\,|y)$' ye karşılık gelir. Bu durumda Bayes teoremi için aşağıdaki ifade de kullanılabilir.

$$p(\theta|y) \propto I(\theta|y)p(\theta) \qquad (1.7.5)$$

1.8. Ön Dağılımlar

Bayesyen istatistikte, farklı ön dağılımlar farklı son dağılımların bulunmasına sebep olur. Bu alt bölümde ön dağılımlar ve ön dağılımların son dağılımlar üzerindeki etkileri üzerinde durulacaktır.

[18] Box,G.E.P., Tiao, C.G., 1973, Bayesian İnference in Statistical Analysis, Addison-Wesley, London,s.48

1.8.1. Belirli ve Belirsiz Ön Dağılımlar

Tanım aralığındaki integrali ya da toplamı 1'e eşit olan ön dağılımlara belirli ön dağılımlar; sonsuza eşit olan dağılımlara ise belirsiz ön dağılımlar denir. Ön dağılım belirsiz olsa da, son dağılım belirli olabilir. Uygulamada belirsiz ön dağılımların kullanılması büyük zorluk çıkarmasa da, model seçiminde ve hipotez testlerinde zorluklara neden olur.

1.8.2. Bilgi İçermeyen Ön Dağılımlar

Parametreler hakkında ön bilginin az olması ve verilerden elde edilen bilgi dışında bilgiye ihtiyaç duyulmadığı taktirde, kullanılan ön dağılım bilgi içermeyen ön dağılım olarak bilinir. Uygulamada bilgi içermeyen ön dağılımlar kullanıldığı taktirde, Bayesyen yöntemle elde edilmiş tahminlerle, Klasik yöntemle elde edinilen tahminler arasında her hangi bir farklılık olmayacak. Bilgi içermeyen ön dağılımlara örnek olarak tekbiçimli (uniform), düz (flat), dağınık (diffuse) ve Jeffreys'in ön dağılımlarını göstere biliriz.[19] Tekbiçimli ön dağılımlar belirli ya da belirsiz olabilir. $p(\theta)=c$, $(c>0)$ şeklindeki ön dağılım belirsiz tekbiçimli ön dağılıma, $p(\theta)=1$, $0<\theta<1$ dağılımı ise belirli tekbiçimli ön dağılıma örnek olarak gösterilebilir.[20]

Örnek 1: Varyansı bilinen normal dağılım.

Olabilirlik fonksiyonu :$x_i/\mu, \sigma_0^2 \sim N(\mu, \sigma_0^2), i = 1, \dots, n$ (σ_0^2: sabit)

Ön dağılım: $p(\mu) = c(0 < c < \infty, -\infty < \mu < \infty)$ (belirsiz, bilgi içermeyen).

Son dağılım: $\mu/x = (x_1, \dots, x_n) \sim N(\overline{x}, \sigma_0^2/n)$ (belirli). Bilgi içermeyen ön dağılımlardan olan dağınık ön dağılımlar (diffuse prior distribution) büyük varyansa sahiptir ve parametre değerlerinin büyük bir aralığı için benzer değerleri verir. Dağınık ön dağılımlar için aşağıdaki örnek verile bilir.

Örnek 2: Varyansı bilinen normal dağılım

Olabilirlik fonksiyonu: $x_i/\mu, \sigma_0^2 \sim N(\mu, \sigma_0^2), i = 1, \dots, n$ (σ_0^2: sabit)

---

[19] Derya Tektaş. İki düzeyli logit ve probit modellerde parametre tahminlerine Bayesçi bir yaklaşım. Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı. Yüksek Lisans Tezi. Ankara,2006,s.8

[20] Myung, J., 2006, Bayesian Methods for Social and Behavioral Scientists: Hands on Bayes using WinBUGS

Ön dağılım: $p(\mu) = N(0, s^2)$. Burada, s büyük bri değerdir. s=1000 alınabilir (dağınık, bilgi içermeyen)

Son dağılım: $\mu/x = (x_1, \dots, x_n) \sim N\left(\frac{\bar{x}}{\frac{\sigma_0^2}{ns^2}}, \left(\frac{1}{s^2} + \frac{n}{\sigma_0^2}\right)^{-1}\right)$ (belirli)

Jeffreys ön dağılımı da bilgi içermeyen ön dağılımlara bir örnek olarak gösterilebilir. Jeffreys ön dağılımını elde etmek için ilk olarak $p(y|\theta)$ olabilirlik fonksiyonuna ilişkin Fishr bilgi matrisi $I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \log p(y|\theta)}{\partial\theta^2}\right)$ elde edilir. Fisher bilgi matrisi, bir tahmin edicinin en çok olabilirlik tahmin edicisinin komşuluğundaki duyarlılığı ölçer. Bu durumda $p(y|\theta)$ olabilirlikk fonksiyonu için Jeffreys ön dağılımı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\pi(\theta) \propto |I(\theta)|^{\frac{1}{2}} \qquad (1.8.1)$$

Eşitlik (2.6)'da karekök alınmasının nedeni, değişmezlik kuralının sağlanmaya çalışılmasıdır. $\phi = h(\theta)$ olarak tanımlanmasının ve h ters fonksiyonu $\theta = g(\phi)$ olan tersinin bir fonksiyonu olsun. Böylece, $I^{1/2}(\phi) = I^{1/2} * \left|\frac{d\theta}{d\phi}\right|$ olarak elde edilir.[21]

1.8.3. Bilgi İçeren Ön Dağılımlar

Bilgi içeren ön dağılımlar, parametreler hakkında ön bilgiye sahip olunması durumunda ön bilgilerin formüle edilmesi ile elde edilir. Ön bilgi, konu ile ilgili uzman görüşlerine ya da aynı konu hakkındakı geçmiş deneyimlere dayanarak elde edilir.

1.8.4. Eşlenik Ön Dağılımlar

θ parametresi hakkındakı ön bilginin belirli olduğu varsayıldığında bu ön bilgiler bazı düzgün dağılımlarla gösterilebilir. Bu düzgün dağılımlar, uygun matematiksel özelliklere sahip ön dağılımlar ailesinin üyeleridir. Bu tür ailelere 'doğal eşlenik aileler' adı verilir. Ön dağılım G ailesinin bir üyesi, veri H ailesinin bir üyesi ve son dağılım G ailesinin bir üyesi ise G'nin H için bir eşlenik ön

[21] Vidakoviç, Bayesian İnference, Bayesina Computation, Applications

dağılımlar ailesi olduğu söylenebilir. Eşlenik ön dağılımlar aşağıda Tablo 2' de verilmiştir.

Tablo 2: Ön Dağılımlar

Veri	**Ön Dağılım**	**Son Dağılım**
Bernoulli	Beta	Beta
Negatif Binom	Beta	Beta
Poisson	Gamma	Gamma
Üstel	Gamma	Gamma
Normal	Gamma	Gamma
Normal	Normal	Normal

θ parametresi için hiçbir ön bilgi mevcut değilse, bu parametrenin ön dağılımı aşağıdaki eşitlikle gösterilen standart tekbiçimli dağılım olarak alınır ve böylece θ'nın tüm değerlerine eşit olasılıklar atanmış olur.

$$p(\theta)=1,\ 0<\theta<1 \qquad (1.8.2)$$

1.9. Bayesyen Yaklaşımın Zorlukları ve Üsünlükleri

Bayesyen yaklaşımın Klasik yaklaşıma göre bir çok üstünlükleri olması ile beraber uygulamada bazı zorlukları da vardır.

Üstünlükler

Klasik istatistikte çözüm bulunamayan bir çok probleme Bayesyen istatistikte çözüm bulunur. Klasik yaklaşımda çözüm bulunamayan sorunlardan biri olan Behrens-Fisher problemi için Bayesyen yaklaşımda çözüm vardır.

Bayesyen yaklaşımın diğer bir üstünlüğü, çıkarsama yapmak için örneklem büyüklüğüne ait her hangi bir kısıtlamanın olmamasıdır. Bayesyen yaklaşımda küçük örneklerle bile geçerli çıkarsamalar yapıla bilmektedir.

Bayesyen çıkarsama ile parametreler üzerindeki belirsizlik azaltılır. Tüm bu üstünlükler Bayesyen çıkarsamanın ardışık yapısından kaynaklanır.

Zorluklar

Bayesyen yaklaşımda karşılaşılan en önemli zorluklardan biri, parametreler hakındakı kesin olmayan bilgilerin ön dağılıma dönüştürülmesi zamanı ortaya çıkar. Çok değişkenli modeller ile çalışıldığında, özellikle parametreler arasında ilişkiler varsa, bilgi içeren ön dağılımların belirlenmesi zor olur. Karmaşık ön dağılımlar olduğunda da son dağılımların elde edilmesi araştırmacılar için zor olan konulardan biri olur.[22]

1.10. Markov Zinciri Monte Carlo Yöntemleri

Bayesyen yaklaşımda karşılaşılan en büyük zorluk son dağılımların elde edilmesi zamanı, yüksek boyutlu integrallerin kullanılmasıdır. Yüksek boyutlu integrallerin hesaplanmsında, Karmaşık dağılımlardan benzetim ile örneklem çeken MCMC yöntemleri kullanılır. MCMC yöntemleri ilk olarak fizikçiler tarafından kullanılmış, daha sonra da uzay bilimlerinde ve görüntü çözümlemesinde kullanılmıştır. Son yıllarda ise MCMC yöntemleri, özellikle Bayesyen istatistik alanında bir çok problemin çözülmesinde kullanılmıştır.[23] [24]

En çok kullanılan MCMC yöntemleri Metropolis-Hasting algoritması ve Gibbs örnekleme algoritmasıdır. Bu yöntemlerde ilgili dağılımdan örnekler çekilir ve daha sonra beklenen değerleri yaklaşık olarak bulmak için örneklem ortalamaları alınır. MCMC yöntemlerinde bu örneklemler, uzun bir zaman için düzenlenmiş Markov Zincirleri kullanılarak çekilir. Markov Zincirlerini oluşturmak için bir çok yol vardır, fakat Gibbs örnekleme algoritması da dahil olmak üzere bu yöntemlerin hepsi Metropolis-Hastings' in geliştirdiği genel algoritmanın özel biçimleridir.

1.10.1. Markov Zincirleri

Olasılıklı süreç, raslantı değişkenlerinin oluşturduğu bir $\{X_t, t \in T\}$ kümesidir. Sürecin parametresi zamandır. x_t, X_t'nin $t \in T$ anında aldığı değeri gösterir. X_t'nin

[22] Demirhan H., Logaritmik Doğrusal Modellerde Parametrelerin ve Beklenen Göze Sıklıklarının Bayesçi Kestirimi, Yayınlanmamışı Bilim Uzmanlığı Tezi, hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2004, s.16-20

[23] Gilks,W.R., Richardson,S.,Spiegelhalter,D.J Markov Chain Monte Carlo in Practice, Champan and Hall, London,1996

[24] . Heckman and E.E. Leamer, eds., 'Markov Chain Monte Carlo Methods: Computation and Inference,' J.JThe Handbook of Econometrics, Amsterdam:Elsevier Publishing Co. 2001

aldığı tüm olası değerlerin kümesine 'örneklem uzayı' denir ve S ile gösterilir. T, kesikli değerler alıyorsa sürece, kesikli parametreli süreç; belli bir aralıkta değerler alıyorsa sürekli parametreli süreç adı verilir. Örneklem uzayında sonlu ya da sayılabilir sonsuzlukta durum varsa sürecin kesikli örneklem uzayına sahip olduğu, değilse sürekli örneklem uzayına sahip olduğu söylenebilir.

Örneklem uzayındaki iki değer arasındaki geçiş olasılıkları raslantı değişkeninin yalnızca o andakı durumuna bağlı ise bu raslantı değişkeni bir Markov süreci belirtir. Aşağıdaki eşitliğe 'Markov özelliği' adı verilir.

$$P(X_n = x_n | X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \qquad (1.10.1)$$

Örneklem uzayı kesikli olan Markov sürecine 'Markov zinciri' adı verilir. Markov zincirleri kesikli ya da sürekli parametreli olabilir. Bu alt bölümde tanımlamalar, kesikli parametreli Markov zincirleri üzerinden yapılacaktır.$\{X_t, t = 0,1,2, \dots\}$ biçiminde gösterilen kesikli parametreli bir Markov zincirinde, örneklem uzayındaki i durumundan j durumuna bir adımda geçiş olasılığı $p_{ij} = P(X_{m+1} = j | X_m = i)$ ile, i durumundan j durumuna n adımda geçiş olasılığı $p_{ij}^{(n)} = P(X_{m+n} = j | X_m = i)$ ile, sürecin n'inci addımda j durumunda bulunma olasılığı ise $p_j^{(n)} = P(X_n = j)$ ile gösterilir. Sürecin başladığı andakı olasılıkları ilk olasılıklar denir ve bu olasılıkların oluşturduğu vektör π_0 ile gösterilir. Zincir, bir π_0 başlangıç vektörünün belirlenmesiyle başlar. Başlangıç vektörünün bir elamanı dışında diğer tüm elemanları 0 değeri alır. n'inci adımda, örneklem uzayındaki durumları ait olasılıkların oluşturduğu vektör ise π_0 ile gösterilir. Örneklem uzayı $S = \{0,1,2 \dots\}$ olan bir Markov zincirinde, bir adım geçiş olasılıklarının oluşturduğu matrise 'geçiş matrisi' denir ve $P = [p_{ij}]$ ile gösterilir. Öğeleri n adım geçiş olasılıkları olan matris ise $P^{(n)} = P^n = \left[p_{ij}^{(n)}\right]$ biçiminde tanımlanır. Zincirin i durumundan j durumuna n+r adımda geçiş olasılığı 'Chapman-Kalmogorov' eşitliği ile hesaplanır.

$$p_{ij}^{(n+r)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(r)} \qquad (1.10.2)$$

Örneklem uzayındaki tüm durumlara ait olasılıklar başlangıç durumundan bağımsız ise Markov zinciri $\pi^* = \pi^* P$ eşitliğini sağlar. Bir Markov zincirinin durağan duruma sahip olması için örneklem uzayındaki tüm durumlar arasında geçiş olması gerekmektedir. Yani, tüm i,j'ler için $p_{ij} > 0$ olmalıdır.[25]

1.10.2. Monte Carlo İntegrasyonu

Monte Carlo yönteminde h(x) biçimindeki karmaşık bir fonksiyonun integralinin rasgele sayı üretiler çözülmesi amaçlanır. Bu integral aşağıdaki biçiminde ifade edilebilir.

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b g(x)p(x)dx = E_{p(x)}[g(x)] \qquad (1.10.3)$$

Burada g(x), x raslantı değişkeninin bir fonksiyonu, p(x) ise x'in olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Eğer p(x) olasılık yoğunluk fonksiyonundan $x_1, \ldots, x_n$ biçiminde bir örneklem çekilirse, eşitlik (1.10.3) ile verilen integral yaklaşık olarak aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\int_a^b h(x)dx = E_{p(x)}[g(x)] \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \qquad (1.10.4)$$

Örneklem değerlerinden oluşturulan fonksiyonların ortalamasıyla hedef dağılımın beklenen değeri yukarıda belirtildiği gibi tahmin edilebilir. Eşitlik (1.10.4), Monte Carlo integrasyonu olarak adlandırılır. Monte Carlo integrasyonu, Bayesyen çözümlemelerde gerek duyulan son dağılımları yaklaşık olarak bulmak için kullanılabilir[26][27].

1.10.3. Metropolis ve Metropolis-Hastings Algoritması

Monte Carlo integrasyonunun uygulanmasında karşılaşılan en önemli sorunlarından bir karmaşık p(x) olasılık yoğunluk fonksiyonundan örneklemler elde etmektedir. Bu tür bir problemin çözümü MCMC yöntemlerinin temelini oluşturur.

---

[25] Walsh,B., Markov Chain Monte Carlo and Gibbs Sampling, Lecture notes for EEB 2002

[26] Gilks,W.R., Richardson, S., Spiegelhalter, D. J 1996 Markov Chain Monte Carlo in Practice, Chapman and Hall

[27] Kumru, O., Markov Zinciri Monte Carlo Yöntemleri, Yayınlanmamış Bilim Uzmanlığı, Haccettepe Üniversitesi

θ parametresinin olsılık yoğunluk fonksiyonu $p(\theta)$ olarak verilsin ve amaç, $p(\theta) = \frac{\pi(\theta)}{c}$ ile belirtilen dağılımından örneklem çekmek olsun. Burada c ile gösterilen normelleştirme katsayısıdır ve genellikle hesaplanması zordur. Metropolis algoritması bu dağılımdan örneklem çekmek için kullanılır. Algoritmada, iterasyonlar $\pi(\theta_0) > 0$ durumunu sağlayan bir θ_0 başlangıç değeri ile başlanır. Herhangi bir t'inci iterasyon için geçerli θ_{t-1} değeri kullanılarak $q(\theta^*|\theta_{t-1})$ öneri dağılımından θ^* aday noktası çekilir. Metropolis algoritmasında öneri dağılımı üzerindeki tek kısıtlama simetrik olmasıdır $[q(\theta_{t-1}|\theta_t) = q(\theta_t|\theta_{t-1})]$.

Yoğunluk fonksiyonlarının oranı $\alpha = \frac{\pi(\theta^*)}{\pi(\theta_{t-1})}$ biçiminde hesaplanır. Aday nokta yoğunluk fonksiynunu artırırsa ($\alpha > 0\ ise$) kabul edilir, yani $\theta_t = \theta^*$ olarak alınır ve tekrar bir aday nokta çekilir. Aday nokta yoğunluk fonskiynunu azaltırsa ($\alpha < 0\ ise$) , α olasılığı ile kabul edilir, aksi halde reddedilir. Aday nokta reddedildiğinde zincir hareket etmez yani $\theta_t = \theta_{t-1}$ olur ve tekrar bir aday nokta seçilir.

Metropolis algoritmasında aday noktanın kabul olasılığı α aşağıdaki eşitlik yardımıyla hesaplanır.[28]

$$\alpha = \min\left(\frac{\pi(\theta^*)}{\pi(\theta_{t-1})}, 1\right) \tag{1.10.5}$$

Bu algoritma ile θ_t' den θ_{t-1}'ye geçiş olasılıkları sadece θ_t'ye bağlı olan $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m, \dots)$ şeklinde bir Markov zinciri oluşturulur. Başlangıç değerlinin etkilerinin titirilmesi için yeteri karar iterasyon yapıldıktan sonra (bu iterasyon sayası m ile gösterilsin) zincir durağan dağılıma yaklaşır ve $(\theta_{m+1}, \dots, \theta_{m+n})$ vektöründen elde edilen örneklemler $p(\theta)$ dağılımından örneklemlere karşılık gelir.

Hastings keyfi bir geçiş olasılığı fonksiyonu kullanarak Metropolis algoritmasını genelleştirmiş ve aday noktanın kabul edilme olasılığı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.[29]

[28] Siddhartha Chib, Edward Greenberg, The American Statistician, November 1995, Sayı.49 No.4 pp 328 http://elsa.berkeley.edu/reprints/misc/understanding.pdf

[29] Jesus Fernandes Villaverde, University of Pennsylvania p.7-8 http://economics.sas.upenn.edu/~jesusfv/LectureNotes_7_MH

$$\alpha = \min\left(\frac{\pi(\theta^*)q(\theta_{t-1}|\theta^*)}{\pi(\theta_{t-1})q(\theta^*|\theta_{t-1})}, 1\right) \qquad (1.10.6)$$

Yukarıdaki kabul olasılığı ve geçiş dağılımını kullanan algoritma, Metropolis-Hastings algoritması olarak adlandırılır. Bu algoritmada öneri dağılımı üzerine konulan herangi bir kısıt yoktur, simetrik olması gerekli değildir.[30]

MCMC yöntemlerinde, başlangıç değerlerinin etkileri, benzetimin ilk adımlarında görülür. İlerleyen adımlarda zincir yavaş yavaş başlangıç durumunu ututacak ve durağanlaşacaktır. Bu yöntemleri başarılı bir şekilde uygulamak için zincirin başlangıç gözlemleri ihmal edilir ve hesaplamalar başlangıç değerlerinin etkisinden kutrulmuş gözlemler üzerinden yapılır. Her bir parametre için elde edilen örneklemden aşağıda verilen ergodik ortalamalar hesaplanır.[31]

$$\bar{g} = \frac{1}{n-m}\sum_{t=m+1}^{n} g(\theta_t) \qquad (1.10.7)$$

Başlangıç değerinin seçimi için değişik öneriler vardır. Bunlardan birisi başlangıç değerinin dağılımın merkezine mümkün olduğu kadar yakın alınmasıdır. Örneğin başlanfıç değeri, dağılımın tepe değerine yakınbir değer olarak alınabilir (bu değer için yaklaşık bir MLE kullanılabilir).

Başlangıç değerinin etisinden kurtulmak için gerekli zincir uzunluğuna (m) karar vermede birçok yöntem önerilmiştir. Bu yöntemlerin uygulanması genellikle zordur. Çekilen örneklemin grafiği incelenerek zincir uzunluğuna karar vermek en çok kullanılan yöntemdir ve uygulanması basittir.[32]

MCMC yöntemlerinin uygulanmasında tek bir uzun zincir ya da faklı başlangıç değerlerine sahip birden çok zincir kullanılabilir. Birden çok zincir kullanıldığında yapılan hesaplamalar tek bir zincir kullanıldığında yapılan hesaplamalara göre daha fazladır. Genellikle tek bir zincir kullanmanın daha uygun bir yaklaşım olduğu belirtilse de zincirin başlangıç değerlerinin etkisinden kurtulaması için geçmesi gereken periyot uzunsa ya da zincirlerin otokorelsayonu yüksekse birden çok zincir kullanmanın daha iyi sonuçlar verceği söylenebilir.

---

[30] Walsh 2002

[31] Peter Müller, Monte Carlo Methodsand Bayesian Computation:MCMC p1. http://www.ma.utexas.edu/users/pmueller/class/422/mcmc-tutorial.pdf

[32] Gilks, 1996; Walsh, 2002

1.10.4. Gibbs Örnekleme Algoritması

Gibbs örnekleme algoritması Metropolis-Hastings algoritmasının $\alpha = 1$ için özel bir durumudur. Aday noktanın her zaman kabul edildiği bu algoritmada amaç, hedef dağılıma yakınsayan bir Markov zinciri oluşuturmaktır. Gibbs örnekleme algoritmasında, bir değişken dışında öteki tüm değişkenlere sabit bir değerin atandığı 'tam koşullu dağılım' olarark adlandırlılan tek değişkenli koşullu dağılımlarla ilgilenilir. Bu koşullu dağılmlardan örneklem çekmek karmaşık birleşik dağılımlara göre daha basittir ve tam koşullu dağılımlar genellikle basit biçimlere sahiptir. (normal, ters χ^2 gibi). Bu nedenle, ele alınan raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık dağılımından n boyutlu bir vektör oluşturmak yerine n tane tam koşulllu dağılımdan ardışık olarak n tane raslantı değişkeni oluşturmak daha kolaydır.

Bu algoritma ile, parametrelerin analitik olarak elde edilemeyen marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının sayısal tahminleri, var olan tam koşullu dağılımlardan örneklemler çekerek ve sayısal analitik yöntemleri kullanmadan bulunabilir. Gibbs örnekleme algoritmasında tam koşullu dağılımlar, bileşik dağılımın (dolayısıyla marjinal dağılımların) belirnelmesinde yeterlidir. Gibbs örnekleme algoritması genellikle bileşik dağılımların doğrudan belirlenmesinin zor olduğu, çok sayıda değişken içeren karmaşık modellerde kullanılır.[33]

Gibbs örnekleme algoritması, geçiş dağılımının tamı koşullu dağılım olark alındığı bir MCMC yöntemidir. İlgilenilen dağılım $\pi(\theta)$ bileşik dağılımı olsun. Burada θ, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$ biçiminde tanımlanır. Her bir θ_i bileşeni, sabit vektör ya da martis biçiminde olabilir. $\pi_i(\theta_i) = \pi(\theta_i|\theta_{-1}) = \pi(\theta_i|\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_k)$ i=1,...,k tam koşullu dağılımlarının elde edilebildiği yani tamamen bilindiği ve örneklem çekilebildiği varsayıldığında her bir θ_i için tam koşullu dağılım aşağıdaki biçimde ifade edilir.[34]

$$\pi_i(\theta_i) = \pi(\theta_i|\theta_{-i}) = \frac{\pi(\theta_i, \theta_{-i})}{\int \pi(\theta_i, \theta_{-i})d\theta_i}, i = 1, \dots, k \qquad (1.10.8)$$

[33] Gelfand, A., Smith,A.F.M.,Sampling- Based Approaches to Calculating Marginal Denisties, Journal of the American Statistical Association, 1990, Sayı85, p.398-409

[34] Gamerman, D., Markov Chain Monte Carlo Stochastic Simulation for Bayesian İnference, Champan and Hall, 1997, London

Burada amaç, $\pi(\theta)$ bileşik dağılımından örneklem elde etmektir. Gibbs örnekleme algoritması ile bu bileşik dağılımdan örneklem elde etmek için ta koşullu dağılımlardan ardı ardına örneklem çekilir. Bu algoritmanın adımları aşağıdaki gibi tanımlanır.[35]

Adım 1: İterasyon sayıcı j=1 alınarak iterasyonlara başlanır ve başangıç değerleri $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)})'$ olarak belirlenir.

Adım 2: $\theta^{(j-1)}$ 'den yararlanarak, değerlerin aşağıda belirtilen biçimde ardışık olarak üretilmesiyle yeni $\theta^{(i)} = (\theta_1^{(j)}, \dots, \theta_k^{(j)})'$ vektörü elde edilir.

$$\begin{gathered}
\theta_1^{(j)} \sim \pi\left(\theta_1 \middle| \theta_2^{(j-1)}, \dots, \theta_k^{(j-1)}\right), \\
\theta_2^{(j)} \sim \pi\left(\theta_2 \middle| \theta_1^{(j)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_k^{(j-1)}\right) \\
\vdots \\
\theta_k^{(j)} \sim \pi\left(\theta_k \middle| \theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \dots, \theta_{k-1}^{(j)}\right)
\end{gathered}$$

Adım 3: İterasyon sayıcı j'nin değeri 1 artırılır ve yakınsama gerçekleşinceye kadar adım 2'ye dönülerek işlemlere devam edilir.

Böylece her bir değişken sırasıyla elde edilir ve bir döngüde k tane değer üretilir. Bu şekilde i iterasyon sonunda $(\theta_1^{(i)}, \dots, \theta_k^{(i)})$ elde edilir. Gibs örnekleme algoritmasının bir özelliği, $i \to \infty$ iken dağılımda $\left(\theta_1^{(i)}, \dots, \theta_k^{(i)}\right) \xrightarrow{d} [\theta_1, \dots, \theta_k]$ yakınsamasının gerçekleşmesi ve dolayısıyla her bir s (s=(1,...,k)) değişkeni için $\theta_s^{(i)} \xrightarrow{d} [\theta_s]$ olmasıdır. Bunun anlamı, yakınsama gerçeleştiğinde (θ^i) vektörünün, $\pi(\theta)$ dağılımından bir örneklem olarak nitelendirilmesidir. İterasyon sayısı arttıkça, zincir denge konşuluna yaklaşır ve yakınsama yaklaşık olarak gerçekleşir. Algortimanın diğer bir özelliği ise, $(\theta_1, \dots, \theta_k)$'nin T gibi herhangi bir ölçülebilir fonksiyonunun beklenen değeri için

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} T(\theta_1^{(j)}, \dots, \theta_k^{(j)}) \xrightarrow{a.s} E(T(\theta_1, \dots, \theta_k))$$

yakınsamasının gerçekleşmesidir.[36],[37]

---

[35] Gelfand and Smith,1990; Gamerman,1997

[36] Gamerman,1997

Gibbs örnekleme algoritmasında, zincir yeteri kadar uzunsa başlanğıç değerlerinin etkisi ortadan kalkacağından başlanğıç değerlerinin seçimi önemli değildir. Bununla birlikte, karmaşık modellerde uzun iterasyonlar hem hesaplama süresinin üzamasına hem de bilgisayarın belleğinde daha büyük yer kaplanmasına neden olacağından uygun başlanğıç değerlerinin seçilmesine özen göserilmelidir.

$\pi(\theta)$ bileşik son dağılımından ne büyüklüğünde örneklem oluşturmak için kullanılan bir kaç yaklaşım vardır. Bunlardan ilki bağımsız örneklem yakaşımıdır. Bu yaklaşımda n tane paralel zincir işleme tabi tutulur ve yakınsamanın m'inci iterasyonda gerçekleştiği varsayıldığında, n tane zincirin her birinden m'inci zincir değeri örnekleme alınır. Tek zincir yaklaşımı olarak adlandırılan ikinci yaklaşımda, tek bir zincir kullanılır ve yakınsamanın gerçekleştiği m'inci iterasyondan sonra bu zincirden ardı ardına n tane değer seçilerek örneklem oluşuturulur. Bağımsızlığı sağlamak için 'her k'ıncı iterasyon örneklemesi' olarak adlandırılan seçenek bir yaklaşım önerilmiştir. Bu yaklaşımda, başlanğıç değerlerinin etkisinin arıtılması için geçmesi gereken öeriyottan sonra her bir k'ıncı iterasyonda elde edilen değerler örnekleme alınır. İterasyonlar arasındaki gecikme arttıkça zincir değerleri arasındaki ilişki azalır ve zincir değerleri yeterince büyük k geçimesi için hemen hemen bağımsız olur. Büyülüğü n olan bir örneklem üretmek içn başka bir yakşalımda ise , l tane (l, genellikle 10'dan küçük alınır) bağımsız zincir alınır ve başlanğıç değerlerinin etkileri yitirildikten sonr her bir zincire ilişkin örneklemden n/l tane ardışık değer seçilir. Uygulamada genellikle n tane zincir kullanmak gerksizdir, tek ve uzun bir zincir kullanmak daha çok tercih edilen bir durmdur. Zincirin yakınsama özellikleri iyi anlaşılmışsa tek bir zincir yeterli olacaktır, aksi taktirde birkaç paralel zincir kullanılması önerilir.[38],[39]

---

[37] George Casella and Edward I. George,The American Statistician,Sayı. 46, No. 3 (Aug., 1992), pp. 167-174

[38] Damien, P., Wakefield, J. and Walker, S. (1999) Gibbs Sampling for Bayesian Nonconjugate and Hierarchical Models by Using Auxiliary Variables, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, p.61, 331–344.

[39] George, E. and McCulloch, R. (1993) Variable Selection via Gibbs Sampling, Journal of the American Statistical Association, 88, p,881–889.

Gibbs örnekleme algoritmasının uygulanması ile son dağılım $\pi(\theta)$ 'dan çekilen $\theta_1, \ldots, \theta_n$ vektörlerinin bir örneklemi elde edilir. Parametrelerin marjinal dağılımları yada bu dağılımların özellikleri, bu örneklem yarımıyla bulunabilir. $\Psi = t(\theta)$ gibi gerçek bir fonksiyonun marjinal nokta ya da aralık tahminleri bu örneklemden elde edilir ve bu tahmin edicilerin tutarlı olduğu söylenebilir. Örneğin $\Psi = t(\theta)$ fonksiyonunun son ortalaması aşağıdaki eşitlik yardımıyla elde edilir.

$$\widehat{E}(\Psi) = \widehat{\Psi} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{n} \Psi_j \qquad (1.10.9)$$

Buada $\Psi_j = t(\theta_j)$, j=1,…,n olarak alınmıştır. Bu eşitlik, n →ve $\widehat{E}[\Psi] \rightarrow E[\Psi]$ iken $\Psi = t(\theta)$'nın Monte Carlo tahmin edicisidir. Ψ'nin son varyansı (posterior varicance) $\widehat{\sigma}_\Psi^2 = \mathrm{Var}(\Psi) = E(\Psi^2) - [E(\Psi)]^2$ biçimindedir ve aşağıdaki eşitlikle verilen $\widehat{\sigma}_\Psi^2$ ile tahmin edilir.

$$\widehat{\sigma}_\Psi^2 \quad = \widehat{E}(\Psi^2) - [E(\Psi)]^2 \qquad (1.10.10)$$

Gibbs örnekleme algoritmasından yararlanarak dağılımın bir momentinin Monte Carlo tahmin edicisini hesaplamanın kolay olmasına karşın marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunun gerçek biçiminin hesaplanması biraz daha zordur. Koşullu dağılımlarının ortalaması kullanılarak marjinal dağılımlar yaklaşık olrak elde edilebilir.

$$\pi(\theta_i) = \int \pi(\theta_i|\theta_i)\pi(\theta_{-i})d\theta_{-i} \qquad (1.10.11)$$

Yukarıdaki eşitlikten yararlanarak, marjinal yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki eşitlik yardımıyla tahmin edilebilir.

$$\hat{\pi} = (\theta_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \pi\big(\theta_i \big| \theta_{i,-j}\big) \qquad (1.10.12)$$

Burada $\theta_{j,-i}(j = 1, \ldots, n)$, $\pi(\theta_i)$'nın tutarlı bir tahamin edici olduğu ve tüm θ_i değerleri için merkezi limit teoremine uygudğu söylenilebilir. t(θ_i)'nin momentlerine ilişkin tahmin ediciler de benzerşekilde aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{E}[t(\theta_i)] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left[t\left(\theta_i \middle| \theta_{j,-i}\right)\right] \qquad (1.10.13)$$

1.10.5. MCMC Yöntemlerinde Yakınsamanın Belirlenmesi

MCMC yöntemlerinde incelenmesi gereken önemli bir nokta, çekilen örneklemlerin son dağılıma yakınsayıp yakınsamadığının belirlenmesidir. Kuramsal olarak $n \rightarrow \infty$ olduğunda yakınsamanın gerçekleşeceği söylenilir ancak uygulamada yakınsamanın gerçeleşeceği iterasyon sayısının belirlenmesi gerekir. Yakınsama gerçekleştikten sonra, ilgilenilen parameterlerin son dağılımlarından yaklaşık örneklemler üretmek için itersayonlara devam edilir.

Yakınsama hızı, koşullu dağılımların karmaşıklığına bağlıdır. Yakınsama belinenmesinde kullanılan bir çok yöntem vardır. Bu yöntemlerden ilkinde, yakınsamanın belirlenmesinde zincir otokorelasyonlarının kullanılması önerilir. Otokorelasyon katsayıları, her bir θ_i zinciri için ilişki miktarının belirlenmesinde kullanılır. Yakınsama problemi bulunmayan zincirler için otokorelasyon katsayılarının küçük olması beklenir. İlişki miktarı, gerekli itersyon sayınının belinlenmesinde önemli bir rol oynar.[40]

Yakınsamanın belirlenmesinde kullanılan diğer bir yöntem Raftery ve Lewis tarafından önerilmiştir. Bu yöntemde, zincir otokorelasyonunun bir fonksiyonu olan seyreltme oranı (thin), yakınsama gerçekleşene dek geçmesi gereken iterasyon sayısı (burn), güvenilir tahminler elde etmek için gerkeli toplama iterasyon sayısı (N) ve zincirdeki noktaların aynı dağılımlı ve bağımsız olması için gerkeli minumum iterasyon sayısı (Nmin) hesaplanır. Bu yöntemde ayrıca 'I istatistiği' adı verilen I=N/Nmin oranı hesaplanır. Bu istatistiğin değerinin 5'ten büyük olması zincirde yakınsama sorunun olduğuna işaret eder[41]

Geweke tarafından yakınsamanın belirlenmesi için önerilen yöntemlerden ilkinde örneklemin baştan %10 ile sondan %50'sinin ortalamaları karşılaştırılır ve ortalamalra eşitse yakınsama probleminin olmadığı kabul edilir. Geweke tarafından önerilen diğer bir yöntemde sayısal standart hatalar (numerical standart errors: NSE)

---

[40] LeSage,J.P., Applied Econometrics Using MATLAB. October,1999, p.175-184 http://www.spatial-econometrics.com/html/mbook.pdf
[41] Adrian E.Raftery, Steven Lewis, How many iterations in the Gibbs Sampler, http://people.ee.duke.edu/~lcarin/raftery92how.pdf

ve oransal sayısal etkinlikler (relative numerical efficiency: RNE) hesaplanır. NSE ve RNE değerleri spektral pencerenin farklı yüzdeliklerine bağlı olarak tahmin edildiğinde bu taminler arasında önemli farkların olması otokorelasyonların büyük olduğuna dolayısıyla yakınsama probleminin olduğuna işaret eder.[42]

1.11. VERİ GENİŞLETME ALGORİTMASI

Bayesyen istatistikte hesaplamaları kolaylaştıran diğer bir yöntem veri genişletme algoritmasıdır. Bu algoritma son dağılımların ve parametre tahminlerinin elde edilmesinde kullanılır.

Veri genişletme algoritması, gizli değişkenler üzerinden iteratif optimizasyon ya da örnekleme algoritmaları oluşturan, en çok olabilirlik tahmin edicilerinin ve son tepe değerlerinin hesabında kullanılan yöntemler bütünüdür. Bu algoritmada gözlenen veri, gizli veri eklenerek genişletilir ve bu sayede elde edilen genişletilmiş son dağılım kullanılarak, gözlenen son dağılım için birçok çıkarsama yapılabilir. Büyük örneklemlerde normallik varsayımı sağlandığından son dağılım ya da olbilirlik fonksiyonunun hesaplaması kolaydır. Küçük örnkelme durumunda ise normallik varsayı sağlanmadığından veri genişletme algoritması tüm son dağılıma ya da tüm olabilirlik fonksiynuna dayanan çıkarsama yapmayı sağlar.

Veri genişletme algoritmasında temel düşünce, gözlenen veri y'yi gizli veri z ile genişletmektir. y ve z biliniyorsa genişletilmiş son dağılım $p(\theta|y,z)$ 'nin hesaplanabileceği ya da bu dağılımdan örneklem çekilebileceği varsayılır. İlgilenilen son dağılım, doğrudan hesaplanması genellikle zor olan $p(\theta|y)$'dir. Genişletilmiş son dağılım gözlenen son dağılım $p(\theta|y)$'nin hesplanmasında, maksimize edilmesinde, bu dağılımdan örneklem çekilmesinde ve marjinal son dağılımların bulunmasında kullanılabilir. $p(\theta|y,z)$ kestirim dağılımından z'nin ikameleri (imputations) üretildiğinde, $p(\theta|y)$ üretilen z değerleri üerinden $p(\theta|y,z)$ dağılımlarının ortalaması alınarak yaklaşık olarak bulunabilir. Bununla birlikte, $p(z|y)$ dağılımı da $p(\theta|y)$ dağılımına dayanır. $p(\theta|y)$ bilinseydi, $p(z|y)$'nin hesaplanmasında kullanılabilirdi. $p(\theta|y)$ ile $p(z|y)$ arasındaki bu karışılıklı bağımlılık, $p(\theta|y)$'nin hesabında iteratif

[42] John Geweke, Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approachesto the Calculation of Posterior Moments, http://www.censoc.uts.edu.au/pdfs/geweke_papers/gp_49.pdf

bir algoritmaya götürür. Bu algoritmayı uygulamak için $p(\theta|y,z)$ ve $p(z|\theta,y)$ dağılımlarından örneklemler alnabilmesi gerkmektedir.[43]

1.11.1. Algoritmanın Uygulanması

Veri genişletme algoritması iki basit özdeşlik ile uygulanır, bu özdeşlikler 'son özdeşlik' (posterior identicalness) ve 'kestirim özdeşliği' (forecasting identicalness) olarak adlandırılır. Son özdeşlik aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$p(\theta|y) = \int_{Z} p(\theta|y,z)p(z|y)dz \qquad (1.11.1)$$

Burada $p(\theta|y)$, y verisi bilindiğinde θ parametresinin son dağılımını; $p(z|y)$, y verisi bilindiğinde gizli veri z'nin kestirim dağılımını ve $p(\theta|y,z)$ ise genişletilmiş veri x=(y,z) verildiğinde θ parametresinin koşullu dağılımını yani genişletilmiş son dağılımı gösteri. Algoritmanın uygulanmasında kullanılan başka bir özdeşlik olan kestirim özdeşliği ise aşağıdaki gibi tanımlanır.[44]

$$p(z|y) = \int_{\Theta} p(z|\phi,y)p(\phi|y)d\phi \qquad (1.11.2)$$

Burada $p(z|\phi,y)$, koşullu kestirim dağılımını gösterir. Eşitlik (1.11.1) ve (1.11.2)'deki özdeşliklerde z için örneklem uzayı Z ile, θ için örneklem uzayı Θ ile gösterilmiştir. Kestirim özdeşliği son özdeşlikte (posteior identicalness) yerine konulup integralin sınırları değiştirildiğinde $p(\theta|y)$'nin aşağıdaki eşitliği sağladığı gösterilebilir.

$$g(\theta) = \int_{\Theta} K(\theta,\phi)g(\phi)d\phi \qquad (1.11.3)$$

Burada $g(\theta)$, $p(\theta|y)$'ye karşılık gelir ve K fonksiyonu

[43] Tenner, M.A., Tools for Statistical İnference, Springer-Verlag, New York, 1993
[44] David A. van Dyk and Xiao-Li Meng, The Art of Data Augmentation,*Journal of Computational and Graphical Statistics* ,Sayı. 10, No. 1 (Mar., 2001), pp. 1-50

$$K(\theta, \phi) = \int_{z} p(\theta|z, y)p(z|\phi, y)dz$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (1.11.3)'ü çözmek için ardışık yerine koyma yöntemi (successive substitution) kullanılabilir. T,f gibi herhangi bir integrallenebilir fonkisyonu Tf gibi diğer integrallenebilir fonksiyona dönüştüren integral dönüşümü olsun. Bu durumda $g_0(\theta)$ başanğıç değeri ile işlemlere başlanır ve ardışık olarak aşağıdaki eşitlik hesaplanır.

$$g_{t+1}(\theta) = (Tg_i)(\theta) \tag{1.11.4}$$

Burada,

$$Tf(\theta) = \int_{\Theta} K(\theta, \phi)f(\phi)d\phi$$

olarak yazılabilir.

Eşitlik (1.11.3)'ü çözmek için Monte Carlo ve bileşim (composition) yöntemleri kullanılır.[45]

Monte Carlo yöntemi son özdeşliğe (posterior identicalness) aşağıdaki gibi uygulanır.

1. Kestirim dağılımı $p(z|y)$ 'nin geçerli tahmininden $z_1, \dots, z_m$ örneklemi üretilir.
2. $p(\theta|y)$ 'nin geçerli tahmini, 1. Adımda elde edilen genişletilmiş veri bilindiğinde θ 'nın genişletilmiş son dağılımlarının karışımı olarak aşağıdaki gibi güncellenir.

$$g_{i+1}(\theta) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} p(\theta|z_j, y) \tag{1.11.5}$$

[45] Martin A. Tanner; Wing Hung Wong, The Calculation of Posterior Distributions by Data Augmentation,Journal of the American Statistical Association, Sayı. 82, No. 398. (Jun., 1987), pp. 528-540.http://www.jstor.org/discover/10.2307/2289457?uid=3739192&uid=2134&uid=2&uid=70&uid=4&sid=47698879584557

Yukarıdaki gibi hesaplanan g_i değerleri, ılımlı koşullar altında $p(\theta|y)$ son dağılımına yakınsar.

Son dağılımın geçerli tahmini $(g_i(\theta))$ verildiğinde, gizli verinin bir örneklemini üretmek için bileşim yöntemi kestirim özdeşliğinde aşağıdaki gibi uygulanır.

1.1. $g_i(\theta)$'dan θ^* üretilir
1.2. $p(z|\theta^*, y)$ dağılımından z üretilir. Burada θ^*, (1.1) dağılımında üretilen değerdir.

Bu iki adım $z_1, \dots, z_m$ örneklemini elde etmek için m kez tekrar edilir. $z_1, \dots, z_m$ noktalarına 'çoklu ikameler' (multiple imputations) adı verilmiştir. Bu durumda (1.) adıma 'ikame adımı', (2.) adıma ise 'son adım' adı verilir. Veri genişletme algoritması ikame adımı ile son adım arasındaki iteasyonlardan meydana gelir.[46]

1.11.2. Yakınsamanın Belirlenmesi

Veri genişletme algoritmasının uygulanmasında dikkat edilmesi gereken iki ğnemli nokta vardır: bunlardan ilki yakınsamanın belirlenmesi, diğeri ise her bir iterasyondakı ikame sayısı m'in belirlenmesidir. Tanner ve Wong (1987), algoritmanın ilerlemesini grafiksel olarak göstermenin, yakınsamanın ve ikame sayısının belirlenmesinde yardımcı olacağını belirtmiştir. Örneğin, grafiksel gösterim tahmini son dağılımın şeçilmiş yüzdeliklerine (%25, %50, %75 gibi) göre yapılabilir. Sabit bir m değeri için iterasyonlar, böyle bir grafikteki düzensiz değişmeler durağnalaşıncaya kadar devam edebilir. Bir noktada algoritma son bulabilir ya da m değeri, ilgilenilen son dağılıma ilişkin tahminlerin duyarlılığını artırmak için yükseltilebilir. İterasyondan iterasyona m sabit tutulmalıdır. m büyük olduğunda (1) ve (2) adımları Eşitlik (1.11.3)' e yakın iyi bir yakınsama sağlar. İterasyona m'in kiçik bir değeri ile başlanıp, iterasyon sürecinin değişik bağlantı noktalarında m'in değeri artırılarak hesaplamalar azaltılabilir. Tahmini son dağılım, gerçek dağılımdan

[46] Martin A. Tanner; Wing Hung Wong, The Calculation of Posterior Distributions by Data Augmentation,Journal of the American Statistical Association, Sayı. 82, No. 398. (Jun., 1987), pp. 528-540

uzak olduğunda ilk birkaç iterasyonda m’i büyük almak uygun değildir. m’i başlanğıçta küçük alıp, iterasyonlar arttıkça artırılması tavsiye edilir.[47]

[47] Tanner and Wong,1987; Gelfand and Smith, 1990

İKİNCİ BÖLÜM

BAYESYEN REGRESYON

Uygulamalı istatistiksel analizin önemli bir bölümünü regresyon tekniği oluşturur. Regresyon tekniğinde tahmincinin secimi, tahmin, test süreci gibi aşamalar vardır. Bu aşamalardan tahmincinin seçiminde kriter, tahmincinin sapmasızlık, tutarlılık, etkinlik gibi istatistiksel özellikleri ve verinin dağılımı (veya dağılım varsayımları) olmaktadır. Ancak bunların da ötesinde tüm bu istatistiksel özelliklerin hangi istatistik anlayışı çatısında değerlendirildiğine bağlıdır. Bayesyen yaklaşım alternatif kabul edilirse, yapılacak regresyon analizi bu bölümde ele alınan biçimde gerçekleşecektir.

Bayesyen yaklaşımın karakterisitiğini yansıtan özellik, analizde ön bilgiye yer verilmesidir. Bu regresyon analizi için de böyledir. Bilindiği gibi Bayesyen yaklaşımda denemeler yapılmadan önce parametreye ilişkin sahip olunan ön bilgi, ön olasılık yoğunluk fonksiyonu sayesinde analize dahil edilir. Aslında ön bilgi her araştırmada mevcut olmayabilir veya farklı seviyelerde ön bilgi olabilir. Bu sebepten regresyonda önemli bir aşamayı teşkil eden ön dağılımın oluşturulması konusu, bu kriterle ayrıma giderek, bilgi veren ve bilgi vermeyen olasılık yoğunluk fonksiyonu şeklinde iki başlık oluşturur.

Daha önceki bölümde değinilen Bayesyen yaklaşım ile istatistiksel çıkarsamada olduğu gibi regreson parametresi de Klasik regresyonunkinin aksine bilinmeyen bir sabit ($\beta\,\text{tahmin} \sim N\lfloor \beta, \sigma^2, (X'X)^{-1} \rfloor$) değil, bir raslantı değişkeni ($P(\beta|\sigma) \sim N\lfloor \beta\,\text{tahmin}, \sigma^2 (X'X)^{-1} \rfloor$) olarak kabul edilir. İfadeden açıkça görüldüğü üzere, tahminci ve parametre adeta rol değiştirmiştir. Bayesyen regresyonda $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$ ve σ^2 parametreleri birer raslantı değişkenidir ve olasılık dağılımları vardır.

Doğrusal modele Bayesyen yaklaşım uygulandığı zaman analizin temelini oluşturan süreç, Bayesyen istatistiksel çıkarsamada olduğu gibi gerçekleşecektir:

$$\text{Son dağılım} \propto \text{öndağılım} * \text{Benzerlik fonksiyonu}$$

$$P(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | y, X) = P(\beta_0, \beta_1, \sigma^2) * P(y, X | \beta_0, \beta_1, \sigma^2)$$[48]

2.1. BASİT DOĞRUSAL REGRESYON MODELİ

Bu bölümde tek açıklayıcı değişkeni olan doğrusal regresyon modeli analiz edilecektir.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \qquad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada y_i bağımlı değişken, x_i bağımsız değişken, u_i hata terimi, β_0 ve β_1 regresyonun parametreleri, başka bir değişle sabit katsayı ve eğim katsayısıdır. Bayesyen yaklaşımda, doğrusal regresyon varsayımları şunlardır;

a. Hata terimleri her ‘x’ değeri için ‘0’ ortalamalı ve ‘σ^2’ varyanslı, bağımsız Normal dağılır.$(u_i \sim N\ (0, \sigma^2))$
b. Raslantı değişkenleri bağımsızdır.
c. Katsayılarda doğrusaldır.
d. Ölçme hataları yoktur.

Regresyonda X ya sabit ya da raslantı değişkenidir. Raslantı değişkeni olması durumunda hata terimi $u_i{}'$lerden bağımsızdırlar. Ayrıca X’in rastlantı değişkeni olmasıyla iligili olarak bir varsayım daha yapılır; ön dağılım parametrelrinin bağımsızlığı.[49] Klasik regresyonda, X veri ikin y’nin koşullu olasılığı hakkında X’in dağılımının bilgi sağlamadığı varsayılır. Bayeseyn yaklaşımda da mantık aynıdır. Aslında tam bir Bayesyen model X’in dağılımını da, $g(X|\psi)$, içerir. Böyle bir modelin birleşik benzerlik fonksiyonu ve ön dağılımı sırasıyla (3.2)’ deki gibidir.[50]

$$P(y, X|\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \psi) = P(y|X, \beta_0, \beta_1, \sigma^2) * g(X|\psi)$$

$$P(\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \psi) \qquad (2.2)$$

$P(y|X, \beta_0, \beta_1, \sigma^2)$ ’ yi belirleyen $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$ parametreleri ve $g(X|\psi)$ ’ yi belirleyen ψ parametresi ön dağılımlarında bağımsızdır;

$$P(\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \psi) = P(\psi) * P(\beta_0, \beta_1, \sigma^2) \qquad (2.3)$$

---

[48] George G.Judge v.d., The Theory and Practice of Econometrics, New York, John Wiley & Sons, 1985,s.103.
[49] D.V.Lindley, İntroduction to Probability and Statistics From A Bayesian Viewpoint, Part 2, London,Cambridge University Press, 1965,s.57,203,204.
[50] Andrew Gelman v.d., Bayesian Data Analysis, London, Champan & Hall, 1995,s.235.

Ön dağılımlarının bağımsız olması varsayımından faydalanarak, birleşik son dağılım çarpanlarına ayrılır;

$$P(\beta_0,\beta_1,\sigma^2,\psi|y,X) = P(\beta_0,\beta_1,\sigma^2|y,X) * P(\psi|X)$$

$$P(\beta_0,\beta_1,\sigma^2,\psi|y,X) = [P(\beta_0,\beta_1,\sigma^2) * P(y|X,\beta_0,\beta_1,\sigma^2)] * [P(X|\psi) * P(\psi)]$$

$$P(\beta_0,\beta_1,\sigma^2,\psi|y,X) \propto P(\beta_0,\beta_1,\sigma^2) * P(y|X,\beta_0,\beta_1,\sigma^2) \tag{2.4}$$

(2.4)' te görüldüğü üzere oransallık ifadesi ile yazılınca, bilgi kaybı olmadan Klasik regresyonda olduğu gibi X'in dağılımına olan bağımlılık ortadan kaldırılmış olur.

(2.1) ifadesinde X, $\beta_0, \beta_1,$ ve σ^2 veri iken, y ortalamsı

$$E(y_i|x_i,\beta_0,\beta_1,\sigma^2) = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

ve varyansı $Var(y_i|x_i,\beta_0,\beta_1,\sigma^2) = \sigma^2$ (i=1,2,...,n için) ile bağımsız Normal dağılır. Bu varsayımlara göre benzerlik fonksiyonu;

$$P(y|X,\beta_0,\beta_1,\sigma) \propto \frac{1}{\sigma^n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2\right], (i=1,2,\dots n) \tag{2.5}$$

2.1.1. Bilgi Vermeyen Ön Dağılım ile Analiz:

Ön dağılımın seçimi araştırmacının bilgi ve düşüncesine bağlıdır. Rastlantısal deneme veya örnekleme sürecinde deneme yapılıp, sonuçlar ortaya çıkmadan önce, parametreye ilişkin ilk anda sahip olunan bilgi ön dağılımın temsil ettiği düşünülür. Elbette ki ön bilginin miktarında ara aşamalar da vardır. Tam bilgisizlik, az bilgi olması ve tam bilgi olması durumu olabilir. Ön bilginin olmaması durumunun dışında, gözlem sayısı çok ve parametre sayısı küçük ise bilgi vermeyen ön dağılım kullanılması daha doğrudur. Çünkü veriden gelen bilgi kaçınılmaz olarak daha baskın çıkacaktır.

Varyans Bilinmiyorsa: Ön dağılımın analizinde $\beta_0, \beta_1,$ ve σ için en yaygın bilgi vermeyen ön dağılım;

$$P(\beta_0,\beta_1,\sigma) = P(\beta_0,\beta_1) * P(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \tag{2.6}$$

$(-\infty < \beta_0, \beta_1 < \infty, \quad 0 < \sigma < \infty$ *olmak* *üzere*), şeklindedir.

(3.6) Eşitliğinin ayrıntısına bakılırsa, $P(\beta_0, \beta_1) = c$ gibi bir sabite $P(\sigma)=(\frac{1}{\sigma})$'ya eşittir. β_0, β_1 ve $\log \sigma$ parametreleri, bağımsız ve dikdörtken dağılırlar. σ'nın sıfırdan büyük olduğu bilinmektedir. Buna göre $\beta = \log \sigma \quad P(\sigma) = d\sigma \propto \frac{d\sigma}{\sigma}$ ifadesine ulaşılır. Parametrenin her değerine karşılık gelen olasılık aynıdır. Bu nedenle belirlenen ön dağılımın paramerre değerlerine ilişkin tam bilgisizliği yansıttığı söylenebilir.

Son dağılım analizinde, ön dağılım ile benzerlik fonksiyonu çarpılarak β_0, β_1, ve σ için birleşik son dağılım elde edilir.

$$P(\beta_0, \beta_1, \sigma \mid y, X) \propto \frac{1}{\sigma^{n+1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2\right] \qquad (2.7)$$

EKK yöntemiyle yapılan parametre tahmincileri;

$$\upsilon = n - 2 \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \qquad s^2 = \frac{\sum(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{\upsilon} \qquad (2.8)$$

Dağılımı EKK tahminleri cinsinden yazmak için, (2.7)'de $\sum(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$ ifadesinde parantez içi, ' $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ 'eklenip çıkarılarak genişletilir;

$$\begin{aligned}\sum(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 &= \sum(y_i - \beta_0 - \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_0 - \beta_1 x_i - \hat{\beta}_1 x_i + \hat{\beta}_1 x_i)^2 \\ &= \sum\{(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) - [(\beta_0 - \hat{\beta}_0) + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)x_i]\}^2 \\ &= \sum(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2 - \sum 2(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) * [(\beta_0 - \hat{\beta}_0) + (\beta_1 \\ &\quad - \hat{\beta}_1)x_i] + \sum[(\beta_0 - \hat{\beta}_0) + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)x_i]^2\end{aligned}$$

Yukarıda açılım elde edilen ifade de, çarpaz çarpım terimi

'$\sum 2(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) * [(\beta_0 - \hat{\beta}_0) + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)x_i]$', $\sum(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$ olması nedeniyle kaybolur.

$$\begin{aligned}&= vs^2 + \sum(\beta_0 - \hat{\beta}_0)^2 + \sum[(\beta_1 - \hat{\beta}_1)x_i]^2 + \sum 2(\beta_0 - \hat{\beta}_0)(\beta_1 - \hat{\beta}_1)x_i = \\ &\quad = vs^2 + n * (\beta_0 - \hat{\beta}_0)^2 \\ &\quad + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \sum x_i^2 + 2(\beta_0 - \hat{\beta}_0) * (\beta_1 - \hat{\beta}_1) \sum x_i \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Birleşik son dağılımda yukarıda elde edilen sonuş yerleştirilir:

$$P(\beta_0, \beta_1\sigma|y, X) \propto \frac{1}{\sigma^{n+1}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + n * (\beta_0 - \hat{\beta}_0)^2 + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \sum x_i^2 + 2(\beta_0 - \hat{\beta}_0) * (\beta_1 - \hat{\beta}_1) \sum x_i\right]\right\} \quad (2.10)$$

(2.10) Eşitliği β_0 ve β_1 ' in koşullu o.y.f.'sinin, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ ortalamalı $\sigma^2(X'X)^{-1}$ kovaryans ile çok değişkenli normal dağıldığını gösterir. Elde edilen son o.y.f..de normal dağılmaktadır. Dağılımın fonkisyonel kısmını belirleyen bölüm, yoğunluk fonkisyonunun çekirdeğidir (kernelidir). Burada çekirdek,

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n * (\beta_0 - \hat{\beta}_0)^2 + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \sum x_i^2 + 2(\beta_0 - \hat{\beta}_0) * (\beta_1 - \hat{\beta}_1) \sum x_i\right]\right\}$$

ifadesidir. Diğer bölüm '$\frac{1}{(2\pi)^n \sigma^{n+1}}$', olasılık fonksiyonunun integralini '1' yapan normalleştirme sabitidir.

Uygulamaya bakıldığında σ^2 ' nin bilindiği durumlar nadirdir. Bu nedenle birleşik son dağılımın σ'ya göre integrali alınır. Sonuçta β_0 ve β_1 için marjinal son o.y.f. elde edilmiş olur. Bu dağılım, yani marjinal yapı parametreye ilişkin çıkarsama yapımasını sağlamaktadır.

$$P(\beta_0, \beta_1|y, X) = \int_0^\infty P(\beta_0, \beta_1, \sigma|y, X)d\sigma$$

$$\propto \left[vs^2 + n(\beta_0 - \hat{\beta}_0)^2 + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \sum x_i^2 + 2(\beta_0 - \hat{\beta}_0) * (\beta_1 - \hat{\beta}_1) \sum x_i\right]^{-\frac{n}{2}} \quad (2.11)$$

(2.11) ifadesi, iki değişkenli Student t dağılımı ile aynı yapıdadır. Başka bir deyişle β_0 ve β_1 parametrelerinin marjinal son dağılımı, Student t dağılımına uyum sağlamaktadır.

β_0 veβ_1 Parametrelerine ilişkin çıkarsama yapılırken, parametrelerin her birinin marjinal son dağılımı Student t o.y.f.'sinin özellinlerine dayanarak aşağıdaki şekilde elde edilir.[51]

$$P(\beta_0|y,X) \propto \left[v + \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{s^2 \sum \frac{x_i^2}{n}} (\beta_0 - \hat{\beta}_0)^2\right]^{-\frac{(v+1)}{2}} \quad -\infty < \beta_0 < \infty \qquad (2.12)$$

$$P(\beta_0|y,X) \propto \left[v + \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{s^2} (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2\right]^{-\frac{(v+1)}{2}} \quad -\infty < \beta_1 < \infty \qquad (2.13)$$

Karar alma teorisine dayalı tahmin tekniğinden bilinmektedir ki kareli yapıda en iyi tahmini son dağılımın ortalaması verir. Dağılımların konum parametresi yani ortalamaları $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ ile yani EKK tahincileri ile aynıdır.

Gerkli dönüşümler yapılınca yukarıdaki (2.12) ve (2.13) eşitlikleri aşağıdaki hale gelir.[52]

$$\left[\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{s^2 \sum \frac{x_i^2}{n}}\right]^{-\frac{1}{2}} * \left(\beta_0 - \hat{\beta}_0\right) = t_v \qquad (2.14)$$

$$\left[\frac{(\beta_1 - \hat{\beta}_1)}{s/[\sum(x_i - \bar{x})^2]^{-\frac{1}{2}}}\right] = t_v \qquad (2.15)$$

(2.14) ve (2.15)' te t_v raslantı değişkenidir. Buna göre parametrelerin v serbestlik dereceli Student t o.y.f.'si vardır. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda, t-dağılım tablosundan β_0 ve β_1'ye ilişkin çıkarsamalar yapmak mümkün olacaktır.

σ Parametresine ilişkin çıkarsama yapılırken, σ ' nın marjinala son dağılımını elde etmek için, birleşik son dağılımın (2.10)'un β_0 ve β_1'e göre integrali alınır. Bunun sonucunda;

$$P(\sigma|y,X) \propto \frac{1}{\sigma^{v+1}} \exp\left(-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right), 0 < \sigma < \infty \qquad (2.16)$$

51 Arnold Zellner, a.g.e.,s.61.

52 Arnold Zellner, a.g.e.,s.61.

ifadesine ulaşılır.[53] Burada σ, Ters-Gama dağılımına sahiptir. Standart sapma için beklenen değer ve varyans;

$$\mathrm{E}(\sigma) = \mathrm{s}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{v}}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma[(\mathrm{v}-1)/2]}{\Gamma(\mathrm{v}/2)}, \qquad \mathrm{Var}(\sigma) = \frac{\mathrm{vs}^2}{\mathrm{v}-2} - [\mathrm{E}(\sigma)]^2 \qquad (2.17)$$

σ'dan σ^2'ye dönüştürme yapılarak, varyans (σ^2) için de marjinal son o.y.f. edle edilir.[54]

$$\mathrm{P}(\sigma^2|\mathrm{y}, \mathrm{X}) \propto \left[(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}\right]^{-1} \exp\left(-\frac{\mathrm{vs}^2}{2\sigma^2}\right), 0 < \sigma^2 < \infty \qquad (2.18)$$

Varyans için beklenen değer, $\mathrm{E}(\sigma^2) = \frac{\mathrm{vs}^2}{\mathrm{v}-2}$ şeklindedir.

Kesinlik Parametresi h için çıkarsama yapıldığında, Bayeseyn istatistikte önemli yeri olan kesinlik parametresi ($\mathrm{h} = 1/\sigma^2$) için, marjinal son dağılımı elde etmek üzere gerekli dönüştürme işlemleri yapılırsa;

$$\mathrm{P}(\mathrm{h}|\mathrm{y}, \mathrm{X}) \propto \mathrm{h}^{\frac{\mathrm{v}}{2}-1} \exp\left(\frac{\mathrm{vs}^2\mathrm{h}}{2}\right), 0 < h < \infty \qquad (2.19)$$[55]

(2.19) ifadesinde $\mathrm{vs}^2\mathrm{h}$, v serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir. Kesinlik parametresi için beklenen değer, $E(h) = \frac{1}{s^2}$'dir.

Burada elde edilen son dağılıda σ biliniyorsa, modelde parametre olarak sadece katsayı parametreleri kalır ve (2.11) yapısında olur. Bu noktadan sonra yapılacak işlemler aynıdır.

Genel olarak değinilirse, bilgi vermeyen ön dağılımla çalışıldığında, nokta tahmincisi (hatta dolsyısıyla aralık tahmini) gibi çıkarsama sonuçları, EKK tahmincisi ile aynı olacaktır. Ancak unutulmamalıdır ki yorum açısından faklıdır.

2.1.2. Bilgi Veren Ön Dağılımla Anliz

Bilgi veren ön dağılım ile analiz yapıldığı zaman çoğu durumda parametreye ilişkin bilgi mevcut değildir. Ancak araştırmacı ya daha önce yapılan bir

[53] Arnold Zellner, a.g.e.,s.61.
[54] Arnold Zellner, a.g.e.,s.62.
[55] Arnold Zellner, a.g.e.,s.62.

araştırmadan ya da iktisat teorisinden gelen ön bilgiye sahiptir. Daha önceki denemelerden edinilenlere dayanılarak bligi edinilmesi yoluyla oluşuturulan ön dağılım veriye-dayalı (data-base) ön dağılım iken, kişisel gözlemler veya teorik dayanaklar dolayısıyla oluşturulan ön dağılım ise veriye-dayalı olmayan (nondata-base) ön dağılım olarak adlandırılır.[56]

Bilginin eldeki formuna bakılırsa modeldeki bir parametreye ilişkin bilgi olabilir; β_j paramerresi nomal - $\beta_j \sim N\left(\beta_{j0}, \sigma^2_{\beta_j}\right)$ - dağılır. β_{j0}, ve $\sigma^2_{\beta_j}$ bilinmektedir veya modeldeki diğer bazı parametreler ilişkin bilgi olabilir; β parametre vektörü, $\beta \sim N\left(\beta_0, \sigma^2_{\beta}\right)$dağılır. Bunun dışında parametre üzerine eşitsizlik kısıtları getirerek ifade edilen bir ön bilgi olabilir;$\beta_1 \geq 0$ veya $\beta_2 \leq \beta_3 \leq \beta_4$ gibi. Her durumda da yapılacak işlemler farklıdır.[57]

Daha kapsayıcı bir analizde, ön bilgiyi yansıtacak ön dağılımın, benzerlik fonskisyonu ile birleşebilecek matematiksel uygunluğa sahip bir yapıda olması gerekmektedir. Ayrıca bu sayede elde edilen son dağılım da analiz yapmaya elverişli bir fonksiyonel yapıya sahip olacaktır. Sözü edilen özellikte bir ön dağılımı belirlemek için '**Doğal Eşlenik Ön Dağılım**' (Natural Conjugate Prior)veya '**Eşlenik Ön Dağılım**' (Conjugate Prior) oluşturulur. Bu iki ön dağılım arasında önemli bir farklılık vardır;

Eşlenik Ön Dağılım, benzerlik fonksiyonu ile birleştirğinde ortaya çıkan son dağılım, ön dağılım ile aynı dağılım sınıfına düşer.

Doğal Eşlenik Ön Dağılım ile benzerlik fonksiyonu birleştiğinde ortaya çıkan dağılım, Doğal Eşlenik Ön Dağılımla aynı olduğu gibi, buna ilaveten benzerlik fonksiyonu ile aynı yapıdadır.[58] Doğal Eşlenik Ön Dağılım elde edilirken öncelikle, bilinmeyen parametreler türünden oluşturulmuş bir fonksiyon olan benzerlik fonksiynunu 'yeterli istatistikler' anlamında yazmak gerekmektedir. Dolayısıyla Doğal Eşlenik Ön Dağılım, benzerlik fonksiyonundan elde edilmektedir. Benzerlik fonksiyonundan parametrelerine göre çarpanlara ayırma yöntemi (Neyman's Factorization Theorem[59]) ile yeterli istatistikler oluşturulur.

[56] Arnold Zellner, a.g.e.,s.18-19.
[57] Andrew Gelman v.d., a.g.e., s.259-261
[58] H.Ra'ffa ve R.Schlaifer, a.g.e., s.48-49.
[59] D.V.Lindley, a.g.e., s.47,50

Varyans bilinmediği durumda ön dağılımın analizi zamanı benzerlik fonksiyonu aşağıdaki gibi olur;

$$P(y|X, \beta_0, \beta_1, \sigma) \propto P_1(y, \sigma|X, \beta_0, \beta_1)P_2(y|\sigma)$$

$$\begin{aligned} P_1(y, \sigma|X, \beta_0, \beta_1, \sigma) \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n(\beta_0 - \hat{\beta}_0)^2\right.\right. \\ &+ (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \sum x_i^2 \\ &\left.\left.+ 2(\beta_0 - \hat{\beta}_0)(\beta_1 - \hat{\beta}_1) \sum x_i\right]\right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$P_2(y|\sigma) = \frac{1}{\sigma^n} \exp\left(-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.21)$$

(2.20)'de dağılım, Normal dağılıma uymaktadır. Dağılımda β_0 ve β_1 yeterli istatistiktir. Burada görüldüğü üzere σ yoktur.

(2.21)' de dağılım Ters-Gama dağılımına uymaktadır. Dağılımda σ yeterli istatistiktir. Burada da görüldüğü üzere β_0 ve β_1 parametreleri yer almamaktadır.

Özetle β_0 ve β_1 ile σ 'ya, yani yeterli istatistiklerine göre çarpanlarına ayrılmıştır. Sonuçta elde edilen dağılımlar Normal ve Ters-Gama dağılımları olmuştur.

Yeterli istatistiklerin oluşutduğu bu yapıdan Doğal Eşlenik ön Dağılıma geçerken notasyonda da gerekli değişiklikler yapılarak Doğal Eşlenik ön Dağılı tahmincilerini ifade etmek gerekmektedir. Buna göre yeterli isttistiklerin yerini alacak ön dağılım tahmincilerini gostermek üzere $\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \bar{v}, \bar{s}^2$ ve ön dağılıma ait gözlem sayınsını göstermek üzere t, gözlemler için $\sum x_j$ (j=1,2,...,t iken) kullanılmıştır. Zımni olarak veriye-dayalı ön bilgi olduğu düşünülür. Ayrıca yini zımni olrak ön dağılım ile prneklem dağılımında anakütle varyanslarının birbirine eşit olduğu varsayılmıştır.[60] Katsayı parametreleri için;

[60] Tiao ve Zellner, "Bayes's theorem and the use of prior knowledge in regression analysis," Biometrica, Sayı.51, 1 ve 2, 1964.

$$P(\beta_0, \beta_1 | y, X)$$
$$\propto \frac{1}{\sigma^t} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(t(\beta_0 - \bar{\beta}_0)^2\right.\right.$$
$$\left.\left. + (\beta_1 - \bar{\beta}_1)^2 \sum x_j^2 + 2(\beta_0 - \bar{\beta}_0)(\beta_1 - \bar{\beta}_1) \sum x_j\right)\right] \qquad (2.22)$$

standart sapma parametresi için;

$P(\sigma|y) = \frac{2}{\Gamma(\bar{v}/2)}\left(\frac{\bar{v}s^2}{2}\right)^{\frac{\bar{v}}{2}} \frac{1}{\sigma^{\bar{v}+1}} \exp\left(-\frac{\bar{v}s^2}{2\sigma^2}\right)$ elde edilir ve oransallık ifadesiyle kısaltılırsa;

$$P(\sigma|y) \propto \frac{1}{\sigma^{\bar{v}+1}} \exp\left(-\frac{\bar{v}s^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (2.23)$$

şeklinde olur.

(2.22) ve (2.23) ifadelrinin birleşmeiyle ve oransallı sabitlerinin stımsıyla birleşik ön o.y.f. elde edilir. Bu elde edilen dağılım, Normal-Gama dağılımı olmaktadır;

$$P(\beta_0, \beta_1, \sigma | y, x) \propto \sigma^{-t-\bar{v}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\bar{v}s^2 + t(\beta_0 - \bar{\beta}_0)^2 + (\beta_1 - \bar{\beta}_1)^2 \sum x_j^2 + 2(\beta_0 - \bar{\beta}_0)(\beta_1 - \bar{\beta}_1) \sum x_j\right)\right] \qquad (2.24)$$

Bu ifadenin σ’ ya göre integrali alınarak, β için ‘marjinal ön o.y.f.’ elde edilir. Aynı şekilde β’ya göre integrali alınarak σ için ‘marjinal ön o.y.f.’ elde edilebilir. Yapılan işlemler neticesinde β parametreleri için marjinal ön yoğunluğun da çok değişkenli Student t dağılımına uyum sağladığı görünmektedir.

Varyans bilinmediği durumda son dağılımın analizi aşağıdaki şekilde yapılmaktadır. Doğal Eşlenik Ön Dağılımdan son o.y.f.’nin elde edilmesi aşamasında, Bayes Teoremine göre Doğal Eşlenik Ön Dağılım,Benzerlik fonksiyonu ile çarpılır. Buradan ‘Birleşik Son o.y.f.’ elde edilir.

$$P(\beta_0, \beta_1, \sigma | y, X) \propto \sigma^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2\right] \qquad (2.25)$$

$$
\begin{aligned}
&\propto \sigma^{-n} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + n\left(\beta_0 - \hat{\beta}_0\right)^2 + \left(\beta_1 - \hat{\beta}_1\right)^2 \sum x_i^2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + 2\left(\beta_0 - \hat{\beta}_0\right)\left(\beta_1 - \hat{\beta}_1\right) \sum x_i\right]\right\} \\
&\qquad * \sigma^{-t-\bar{v}-1} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\overline{vs}^2 + t\left(\beta_0 - \bar{\beta}_0\right)^2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left(\beta_1 - \bar{\beta}_1\right)^2 \sum x_j^2 + 2\left(\beta_0 - \bar{\beta}_0\right)\left(\beta_1 - \bar{\beta}_1\right) \sum x_j\right]\right\} \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\propto \sigma^{-n-t-\bar{v}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(\bar{v}s^2 + vs^2) + T\left(\beta_0 - \frac{n\hat{\beta}_0 + t\bar{\beta}_0}{T}\right)^2 + \frac{nt\left(\beta_0 - \bar{\beta}_0\right)^2}{T^2}\right.\right. \\
&\qquad + \left(\sum x_i^2 + \sum x_j^2\right)\left(\beta_1 - \frac{\left(\sum x_i^2 \hat{\beta}_1\right) + \left(\sum x_j^2 \bar{\beta}_1\right)}{\sum x_i^2 + \sum x_j^2}\right)^2 \\
&\qquad + \frac{\sum x_i^2 \sum x_j^2 \left(\hat{\beta}_1 - \bar{\beta}_1\right)^2}{\left(\sum x_i^2 + \sum x_j^2\right)^2} \\
&\qquad + 2\left(\sum x_i\left(\beta_0 - \hat{\beta}_0\right)\left(\beta_1 - \hat{\beta}_1\right)\right. \\
&\qquad \left.\left.\left. + \sum x_j\left(\beta_0 - \bar{\beta}_0\right)\left(\beta_1 - \bar{\beta}_1\right)\right)\right]\right\}, \qquad T = n + t \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

(2.27)' de parametreden bağımsız olan ifadeler oransallık terimi ile kaybolur. Daha yalın hale getirmek için, x_i ve x_j yerine onların ortalamalrına göre düzeltilmiş halini alırsak (2.27)'deki çarpaz çarpım terimleri de

$$
\left(2\left(\sum x_i\left(\beta_0 - \hat{\beta}_0\right)\left(\beta_1 - \hat{\beta}_1\right) + \sum x_j\left(\beta_0 - \bar{\beta}_0\right)\left(\beta_1 - \bar{\beta}_1\right)\right)\right)
$$

kaybolur. Birleşik son o.y.f. son hali ile aşağıdaki gibi olur.

$$
\begin{aligned}
&P(\beta_0, \beta_1, \sigma | y, X) \\
&\qquad \propto \sigma^{-n-t-\bar{v}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(\bar{v}s^2 + vs^2) + T\left(\beta_0 - \frac{n\hat{\beta}_0 + t\bar{\beta}_0}{T}\right)^2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left(\sum x_i^2 + \sum x_j^2\right)\left(\beta_1 - \frac{\left(\sum x_i^2 \hat{\beta}_1\right) + \left(\sum x_j^2 \bar{\beta}_1\right)}{\sum x_i^2 + \sum x_j^2}\right)^2\right]\right\} \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Birleşik son o.y.f. (2.28), Normal-Gama tipindedir. β_0 ve β_1 için marjinal son o.y.f. σ veri iken, $\bar{\bar{\beta}}_0, \bar{\bar{\beta}}_1$ ortalaması ve $\sigma^2 \frac{1}{\left(\sum x_i^2 + \sum x_j^2\right)^{-1}}$ varyansı ile Normal dağılır. Ayrıca marjinal son o.y.f. σ için $\bar{\bar{v}}\bar{\bar{s}}^2$ parametreli Ters-Gama dağılır. [61] β_0 ve β_1 Parametrelerine ilişkin çıkarsamaσ' ya göre integrali alındığında, katsayı parametreleri β_0 ve β_1 için marjinal son o.y.f.'nin Student t dağıldığı görülür. Ayrıca düzenlemeler sonrası çekirdeğin son durumuna bakıldığında, sabit katsayı için Bayes tahminci $\bar{\bar{\beta}}_0$'ın $\frac{n\hat{\beta}_0 + t\bar{\beta}_0}{n+t}$ ile (veya $\bar{\bar{\beta}}_0 = \bar{y} + \bar{\bar{\beta}}_1 \bar{x}$) eğim katsayısı için Bayes tahminci $\bar{\bar{\beta}}_1$'in $\frac{\left(\sum x_i^2 \hat{\beta}_1\right) + \left(\sum x_j^2 \bar{\beta}_1\right)}{\sum x_i^2 + \sum x_j^2}$ ile temsil edildiği görülür. Regresyonun kalıntıların kareleri toplamı yani $\bar{\bar{v}}\bar{\bar{s}}^2 = \bar{v}\bar{s}^2 + vs^2$ 'ön dağılım ile ekk tahmincisi arasındaki farkı ölçen terimler' (2.27) ile belirlenir.[62]

Kesinlik Parametresi h için çıkarsama; kesinlikler açısından bakıldığında, örneğin eğim katsayısının kesinliği için, ön dağılımın kesinliği $h(\bar{\beta}_1) = \frac{\sum x_j^2}{\sigma^2}$ iken, örneklemin kesinliği $h(\hat{\beta}_1) = \frac{\sum x_i^2}{\sigma^2}$'dir.

Son dağılımın kesinliği, ön kesinlik ile örneklem kesinliğinin toplamıdır;

$$h(\beta_1) = \frac{\sum x_j^2 + \sum x_i^2}{\sigma^2}$$

Sonuç olarak elde edilen son o.y.f. parmetrelere ilişkin mevcut tüm bilgiyi-ön bilgi ve örneklem bilgisini- temsil eder. Eğer istenirse bu aşamada aralık tahmini veya hipotez test yapılabilir.

Burada görüldüğü gibi son dağılımın ortalaması, Bayes tahminci $\bar{\bar{\beta}}$' nın ağırlıklı ortalamsıdır. Ağırlıklar bilindiği gibi kovaryanslarının tersi ile oluşturulur.

Varyans biliniyorsa; varyans artık bir paramtre omadığından modelde sadece sabit ve katsayı parametreleri için hesaplama yapılır.

Normal dağılım için σ bilindiğinde Benzerlik fonksiyonu şu şekilde olur;

---

[61] Arnold Zellner, a.g.e., s, 61.

[62] J.N. Corcoran, Bayesian Linear Regression-Single Variable, s.70.

$$P(y, X, \sigma|\beta_0, \beta_1)$$
$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\beta_0 - \hat{\beta}_0\right)^2 + \left(\beta_1 - \hat{\beta}_1\right)^2 \sum x_j^2 + 2\left(\beta_0 - \hat{\beta}_0\right)\left(\beta_1 - \hat{\beta}_1\right) \sum x_i\right]\right\} \qquad (2.29)$$

Bu yapıyla uygun düşecek olan ön dağılım da Normal dağılımlır;

$$P(\beta_0, \beta_1) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[t\left(\beta_0 - \bar{\beta}_0\right)^2 + \left(\beta_1 - \bar{\beta}_1\right)^2 \sum x_j^2 + 2\left(\beta_0 - \bar{\beta}_0\right)\left(\beta_1 - \bar{\beta}_1\right) \sum x_j\right]\right\} \qquad (2.30)$$

Bu iki dağılımın çarpımlarından elde edilecek son o.y.f. ise;

$$P((\beta_0, \beta_1|y, X) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[T\left(\beta_0 - \frac{n\hat{\beta}_0 + t\bar{\beta}_0}{T}\right)^2 + \left(\sum x_i^2 + \sum x_j^2\right)\left(\beta_1 - \frac{\left(\sum x_i^2 \hat{\beta}_1\right) + \left(\sum x_j^2 \bar{\beta}_1\right)}{\sum x_i^2 + \sum x_j^2}\right)^2 + 2\left(\sum x_i\left(\beta_0 - \hat{\beta}_0\right)\left(\beta_1 - \hat{\beta}_1\right) + \sum x_j\left(\beta_0 - \bar{\beta}_0\right)\left(\beta_1 - \bar{\beta}_1\right)\right)\right]\right\} \qquad T = n + t \qquad (2.31)$$

Görüldüğü gibi bu dağılım yine Normal dağılımdır. Elde edilen son dağılımın ortalaması yine Bayesyen tahminciyi verecektir.

2.2. ÇOKLU DOĞRUSAL REGRESYON MODELİ

Çoklu regresyon modelinin Bayesyne analizinde çok sayıda bağımsız değişkenin, bağəmlı değişken üzerindeki etkisi araştırlmakatdır. Bayeseyn süreç aynıdır. Gereksiz tekrardan kaçınmak içn varyansın bilinmediği varsayılmıştır. Model ele alınırken matris notasyon kullanılmıştır.

$$y = X\beta + u \qquad (2.32)$$

y= bağımlı değişkene ilişkin n*1 mertebeli gözlemler vektörü,

X= rankı k olan, k adet bağımsız değişkene ilişkin n*k mertebeli gözlemler matrisi, β =k*1 mertelbeli regresyon katsayılar vektörü,

u= n*1 mertelebli hata terimleri vektörü.

Basit doğrusal regresyonda belirtilen varsayımlar, doğal olarak çoklu regresyon için de geçerlidir.

Regresyonun sabit katsayısı varsa X'in ilk sütunu 1'lerden oluşacaktır.(i'=(1,1,1,...,1)). X'in kalan elamanları raslantı değişkeni olabilir de omaya bilirde. Raslantı değişkeni ise u'dan bağımsız, β ve σ'yı içermeyen, bir dağıımla dağıldığı varsayılır.

Bu varsayımlar doğrultusunda, benzerlik fonksyonu X, β ve σ veri iken;

$$P(y|X,\beta,\sigma) \propto \frac{1}{\sigma^n}\exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}(y-X\beta)'((y-X\beta))\right]$$

$$s^2 = \frac{(y-X\beta)'(y-X\beta)}{v}, \qquad v = n-k, \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

Yukarıda verilenlere göre;

$$\begin{aligned}(y-X\beta)'(y-X\beta) &= \left[y-X\hat{\beta}-X(\beta-\hat{\beta})\right]'\left[y-X\hat{\beta}-X(\beta-\hat{\beta})\right]\\ &= \left[(y-X\hat{\beta})'-X'(\beta-\hat{\beta})'\right]\left[(y-X\hat{\beta})-X(\beta-\hat{\beta})\right]\\ &= (y-X\hat{\beta})'(y-X\hat{\beta})+(\beta-\hat{\beta})'X'X(\beta-\hat{\beta})+(y-X\hat{\beta})'X(\beta-\hat{\beta})\\ &-(\beta-\hat{\beta})'X'(y-X\hat{\beta})\end{aligned}$$

$(y-X\hat{\beta}) = 0$ olduğundan eşitliğin son iki ifadesi '0' dır.

$= vs^2 + (\beta-\hat{\beta})'X'X(\beta-\hat{\beta})$, elde edilen bu sonuca göre benzerlik fonksiyonunun son hali;

$\propto \frac{1}{\sigma^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2+(\beta-\hat{\beta})'X'X(\beta-\hat{\beta})\right]\right\}$ şeklinde olur.

2.2.1. Bilgi Vermeyen Ön Dağılım ile Analiz:

β ve elemanları bağımsız ve dikdörtgen dağılıyorsa, ön dağılımı "belirsiz ön dağılım" olarak ele alınmış olur.

$$P(\beta,\sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \qquad -\infty < \beta_i < \infty, \qquad 0 < \sigma < \infty, \qquad (i = 1,2,\dots,k \text{ için})$$

Benzerlik fonkisyonu ile ön dağılım birleşirse;

$$P(\beta,\sigma|y,X) \propto \frac{1}{\sigma^{n+1}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + \left(\beta-\hat{\beta}\right)' X'X\left(\beta-\hat{\beta}\right)\right]\right\} \qquad (2.33)$$

Bu ifadeden (2.33) görülebilir ki, σ veri iken β için koşullu son o.y.f., β ortalamalı ve $\sigma^2(X'X)^{-1}$ varyanslı olmak üzere, (k boyutlu) Çok değişkenli Normal dağılır. σ nadiren bilindiği için koşullu kovaryans matrisi hesaplanamaz. Bununla başa çıkmak için, σ' ya göre birleşik son dağılımın integrali alınır. Böylelikle β'nın elemanları için marjinal son o.y.f.'ye ulaşılır.

$$P(\beta|y) = \int_0^\infty P(\beta,\sigma|y)d\sigma = \int_0^\infty P(\beta|\sigma,y)P(\sigma|y)d\sigma$$

$$\propto \left[1 + \frac{1}{v}\left(\beta-\hat{\beta}\right)' \frac{X'X}{s^2}\left(\beta-\hat{\beta}\right)\right]^{-\frac{(k+v)}{2}} \qquad (2.34)$$

(2.34)'ten dağılımın çok değişkenli Student t dağılımı şeklinde olduğu görülmektedir. Tek tek parametrelere ilişkin çıkarsama yapmak isteniyorsa, $P(\beta|y)$ ifadesinin, istenilen parametre dışındaki parametreler göre integrali alınır. Buna göre β_0 için $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$'ya göre integrali alınacaktır.

Buna alternatif olarak çok değişkenli Student t dağılımının özellikleri de kullanılabilir. Her iki durumda da elde edilecek sonuç şudur;

$$P(\beta_i|y) \propto \left[1 + \frac{1}{v}\left(\frac{\beta_i - \hat{\beta}_i}{s\sqrt{a_{11}}}\right)^2\right]^{-\frac{(1+v)}{2}}$$

$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}$ vektörünün ilk elamanı; a_{11} , $(X'X)^{-1}$ matrisinin ilk diyagonal elamanıdır.

Eğer ilgilenilen parametre σ ise, bu kez β gürültü parametresi olur. β'ya gore integrali alınır;

$$P(\sigma|y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\beta,\sigma|y)d\beta \propto \frac{1}{\sigma^{v+1}}\exp\left(-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (2.35)$$

Ön bilgi analizine dahil edilmediğinde son dağılımın ortalaması e.k.k tahmincisi ile aynıdır.

2.2.2. Bilgi Veren Ön Dağılım ile Analiz

Regresyonun belirtilen varsayımları sonucu ve Bayesyen süreç gereği Doğal Eşlenik Ön Dağılım, Normal-Gama formunda bir dağılımdaır. Matris notasyonu ile Doğal Eşlenik Ön Dağılımın yapısı (2.36)'daki gibidir.

$$P(\beta|\sigma) \propto \sigma^{-k}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\beta-\bar{\beta})^{'}Q(\beta-\bar{\beta})\right] \qquad (2.36)$$

$$P(\sigma|y) \propto \sigma^{-\bar{v}-1}\exp\left[-\frac{\bar{v}\bar{s}^2}{2\sigma^2}\right] \quad (\bar{v}=t-k) \qquad (2.37)$$

(2.36) ve (2.37) ifadeleri birlerştirilerek(doğal eşlenik ön dağılım olan) birleşik ön o.y.f. elde edilir;

$$P(\beta|\sigma) \propto \sigma^{-k-\bar{v}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\overline{vs}^2+(\beta-\bar{\beta})^{'}Q(\beta-\bar{\beta})\right]\right\}$$

$\bar{\beta}$, $\bar{v}$, $\bar{s}^2$ ve Q, ön dağılım parametrelerinin tahmincileridir. Başka bir bakış açısıyla ön bilginin analize yansıtıldığı araçlardır. Burada Q pozitif tanımlı simetrik bir matristir. Veriye-dayalı olmasıhalinde bir önceki verisetinden hesaplanmıştır. Veriye-dayalı değilse değer olarak dışarıdan belirlenir. Bunun kaynağı da daha önce belirtildiği gibi teoriye, uzman bir görüşü veya paralel bir çalışmanın sonuçuna bağlıdır.

σ var iken β vektörü, k değişkenli Normal dağılır. Ortalaması $\bar{\beta}$ ve kovaryans matrisi σ^2Q^{-1}'dir. B veri iken σ'nın dağılımı Ters-Gama 2 dağılımıdır.

Benzerlik fonksiyonu;

$$P(y|\beta,\sigma) \propto \frac{1}{\sigma^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2+(\beta-\hat{\beta})^{'}X^{'}X(\beta-\hat{\beta})\right]\right\} \quad v=(n-k) \qquad (2.38)$$

Son dağılım;

$$P(\beta,\sigma|y) \propto \sigma^{-n-k-\bar{v}-1}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2+\overline{vs}^2+(\beta-\bar{\beta})^{'}Q(\beta-\bar{\beta})\right.\right.$$
$$\left.\left.+(\beta-\bar{\beta})^{'}X^{'}X(\beta-\hat{\beta})\right]\right\} \quad (2.39)$$

$$W=(\beta-\bar{\beta})^{'}Q(\beta-\bar{\beta})+(\beta-\bar{\beta})^{'}X^{'}X(\beta-\hat{\beta})$$

Son dağılımı tüm terimleriyle istenilen biçime getirmek üzere birkaç işlem yapılır.[63]

(2.39)' ön dağılım tahmincileri ve EKK tahmincileri ile oluşturulan kareli yapılar (W ifadesi) ayrı ayrı yazılıp,parantezin içi çözümlenir;

$$(\beta-\bar{\beta})^{'}Q(\beta-\bar{\beta})=\beta^{'}Q\beta-2\bar{\beta}Q\beta+\bar{\beta}Q\bar{\beta}$$

$$(\beta-\hat{\beta})^{'}X^{'}X(\beta-\hat{\beta})=\beta^{'}X^{'}X\beta-2\hat{\beta}X^{'}X\beta+\hat{\beta}X^{'}X\hat{\beta} \quad (2.40)$$

İşlem kolaylığı için her iki satırda da en sonda olan ve paramereyi (β'yı) içermeyen ifadeler şimdilik göz ardı edilip, daha sonra yazılır. (2.40)'takı iki ifadeinin toplamı aşağıdaki gibidir;

$$W=\beta^{'}X^{'}X\beta-2\hat{\beta}X^{'}X\beta+\beta^{'}Q\beta-2\bar{\beta}Q\beta \quad (2.41)$$

$$W=\beta^{'}\,(Q+X^{'}X)\beta-2(\bar{\beta}Q+\hat{\beta}X^{'}X)\beta \quad (2.42)$$

$$M=Q+X^{'}X \quad (2.43)$$

$$m=Q\bar{\beta}+X^{'}X\hat{\beta} \quad (2.44)$$

(2.43) ve (2.44)'teki eşitlikten faydalansarak, (2.42) kısaca şöyle ifade edilir;

$$W=\beta^{'}M\,\beta-m^{'}\beta \quad (2.45)$$

(2.45)'teki ifade cebirsel olarak yazılınca (b^2-2mb)'ye benzer bir yapıda olduğu görülür.'Kareyi tamamlama' işemi ile $b^2-2mb=(b-m)^2-$

[63] David Birkes, Yadolah Dodge, Alternative Methods of Regression, New York, John Wiley & Sons ,1993, s.167.

m^2 eşitliğine ulaşılır. Aynı mantık ile (2.45)' teki ifade şöyle bulunur.

$$W = \beta' M \beta - 2m'\beta =$$

$$M(\beta - M^{-1}m) - \quad m'' M^{-1} m \tag{2.46}$$

$$M^{-1}m = \bar{\bar{\beta}} \text{ ve } M^{-1} = \left(Q + X'X\right)^{-1} \tag{2.47}$$

Son dağılımın ortalamsı, $\bar{\bar{\beta}} = \left(Q + X'X\right)^{-1}(Q\bar{\beta} + X'X\hat{\beta})$ eşitliğini sağlar. (2.47)'ye göre (2.46) değiştirilir;

$$W = \beta' M \beta - 2m'\beta = \left(\beta - \bar{\bar{\beta}}\right)'' \left(Q + X'X\right)\left(\beta - \bar{\bar{\beta}}\right) - m'' M^{-1} m \tag{2.48}$$

(2.48)" de elde edilne sonuç, dağılımda (2.39"da) tekrar yerine koyulur;

$$P(\beta, \sigma|y) \propto \sigma^{-n-k-\bar{v}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + \bar{v}\bar{s}^2 + \left(\beta - \bar{\bar{\beta}}\right)'' \left(Q + X'X\right)\left(\beta - \bar{\bar{\beta}}\right) - m'' M^{-1} m\right]\right\} \tag{2.49}$$

Parametreyi içermediği için göz ardı edilen (2.40)"takı ifadeler, (2.49)"a ilave edilir;

$$P(\beta, \sigma|y) \propto \sigma^{-n-k-\bar{v}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + \bar{v}\bar{s}^2 + \left(\beta - \bar{\bar{\beta}}\right)'' \left(Q + X'X\right)\left(\beta - \bar{\bar{\beta}}\right) + \bar{\beta}Q\bar{\beta} + \hat{\beta}X'X\hat{\beta} - m'' M^{-1} m\right]\right\} \tag{2.50}$$

(2.50)'de $m'' M^{-1} m$ yerine, (2.43) ve (2.44)' teki eşitliklerde belirlenen karşılıkları yazılır;

$$P(\beta, \sigma|y) \propto \sigma^{-n-k-\bar{v}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + \bar{v}\bar{s}^2 + \left(\beta - \bar{\bar{\beta}}\right)'' \left(Q + X'X\right)\left(\beta - \bar{\bar{\beta}}\right) + \bar{\beta}Q\bar{\beta} + \hat{\beta}X'X\hat{\beta} - \left(\bar{\beta}Q + \hat{\beta}X'X\right)'' \left(Q + X'X\right)^{-1}\left(\bar{\beta}Q + \hat{\beta}X'X\right)\right]\right\} \tag{2.51}$$

(2.51) birkaç işlem ile ilerletilir ve sonuçta aşağıdaki ifade elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&P(\beta,\sigma|y) \\
&\propto \sigma^{-n-k-\bar{v}-1}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2+\bar{v}\bar{s}^2+\left(\beta-\bar{\bar{\beta}}\right)^{''}\left(Q+X'X\right)\left(\beta-\bar{\bar{\beta}}\right)\right.\right. \\
&\left.\left.+\frac{QX'X\left(\bar{\beta}-\hat{\beta}\right)^{''}\left(\bar{\beta}-\hat{\beta}\right)}{(Q+X'X)}\right]\right\} \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

(2.52)' den son dağılımın varyansının parametrelerine ilişkin eşitlik elde edilir;

$$
\bar{\bar{v}}^2\bar{\bar{s}}^2=vs^2+\frac{QX'X\left(\bar{\beta}-\hat{\beta}\right)^{''}\left(\bar{\beta}-\hat{\beta}\right)}{Q+X'X} \qquad \bar{\bar{v}}=n+\bar{v} \qquad (2.53)
$$

(2.53)' te kalıntıların kareleri toplamı SSE olarak adlandırılırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilmiş olur;

Son SSE=ön SSE+örneklemSSE+ "ön tahminci ile EKK tahmincisi arasındaki farkı ortaya koyan terim" Zellner kalıntılarla ilgili ilave bir yorum getirmiştir. Buna göre regresyonun gerçeleşen hata terimleri de parametre olarak düşünülebilir ve Bayesyen analizin uzantısı olarak, parametrede olduğu gibi gerçekleşen hatateimlerinin de son dağılımı türetilebilir.[64]

(2.52)'deki dağılım yeterli istatistiklerine göre yazılırsa;

$$
\propto \sigma^{-k}\exp\left[-\tfrac{1}{2\sigma^2}\left(\beta-\bar{\bar{\beta}}\right)^{''}\left(Q+X'X\right)\left(\beta-\bar{\bar{\beta}}\right)\right]\sigma^{-\bar{\bar{v}}-1}\exp\left(-\tfrac{\bar{\bar{v}}\bar{\bar{s}}^2}{2\sigma^2}\right)
$$

elde edilir.

Buna göre birleşik son o.y.f. $\bar{\bar{\beta}}$ ortalamalı ve $\sigma^2\left(Q+X'X\right)^{-1}$ varyanslı çok değişkenli Normal dağılıma sahiptir. σ için marjinal son o.y.f. $\bar{\bar{v}},\bar{\bar{s}}^2$ parametreleri ile Ters-Gama dağılımı gösterir. β için marjinal son o.y.f. çok değişkenli Student t'dir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$
P(\beta|y)\propto\left[1+\frac{1}{\bar{\bar{v}}}\left(\beta-\bar{\bar{\beta}}\right)^{''}\frac{\left(Q+X'X\right)}{\bar{\bar{s}}^2}\left(\beta-\bar{\bar{\beta}}\right)\right]^{\frac{-\bar{\bar{v}}-k}{2}}
$$

β'nın tek bir elemanı için, örneğinβ_1 için, tek değişkenli Student t o.y.f.ile;

[64] Arnold Zellner, "Bayesian Analysis of Regression Error Terms," Jorunal of the American Statistical Association, Sayı.70, No. 349, Mar. 1975, s.138-139.

$$P(\beta_1|y) \propto \left[1 + \frac{1}{\bar{\bar{v}}} \frac{\left(\beta_1 - \bar{\bar{\beta}}_1\right)^{''} \left(\beta_1 - \bar{\bar{\beta}}_1\right)}{\bar{\bar{s}}^2 a_{11}}\right]^{\frac{-\bar{\bar{v}}-1}{2}}$$

a_{11}, $\left(Q + X'X\right)^{-1}$ matrisinde ilk diyagonala elamandır.[65] Bu ifade diğer parametreler düşünülerek genelleştirilirse, bu elema, ilgilenilen parametrenin indisi ile matrisinaynı sayılı diyogaonal elemanıdır.

2.3. BAYESYEN REGRESYON MODELİNİN GEOMETRİK YORUMU

Bayesyen yaklaşımda regresyon parametresi bir raslantı değişkeni olarak düşünülür. Bu noktadan hareketle, parametre bir raslantı değişeni ise olsılık dağılımı vardır ve olsılık dağılımı, güven bölgeleri (HPD region) ile ifade edilebilir.Bunlar, farklı güven düzeylerinde parametrenin olsılık dailımına dayalı olarak yapılan kontur (kenar çizgisi-contour) çizimlerdir. Bu çizimler bir bakıma regreson modelinin geometrik yorumunu ortaya koyar. Klasik anlayıştakı gibi paramereinin bilinmeyen bir sabit olduğu düşünülseydi, parametre değil, tahmincinin temsili mümkün olacaktı. Klasikyaklaşım sözü edilen birleşik güven bölgelerini (joint confidence region) tahminci için çizmektedir. Daha genel bir ifadeyle, Klasik yaklaşmda tahminci gözlem matrisinin gerdiği uzayda temsil edilebileceği gibi, dağılımı göz önüne alarak güven aralığı veya güven bölgesi ile de temsil edilebilir. Dolayısıyla Bayesyen yaklaşım, regresyonun geometrik ifadesi itibariyle Klasikten bu noktada da ayrılmaktadır.

Bayesyen kapsamda güven bölgesi (en yüksek son yoğunluk bölgesi) tanımı ve özellikleri içn sunlar ifade edilebilir;

A bir model ve $\beta^* \in R^k$ olmak üzere, β^* noktasının olasılığı parametrenin olasılığından daha büyüktür.$P(\beta^*|A) > P(\beta|A)$. Ayrıca bu nokta veri iken Benzerlik fonksiyonunun olasılığı, parametre veri iken gerçekleşen olasılıktan daha büyüktür;

$$P(y_0|X, \beta^*, h, A) > P(y_0|X, \beta, h, A)$$

---

[65] George G. Judge v,d., a.g.e., s.109.

Bilgi veren ön dağılım seçilmesi durumunda, Bayesyen yaklaşımın karakteristiği daha iyi yansıtıldığıdan, geometrik yorum burada bu duruma göre geliştirilmiştir. Aşamalı olarak ele alınırsa;

Benzerlik fonksiyonu $P(\beta|y)$, çekirdeğindeki pozitif sonlu kareli yapının(quadratic form) monoton azalan bir fonksiyonudur. Bu kareli yapı ve kısıtı;

$$f(\beta) = \left(\beta - \hat{\beta}\right)^{"} X'X\left(\beta - \hat{\beta}\right)$$

$$f(\beta) = c_1 \qquad c_1 > 0 \tag{2.54}$$

Ön dağılım da, çekirdeğindeki pozitif sonlu kareli yapının monoton azalan bir fonksyonudur. Bu kareli yapı ve kısıtı;

$$f(\beta) = \left(\beta - \bar{\beta}\right)^{"} Q\left(\beta - \bar{\beta}\right)$$

$$f(\beta) = c_2 \qquad c_2 > 0 \tag{2.55}$$

(2.54) ve (2.55)' teki ifadeler $\beta"$nın k boyutlu uzayındaki dağılımın $\left(P(\beta|y)\right)$ bir konturunu tanımlar. Değişken sayısı k=2 ise bu kenar çizgisi elips olur, k=3 ise elipsoit, k>3 ise hiperelsoit olur.

Varyansın bilindiği varsayımı altında çok değişkenli Normal Dağılımın özelliklerine göre bu kareli yapılar $\frac{f(\beta)}{\sigma^2}$,$\chi^2(\alpha, k)$ dağılımına sahip olur. (Varyansın bilinmediği durumlarda $\frac{f(\beta)}{ks^2}$ olur ve bu yapı ise $F(\alpha, k, v)$ dağılımına sahip olur)[66]

Bu bağlamda c_1 ve c_2 kısıtlarının $\chi^2(\alpha, k)$ tablo değerlerine eşti olduğu düşünülebilir. Örneğin $c_2 = \chi^2(0{,}05; 2)$ ise elips içindeki β' nın olasılığı 0,95'tir.

Özetle sözü edilen (2.54) ve (2.55) için ayrı ayrı güven bölgesini elde etmek üzere; varyans biliniyorsa $f(\beta) \leq \chi^2(\alpha, k)$, bilinmiyorsa $\frac{f(\beta)}{ks^2} \leq F(\alpha, k, v)$ eşitsizliklerinden yararlanarak konturlar çizilir. Örneğin k=2 için, elipsin merkezinde, hesaplanan β parametre çiftinin değerleri yer alacaktır.

Bu şekilde elde edilen ön dağılım ve benzerlik fonskiyonunun kontur çizimleri aynı eksen sisteminde gösterilirse, son dağılımın kontur çizimlerinin bu iki dağılımın kesiştiği (teğet olduğu) bölgede konumlanması beklenir. Zira daha önce de

---

[66] Box, G.E.P., Tiao,G.C., a.g.e.,s.116-117

belirtildiği gibi, bilgi veren ön dağılım ile oluşturulmuş son dağılımın ortalaması $\bar{\bar{\beta}}$, ön dağılım ve örneklem ortalamsının ağırlıklı ortalamasıdır.

Son dağılımın kontur çizimi kısıtlanmış optimizasyon hesabı yapılır. Bu doğrultuda, belirtilen noktalar kümesi, amaç fonksiyonu için birinci derece koşulunu (birinci dereceden diferansiyelinin sıfıra eşit olma koşulu altında, çözümü sağlayan noktalardır) çözen noktalardır. Birinci derece koşulu altında

$$\left[\frac{\partial f(\beta)}{\partial \sigma^{-2}} = 0, \frac{\partial f(\beta)}{\partial Q} = 0, \frac{\partial f(\beta)}{\partial \lambda} = 0\right]$$

amaç fonksiyonu aşağıdaki şekilde olur;

$$\left(\beta - \hat{\beta}\right)' \sigma^{-2} X'X \left(\beta - \hat{\beta}\right) + \lambda\left(\beta - \bar{\beta}\right)' Q \left(\beta - \bar{\beta}\right) \tag{2.56}$$

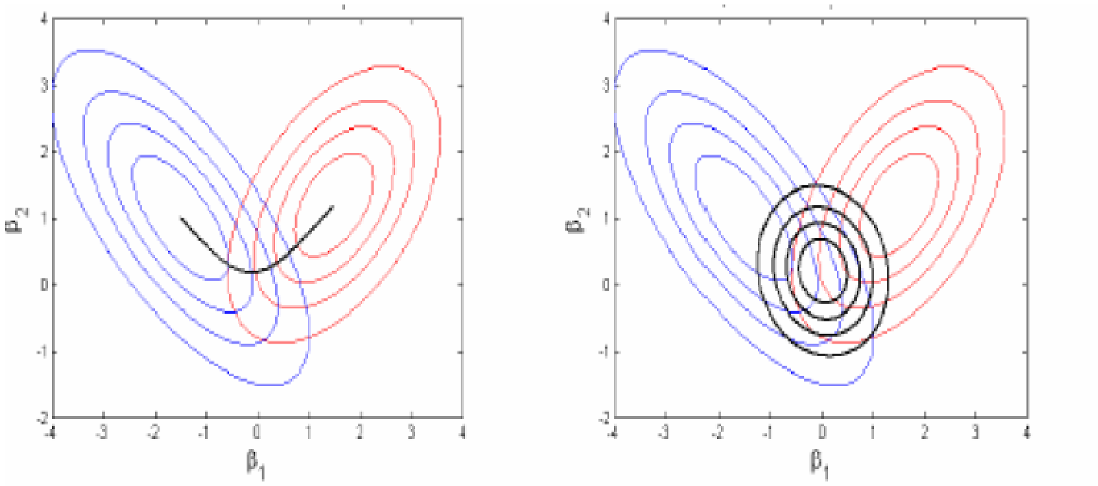
Amaç fonksiyonu (2.56) irdelenirse, ön dağılımın varyansında gerçekleşecek bir birim değişiklik, λ kadar etki edecektir. Burada $\lambda = 1$ alınmasıyla, ön dağılım üzerinde tıpkı bir etkisiz eleman gibi düşünülerek, örneklem varyansının olduğu gibi ön dağılım vvaryansının da son dağılıma yansıması sağlanmak istenmiştir. Bu yolla elde edilecek parametre tahmincisi, son dağılımın ortalaması $\bar{\bar{\beta}}$ olur;

$$\beta(1; \sigma^{-2}) = \bar{\bar{\beta}}$$

Tüm noktalar kümüsi λ tarafından kanıtlanmıştır. Bu eğri şöyle ifade edilebilir;

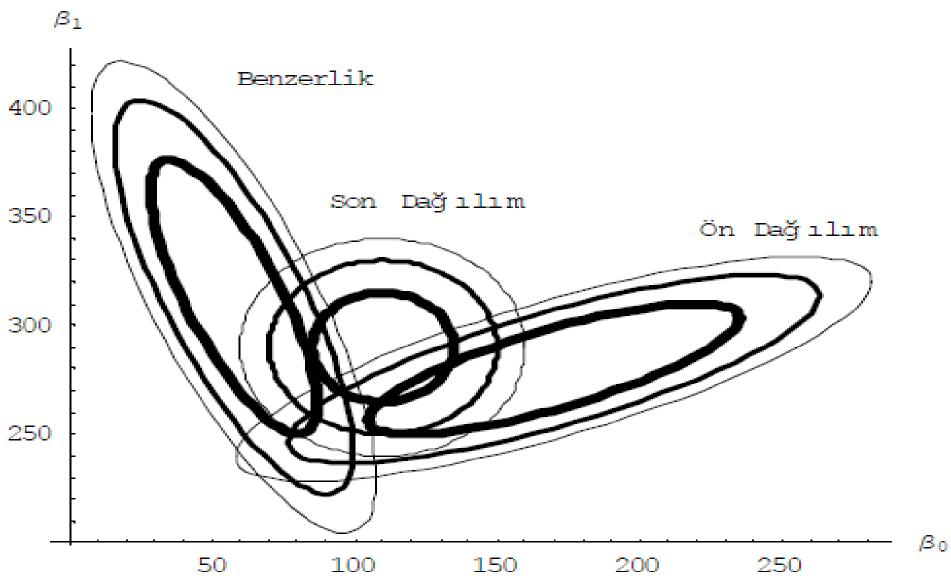
$$\beta(\lambda; \sigma^{-2}) = (\sigma^{-2} X'X + \lambda Q)^{-1}\left(\sigma^{-2} X'X\hat{\beta} + \lambda Q\bar{\beta}\right)$$ [67]

[67] John Geweke, Contemporary Bayesian Econometrics and statistics, July 2003,s.36-37.



Şekil 1. Normal Doğrusal Regresyon, Geometrik Yorumu[68]

Şekil 1'de örnek olarak, her iki şekilde de pozitif eğimli elipsler ön dağılımı; negatif eğimli elipsler örneklem dağılımını temsil etmektedir. Soldakı şekilde parametrelerin son dağılımı eğri ile temsil edilmiştir. Diğer iki dağılımın birbirine teğet olduğu bölgede konumlanmıştır. Benzer biçimde, sağdakı şekilde son daılım güven bölgelerini oluşturan konturlar ile tmsil edilmiştir. Örneklem kesinliği $(h = \sigma^{-2})$ 0'a yaklaştıkça limitte paremetrenin olasılığı, $\bar{\beta}$'ya eşit olacaktır.



Şekil 2. Bayesyen Regresyonun Geometrik Yorumu

[68] John Gewek, a.g.e.,s.37.

Şekil 2'de başka bir veri kümesi ile çizim yapılmıştır. Burada ön dağılımın eğimi bir önceki şekile göre biraz daha farklı çıkmıştır.Bilindiği gibielipslerin majörve minör eksenleri öz vektörleridir. Majör ve minör eksenlerinin yönü, $X'X$ tarafından veya ilgili değişkenler arası örneklem korelasyonu tarafından belirlenir. Eğer parametreler arası korelasyon sıfır ise elipslerin ekseni parametrelerin eksenine paralel olur.[69] Yukarıdaki örnek şeklinde (Şekil 2), regresyonun parametreleri arası ilişki ön dağılımda pozitif iken, örneklem dağılımında negatiftir. Ayrıca ön dağılımda parametreler arası ilişki Şekil 1'dekine göre daha zayıftır.

2.4. BAYESEYEN REGRESYONUN GENEL BİR DEĞERLENDİRMESİ

Bilgi vermeyen bir ön dağılım kullanıldığında elde edilen sonuç Klasik regresyon sonuçları ile aynı olmaktadır. Başka bir ifade ile regreyonun parametrelerinin nokta tahmin ve güven aralıkları tahmin sonuçları aynı çıkmaktadır.

Öte yandan, regresyon analizinde Bayes yaklaşımı ön bilgi kullanmaya da olanak vermektedir. Bayes teoreminin koşullu yapısı sayesinde ön bilgi ile örneklemden sağlanan bilgi birleştirilebilmektedir. Bayesyen yaklaşımın en temel argümanı Klasik yaklaşımla analiz yapan pek çok araştırmacının özel bir amaçla (ad hoc yol ile) ön bilgiyi kullanmasıdır. Ancak Bayesyen yaklaşım belirlenmiş ve tutarlı ilkeler çerçevesinde ön bilgiyi kullanmaktadır.

Bayesyen regresyon belirtilen varsayımları doğrultusunda Klasik regresyonda olduğu gibi, parametreleri test edilebilmektedir.

Bayesyen regresyon tahmincisi sapmalıdır. Bu yan ön bilgiden gelir. Dolayısıyla bu sapmalılık tahminci için olumsuz bir kriter olarak düşünlmemektedir. Ön bilginin analize dahil edildiği çalışmalarda daha dar güven aralıklarına ualaşılabilmektedir.

Bayesyen regresyon küçük örneklemde de iyi çalışmaktadır. Başka bir deyişle örneklem sayısı az olsa bile Bayesyen analiz yapılabilmektedir.

Ayrıca Klasik regresyonda, örneğin çoklu doğrusal bağlılık nedeniyle katsayılar belirlenememekte, tekrar parametrelerştirmeye gidilmekte ve açıklamak

[69] Sanford Weisberg, Applied Linear Regression,2.b., Minnesota, John Wiley & Sons,1985,s.97.

istenen model, dönüşüme uğramaktadır. Bayesyen regresyonda ön bilginin dahil edilmesiyle bu sorun aşılabilmektedir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

UYGULAMA

3.1. CARİ AÇIĞIN TANIMI

Bir ülkede yerleşik kişilerin, belirli bir dönemde, yurtdışında yerleşik kişilerden sağladığı gelirler ile dış dünyaya yaptığı ödemeleri içeren tüm ekonomik işlemlerin sönuçlarının yer aldığı hesab, ödemeler bilançösu tenir (TCMB, Teerimler Sözlüğü). Ödemeler bilançosu; cari işlemler hesabı, sermaye hareketleri, net hata ve noksan ve rezerv varkıklar olmak üzere başlıca dört kısımdan oluşmakatadır. Cari işlemler hesabı; ihracat, ithalat, turizm, taşımacılık, inşaat, karşılıksız transferler, doğrudan yatırım getirileri ve dış borç faiz ödemelerini içerir. Sermaye hareketleri hesabı ise; doğrudan yatırımlar, portföy yatırımları, yurt dışı kredi ve borçlanmaları ve bu borçların ana para ödemelerini içerir (TCMB, Ödemeler Dengesi Metodolojisi ve Türkiye Uygulaması). Cari işlemler hesabında, giderlerin gelirlerden fazla olmasına, cari açık denir (TCMB Terimler Sözlüğü).

Cari açıkların büyümesi, 1990 sonrasında birçok gelişmekte olan ülkede yaşanan ekonomki krizlerin en temel nedenlerinden birisi olarak gösterilmektedir. (Yücel ve Yanar, 2005). Cari açığın bir kriz sinyali olarak kabul edilip edilemeyeceği üzerine yapılan araştırmalar, 1990'lı yıllarda başlamıştır. Dornbusch ve Fischer(1990), cari açığın, GSYH'ya oranının %4, Freund (2000) ise %5 olmasının bir eşik değer olduğunu belirtmiş ve bu değerin aşılmasını, kriz sinyali olarak kabul etmiştir. Bununla birlikte, sadece cari açığın GSYH'ya oranının yüksekliğine bakarak kriz olasılığından söz etmenin eksik olacağını, ülkenin döviz kuru politikası, dış borçların miktarı, vadesi ve bileşimine de bakılması gerktiğini düşünen iktisatçılar (Edwards, 2001; Uygur, 2004) olduğu gibi, cari açık kamu kesiminden değil de özel sektörden kaynaklandığında, endişeye gerek olmadığını düşünün ikstisatçılar da vardır (Sachs, 1981; Corden, 1994'den aktaran Uygur, 2004). Bu konuda bir görüş birliği olmamakla birlikte, yüksek cari açık yaşanan ülke ekonomilerinin, krizlere daha açık bir hal aldığı kabul edilmektedir. Meksika, Türkiye, Doğu Asya, Brezilya, Arjantin gibi gelişmekte olan ülkelerde büyük cari açık, krizler için öncü bir göstergedir (Labonte 2005). Cari işlemler hesabındaki durum, karşılaşılabilecek krizlere ilişkin önemli bilgiler içerdiği için önemlidir

(Zanghieri, 2004; Edson 2003). Bir ülkedeki cari açığın büyüklüğü, gelecekte karşılaşılabilecek döviz kuru krizleri için önemli bir gösterge olarak değerlendirilebilir (Corsetti, vd., 1999; Radelet ve Sachs 2000).

Finsnsal istikarın korunabilmesi için, cari açık, dikkale izlenmesi gereken bir risk unsurudur (Yılmaz, 2010). Ödemeler dengesinin sağlanması, ekonomi politikalarının en önemli hedeflerinden birisidir. Cari işlemler hesabında meydana gelen bir açık, yurt içinde tasarruf-yatırım dengesinin bozulmasına yol açmakatdır. Bu açık, ülkede yerleşik kişi veya kurumların sahip oldukları dış varlıkların satışıyla ya da yurt dışından borçlanma ile karşılanmakatadır. Bu durum ülkenin borç yükünü artıracak, yabancı yatırımcılar tarafından kriz belitisi olarak algılanacak ve ülkeden yabancı sermaye çıkışına neden olacaktır. Böylece ülkenin dış borçlanması sürdürülemez hale gelecektir. Bu nedenle cari işlemler hesabı, açık vermemesi gereken önemli bir makroekonomik değişken olup, politika belirleyebilmek için, hareketlerinin ve sürdürülebilirliğin açıklanması öndemlidir (Tanah vd., 2001).

Bu çalışmanın amacı; 1980-2012 verilerini kullanarak Türkiye ekonomisinde cari açığın nedenlerini belirlemektir. Son üç yılda cari açığın tarihinin en yüksek değerine ulaşması, konunun tartışılması ve çözüm önerilerinin geliştirilmesi gerektiğini doğrulamaktadır.

TEORİK YAKLAŞIM

Cari açık, birbirini tamamlayan üç farklı yaklaşımla tanımlanabilmektedir:

$$\mathrm{CA_t = NX_t + r_tB_t + TR_t} \qquad (3.1.1)$$

$$\mathrm{CA_t = B_{t+1} - B_t} \qquad (3.1.2)$$

$$\mathrm{CA_t = r_tB_t + TR_t + Y - C_t - T_t - G_t = S_t - I_t} \qquad (3.1.3)$$

(3.1.1)'de cari açık; mal ticareti, dış borç faiz ödemeleri ve transfer ödemeleri kanalıyla açılanmakatdır. $\mathrm{NX_t}$; net mal ve hizmet ihracatını, $\mathrm{B_t}$; bono, tahvil, hisse senedi, krediler ve fiziki sermeyeni içeren net dış varlıkların (dış borcu olan ülkelerde, dış borç stokunu), $\mathrm{r_t}$; uluslararası faiz oranını, $\mathrm{r_tB_t}$; net dış varlıklardan sağlanan net geritiriyi (dış borcu olan ülkelerde, dış borç faizini) ve $\mathrm{TR_t}$; net kamu ve özel sektör transfer ödemelerini ifade etmektedir. $\mathrm{NX_t = X_t - M_t}$ olup, Türkiye'de son dönemde $\mathrm{CA_t}$ içinde en büyek paya sahip kısımdır. Ülke borçlu olduğu zaman

r_tB_t, negatif değer alır ve CA_t'yı olumsuz yönde etkiler. Türkiye'de işçi gelirleri, transfer ödemeleri içinde yer alığı için TR_t pozitiftir ve CA_t'yi olumlu yönde etkiler. Bu tanıma göre, cari açığın nedenleri; mal ticaretindeki açık ve dış borç faiz ödemeleridir.

(3.1.2)'de cari açık; dış varlıklar kanalıla açılanmaktadır. Burada, $B_{t+1} - B_t$; net dış varlıklardaki değişmeyi ifade etmektedir. $B_{t+1} < B_t$ ise, ülke cari açık veriyordur. Ülke, cari açığını kapatabilmek için, dış varlıklarından bir kısmını satmak durumunda kalmıştır.

(3.1.3)'de ise cari açık; tasarruf ve yatırım dengesi kanalıyla açılanmakatdır. Burada $(r_tB_t + TR_t + Y_t)$, ülkenin gelirler toplamını, $(C_t + I_t + G_t)$ ise giderler toplamını (toplam iç talebi) göstermektedir. Bunlardan Y_t;yurtiçi üretimi, C_t; özel tüketim harcamalarını, I_t; özel ve kamu yatırım harcamalarını, G_t;cari kamu haracmalrını ve S_t; toplam kamu ve özel tasarruflarını ifade etmeketdir. Bu durumda (1c)'de $CA_t = S_t - I_t$ halini alacaktır. Bu eşitlik negatif değer alıyorsa, ülkede iç tasarruf eksiği olduğunu ifade etmeketdir. Bu açık, kamu ve/veya özel kesimde, harcama fazlası olmasından kaynakalanmakatdır[70].

3.2. MATEMATİKSEL MODELLEME

Türkiye'de cari açığın sürdürülebilirliğini incelemek amacıyla, Husted (1992) tarafından geliştirilen, Hakkio ve Rush (1991)'e dayalı zamanlararası dış denge kısıtı modeli kullanılmıştır. Bu modelde, dünya faiz oranı veriyken, uluslararası piyasalardan borç alıp verebilen bir ülkenin cari dönem bütçe kısıtı temel alınmakatdır. Denklem (3.1.2) ve (3.1.3)'den;

$$B_t = -[(Y_t - C_t - I_t - G_t)/(1 + r_t)] + B_{t+1}/(1 + r_t) \qquad (3.2.1)$$

Buradan $B_{t+1}, B_{t+2,\dots}$ ifadeleri bulunup yerine yazılırsa (iterasyon tekniği), açık eknomi için zamanlararası dış denge kısıtı elde edilir.

[70] YILMAZ, D., (2010), "TCMB, BDDK, Hazine, SPK ve Banka Yöneticileriyle Yaptıgı Toplantıdaki Konusmasından", 24 Aralık, http://www.dunya.com,15.02.2011.

$$\sum_{t=\tau}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r_t}\right)^{t-\tau}(C_t+I_t+G_t)+\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{1+r_t}\right)^{T}B_{t+T+1}$$

$$=(1+r_t)B_t+\sum_{t=\tau}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r_t}\right)^{t-\tau}Y_t \qquad (3.2.2)$$

Bu eşitlikte,

$$\operatorname*{Lim}_{T\to\infty}\left(\frac{1}{1+r_t}\right)^{T}B_{t+T+1}=0 \qquad (3.2.3)$$

olmalıdır. Yani, gelecekteki, net borç stoku sıfıra yaklaşmalıdır. Denklem (3.2.3)'teki eşitliğin sağlanmasıyla, denklem (3.2.2) şu hale gelecektir:

$$-(1+r_t)B_t=\sum_{t=\tau}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r_t}\right)^{t-\tau}(C_t-I_t-G_t) \qquad (3.2.4)$$

Bu eştiliğin sol tarafı, dış borcun t dönemi sonundaki faiz dahil değeri, sağ tarafı ise, fazi dışı cari fazlayı göstermektdir. Faiz dışı net cari fazla $(\mathrm{CA_t}-\mathrm{Net\ Faiz\ Gideri})$, aynı zamanda $(\mathrm{NX_t}+\mathrm{TR_t}+\mathrm{Net\ Kar\ Transferleri})$ olarak da ifade edilebilmektedir. TR ve net kar transferlerinin olmadığı varsayıldığında, faiz dışı cari denge;

$$(CA_t-r_tB_t)=NX_t=(Y_t-C_t-I_t-G_t) \qquad (3.2.5)$$

şeklini alacaktır. Bu durumda, cari açığın sürdürülebilmesi koşulu, dış ticaret dengesinin sürdürülebilirliği koşuluna bağlı hale gelmektedir. Uzun dönemde, $NX_t=X_t-M_t=0$ olduğunda, dış ticaret dengesi ve cari işlemler dengesi sürdürülebilir olacaktır. Bu koşul, ihracatın yanına; hizmet, transfer ve faiz gelirlerinin, ithalatın yanına ise; hizmet giderleri ve dış borç fazi ödemelerinin katılmasıyla genişletilip, regresyon denklemi formunda düzenlendiğinde;

$$R_t=\alpha+\beta E_t+u_t \qquad (3.2.6)$$

şeklini alacaktır. Burada, R_t; dış alem gelirlerini, E_t; dış alem giderlerini, u_t de hata terimini ifade etmektedir.

Böylece, cari açığın sürdürülebililiği, R_t ve E_t serilerinin eş-bütünleşik olması şartına bağlı hale gelmiştir. Aynı zamanda, eş-bütünleşme katsayısı β'nın bire eşit olması beklenmektedir (Husted, 1992). Eğer, β katsayısı birden küçük ise, sürdürülebilirlik hipotezi ihlal edilmiş olup; ülkenin giderleri, gelirlerinden daha fazladır. Ülke sürekli borç bulmak zorundadır ve uluslararası borçlarını zamanında geri ödeyememe riskiyle karşı karşıyadır (Hakkio ve Rush) . Bu koşul daha sonra Quintos (1995) tarafından geliştirilmiş ve açıkların, β bire eşit olduğunda güçlü formada, β sıfır ile bir arasında olduğu zaman ise zayıf formada sürdürülebilir olduğu belirtilmiştir.

3.3. CARİ AÇIĞIN SÜRDÜRÜLEBİLİRLİĞİ

Cari açığın sürdürülebililiği, açığın finansman biçimine bağlıdır. Cari açığın finansmanı temelde iki kaynaktan sağlanmaktadır. Bunlar; yabancı sermeye yatırımları ve borçlanmadır (Aydoğuş ve Öztürkler, 2006: 101). Cari açık, doğrudan yabancı yatırımları gibi borç yaratmayan dış kaynaklarla finanse edilyorsa, sürdürülebilir kabul edilirken, borç yaratan, özellikle kısa vadeli dış kaynaklarla finanse ediliyorsa, sürdürülememe riski taşıdığı öngörülmektedir (Yapar Saçık ve Alagöz, 2010). Cari açık, tüketim haracamlarından kaynaklanıyorsa, tehlikenin boyutu daha da artmakatdır (Karabulut, 2009). Ancak; ülkenin eknomik büyüme oranı, ihracatın GSYH'ya oranı, finansal yapı, tasarruf yatırım dengesi ve yabancı sermaye hareketlerinin hacmi de cari açıkların sürdürülebilirliğinde etkilidir (Ouanes ve Thakur, 1997).

Sürdürülebilirliğin tahmini konusunda farklı yöntemler kullanılmala birlikte, bunları iki ana başlık altında toplamak mümkündür. Birincisi; ödemeler bilançosu içindeki cari işlemler hesabı dışındaki hesapları kullanarak yapılan çalışmalardır (Milesi-Ferretti ve Razin, 1996; Roldos, 1991; Nason ve Roger, 1999). İkinci yöntem ise; cari işlemler hesabı alt kalemlerini kullanarak sürdürülebilirliğin tahmin edilmesidir (Husted, 1992). Burada cari işlemler hesabı alt kalemlerinden, ithalat ve ihracat arasında uzun dönem ilişkisinin varlığı araştırılmaktadır. İthalat ve ihracat arasında uzun döenmli bir ilişki varsa, cari işlemler açığının sürdürülebilir olduğuna karar verilmektedir (Fountas ve Wu, 1999; Husted, 1992).

3.4.CARİ AÇIK SORUNU

Son yıllarda, gelişmiş ve gelişmekte olan birçok ülkede, cari açık, en temel makroekonomik sorunlar arasında yer almaktadır. Dünyanın en büyük ekonmisine sahip olan ABD, aynı zamanda en yüksek cari açığın da sahibidir. Bu durum, başta ABD olmak üzere, birçok ülkede ekonomik istikrarın sürdürülmesine ilişkin önemli kaygılara yol açmıştır. ABD'ye ilişkin yapılan çalışmalarda, (Fountas ve Wu, 1999; Coopet, 2001; Obstfeld ve Rogoff, 2004; Freud ve Warnock, 2005;Edwards,2006; Roubini, 2006), orta ve uzun dönemde cari açığın sürdürülebilirliğinin pek olanaklı olmadığı sonucu elde edilmiştir. Çünkü ABD cari açığı dünyayı yeni bir finansal drize sürükleyebilecek boyutlara ulaşmıştır. 19.yy sonlarında, ABD gelişmekte olan bir ekonomi iken bile cari açığı %4'ü asla aşmamıştır (Obstfeld ve Taylor, 2004).ABD'de cari açığın GSYH'ya oranı, 1960'lardan bu yana, sürekli kötüye gitmektedir (Obstfeld ve Rogoff, 2004).

Avrupa Birliği (EU) ve diğer Doğu Avrupa ülkelerinde de son yıllarda cari işlemler açığı sürekli olarak büyümeketdir. Örneğin; Euro Bölgesinin borçlar konusunda sorunlu ülkelerden İspanya ve Portekizi'in cari işlemler açıkları, GSYH'nin %10'una yaklaşmıştır (Hermann ve Jochem, 2005; Blanchard, 2007). IMF'ye göre 2012 yılında dünyada 193 ülkeden 136'sında cari işlemler hesabı açık vermiştir[71]. Cari açığı en fazla olan ilk 10 ülkeye ait veriler Tablo 3.1'de görülmektedir.

[71] https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2187rank.html

Tablo 3.: 2012 Yılında En Fazla Cari Açık Veren 10 Ülke

Ülke Adı	Cari Açık (Milyar Dolar)	GSYH(Milyar Dolar)	Cari Açığın GSYH"ya Oranı	Büyüme Oranı[72]
ABD	487.200	15.684.750	-3,106	2.2
Hindistan	80.150	1.824.832	-4,392	6.5
Braziyla	65.130	2.395.968	-2,718	0.9
Kanada	59.920	1.819.081	-3,294	1.8
Türkiye	59.740	794.468	-7,519	2.6
Fransa	58.700	2.608.699	-2,250	0.0
İngiltere	57.700	2.440.505	-2,364	0.2
Avusturaliya	47.100	1.541.797	-3,055	3.6
İtalya	30.300	2.014.079	-1,5044	-2.4
Güney Afrika	21.330	384.315	-5,550	2.5

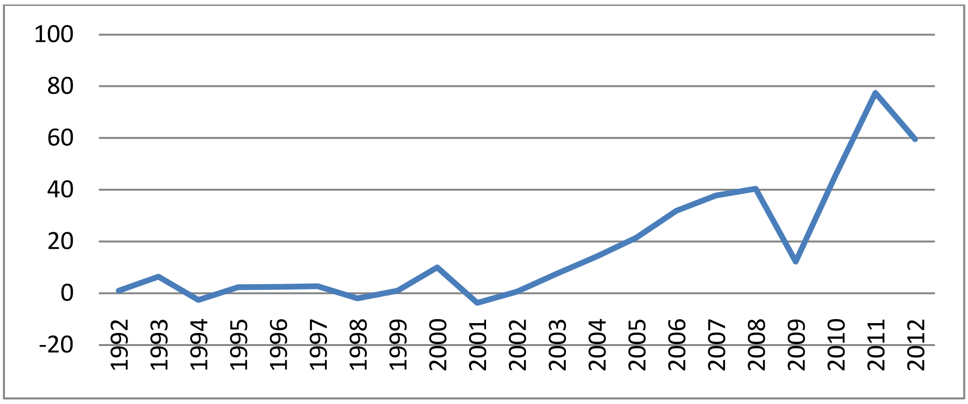
Kaynak: https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2187rank.html

Tablo 3'e göre, Türkiye 2012 yılında 59.5 milyar dolarla, dünyada en fazla cari açık veren ülkeler arasında beşinci sıradadır. Türkiye'de cari açığın GSYH'ya oranı ise, kritik değerleri aşmış durumdadır. Cari açığın sürdürülebilirliği hakkında yorum yaparken, cari açığın GSYH'ya oranlarının yanında ülkelerin büyüme oranları ve yurtiçi tasarruflarının yatırımlarını karşılama oranlarına da bakmakta fayda vardır. Bu bağlamda, tabloda bu oranlar da verilmiştir. Yüksek cari açığın yanında İtalya, negatif, İngiltere ve Fransa ise uygun olarak %0.2 ve % 0.0 büyüme gerçekleştirmiştir ki, bu durum da dikkat çekicidir. Türkiye'de ise pozitif büyüme oranı, cari açığın sürdürülebilirliği konusunda ümit vermektedir.

24 Ocak 1980' kadar, ithal ikamesi üretim politikasıyla, iç tüketime yönelik ve ithalata gereksinim hissettirmemeyi amaçlayarak üretim yapan Türkiye, bu tarihten sonra ihracata dayalı büyüme stratejisini benimsemiştir. 6 Ocak 1984' Türk Parasının Değerini Koruma Konulu kabul edilmiş, böylece döviz taşımak, alış-verişini yapmak serbest hale getirilmiş, sermaye hareketlerinin önü açılmıştır. Bu gelişmelere bağlı olarak, 1990'lı yıllarda hareketlenen cari açık, 2002 yılı sonrasında hızla artmaya başlamıştır. Bu durum Grafik 1'de görülmektedir.

[72] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_real_GDP_growth_rate

Grafik 1: Türkiyede Cari İşlemler Açığı (Milyar Dolar)



Kaynak: TCMB NOT: Cari açık değerleri -1 ile çarpılarak grafiğe aktarılmıştır.

Grafik 1'e göre, cari açık, son yıllarda artan bir trend izlemektedir. Ayrıca, Türkiye ekonomisinin çok az dönemde cari fazala verdiği, bu dönemlerin de genellikle ülkede ekonomik kriz yaşanıp, döviz kurunun aşırı derecede arttığı yıllara denk geldiği görülmektedir[73].

Türkiye, 2001 ekonomik krizinden sonra, bozulan ekonomik yapıyı düzeltebilmek için, Güçlü Ekonomiye Geçiş Programı'nı[74] uygulamaya koymuştur. Aynı yıllarda dünya ekonomisindeki artan likidite olanakları, Türkiye'nin yakaladığı istikrar ortamı, uyguladığı yüksek reel faiz politikalarıyla birleşerek, Türkiye'yi dünya piyasaları için cazip bir ülke haline getirmiş ve ülkeye yönelik sermaye girişi artmıştır. Bu süreçte ucuz kredi imkanları, ucuz ithalat ve düşük döviz kuru politikaları ile reel sektörü canladırmaya açılışan Türkiye ekonomisi, bir taraftan hedeflediği büyeme seviyesine ulaşırken, diğer taaftan çok yüksek dış borçlanma ve cari işlemler açığı ile karşı karşıya kalmıştır (Susam ve Bakkal, 2009). Oluşan güven ve istikrar ortamı, insanların tüketim talebini arttırmış, iç tasarruf oranı düşmüş, ithal

[73] Bu durumdan hareketle, Türkiye Ekonomisin'de ödemeler bilançosu dengesini sağlayabilmek için, döviz kuru kanalının (Marshall-Lerner Koşulu'nun) çalıştığı söylenebilir. Döviz kuru arttırıldığında, ithalat pahalanmakta, ihracat görece ucuzlamakta, böylece ihracat daha fazla artmakta ve cari işlemler hesabı fazla vermektedir.

[74] 14 Nisan 2001'de açıklanan bu program; köklü mali, ekonomik ve yasal degisimleri içermektedir. Siyasetin kontrol ettigi ekonomik kaynakların oldukça sınırlandırılmasının amaçlandığı programda, seffaflık ve hesapverilebilirligin saglanması, rasyonel olmayan müdahalelerin kaldırılması, yolsuzlukla mücadele, kamu finansmanının güçlendirilmesi, ekonomide rekabetin ve etkinligin artırılması öngörülmektedir. Sürdürülebilir bir gelisme ortamını saglayarak verimliligi artırmak, rekabet gücünü gelistirmek ve ekonomik büyümeyi, yatırım ve istihdamı artırarak halkın refah düzeyini yükseltmek nihai hedef olarak öngörülmüstür.

mallarına olan talep yükselmiştir. İç talebin göreli olarak gücünü korumasına karşılık, dış talepte görülen zayıflama, beraberinde hissedilir bir dış ticaret ve cari açık sorununu da gündeme getirmiştir (Finansal İstikrar Raporu 2010). Başta Euro Bölgesi ekonomileri olmak üzere, ticari ortaklarda ekonomik toparlanmanın yavaş gerçekleşmesi ve TL'nin değerli konumunu sürdürmesi, dış talebi olumsuz yönde etkilemiştir. Buna karşılık, değerli TL'nin ithal mallarını ve girdilerini göreli olarak ucuz hale getirmesi, petrol ve emtia fiyatlarında göslenen hızlı artışlar, ayrıca canlı seyreden iç tüketim ve yatırım talebi, ithalatın çok hızlı biçimde artması sonucunu doğrumuş ve cari açık hızla artmaya başlamıştır.

Hızla artan cari açık karşısında T.C Merkez Bankası, Aralık 2010'da, kur ve faiz politikalarında değişikliğe gitme kararları almıştır. Ancak, Merkez Bankası'nın, temel politika aracı olan kısa vadeli fazileri tek başına kullanarak, cari açıktai genişlemeyi durdurması memkün değildir. Bu nedenle kredilerdeki hızlı artışı önlemek için, bir yandan faiz dışı araçları sıkılaştırırken, diğer yanda kısa vadeli faiz oranları, kurlardaki değerlenme eğilimini sınırlamak amacıyla, kontrollü bir şekilde indirmek, cari açıktaki artışa karşı ideal politika bileşimi olacaktır (Yılmaz.2010). Bu amaçla Merkez Bankası, politika faiz oranını, 16 Aralık 2010' da 50 ve 20 Ocak 2011'de de 25 baz pan indirerek 6.25'e çekmiştir. Türkiye'de cari açığın en önemli kaynağı, mal ticaretindeki açıktır. Bu durum Tablo 4'te görülmektedir.

Tablo 4 : Cari Açığa Ait Veriler

Yıllar	İhracat	İthalat	Mal Ticaret Dengesi	Cari İşlemler Dengesi	CA/GSYH (%)
2000	27,775	54,503	-26,727	-9,92	-1,37
2001	31,334	41,399	-10,0648	-3,76	0,55
2002	36,060	51,554	-15,495	-0,626	-0,08
2003	47,253	69,339	-22,087	-7,554	-0,98
2004	63,167	97,539	-34,373	-14,198	-1,70
2005	73,476	116,774	-43,297	-21,449	-2,37
2006	85,535	139,576	-54,041	-31,836	-3,29
2007	107,271	170,063	-62,790	-37,781	-3,73
2008	132,027	201,964	-69,936	-40,438	-3,96
2009	102,143	140,928	-38,785	-12,168	-1,25
2010	113,883	185,544	-71,661	-45,447	-4,29
2011	134,906	240,842	-105,934	-77,4	-6,72
2012	152,464	236,545	-84,081	-59,5	-5,05

Kaynak: TCMB-EVDS Dış Ticaret Geniş Ekonomik Kategorileri Sınıflamasına Göre.

Tablo 4'ün son sütununda cari açığın GSYH'ya oranı verilmiştir. Bu oranın yüzde 4 veya 5'i geçmesini tehlike sinyali olarak kabul eden ikstisatçıların (Dornbush ve Fischer 1990; Freund. 2000) varlığı da göz önüne alınırsa, cari açığın yükseldiği seviyenin, Türkiye ekonomisi için riskli boyutlara ulaştığı görülmektedir. 2012 yılında, 2011'e göre ihracat %13.01 artmış ,ithalat ise %1.78 azalmıştır. Dış ticaret açığı 84.081, cari açık 59.5 milyar dolara ulaşmıştır. Dış ticaret açığını azaltan faktörler ise; hizmetler ve karşılıksız transferler hesabının fazla vermesidir. Dış borç faiz ödemeleri ise her geçen gün azalmakta, borçların vade yapısı uzatılmaya çalışılmaktadır.

Türkiye ekonomisinde cari açığın sürdürülebilirliğine dair önemli bir işaret, toplam ithalat içinde, nihai tüketim mallarının payının düşüklüğüdür. İthal edilen mallar daha çok üretim ve yatırıma yöneliktir. Bu aramalları işlenerek, ihraç mallarına dönüşmektedir. Bu da uzun vadede cari işlemler açığının sürdürülebilirliğini arttırmakatdır. Tablo 5'te ithal mallarının sınıflandırılması görülmektedir.

Tablo 5: İthal Mallarının Sınıflandırılması (Milyar Dolar)

Yıllar	Ara Malları	Sermaye Malları	Tüketim Malları	Diğer İthalat	Toplam İthalat	Tüketim Malları/Toplam İthalat
2000	36	11.3	6.9	0.2	54.5	12.7
2001	30.3	6.9	3.8	0,3	41.4	9.2
2002	37.6	8.4	4.9	0.6	51.5	9.5
2003	49.7	11.32	7.8	0.4	69.3	11.3
2004	67.5	17.4	12.1	0.6	97.5	12.4
2005	81.8	20.4	13.9	0.56	116.7	11.9
2006	99.6	23.3	16.1	0.51	139.6	11.5
2007	123.6	27.1	18.7	0.67	170.1	10.9
2008	151.7	28.0	21.5	0.72	201.9	10.6
2009	99.5	21.5	19.3	0.66	140.9	13.7
2010	131.4	28.8	24.7	0.55	185.5	13.3
2011	173.1	37.3	29.7	0.74	240.8	12.3
2012	174.9	33.9	26.7	0.99	236.5	11.3

Kaynak: TCMB Dış Ticaret Geniş Ekonomik Kategorileri Sınıflandırmasına Göre.

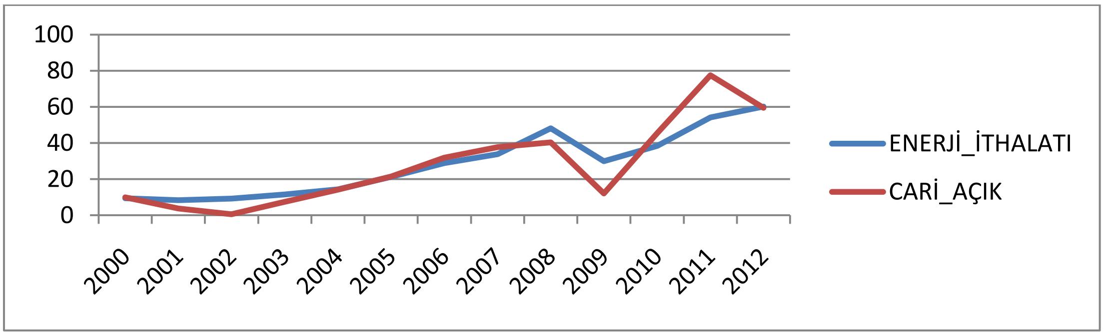
Tablo 5'in son sütunu incelendiğinde, 2012 yılında tüketim malları ithalatının, yüzde 11.3'nü oluşturduğu görülmektedir.

Türkiye ekonomisinde cari açığın dört önemli nedeni vardır:

3.4.1. Enerji Konusundaki Dışa Bağımlılık ve Artan Enerji Fiyatları

Türkiye ekonomisinde cari açığın en önemli nedenlerinden biri, enerji ithalatıdır. Grafik 2'de enerji ithalatının cari açık üzerindeki etkisi görülmeketdir.

Grafik 2: Cari Açık ve Enerji İthalatı ilişkisi



Grafik 2’ye dikkat edildiğinde, enerji ithalatının, cari açığı ne kadar attırdığı görülmektedir. Türkiye, enerji ihtiyacının yüzde 74’ünü ithalat yoluyla karşılamaktadır (Babacan, 2011). Türkiye, enerjide dışa bağımlılıktan kurtulabilirse, cari açık sorununu da büyük oranda çözecektir. Türkiye’nin ham petrol, doğal gaz ve diğer enerji kaynakları ithalatı ve bunun toplam ihracat içindeki payları Tablo 6’da verilmiştir.

Tablo 6 : Türkiyenin Enerji İthalatı

Yıllar	Enerji İhtalatı (Milyar Dolar)	Enerji İthalatının Toplam İthalat İçindeki Payı
2000	9.5	17.6
2001	8.3	21.7
2002	9.2	19.5
2003	11.5	17.5
2004	14.4	15.8
2005	21.2	19
2006	28.8	21.3
2007	33.8	20.8
2008	48.2	24.8
2009	29.9	22.2
2010	38.5	21.7
2011	54.1	22.46
2012	60.1	25.41

Kaynak: TUİK, Dış Ticaret İstatistikleri.

Tablo 6 incelendiğinde, son yıllardaki ithalatın %20’den fazlasının enerji ithalatından kaynaklandığı görülmektedir.

3.4.2. Düşük Döviz Kuru

Türkiye ekonomisinde döviz kuru düştüğü dönemlerde, ihraç mallarının fiyatı artmakta ve ihracat bundan olumsuz etkilenmektedir. Aynı zamanda ithal mallarının fiyatları görece ucuzlamakta ve ithalat artmaktadır (Peker ve Hotunluoğlu, 2009). Tüm bunlar, cari açığı olumsuz etkilemektedir. Bu durum Tablo 7’de görülmektedir.

Tablo 7: Döviz Kuru-Cari Açık İlişkisi

Yıllar	Dolar Kuru	Cari Açık (Milyar Dolar)
2000	0.627	-9,92
2001	1.23	-3,76
2002	1.515	-0,626
2003	1.502	-7,55
2004	1.431	-14,19
2005	1.349	-21,45
2006	1.440	-31,84
2007	1.310	-37,78
2008	1.301	-40,44
2009	1.556	-12,17
2010	1.509	-45,45
2011	1.681	-77,4
2012	1.803	-59,5

Kaynak: TCMB

Tablo 7'den de görüldügü üzere, Türkiye ekonomisinde döviz kuru arttığında, cari açık azlamakta, en azından daha az artmaktadır. Özellikle 2000-2001 döneminde ve 2008-2009 döneminde bu etki daha net biçimde görülmektedir.

3.4.3. Kamu Borç Stokunun Yüksekliği

Türkiye ekonomisinin en önemli gider kalemlerinden biri de, geçmiş dönemlerde sürekli açık veren kamu maliyesi nedeniyle oluşan olan yüksek kamu borç stoku için faiz ve anapara ödemeleridir. Bu borcun önemli nedenlerinden birisi de, Kasım 2000 ve Şubat 2001 krizlerinden kaynaklanan bankacılık sektörü zararlarının kamu tarafından üstlenilmesidir. Bu ödemelerin kamuya maliyeti, anapara ve faizleriyle birlikte Şubat 2011 itibariyle 381.87 milyar TL'dir. Oysaki 2012 yılsonu itibariyle, kamu kesimi toplam iç borç stoku 386.5 milyar lira, dış borç stoku ise 103.3 milyar dolardır. Bu durum Tablo 8'de görülmektedir.

Tablo 8 : Türkiye'nin Kamu Kesimi Dış Borç Stoku

Yıllar	Dış Borç Stoku	Dış Borç Faiz Ödemeleri	Cari Açık	Dış Borç Faiz Ödemelrinin Cari Açık İçindeki Payı
2000	50.1	4.8	-9,92	-48.4
2001	47.1	5.5	-3,76	146.3
2002	64.5	4.4	-0,626	-702.8
2003	70.8	4.5	-7,554	-59.6
2004	75.7	4.3	-14,198	-29.8
2005	70.4	5.0	-21,449	-23.3
2006	71.6	6.3	-31,836	-19.8
2007	73.5	7.5	-37,781	-19.8
2008	78.3	8.7	-40,438	-21.5
2009	83.5	7.3	-12,168	59.9
2010	89.1	5.4	-45,447	11.8
2011	94.3	4.8[75]	-77,4	6.3
2012	103.3	5.8	-59,5	9.7

Kaynak: TCMB Dış Borç Stoku.

Tablo 8 incelendiğinde, 2012 yılı dış borç faiz ödemesi, cari açığın %9.7'sine karşılık gelmektedir. Dış borç faiz ödemesi, cari işlemler hesabına kaydedildiği için, cari açığı arttıran bir faktör durumundadır.

3.4.4. İç Tasarruf Eksikliği

IMF, 16 Şubat 2011'de yayınlamış olduğu bilgi notunda, Türkiye için ana sorunun, aşırı iç talebe ve kısa vadeli sermeye girşlerine bağlı kırılganlıklara karşı uygulayacağı politika sepetini belirlemek olduğunu belirterek, yüksek iç talebin, cari açığı arttırdığına dikkat çekmiştir.

Cari işlemler açığındaki hızlı bozulma, ihracat canlanamazken, iç talebe dayalı hızlı büyümeyle artan ithalatın bir sonucudur (Kalkan 2011). Türkiye'de uzun yıllar yüzde 24-25 seviyelerinde seyreden iç tasarruf oranı, son dönemde yüzde 15-16 seviyelerinde kadar düşmüş durumdadır (Yılmaz 2010). Son dönemlerde, düşen faiz oranları ve istikrar ortamına bağlı olarak uzayan kredi vadeleri sonucunda, kredi

[75] http://haber.rotahaber.com/turkiyenin-2018e-kadar-ne-borc-odeyecek_117605.html

kullanımı ve iç talep açırı derecede artmıştır. Bankacılık sektörü toplam iç kredi hacmindeki değişmeler Tablo 9'da verilmiştir.

Tablo 9: Yurtiçi Toplam Kredi Hacmi (Milyar TL)

Yıllar	Toplam Kredi Hacmi	Kredi Hacmindeki Yıllık Fark	Kredi Hacmindeki Yıllık % Değişim
2000	28.6	11.3	64.9
2001	36.1	7.4	26.0
2002	36.6	5.2	1.4
2003	54.1	17.4	47.5
2004	83.4	29.3	54.3
2005	133.23	49.8	59.8
2006	186.5	53.3	40.0
2007	239.7	53.2	28.5
2008	296.1	56.4	23.5
2009	332.4	36.3	12.3
2010	475.1	142.7	42.9
2011	628.8	153.7	32.4
2012	750.0	121.2	19.3

Kaynak: TCMB Bankacılık Sektörü Yurt İçi Kredi Hacmi

Tablo 9'a bakıldığında, 2012 yılında, yurtiçi kredi hacminin, %19.3 arttığı görülmektedir. Bu krediler, çoğunlukla tüketim harcamalarında kullanıldığı için, cari açığın artmasında önemli bir paya sahiptir.

3.5. LİTERATÜR İNCELEMESİ

Cari açığın sürdürülebilirliğinin zamanlararası dış denge kısıtı yaklaşımıyla test edildiğinde çalışmalar Husted (1992) ile başlamış, onu Milesi-Ferretti ve Razin (1996), Rogoff (1997), Fountas ve Wu (1999) ve Edwards (2001) izlemiştir. Bu çalışmalarda cari açığın sürdürülebilirliği, ihracat ve ithalat değişkeleri arasında eş-bütünleşme ilişkisinin varlığı koşulu altında, uzun dönem denge katsayısının bire eşit veya yakın olmasıyla ölçülmüştür. Apergis vd (2000) ve Baharumshah vd (2003) çalışmasında ise cari açığın sürdürülebilirliği, cari dengeyi oluşturan gelir ve gider kalemleri arasında eş-bütünleşme ilişkisinin varlığına bağlanmıştır.

Fountas ve Wu(1999), ABD ekonomisinde cari açığın sürdürlebililiğini, 1967-1994 dönemi verilerini kullanarak, iki aşamalı Engle-Granger eş-bütünleşme yöntemiyle incelemiş, ihracat ve ithalat serileri arasında eş-bütünleşme ilişkisi çıkmadığı için, uzun dönemde cari açıkların sürdürülemez olduğunu belirtmiştir.

Kim vd (2009), Asya Ülkelerinde cari açığın sürdürelebililiğini, cari açıkların yüksek yatırım oranlarından kaynaklanması koşulu altında, 1981-2003 dönemi verileriyle, ESTAR yöntemiyle, zamanlararası dış denge kısıt yaklaşımıyla incelmiştir. 1998 Asya ekonomik krizinin bu ülke cari açıklarını önemli ölçüde etkilediğinin görüldüğü çalışmada, bü ülkelerde cari açıkların sürdürülebilir olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Karunaratne (2010), Avusturalya'da cari açıkların sürdürülebilirliğini, 1959-2007 dönemi verileriyle, iki aşamalı Engle-Granger eş-bütünleşme yönetmiyle incelemiştir. Analiz sonucunda, cari açığın, GSYH'nın %6'sını geçmesi durumunda, tehlikeli olabileceği sonucuna ulaşmıştır.

Holmes vd (2011), Hindistan'ın cari açığının sürdürülebililiğini, 1950-2003 dönemi verileriyle, GLS ve VEC yöntemleriyle, ihracat ve ithalat serileri arasındaki eş-bütünleşmenin varlığını, Hindistan Ekonomisi'nin liberalleştiği 1991 öncesi sonrası için araştırmıştır. Çalışma sonucunda, 1991 öncesi dönemde seriler arasında eş-bütünlüşme çıkmazken, sonrasında bulunmuştur. Böylece, Hindisan'da cari açıkların sürdürülebilir olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmanın sonunda, özellikle hizmet ihracatının, Hindistan ekonomisi için gittikçe artan bir önem kazandığı vurgulanmıştır.

Türkiye'den konu ile ilgili yapılan ilk çalışmalar arasında Selçuk (1997), Akçay ve Özler (1998) ve Uygur (2004) sayılabilir. Bu çalışmalarda, Türkiye'de cari açığın yükselmesinin doğrulanabileceği risklere dikkat çekilmiş, Türkiye'nin yüksek iç ve dış borç stoku ile birleşen cari açığın tehlikeli olduğu belitrilmiştir. Uygur (2004)'te, farklı senaryolar altında cari açığın sürdürülebililiği tartışılmıştır.

Yücel ve Yanar (2005), 1964-2003 dönemi yıllık verileriyle, iki aşamalı Engle-Granger eş-bütünleşme yönetmiyle yaptığı analizde, Türkiye'nin cari işlemler açığının sürdürlümez olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Yamak ve Korkmaz (2007), 2001-2005 dönemi aylık verileriyle, sınır testi yöntemiyle yaptığı analizde, Türk cari işlemler açığının, zayıf formada sürdürülebilir olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Peker (2009), Türkiye'de cari işlemler açığının sürdürlebilirliğini, 1992-2007 dönemi aylık verilerini kullanarak, Johansen eş-bütünleşme yöntemi yardımıyla analiz etmiştir. Çalışma soncunda, ihracat ve ithalat serileri arasında uzun dönemli ilişki bulunmasına rağmen, eş-bütünlüşme katsayısının birden küçük çıkması nedeniyle, Türkiye'de cari işlemler açığının ancak düşük formada sürdürülebilir olduğu, döviz gelirlerinin döviz giderlerinden az olduğu sonuçlarına ulaşmıştır.Kalkan (2011), 2010 yılındaki cari açığın, önceki dönemlerde görülenlerden, kaynakları ve finansman biçimi yönünden farklı olduğunu ifade etmeketdir. Bu cari açığın kaynağı olarak; hızla artan iç talebe (ithalata) karşılık, 2008 küresel ekonomik krizi ve Yunanistan'ın borç sorunuyla uğraşan Avrupa Ülkeleri'nde ekonomik toparlanmanın ve buna bağlı olarak Türkiye'nin ihracatında artışın yavaşlamanın olduğu belitmektedir. Cari açığın finansamanında yşanan farklılık (tehlike) olarak ise kullanılan dış kaynakların vade yapısının çok kısa olması gösterilmektedir.

3.6. MODEL TAHMİNLERİ

1990-2012 dönemini kapsayan bu çalışmada, üç değişken kullanılmıştır. LOGCA Türkiye'nin cari açık verilerinin logaritmasını ifade etmekte olup modelde bağımlı değişken olarak kullanılmıştır. LOGTH ve LOGGSYH ise uygun olarak Türkiye'nin dış ticaret hacminin ve GSYH'nın logartimik değerlerini ifade etmektedir. Veriler Türkiye İstatistik Kurumu (TUİK) ve Türkiye Cumhuriyyeti Merkez Bankası Elektronik Veri Dağıtım Sisteminden (TCMB EVDS) elde edilmiştir. Ekonometrik model tahminleri zamanı E-views6 ve matris çözümleri için ise Minitab15 paket programları kullanılmıştır.

Zaman serileri ile model kurmanın ilk şartlarından biri modelde kullanılacak değişkenlerinin durağan olup olmadığını test etmektir. Bu test sonuçlarına göre değişkenler aynı dereceden durağansa, değişkenler arasında eş-bütünleşmenin olduğu sonucuna varılır. Değişkenler arasında eş-bütünleşmenin var olup olmadığını ikiaşamalı Engle Granger yaklaşımına göre de test etmek mümkündür. Bu yaklaşımın birinci aşamasında değişkenlerin düzeyde durağan olup olmadığı test edilir. Eğer değişkenler düzeyde durağan değillerse, EKK yöntemi ile model kurulur. Kurulan modelden elde edilen hatalar durağanlık testine tabii tutulur. Eğer hatalar düzeyde durağansa modelde kullanılan değişkenler arasında eş-bütünleşmenin olduğuna karar verilir[76].

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_1 + \beta_3 X_2 + u_t \quad (3.6.1)$$

$$e_t = Y - \beta_1 - \beta_2 X_1 - \beta_3 X_2 \quad (3.6.2)^{77}$$

Tablo 10: Değişkenlere ait Ön Testler

Değişken	ADF Testi 1980-2010	Kritik Değer %5	Prob
LOGCA	0.65	-4.29	0.9993
LOGTH	-3.67	-4.27	0.0394
LOGGSYH	1.59	-2.96	0.9991
ΔLOGCA	**-8.77**	-4.29	**0.0000**
ΔLOGTH	**-6.16**	-4.30	**0.0001**
ΔLOGGSYH	**-3.01**	-2.96	**0.0459**

Tablo 10 incelendiğinde değişkenlerin düzeyde değil, birinci farkları alındıktan sonra durağanlaştığı görülmekteir. Yani değişkenler I(1) sürecine tabiidir.

Klasik Model

En küçük kareler yöntemiyle tahmin edilmiş model sonuçları, katsayı ve hatalarla ilgili testler aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

LOGCA= 3.54+0.017LOGTH-0.07LOGGSYH

[76] Damodar N.Gujarati Temel Ekonometri, çev Ümit Şenesen, Gülay Günlük Şenesen Literatür Yayıncılık, İstanbul,2010, s.726

[77] C.W.J.Grange, "Devolopments in the Study of Co-integreated Economik Variables" Oxford Bulletin of Economics and Statistics, c.48, 1986, s226

Tablo 12: EKK Model Sonuçları

	Katsayı	St.Hata	t-testi	Prob	Güven Aralığı	
SABİT	3.54	0.153	23.11	0.000	3.23	3.85
LOGTH	0.017	0.011	1.61	0.119	-0.005	0.04
LOGGSYH	-0.07	0.008	-8.68	0.000	-0.09	-0.06
R^2=0.72		F(2,30)=38.60		RMSE=0.06231		
Bilgi Kriterleri		AIC= -2.63		SIC= -2.49		

Tablo 12'de EKK sonuçları yer almıştır. Modelden tahmin edilen katsayıların t ve F testlerine bakıldığında modelin anlamlı bir model olduğu görülmektedir. Katsayıların işaretleri de beklentilerimizi doğrulamaktadır.

Tablo 13: EKK'dan elde edilen hatalara ait testler

Hataların Testleri		
	Test Değeri	**Kritik Değer %5**
Durağanlık testi (ADF)	ADF=-3.13	-2.97
	Prob=0.0357	0.05
Normallik testi	JB=7.14	
	Prob=0.03	0.05
Değişken varyans testi	Breuch Pagan =4.67	
	Prob=0.09	0.05
Otokorelasyon testi	LM=2.72	
	Prob=0.2568	0.05

Tablo 13'ün ilk satırında ise 3.9 modelinden yola çıkarak hataların düzeyde durağan olup olmadığının test sonuçları verişmiştir. Bu sonuçlara göre hata terimi düzeyde durağandır. Sonucu başka bir şekilde ifade edecek olursak, modelde kullanılan değişkenler arasında eş-bütünleşmenin olduğunu söyleyebiliriz. Tablo 13'ün diğer satırları incelendiğinde, hatalarda değişken varyans ve otokorelasyonun olmadığı sonucuna ulaşabiliriz. Ancak, hatalar normal dağılım varsyımına uymamaktadır. Bunun sebebi ise kullandığımız değişkenlere ait gözlem sayısının az - 33 olmasıdır. Merkezi Limit Teoremi ve Büyük Sayılar yasasına göre gözlem sayısı

(N) sonsuza yaklaştıkca normal dağılım olmasa bile normal dağılıma yakınsama vardır.

Bayesyen Yöntemle Model Tahmini

Bayesyen yöntemle tahmin edilen modelde kullanılan tüm ön bilgiler EKK yöntemi ile kurulan modelden sağlanmıştır. Ön bilgi olarak kullanılan katsayılar EKK yöntemi ile kurulan model katsayılarının güven aralığının üst sınırlarından elde edilmiştir.

$$\mathrm{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 10.034 & 9.483 \\ 1 & 9.135 & 10.503 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 11.589 & 15.071 \end{bmatrix}_{33\mathrm{x}3}$$ modelde yer alan bağımsız değişkenlerin değerlerinden oluşan matristir. Bu matriste birinci sütün sabiti, ikinci sütün dış ticaret hacminin logaritmasını, üçüncü sütün ise GSYH’nın logaritmasını göstermektedir.

$$\mathrm{Z}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 10.034 & 9.135 & \cdots & 11.589 \\ 9.483 & 10.503 & \cdots & 15.071 \end{bmatrix}_{3\mathrm{x}33}$$ ise Z matrisinin transpoze edilmiş halidir.

$$\mathrm{X} = \mathrm{LOGCA} = \begin{bmatrix} 2.96 \\ 2.98 \\ \vdots \\ 2.64 \end{bmatrix}_{33\mathrm{x}1}$$ cari açığın logaritması alınmış değerlerinden ibaret olup, bağımlı değişkeni simgelemektedir.

$\sigma_{\mathrm{v}}^2 = [0.06231]^2 = 0.0038830$ regresyon modelinin varyansını ifade etmektedir.

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} 3.85 \\ 0.039 \\ -0.055 \end{bmatrix}_{3\mathrm{x}1}$$ EKK yöntemi ile kurulmuş modelden elde edilen katsayılara ait güven aralığının üst sınırlarından alınmıştır.

$$\mathrm{S}_0 = \begin{bmatrix} 0.023464 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000119 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000693 \end{bmatrix}_{3\mathrm{x}3}$$ ise modelde yer alan değişkenlere ait varyans-kovaryans matrisini göstermektedir.

$$Z'Z = \begin{bmatrix} 33 & 375.25 & 366.99 \\ 375.25 & 4299.64 & 4174.36 \\ 366.99 & 4174.36 & 4137.45 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$Z'X = \begin{bmatrix} 96.86 \\ 1101.94 \\ 1073.19 \end{bmatrix}_{3x1}$$

$$[Z'Z]^{-1} = \begin{bmatrix} 6.04265 & -0.341855 & -0.191083 \\ -0.341855 & 0.030697 & -0.000648 \\ -0.191083 & -0.000648 & 0.017845 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$\hat{\theta} = [Z'Z]^{-1} x Z'X = \begin{bmatrix} 3.54 \\ 0.017 \\ -0.07 \end{bmatrix}_{3x1}$$

$$S = [Z'Z]^{-1} x \sigma_v^2 = \begin{bmatrix} 0.0234638 & -0.0013274 & -0.0007420 \\ -0.0013274 & 0.0001192 & -0.0000025 \\ -0.0007420 & -0.0000025 & 0.0000693 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$S_0^{-1} = \begin{bmatrix} 426.185 & 0 & 0 \\ 0 & 8403.36 & 0 \\ 0 & 0 & 14430 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 8498.5 & 96638 & 94512 \\ 96638 & 1107288 & 1075024 \\ 94512 & 1075024 & 1065521 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$S_n^{-1} = S_0^{-1} + S^{-1} = \begin{bmatrix} 8924.7 & 96638 & 94512 \\ 96638 & 1115692 & 1075024 \\ 94512 & 1075024 & 1079951 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$S_n = [S_n^{-1}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0019611 & -0.00011 & -0.0000621 \\ -0.00011 & 0.0000281 & -0.0000184 \\ -0.0000621 & -0.0000184 & 0.0000246 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$S_0^{-1}\theta_0 = \begin{bmatrix} 1641.73 \\ 334.77 \\ -797.29 \end{bmatrix}_{3x1}$$

$$S^{-1}\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 24945 \\ 283784 \\ 276380 \end{bmatrix}_{3x1}$$

$$S_0^{-1}\theta_0 + S^{-1}\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 26587 \\ 284118 \\ 275583 \end{bmatrix}_{3x1}$$

$$\theta_n = S_n\left(S_0^{-1}\theta_0 + S^{-1}\hat{\theta}\right) = \begin{bmatrix} 3.76493 \\ 0.00364 \\ -0.0779 \end{bmatrix}_{3x1}$$

Bayesyen yaklaşımla kurulan modelin sonuçları

LOGCA= 3.76+0.00364LOGTH-0.078LOGGSYH

Tablo 14: Bayesyen Yaklaşımla Kurulan Modelin Sonuçları

	Katsayı	**St.Hata**	**t-testi**	**Prob**	**Güvenilir aralık (Bayesyen aralık)**	
SABİT	3.76	0.0443	84.9	0.000	0.0000059	7.53
LOGTH	0.0036	0.0053	0.68	0.001	0.000036	0.0072
LOGGSYH	-0.0078	0.000495	-157.43	0.001	-0.000002	-0.156
R^2=0.82		F(2,30)=67.94		RMSE=0.06165		
Bilgi Kriterleri		AIC= -2.64		SIC= -7.36		

Tablo 14 incelendiğinde Bayesyen regresyondan elede edilmiş sonuçların beklentileri doğrulttuğu görülmektedir. LOGGSYH'nın katsayısı beklendiği gibi negatiftir. Bunun anlamı Türkiye'de GSYH'da %1'lik artış sağlandığında, cari açık %-0.78 azalmaktadır. Bu durum Türkiye'nin GSYH'nın içtalebe yönelik büyüme sağlamasından kaynaklanmaktadır. Katsayı aynı zamanda istatistiksel olarak ta anlamlı sonuçlar vermiştir. Bunu t testi sonucuna ve Prob değerine bakarak görmek olur. LOGTH'deki %1'lik artış cari açığı %0.36 artırmaktadır. Katsayının pozitif çıkma sebebi Türkiyenin dış ticaretinde ithalatın ihracattan fazla olmasıdır. Katsayı istatistiksel olarak anlamlı olmasa da, modele ait F testinin yüksek olması modele alınmış değişkenlerin topluca anlamlı olduğunu göstermektedir. Ayrıca modelde $R^2 = 0.82$ olması modelin açıklayıcı gücünün yüksek olduğunu göstermektdir. Bayesyen Regresyon modelinden elede edilen hata kareler ortalaması, EKK yöntemi ile kurulmuş regresyon modelinden elde edilen hata kareler ortalamasından daha küçüktür. Bunun sebebi ise Bayesyen regresyon modelinde katsayı tahmincilerinin sapmalı sonuçlar vermesidir. Bayesyen yöntemle tahmin edilmiş katsayıların güvenilir aralığı EKK yöntemi ile kıyaslandığında daha geniş aralığa sahip olduğu görülmektedir. Bunun sebebi ise Bayesyen yöntemle tahmin edilmiş katsayılara ait standart hataların daha küçük olmasıdır.

Her iki yaklaşımla kurulan model sonuçlarına göre seçim yapacak olursak, model seçme kriterleri olan AIC ve SIC (BIC-Bayesian Information Criteria) kriterlerini karşılaştırmak gerekir. Bayesyen yaklaşımla kurulan modelden hesaplanmış AIC ve SIC değerleri daha küçük olduğu için Bayesyen model seçilir.

SONUÇ

Bu çalışmada, Türkiye'deki cari işlemler açığının sürdürülebilir olup olmadığı, hem Klasik, hem de Bayesyen yaklaşıma dayanarak iki aşamalı Engle-Granger eş-bütünleşme yöntemiyle, 1980-2012 dönemi verileri kullanılarak incelenmiştir. Model sonuçlarına göre seriler arasında eş-bütünleşme ilişkisinin olduğu tespit edilmiştir. Başka bir ifade ile Türkiye'de cari açığın sürdürülebilir olduğu tespit edilmiştir. Ancak cari açığın kontrol edilmediği taktirde, krizleri uyarabilecek bir dinanmiği her zaman doğurabileceği düşünülmektedir. Türkiye'nin cari açığının son dönemler riskli bir duruma geldiği düşünüldüğünde, bazı önlemlerin alınması zorunlu hale gelmiştir. Nitekim Merkez Bankası'nın son dönemlerde almış olduğu önlemler, cari açığın sürdürülebilirliği konusunun ne kadar önemli olduğunu görmek bakımından önemlidir. Burada öncelikle yurtiçi toplam kredi hacminin daraltılması, cari açığın azltılması bakımından oldukça önemlidir. Bununla hem toplam talep bir miktar azaltılmış olacak, hem de ulusal tasarruf miktarı artırılabilcektir.

KAYNAKÇA

Adrian E.Raftery, Steven Lewis, How many iterations in the Gibbs Sampler, http://people.ee.duke.edu/~lcarin/raftery92how.pdf

Akçay Cevdet, Üçer Murat , Will history repeat itself? An assesment of Turkish current account trends and prospects, Economics Research Forum Working Paper Series, Istanbul, 2006, ss.25-33

AKÇAY, C. ve S. ÖZLER, (1998), “Current Account Position of the Turkish Economy: Is There any Cause for Concern?”, Bogazici Journal Review of Social, Economic and Administrative Studies, 12(1): ss.39-53.

Andrew Gelman v.d., Bayesian Data Analysis, London, Champan & Hall, 1995, p.235.

Anscombe F.J, ‘Bayesian Statistics,’ The American Statistician, Sayı.15, No.1, Feb.1961, p.21.

APERGIS, N., Konstantinos P. KATRAKILIS and Nicholas M. TABAKIS, (2000), “Current Account Deficit Sustainability: The Case of Greece”, Pplied Economics Letters, (7): ss.599-603.

Arnold Zellner, “Bayesian Analysis of Regression Error Terms,” Jorunal of the American Statistical Association, Sayı.70, No. 349, Mar. 1975, ss.138-139.

Arnold Zellner, An İntroduction to Bayesian İnference in Econometrics, John Wiley & Sons, New York, 1971, p.292.

BAHARUMSHAH, A. Z., Evan LAU and S. FOUNTAS, , “On the Sustainability of Current Account Deficits: Evidence From Four ASEAN Countries”, Journal of Asian Economics, (2003) 14(3): ss. 465-487.

Box, G.E.P, Tiao, G.C., Bayesian İnference İn Statsitical Analisis, Üiley Classics Library Edition, New York, John Wiley& Sons?1992, ss. 310-312

Box,G.E.P., Tiao, C.G., Bayesian İnference in Statistical Analysis, Addison-Wesley, London, 1973, p.48

C.W.J.Grange, “Devolopments in the Study of Co-integreated Economik Variables” Oxford Bulletin of Economics and Statistics.

D.V.Lindley, İntroduction to Probability and Statistics From A Bayesian Viewpoint, Part 2, London,Cambridge University Press, 1965,ss.57,203,204.

Damien, P., Wakefield, J. and Walker, S. Gibbs Sampling for Bayesian Nonconjugate and Hierarchical Models by Using Auxiliary Variables, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 1999, ss.61, 331–344.

Damodar N.Gujarati Temel Ekonometri, çev Ümit Şenesen, Gülay Günlük Şenesen Literatür Yayıncılık, İstanbul, 2010, s. 726

David Birkes, Yadolah Dodge, Alternative Methods of Regression, John Wiley & Sons , New York, 1993, s.167.

Demirhan H., Logaritmik Doğrusal Modellerde Parametrelerin ve Beklenen Göze Sıklıklarının Bayesçi Kestirimi, Yayınlanmamış Bilim Uzmanlığı Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2004, ss.16-20

Dennis Lindley, ‘Theory and Practice of Bayesiaan Statistics,’ The Statistician, 32, 1983, s.1.

Derya Tektaş. İki düzeyli logit ve probit modellerde parametre tahminlerine Bayesçi bir yaklaşım. Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı. Yüksek Lisans Tezi. Ankara, 2006, s. 8

Diaconis, P., Freedman, D., ‘On Inconsistent Bayes Estimation of Location,’ Annals of Statistics, Sayı.14, No.1, March 1986, s.68

DORNBUSCH, R.and F. FISCHER,(1990), Macroeconomics, McGraw-Hill, International Editions.

EDWARDS, S., (2001), “Does the Current Account Matter?”, NBER, WP, No:8275:1-71.

FOUNTAS, S. and Jyh-Lin WU, (1999), “Are the U.S. Current Account Deficits Really Sustainable?”, International Economic Journal, 13(3).

FREUND, C. L., (2000), “Current Account Adjustment in Industrialized Countries”, Board of Governers of the FED International Finance, Discussion Papers, 692.

Gamerman, D., Markov Chain Monte Carlo Stochastic Simulation for Bayesian İnference, Champan and Hall, 1997, London

Gary Koop, Bayesian Econometrics. John Willey& Sons Ltd.England 2000, s.6

Gelfand, A., Smith,A.F.M.,Sampling- Based Approaches to Calculating Marginal Denisties, Journal of the American Statistical Association, 1990, Sayı85, s.398-409

George Casella and Edward I. George,The American Statistician,Sayı. 46, No. 3 (Aug., 1992), ss. 167-174

George Casella, Roger L. Berger, Statistical İnference, Duxbury Press, Belmont, California, 1990. ss. 343-344

George G.Judge v.d., The Theory and Practice of Econometrics, New York, John Wiley & Sons, 1985, s.103.

George, E. and McCulloch, R. (1993) Variable Selection via Gibbs Sampling, Journal of the American Statistical Association, 88, ss.881–889.

Gilks,W.R., Richardson,S.,Spiegelhalter,D.J Markov Chain Monte Carlo in Practice, Champan and Hall, London,1996

Heckman and E.E. Leamer, eds., ‘Markov Chain Monte Carlo Methods: Computation and Inference,’ J.JThe Handbook of Econometrics, Amsterdam:Elsevier Publishing Co. 2001

HOLMES M. J., T. PANAGIOTIDIS and A. SHARMA, (2011), “The Sustainability of India’s Current Account”, Applied Economics, 43: ss. 219–229.

http://www.spatial-econometrics.com/html/mbook.pdf

HUSTED S., (1992), “The Emerging U.S. Current Account Deficit in the 1980s: A Cointegration Analysis,” The Review Of Economics & Statics, February, ss: 159-166.

J.Berger, ‘Discussion;On the Consistensy of Bayes Estimates,’ The Annals of Statistics, Sayı.14, No 1, March 1986, ss.31-33

J.N. Corcoran, Bayesian Linear Regression-Single Variable, s.70.

Jeff Gill, Bayesian Methods, Chapman&Hall, New York, 2002, s.14.

Jesus Fernandes Villaverde, University of Pennsylvania ss.7-8 http://economics.sas.upenn.edu/~jesusfv/LectureNotes_7_MH

John Geweke, Contemporary Bayesian Econometrics and statistics, July 2003, ss. 36-37.

John Geweke, Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approachesto the Calculation of Posterior Moments, http://www.censoc.uts.edu.au/pdfs/geweke_papers/gp_49.pdf

KALKAN, S., (2011), “Cari işlemler Açığında Neler Oluyor? Bu Defa Farklı mı, Yoksa Aynımı?”, TEPAV Degerlendirme Notu, Subat 2011, http://www.tepav.org.tr, 16.03.2011.

KARUNARATNE, N. D., (2010), “The Sustainability of Australia’s Current Account Deficits-A Reappraisal After the Global Financial Crisis”, Journal of Policy Modeling, 32: ss. 81–97

KIM, Bong-Han, Hong-Ghi MIN, Young-Soon HWANG and Judith A.
MCDONALD, (2009), “Are Asian countries’ current accounts sustainable? Deficits, Even When Associated
With High Investment, Are Not Costless”, Journal of Policy Modeling, 31: ss. 163–179.

Kumru, O., (2003) Markov Zinciri Monte Carlo Yöntemleri, Yayınlanmamış Bilim Uzmanlığı, Haccettepe Üniversitesi
LeSage,J.P., Applied Econometrics Using MATLAB. October,1999, ss.175-184

Martin A. Tanner; Wing Hung Wong, The Calculation of Posterior Distributions by Data Augmentation,Journal of the American Statistical Association, Sayı. 82, No.

398.(Jun.,1987)ss.528540.http://www.jstor.org/discover/10.2307/2289457?uid=3739192&uid=2134&uid=2&uid=70&uid=4&sid=47698879584557

Martin A. Tanner; Wing Hung Wong, The Calculation of Posterior Distributions by Data Augmentation,Journal of the American Statistical Association, Sayı. 82, No. 398. (Jun., 1987), ss. 528-540

Michael D.Alder, Workshop on Intelligent System, December 2003, http:// www.maths.uwa.edu.au/mike/mumford/workshop_session1.pdf

MILESI-FERRETTI, G. M., and A. RAZIN, (1996), "Sustainability of Persistent Current Account Deficits", NBER, WP, ss54-67.

Myung, J., 2006, Bayesian Methods for Social and Behavioral Scientists: Hands on Bayes using WinBUGS

OBSTFELD, M. and K. ROGOFF, (1997), "Foundations of International Macroeconomics", The MIT Press.

Oya Ekici. Bayesyen Regresyon ve WinBUGS ile Bir Uygylama. İstanbul Üniversitesi. Sosyal Bilimler Enstitüsü. Ekonometri Anabilim dalı. Yüksek Lisans Tezi. İstanbul,2005. S.2

Ömer Demir, Bilim Felsefesi,3.baskı, Vadi Yayınları, Ankara 2000, s.25.

PEKER, O. ve H. HOTUNLUOGLU, (2009), "Türkiye'de Cari Açıgın Nedenlerinin Ekonometrik Analizi", Atatürk Üniversitesi _ktisadi ve _dari Bilimler Dergisi, 23(3).

Peter Müller, Monte Carlo Methodsand Bayesian Computation:MCMC p1. http://www.ma.utexas.edu/users/pmueller/class/422/mcmc-tutorial.pdf

Sanford Weisberg, Applied Linear Regression,2.b., Minnesota, John Wiley & Sons,1985,s.97.

SELÇUK, F., (1997), "Consumption Smoothing and the Current Account: Turkey's Experience 1987-1995", METU Studies in Development, 24(4): ss519-529 .

Siddhartha Chib, Edward Greenberg, The American Statistician, November 1995, Sayı.49 No.4 ss 328 http://elsa.berkeley.edu/reprints/misc/understanding.pdf

Stephen Stingler ‘Who Discovered Bayes’s Theorem,’ The American Statistician, Sayı.37, No.4, November 1983, ss.290-296

Tiao ve Zellner, “Bayes’s theorem and the use of prior knowledge in regression analysis,” Biometrica, Sayı.51, 1 ve 2, 1964.

UYGUR, E.; (2004), “Cari Açık Tartışmaları”, İktisat, İşletme ve Finans, 19(222): ss5-20.

Vidakoviç, Bayesian İnference, Bayesina Computation, Applications

Walsh,B., Markov Chain Monte Carlo and Gibbs Sampling, Lecture notes for EEB 2002

YAMAK, R. ve A. KORKMAZ, (2007), “Türk Cari _slemler Açıgı Sürdürülebilir mi? Ekonometrik Bir Yaklasım”, Bankacılar Dergisi, 60.

YILMAZ, D., (2010), “TCMB, BDDK, Hazine, SPK ve Banka Yöneticileriyle Yaptıgı Toplantıdaki Konusmasından”, 24Aralık,Http://www.dunya.com,15.02.2011.
YÜCEL, F. ve R. YANAR, (2005), “Türkiye’de Cari slemler Açıkları Sürdürülebilir mi? Zaman Serileri Perspektifinden Bir Bakış”, Ç.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 4(2).