

**DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜŞÜK BOYUTLU SPİN SİSTEMLERİNDE
KUANTUM DOLAŞIKLIK**

Cenk AKYÜZ

**Temmuz, 2008
İZMİR**

DÜŞÜK BOYUTLU SPİN SİSTEMLERİNDE KUANTUM DOLAŞIKLIK

Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Doktora Tezi

Fizik Anabilim Dalı

Cenk AKYÜZ

Temmuz, 2008

İZMİR

DOKTORA TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

CENK AKYÜZ tarafından DOÇ. DR. EKREM AYDINER yönetiminde hazırlanan “DÜŞÜK BOYUTLU SPİN SİSTEMLERİNDE KUANTUM DOLAŞIKLIK” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

.....
Doç.Dr. Ekrem AYDINER

Danışman

.....
Prof.Dr. Hamza POLAT

.....
Prof.Dr. Kadir YURDAKOÇ

Tez İzleme Komitesi Üyesi

Tez İzleme Komitesi Üyesi

.....
Prof.Dr. İsmail SÖKMEN

.....
Doç.Dr. Özgür E. MÜSTECAPLIOĞLU

Jüri Üyesi

Jüri Üyesi

Prof.Dr. Cahit HELVACI

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŐEKKÖR

Doktora çalıőmam süresince bana her konuda yardımcı olan ve destekleyen danışman hocam Doç. Dr. Ekrem AYDINER'e, değerli katkılarından dolayı Doç. Dr. Özgür E. MÜSTECAPLIOğLU'na, tez yazımı konusundaki yardımları için Araő. Gör. Gönül BİLGEÇ'e, tezin Latex formatına çevrilmesinde karşılaőtığım sorunların çözümünde yardımcı olan Araő. Gör. Aytaç Gürhan GÖKÇE'ye, grup çalıőmalarımızda gösterdikleri uyum ve destek nedeniyle çalışma arkadaşlarım Araő Gör. Ebru KIŐ AM'a ve Meltem GÖNÜLOL'a ve son olarak da desteğini her zaman yanımda hissettiğim aileme teşekkür ederim.

Cenk AKYÜZ

DÜŞÜK BOYUTLU SPİN SİSTEMLERİNDE KUANTUM DOLAŞIKLIK

ÖZ

Bu tez düşük boyutlu spin sistemlerinde dolaşıklık (entanglement) incelendiği iki kısımdan oluşur. Birinci kısımda, homojen olmayan bir manyetik alanda bulunan iki kubitte oluşmuş izotropik Ising zincirinin dolaşıklığı düşük sıcaklıklarda nümerik olarak hesaplanmıştır. Yapılan hesabın sonucunda homojen olmayan manyetik alanda bulunan bu iki kubitlik sistemin dolaşık durumlara sahip olduğu görülmüş ve manyetik alanda homojensizliğin bulunmasının dolaşık kuantum durumları üzerinde etkin bir rol oynadığı sonucuna varılmıştır.

İkinci kısımda ise homojen bir dış manyetik alana ve Dzialoshinski-Moriya (DM) ekileşmesine sahip iki kutritlik bir Ising zincirinin dolaşıklığı incelenmiştir. Manyetik alanın, DM etkileşmesinin ve sıcaklığın dolaşıklık üzerindeki etkileri negatiflik (negativity) ile tanımlanmıştır. Manyetik alanın paralel, antiparalel ve spin yönelimine dik (transverse) olduğu durumlar incelenmiştir. Yapılan nümerik hesapların sonuçları, sistemin analitik olarak belirlenmiş taban ve uyarılmış durumlarının kullanılmasıyla açıklanmıştır. Sonuç olarak verilen bir sıcaklık değerinde manyetik alanın ve DM etkileşmesinin birbirlerine göre değişen etkilerinin kullanılmasıyla, dolaşıklığın kontrolünün en iyi şekilde sağlanacağı gösterilmiştir.

Anahtar sözcükler: Bell durumları, Dolaşıklık, Ising spin zinciri, Negatiflik, Uyum.

QUANTUM ENTANGLEMENT IN LOW DIMENSIONAL SPIN SYSTEMS

ABSTRACT

This thesis is composed of two parts in which quantum entanglement is investigated in the low dimensional spin systems. In the first part, we have numerically calculated the thermal entanglement of a two-qubit system at low temperatures in an isotropic Ising chain under an inhomogeneous magnetic field. It is shown that in the homogeneous magnetic field, the two qubit system has entangled states. It is concluded that the presence of the inhomogeneity in the magnetic field plays an effective role on the entangled states.

In the second part, we investigate thermal entanglement of a two-qutrit Ising chain in the presence of an external magnetic field and Dzialoshinski-Moriya (DM) interaction. Influences of magnetic field, temperature, and DM interaction on the entanglement have been characterized in terms of negativity. The cases of parallel, antiparallel and transverse magnetic fields are considered. Results of detailed numerical calculations are explained using the analytically determined ground and excited states of the system. Finally, we show that at a given temperature, control of entanglement can be optimized by utilizing competing effects of the magnetic field and the DM interaction.

Keywords: Bell states, Entanglement, Ising spin chain, Negativity, Concurrence.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
DOKTORA TEZİ SINAV SONUÇ FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZ	iv
ABSTRACT	v
BÖLÜM BİR-GİRİŞ	1
1.1 Giriş	1
BÖLÜM İKİ-TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Kubit	5
2.2 Kuantum Mantık Kapıları	11
2.2.1 Tek Kubitlik Mantık Kapıları	11
2.2.2 Çok Kubitlik Mantık Kapıları	15
2.3 Kuantum Devreler	16
2.3.1 Kubit Kopyalayan Devre	17
2.3.2 Bell Durumları	18
BÖLÜM ÜÇ-KUANTUM DOLAŞIKLIK	20
3.1 Genel Bakış	20
3.2 Bell Eşitsizlikleri	24
3.3 Dolaşık ve Ayrılabilir Kuantum Durumları	26
3.4 Ayrılabilirlik Kriterleri	28
3.4.1 İşlemsel Ayrılabilirlik Kriteri	28
3.4.1.1 Schmidt Ayrıştırması:	28
3.4.1.2 Peres-Horodecki Kriteri (PPT):	29
3.4.1.3 İndirgeme Kriteri:	30
3.4.2 İşlemsel Olmayan Ayrılabilirlik Kriteri:	30
3.4.2.1 Pozitif Eşleşmeler:	31
3.4.2.2 Dolaşıklık Kanıtı:	31
3.5 Nicel Olarak Dolaşıklık	32
3.5.1 Dolaşıklık Özellikleri	32
3.5.2 Bazı Dolaşıklık Ölçüleri	33

3.5.2.1	Dolaşıklık Maliyeti:	34
3.5.2.2	Oluşum Dolaşıklığı:	34
3.5.2.3	Dolaşıklık Relatif Entropisi:	35
3.5.2.4	Damıtılabilir Dolaşıklık:	35
BÖLÜM DÖRT-KUANTUM DOLAŞIKLIĞIN UYGULAMALARI . . .		37
4.1	Kuantum Teleportasyon	37
4.2	Dolaşıklık Değiş-Tokuşu	40
4.3	Kuantum Yoğunkodlama	43
BÖLÜM BEŞ-HOMOJEN OLMAYAN BİR MANYETİK ALANDA BULUNAN ISING ZİNCİRİNİN DOLAŞIKLIĞI		46
5.1	Giriş	46
5.2	Model ve Hesaplamalar	49
5.3	Sonuçlar ve Tartışma	51
BÖLÜM ALTI-DZIALOSHINSKI-MORIYA ETKİLEŞMESİNE SAHİP İKİ KUTRİTLİK ISING ZİNCİRİNİN DOLAŞIKLIĞI		55
6.1	Giriş	55
6.2	Model	59
6.2.1	İki Kutritlik Ising Zinciri	60
6.2.2	Paralel veya Antiparalel Manyetik Alanda Bulunan İki Kutritlik Ising Zinciri	61
6.2.3	Spin Yönelimine Dik (Transverse) Bir Manyetik Alanda Bulunan İki Kutritlik Ising Zinciri	62
6.2.4	Paralel veya Antiparalel Manyetik Alanda Bulunan DM Etkileşmesine Sahip İki Kutritlik Ising Zinciri	64
6.3	Isısal Dolaşıklık	66
6.4	Sonuçlar ve Tartışma	67
BÖLÜM YEDİ-SONUÇLAR		74
KAYNAKLAR		76
EKLER		87
A.1	Tensör Çarpımı	87
A.2	İki Kutritlik Ising Zincirinin Yoğunluk Matrisi	88
A.3	(6.2.20) Denkleminin Katsayıları	90

BÖLÜM BİR

GİRİŞ

1.1 Giriş

Doğa olaylarının açıklanmasında çok önemli bir yer tutan fizik bilimi, 20.yy'ın başlarına gelindiğinde bazı sıkıntılar yaşamaya başlamıştır. Bu dönemde sıkıntılara yol açan temel sorun mevcut fizik teorilerinin birtakım çelişkilere yol açmasıdır. Ortaya çıkan bu sıkıntılar sonradan klasik fiziğe bazı özel hipotezlerin eklenmesi ile çözülmüştür. Ancak atom ve ışımaya kavramlarının daha iyi anlaşılmasıyla beraber bu açıklamalar da çok karmaşık bir hal almıştır. Oluşan bu karmaşa 1920'lere gelindiğinde modern kuantum mekaniğinin oluşturulmasıyla son bulmuştur. Bu zamandan sonra kuantum mekaniği bilimin vazgeçilmez bir parçası olmuş ve atomun yapısından yıldızlarda gerçekleşen nükleer olaylara, süperiletkenlerden DNA yapısına kadar doğada gözlenen pek çok fiziksel olayın açıklanmasında kullanılmış ve sayısız teknolojik uygulama alanı içinde yer almıştır.

Kuantum mekaniksel sistemlerin, bilgi işlemde kullanılması ise kuantum hesaplama (quantum computation) ve kuantum bilgi (quantum information) teorisi olarak adlandırılan disiplinler arası bir çalışma alanı oluşturur. Bu yapısı nedeniyle de kuantum mekaniği; bilgisayar bilimi, bilgi teorisi ve kriptoloji gibi pek çok alanla etkileşir.

Kuantum hesaplama ve kuantum bilgi alanının önemli bir başarısı, fiziksel teorilerin oluşturulması için basit ancak sezgisel olarak elde edilemeyen yasalar ortaya koyan kuantum mekaniği hakkında, sezgi ve anlayışımızı arttıracak gelişmeler sunmasıdır. Örneğin 1980'lerin başında Einstein'ın relativite teorisine aykırı olmasına karşın kuantum etkileri kullanılarak ışıktan daha hızlı sinyal göndermenin olasılığı üzerine dikkatler toplanmıştı. Bu aslında bilinmeyen bir kuantum durumunun kopyalanması (cloning) problemidir ve gerçekleşmesi halinde kuantum mekaniği etkileri kullanılarak ışıktan daha hızlı bir şekilde sinyal

gönderme olasılığı mümkün olacaktır, ancak kuantum hesaplama ve kuantum bilgi teorilerinin ilk sonuçlarından biri olan kopyalanamama teoreminin (no-cloning theorem) bulunmasıyla, bunun mümkün olmadığı anlaşılmıştır.

Kuantum hesaplama ve kuantum bilgi alanına diğer bir katkı ise bilgisayar biliminden gelmiştir. Bu alan 1936'da Alan Turing'in çalışmasıyla canlanmış ve kısa bir süre sonra elektronik bileşenlerden oluşmuş ilk bilgisayar gerçekleştirilmiştir. Bu arada elektronik aletlerin giderek küçülmeye başlamasıyla ortaya çıkan kuantum etkileri de hesaplamanın klasikten tamamen farklı bir alana yönelmesine neden olmuştur. Bu dönemde Richard P. Feynman (1982, 1986) kuantum mekaniksel sistemlerin klasik bilgisayarlar ile simüle edilmesinin zor olduğunu, bazı temel sorunlar içerdiğini ve bu nedenle ancak kuantum mekaniğini temel alan bilgisayarların yapılmasıyla bu zorlukların aşılabileceğini belirtmiştir. Bu açıklamanın hemen arkasından kuantum hesaplama ve kuantum bilgi alanında hızlı bir gelişme yaşanmıştır. 1990'larda araştırmacılar klasik olarak etkili bir şekilde simüle edilemeyen sistemlerin kuantum bilgisayarlarında etkili bir şekilde simüle edilebileceğini göstermişlerdir. Bu konudaki en önemli iki çalışma ise Grover'ın (1996) yapısal olmayan arama uzayında gerçekleştirdiği arama algoritması ile Shor'un (1994) gerçekleştirdiği büyük sayıların çarpanlarına ayrılması problemi olmuştur.

Diğer önemli bir gelişme ise Shannon'un (1948) bilgi kavramının matematiksel tanımını geliştirerek modern bilgi teorilerine ve iletişime katkı sağlamasıyla olmuştur. Shannon iletişim kanalları üzerinden bilgi aktarılmasıyla ilgili çalışmalarında iki temel sorunla ilgilenmiştir. Bunlardan ilki bir iletişim kanalı üzerinden bilgi aktarmak için gerekli kaynakların neler olduğu, ikincisi ise gürültülü bir iletişim kanalından güvenli olarak bilginin taşınıp taşınamayacağını belirlemesiyle ilgilidir. Ayrıca gürültülü iletişim kanalında güvenli bir iletişim sağlamak için hata düzeltme kodları ile gönderilen bilginin korunması gerektiğini de göstermiştir. Kuantumsal olarak ise ilk probleme ait gelişmeler Schumacher (1995) tarafından yapılmış olmasına rağmen ikinci kısım ile ilgili bir gelişme henüz sağlanamamıştır, ancak yine de kuantum bilgisayarlarında kullanılma amacıyla kuantum hata düzeltme kodları geliştirilmiştir. Bu kodlar kuantum durumlarını

gürültüye karşı korurlar fakat bir kuantum iletişim kanalından klasik bilgi aktarılması durumunda ne olacağı sorusuna ise yanıt süperyoğunluklu kodlama (superdense coding) olmuştur (Bennett ve Wiesner, 1992).

Kriptoloji ise güvenli olmayan bir ortamda iki veya daha fazla kişi arasında iletişimin güvenli bir şekilde gerçekleşmesi ile ilgilidir. En bilineni gizli mesaj iletimidir. Burada özel veya genel anahtarlı olmak üzere iki farklı yöntem kullanılır. Kuantum mekaniğinin, her iki gurubun da güvenliğini bozmayacak şekilde bir anahtar dağılımı yapmak için kullanılması ise kuantum hesaplama ve kuantum bilgi alanının ilk gelişmelerinden biridir.

Tüm bu kronolojik gelişmelerden başka kuantum hesaplama ve kuantum bilgi alanının gelişmesi ve olgunlaşmasıyla birlikte yeni alt alanlar ortaya çıkmaktadır. Bunlardan en çok çalışılanı dolaşıklık (entanglement) kavramıdır. Dolaşıklık tamamen kuantum mekaniksel bir kavram olup, alt sistemlerden oluşmuş bir kuantum sisteminin parçaları arasındaki kuantum korelasyonu olarak tanımlanabilir. Bu kavram kuantum hesaplama ve kuantum bilgi alanlarındaki kuantum teleportasyon, süperyoğunluklu kodlama ve kuantum kriptoloji gibi pek çok uygulamada anahtar rol oynar. Dolaşıklığın ilk ortaya çıkışı 1935'te kuantum mekaniğinin olasılığa dayalı temellerini sorgulamak için gerçekleştirilen EPR çalışmasında olmuştur (Einstein, Podolsky, ve Rosen, 1935). Daha sonra ise Bell eşitsizlikleri ile birlikte (Bell, 1964) kuantum mekaniğinin temel ilkelerine dayanan çalışmalara ait bir kavram olarak ortaya çıkar. Kuantum hesaplama ve kuantum bilgi alanlarındaki çalışmalarda ise 1990'lardan sonra yer almıştır.

Kuantum hesaplama ve kuantum bilgi alanları için bir kaynak olan dolaşıklığın oluşturulması ve kontrol edilmesi önemli bir problemdir. Bu amaçla dolaşıklığa yol açan sistemlerin analizi önemli bir çalışma konusunu oluşturmaktadır. Spin sistemleri ise bu konuda en büyük potansiyeli oluştururlar. Literatüre baktığımızda spin sistemlerini içeren, bu amaçla gerçekleştirilmiş çok sayıda çalışmaya rastlanır. Bu tezde de iki ve üç durumlu Ising spin sistemlerinde dolaşıklık incelenmiştir.

Tezin düzenleniŖi Ŗu Ŗekildedir: İkinci bölümde, kuantum hesaplama ve kuantum bilgi alanlarına ait temel kavramlar tezin kapsamı içinde kullanıldıkları ölçüde tanımlanmışlardır. Üçüncü bölümde, dolaşıklık kavramı ve dolaşıklık ölçülerinden bazıları tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde, kuantum dolaşıklığın kuantum hesaplama ve kuantum bilgi alanındaki yerinin daha iyi görülmesini ve öneminin daha iyi kavranmasını sağlamak amacıyla dolaşıklığın bazı uygulamalarına yer verilmiştir. Beşinci bölümde, tezin literatüre orjinal katkısı olan homojen olmayan bir manyetik alanda bulunan iki durumlu Ising zincirinin dolaşıklığının incelenmesi verilmiştir. Altıncı bölümde ise yine orjinal bir çalışma olan Dzialoshinski-Moriya etkileşmesine sahip iki kutritlik Ising zincirinin dolaşıklığı verilmiştir. Son kısım olan yedinci bölümde ise yapılan çalışmalar özetlenip sonuçları yorumlanmıştır.

BÖLÜM İKİ

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin konusu çerçevesinde kullanılan kuantum hesaplama ve kuantum bilgi teorisi için temel kavramlar tanımlanacak ve bunların nasıl işlediğine kısaca bakılacaktır. Böylece daha sonraki kısımlarda anlatılan olayların daha iyi anlaşılıp kavranması sağlanmış olacaktır.

2.1 Kubit

Klasik hesaplama ve klasik bilgiye baktığımızda, bu alanlara ait temel kavramın bit (binary digit) olduğunu görürüz. Benzer olarak kuantum hesaplama ve kuantum bilgi için ise temel kavram kuantum-bit veya kubitdir. Bilindiği üzere klasik bir bit 0 veya 1 gibi iki duruma sahiptir. Benzer şekilde $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ kuantum durumları (quantum states) ise bir kubit için olası iki durumu oluşturur ve bunlar klasikteki 0 ve 1 durumlarına karşılık gelirler. Bir bit ile bir kubit arasındaki en büyük fark, bir kubitin

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.1.1)$$

şeklinde $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ kuantum durumlarının lineer bir kombinasyonu yani süperpozisyonunda bulunabiliyor olmasıdır. Buradaki α ve β katsayıları ise kompleks sayılardır. Daha formal bir şekilde ifade edecek olursak, bir kubit iki boyutlu kompleks vektör uzayında bir vektördür. Burada belirtilen $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ kuantum durumları ise bu vektör uzayındaki ortonormal kompütasyonel baz durumlarıdır.

Klasik bir biti 0 veya 1 durumlarından hangisinde bulunduğunu belirlemek için inceyebiliriz. Günümüzde kullandığımız bilgisayarlar işlemlerini gerçekleştirirken bunu sürekli olarak yaparlar; ancak bir kubitinin kuantum durumunu belirlemek için inceleyemeyiz yani bir kubitinin durumunu belirleyecek olan α ve β

katsayılarını belirleyemeyiz. Bu noktada kuantum mekaniğinin bize söylediği, bu kuantum durumu hakkında kısıtlı bilgi edinebileceğimizdir. Bu nedenle (2.1.1) ifadesi ile verilen kubit ölçtüğümüzde $|\alpha|^2$ olasılığıyla 0 veya $|\beta|^2$ olasılığıyla 1 sonucunu elde ederiz. Olasılıklar toplamı 1 olmak zorunda olduğundan

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (2.1.2)$$

olacaktır. Bu koşulu geometrik olarak kubit durumunun birim uzunluğa normalize edilmesi olarak yorumlayabiliriz. Böylece genel olarak bir kubit durumunun iki boyutlu kompleks vektör uzayında bir vektör olduğunu söyleyebiliriz.

Klasik bir bit yazı-tura oyunundaki bir para gibidir, ya yazı yada tura gelir. Buna karşılık bir kubit gözlemlenene kadar $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ kuantum durumları arasındaki tüm durumlarda sürekli olarak bulunur ve ölçüldüğünde, ölçüm sonucuna göre olasılıksal olarak 0 veya 1 sonucunu verir. Örneğin

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \quad (2.1.3)$$

durumundaki bir kubit bakalım. Ölçüm yaptığımız zaman yaptığımız ölçümlerin %50'sinde 0, %50'sinde ise 1 sonucunu buluruz.

Buraya kadar kubit matematiksel bir nesne olarak tanımladık, fakat soyut olarak tanımlanmış olan bu kubitin daha iyi anlaşılması için onu tanımlamak üzere bir fotonun iki farklı polarizasyon durumu, düzgün bir manyetik alanda bulunan nükleer bir spinin yönelimi veya iki elektronik seviyeli bir atom gibi pek çok fiziksel sistem kullanılabilir; ancak soyut kavramlarla çalışmanın kolaylığından dolayı tanımlamalarımızı bu yönde devam ettireceğiz.

Kubitleri tasvir etmenin kullanışlı bir diğer yolu, onları geometrik olarak ifade edebildiğimiz Bloch küresi temsildir. (2.1.2) ifadesi ile verilen koşul nedeniyle (2.1.1) ifadesini

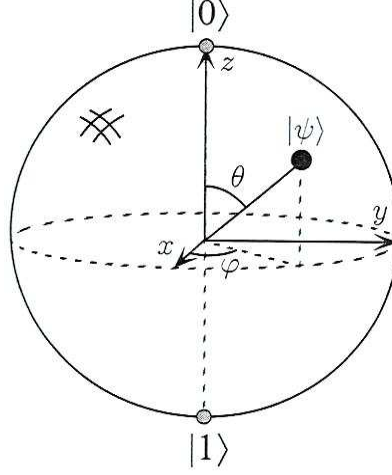
$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle \right), \quad (2.1.4)$$

şeklinde tekrar yazabiliriz. Burada θ , γ ve φ reel sayılar olup, $e^{i\gamma}$ terimi gözlem-

lenebilir etkilere sahip olmadığı için ihmal edilebilir. Böylece bir kubit

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad (2.1.5)$$

şeklinde belirtebiliriz. (2.1.5) ifadesindeki θ ve φ açıları üç boyutlu birim küre üzerinde bir nokta tanımlarlar. Şekil 2.1'den de görüldüğü gibi bir kubitin temsil edildiği bu üç boyutlu birim küreye Bloch küresi denir.



Şekil 2.1 Bir kubitin Bloch küresi temsili.

Bloch küresi tek bir kubitin durumunun görselleştirilmesi bakımından çok büyük öneme sahiptir. Ayrıca tek bir kubit ile ilgili pek çok işlem Bloch küresi üzerinde tanımlanabildiği için kuantum hesaplama ve kuantum bilgi çalışmalarında iyi bir test alanı oluşturur ve bu nedenle de kullanışlılık sağlar; ancak Bloch küresi temsilinin kullanımı tek bir kubit ile sınırlıdır, yani birden fazla kubit temsil etmek için Bloch küresinin genelleştirilmiş bir şekli yoktur.

Tek bir kubitin temsili için kullanılan Bloch küresi üzerindeki her bir nokta, bu kubitin bir durumunu yani bir bilgiyi gösterecektir. Geometrik olarak baktığımızda bu birim küre üzerinde sonsuz sayıda nokta bulunduğundan bir kubit ile sonsuz sayıda bilgiyi ifade edebiliriz. Ancak bir kubitin sonsuz sayıda bilgiye sahip olması onun gözlem anındaki davranışından dolayı yanıltıcıdır, çünkü ölçüm yaptığımızda sonuç yine 0 veya 1 olacaktır. Bunun yanında ölçme işlemi kubitin

durumunu da değiştirip $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ süperpozisyon durumundan, ölçüm sonucu ile uyumlu özel bir duruma çöktürecektir. Örneğin (2.1.3) ifadesi ile belirtilen $|\phi\rangle$ kubitinin ölçülmesi 0 sonucunu verirse ölçüm sonrası kubit $|0\rangle$ durumunda bulunacaktır. Bu kuantum mekaniğinin temel postülalarından biridir. Bu şekilde bir kubitte çok fazla bilgi bulunmasına rağmen ölçüm sonucunda bir kubitte ancak bir bilgi elde edebiliriz. Buradan ilginç bir sonuca varmak mümkündür: Teorik olarak tek bir kubit çok büyük miktarda bilgiye sahiptir ve sahip olunabilecek bilginin miktarı kubitlerin sayısı ile eksponansiyel olarak artacaktır. Bu şekilde çok sayıda kubitte oluşmuş bir kuantum bilgisayar, işlem hacmi bakımından düşünöldüğünde çok büyük bir potansiyele sahip olacaktır.

şimdi iki kubit durumuna bakalım. Eğer iki klasik bitimiz olsaydı 00, 01, 10 ve 11 şeklinde dört olası durumumuz olurdu. Benzer olarak iki kubitlik bir sistem $|0,0\rangle$, $|0,1\rangle$, $|1,0\rangle$ ve $|1,1\rangle$ şeklinde dört kompütasyonel baz durumuna sahip olacaktır. Her durumla ilgili bir kompleks katsayı içermek üzere iki kubit ifade eden durum vektörü

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|0,0\rangle + \alpha_{01}|0,1\rangle + \alpha_{10}|1,0\rangle + \alpha_{11}|1,1\rangle, \quad (2.1.6)$$

şeklinde bu dört durumun süperpozisyon durumunda bulunur.

İki kubitlik bir sistem için ölçüm yaptığımızda kubitlerin bir alt kümesini ölçeriz. Örneğin birinci kubit ölçecek olursak, ölçüm $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$ olasılığı ile 0 sonucunu verir ve ölçüm sonrası durum vektörü

$$|\psi'\rangle = \frac{\alpha_{00}|0,0\rangle + \alpha_{01}|0,1\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}, \quad (2.1.7)$$

olur.

İki kubitlik önemli bir kuantum durumu olarak Bell durumunu (EPR çifti) verebiliriz

$$\frac{|0,0\rangle + |1,1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.1.8)$$

Bell durumu kuantum hesaplama ve kuantum bilgi alanlarında yer alan

kuantum teleportasyon ve süperyoğunluklu kodlama gibi pek çok ilginç olayda anahtar rol oynar. Bell durumu ilginç bir özelliğe sahiptir. İlk kubitin ölçülmesinden iki olası durum elde edilir. Bunlar $\frac{1}{2}$ olasılıkla 0 ve $\frac{1}{2}$ olasılıkla 1'dir. $\frac{1}{2}$ olasılıkla 0 ölçtüğümüzde bu ölçüm sonucu durum $|\varphi'\rangle = |0,0\rangle$ olur, $\frac{1}{2}$ olasılıkla 1 ölçtüğümüzde ise bu ölçüm sonucu durum $|\varphi'\rangle = |1,1\rangle$ şeklinde olur. Benzer olarak ikinci kubitin ölçümü de birinci kubitte aynı sonucu verir. Yani, ölçüm sonuçları arasında korelasyon vardır. Einstein, Podolsky ve Rosen'in (1935) ünlü EPR makalesinde de ilk olarak Bell durumunun bu ilginç özellikleri gösterilmiştir: Daha sonra bu görüş John Bell (1964) tarafından geliştirilmiştir. Bell çalışmasında bu korelasyonların klasik sistemler arasındaki korelasyonlardan daha güçlü olduğunu göstermiştir.

Bir ve iki kubit için verilen bilgilerin ışığında kubitlerin sayısı arttırılabilir. Daha genel olarak söyleyecek olursak n tane kubitten oluşmuş bir sistem düşünülebilir. Böyle bir sistemin kompütasyonel baz durumları $|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$ şeklindedir ve bu sisteme ait kuantum durumu 2^n tane genlik ile belirlenir.

Başlangıçta tanımlamaları yaparken $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ şeklindeki bir kubitin kuantum durumunun ölçülmesi sonucunda, $|\alpha|^2$ olasılığıyla 0 veya $|\beta|^2$ olasılığıyla 1 bulunacağını ve bunlara karşılık gelen kubit durumlarının da sırasıyla $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ şeklinde olacağını söyledik. $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumları bir kubit için çok sayıdaki olası kompütasyonel baz durumlarından sadece biridir. Diğer bir olası seçim:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= (|0\rangle + |1\rangle) / \sqrt{2}, \\ |-\rangle &= (|0\rangle - |1\rangle) / \sqrt{2}, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

kümesi olabilir. $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ gibi bir kuantum durumunu $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ kuantum durumları cinsinden tekrar ifade edecek olursak

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \\ &= \alpha \left[\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \right] + \beta \left[\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \right], \\ &= \left[\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \right] |+\rangle + \left[\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} \right] |-\rangle, \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

elde edilir. Burada $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ durumları artık yeni kompütasyonel baz durumlarıdır. Bu yeni baza göre ölçme yapılabilir ve ölçüm sonucunda $|\alpha+\beta|^2/2$ olasılığı ile '+', $|\alpha-\beta|^2/2$ olasılığı ile '-' bulunur. Ölçme sonrası durumlar ise sırasıyla $|+\rangle$ veya $|-\rangle$ olacaktır.

Daha genel olarak ifade etmek istersek, herhangi bir kuantum durumunu $|a\rangle$ ve $|b\rangle$ baz durumlarının $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ şeklindeki bir lineer kombinasyonu olarak belirtmek mümkündür. Hatta $|a\rangle$ ve $|b\rangle$ baz durumları ortonormal ise bu bazlara göre ölçme yapmak da mümkündür. Ölçme sonucu $|\alpha|^2$ olasılığıyla a veya $|\beta|^2$ olasılığıyla b olacaktır. Ölçme sonrası durumlar ise sırasıyla $|a\rangle$ veya $|b\rangle$ olacaktır. Bildiğimiz gibi olasılıkların toplamının $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ olması için de ortonormallik koşulu gereklidir. Benzer şekilde çok sayıda kubitte oluşmuş bir kuantum sisteminin de herhangi bir ortonormal bazda ölçümü yapılabilir. Bu genelleştirilmiş formalizmin kullanılmasının en önemli nedeni ise gözlemlenmiş deneysel sonuçları tanımlamamıza imkan sağlamasıdır.

Kuantum hesaplama ve kuantum bilgi teorisinde kubitlerden başka temel birimler de bulunur. En genel olarak bunlar kudit olarak adlandırılır. Biz tezimizin kapsamında yapmış olduğumuz çalışmalarda iki seviyeli kuantum sistemleri olan kubitlerden başka üç seviyeli kuantum sistemleri olan kutritleri de kullandık.

Klasik bir bit ile bir kubit arasında analogi kurulmasına benzer şekilde klasik bir trit (ternary digit) ile bir kutrit arasında da bir analogi kurulabilir. Bir kutrit üç seviyeli bir kuantum sistemidir ve üç tane ortogonal baz durumuna sahiptir. Bu baz durumları genellikle $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ şeklinde gösterilir. Aynı kubitte olduğu gibi bir kutrit de klasik bir tritten farklı olarak bu üç baz durumunun süperpozisyon durumunda bulunabilir

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle. \quad (2.1.11)$$

Kubitteki duruma benzer şekilde (2.1.11) ifadesi ile verilen kutriti ölçtüğümüzde $|\alpha|^2$ olasılığıyla 0, $|\beta|^2$ olasılığıyla 1 veya $|\gamma|^2$ olasılığıyla 2 sonuçlarını buluruz.

Olasılıklar toplamı yine 1 olmak zorunda olduğundan

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1, \quad (2.1.12)$$

olacaktır. Kutritlerde de kubitlerde olduğu gibi bir genelleştirme yapacak olursak n tane kutritten oluşmuş bir sistem için de olası 3^n tane kuantum durumu bulunacaktır.

Kubitlere göre bazı avantajlara sahip olmaları nedeniyle kutritler kuantum bilgi alanındaki çalışmalarda kendilerine yer bulmuşlardır. Örneğin kutritler üç seviyeli sistemler oldukları için daha fazla bilgi depolayabilirler. Bunun yanında kubitlere göre sistemin çevre ile etkileşmesinden kaynaklanan olumsuz etkilere (decoherence) de daha dayanıklıdırlar (Melikidze, Dobrovitski, De Raedt, Katsnelson, ve Harmon, 2004).

2.2 Kuantum Mantık Kapıları

Mantık kapıları bilginin işlenip bir formdan diğerine dönüştürülmesi için işlem yapan elemanlardır. Şimdi klasik mantık kapılarından hareket edip basitten başlayarak kuantum mantık kapılarına ve bunların uygulamalarına kısaca bakalım.

2.2.1 Tek Kubitlik Mantık Kapıları

Tek bitlik klasik bir mantık kapısı olan DEĞİL (NOT) kapısını düşünelim. Bu kapı $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$ şeklinde bir dönüşüm yapıp 0 ve 1 durumlarını yer değiştirir. Klasik durumdakine benzer şekilde kubitler için de bu tür bir dönüşüm yapan bir KUANTUM-DEĞİL kapısı düşünülebilir. Bu kapı $|0\rangle \rightarrow |1\rangle, |1\rangle \rightarrow |0\rangle$ dönüşümünü yaparak, ele aldığı

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.2.1)$$

kubitini, $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ kuantum durumlarının kendi aralarında değiştiği

$$|\psi'\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle, \quad (2.2.2)$$

şeklinde belirtilen karşı bir kuantum durumuna çevirir.

Kuantum mantık kapılarının matrislerle gösterilmesi kuantum hesaplama ve kuantum informasyon teorisinde alışılmış bir yöntemdir ve bu, kapıların yapmış olduğu işlemlerin anlaşılmasında kolaylık sağlar. Bunu görmek için KUANTUM-DEĞİL kapısının

$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.3)$$

ile verilen matris formundaki gösterimine ve bu kapının yapmış olduğu işleme bakalım. Eğer $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ kuantum durumu

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (2.2.4)$$

şeklindeki gibi vektör gösteriminde yazılırsa, KUANTUM-DEĞİL kapısının bu kuantum durumuna uygulanmasından elde edilecek sonuç

$$X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.2.5)$$

olur. Buradan KUANTUM-DEĞİL kapısının yapmış olduğu işlemin, $|0\rangle$ kuantum durumunu X matrisinin ilk kolonuna karşılık gelen durumla, benzer şekilde $|1\rangle$ kuantum durumunu da X matrisinin ikinci kolonuna karşılık gelen durumla değiştirdiği söylenebilir. Böylece bir kubite etki eden kuantum mantık kapıları 2×2 'lik matrislerle ifade edilmiş olur; ancak tüm 2×2 'lik matrisleri kuantum mantık kapısı olarak dşinemeyiz. $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ile verilen bir kuantum durumu için $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ şeklinde bir normalizasyon koşulu vardır. Bu koşul kubite kuantum mantık kapısı etki ettikten sonraki $|\psi'\rangle = \alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle$ kuantum durumu için de geçerli olmalıdır yani kubit üzerine etki eden işlemler, onu ifade eden durum vektörünün normunu değişmez bırakmalıdır. Bu nedenle de kuan-

tum mantık kapılarını temsil eden matrisler üniter olmak zorundadırlar.

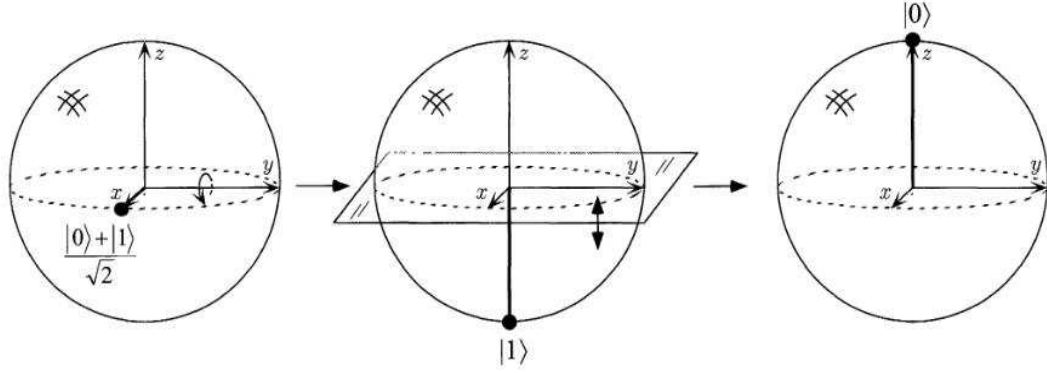
Kuantum mantık kapılarını oluşturmak için üniterlik dışında herhangi bir koşul yoktur. Herhangi bir üniter matris geçerli bir kuantum kapısı olarak belirlenebilir. Bu nedenle çok sayıda tek kubitlik kuantum mantık kapısı vardır. Bu noktada ilginç olan durum ise klasik olarak sadece DEĞİL kapısının tek bitlik bir kapı olmasıdır. Tek kubitlik önemli kuantum mantık kapılarından diğer ikisi ise

$$Z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.6)$$

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.7)$$

şeklindeki Z kapısı ve H Hadamard kapısıdır. Z kapısı $|0\rangle$ kuantum durumunu değişmeden bırakıp $|1\rangle$ kuantum durumunun sadece işaretini değiştirir. Hadamard kapısı ise $|0\rangle$ kuantum durumunu $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ şeklinde $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ arasında bir kuantum durumuna, $|1\rangle$ kuantum durumunu ise $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ şeklindeki $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ arasındaki başka bir kuantum durumuna çevirir. Bazen Hadamard kapısı DEĞİL kapısının karekökü olarak da tanımlanabilir. Ancak H^2 bir DEĞİL kapısı olmayıp $H^2 = I$ şeklindedir. Buradan da H Hadamard kapısının bir duruma iki kere uygulanması ile hiçbir sonucun elde edilemeyeceğine varılabilir.

Hadamard kapısı en kullanışlı kuantum mantık kapılarından biridir ve gerçekleştirilmiş olduğu işlemlerin görselleştirilmesi Bloch küresi yardımıyla verilebilir. Şekil 2.2'den görüldüğü gibi bu gösterimde Hadamard kapısının yapmış olduğu işlem, kürenin önce y -ekseni etrafında 90° ve arkasından da x -ekseni etrafında 180° dönmesi şeklindedir. Benzer bir şekilde Bloch küresi yardımıyla diğer tek kubitlik kuantum mantık kapılarının da görselleştirilmesi yapılabilir. Bu kapıların yapmış olduğu işlemler de Bloch küresi üzerinde dönme ve yansımalara karşılık gelmektedirler (Nielsen ve Chuang, 2000). Bazı önemli tek kubitlik kuantum



Şekil 2.2 Hadamard kapısının $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ girdi durumuna yapmış olduğu etkinin Bloch küresi üzerindeki temsili.

mantık kapılarının yapmış olduğu işlemler

$$X(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle, \quad (2.2.8)$$

$$Y(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = -i(\beta|0\rangle - \alpha|1\rangle), \quad (2.2.9)$$

$$Z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle, \quad (2.2.10)$$

$$H(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right), \quad (2.2.11)$$

şeklinde verilebilir. Bunlara ait matris gösterimleri ise sırasıyla

$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.12)$$

$$Y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.13)$$

$$Z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.14)$$

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.15)$$

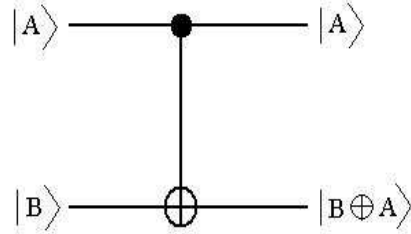
şeklindedir.

Daha önce tek kubitlik kuantum mantık kapılarının 2×2 'lik üniter matrislerle

gösterilebileceğini söylemiştik. Buna göre 2×2 'lik çok sayıda üniter matris olduğundan çok sayıda kuantum mantık kapısı bulunacaktır, ancak bunların içinden bazı belli kapıların oluşturduğu küçük bir grubun özelliklerinin anlaşılması, tüm bu kuantum mantık kapılarının özelliklerinin anlaşılmasını sağlar.

2.2.2 Çok Kubitlik Mantık Kapıları

KONTROLLÜ-DEĞİL (KDEĞİL) kapısı çok kubitlik bir kuantum mantık kapısıdır. Bu kapı kontrol kubitini ve hedef kubitini olarak bilinen iki giriş kubitine sahiptir. Şekil 2.3'te KDEĞİL kapısı için devre gösterimi görülmektedir.



Şekil 2.3 KONTROLLÜ-DEĞİL (KDEĞİL) kuantum mantık kapısının devre gösterimi.

Burada üstteki çizgi kontrol kubitini, alttaki çizgi ise hedef kubitini temsil eder. KDEĞİL kuantum mantık kapısının çalışması şöyledir: Eğer kontrol kubitini 0 ise hedef kubitini aynen kalır, eğer kontrol kubitini 1 ise hedef kubitini döner

$$|0, 0\rangle \rightarrow |0, 0\rangle; \quad |0, 1\rangle \rightarrow |0, 1\rangle; \quad |1, 0\rangle \rightarrow |1, 1\rangle; \quad |1, 1\rangle \rightarrow |1, 0\rangle. \quad (2.2.16)$$

Tek kubitlik kuantum mantık kapılarında olduğu gibi KONTROLLÜ-DEĞİL

kuantum mantık kapısını ifade etmenin diğer bir yolu da

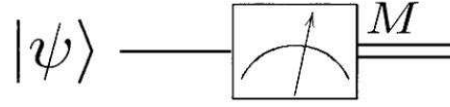
$$U_{KD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.17)$$

şeklindeki matris gösterimidir. Buradan U_{KD} matrisinin ilk kolonunun $|00\rangle$ durumu oluşturmak için bir dönüşüm tanımladığı görülmektedir. Benzer şekilde sırasıyla $|01\rangle$, $|11\rangle$ ve $|10\rangle$ için olan durumlar da (2.2.17) ifadesinden görülmektedir. Tek kubitlik kuantum mantık kapılarında olduğu gibi burada da olasılık korunacağı için U_{KD} üniter bir matris olmalıdır.

Kuantum mantık kapılarını klasik mantık kapılarından ayıran en önemli özellik kuantum mantık kapılarının geri dönüşlü (reversible) olmasıdır. Böylece bir kuantum mantık kapısı her zaman başka bir kuantum mantık kapısı aracılığıyla geri döndürülebilir.

2.3 Kuantum Devreler

Kuantum devreleri tüm kuantum işlemleri için kullanışlı modellerdir. Kuantum devreleri, kuantum mantık kapılarından ve bunlar arasındaki bağlantılardan oluşur. Bu şekilde oluşturulmuş devrelerin okunuşu soldan sağa doğrudur. Devredeki her bir çizgi bir bağlantıyı temsil eder ancak bu bağlantının klasik devrelerde olduğu gibi fiziksel bir tel olması gerekmez. Bu foton gibi uzayda bir noktadan başka bir noktaya hareket eden bir parçacık olabilir. Devreye giren tüm durumların kompütasyonel baz durumlarında olması genellikle kabul edilen bir durumdur. Ölçme kuantum devrelerinde önemli bir işlemdir. Ölçme işlemi devre modelinde Şekil 2.4 'de olduğu gibi bir metre sembolü ile gösterilir. Daha önce de tanımlamış olduğumuz gibi bu işlem $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ şeklindeki tek bir kubitin kuantum durumunu $|\alpha|^2$ olasılığıyla 0 veya $|\beta|^2$ olasılığıyla 1 sonucunu veren olasılıksal M klasik bitine çevirir. Devre üzerinde de klasik bitin kubitten

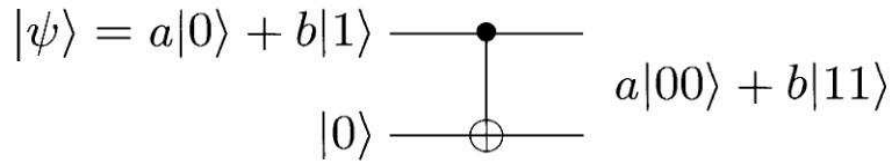


Şekil 2.4 Ölçme işleminin kuantum devre gösterimi.

farklı olarak gösterilmesi için iki çizgi ile belirtilir.

2.3.1 Kubit Kopyalayan Devre

Kuantum devrelerinin en önemlisi bir kubit kopyalayan devredir. Bu devrede kullanılan KDEĞİL kuantum mantık kapısı, kuantum bilgi teorinin önemli bir özelliğini gösterir.



Şekil 2.5 Kubit kopyalayan kuantum devresi.

Şekil 2.5’de olduğu gibi durumu bilinmeyen $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ şeklindeki bir kubit bir KDEĞİL kapısı kullanarak kopyalamaya çalışalım. Şekilden de görüldüğü gibi iki kubitlik girdi durumu

$$[a|0\rangle + b|1\rangle] |0\rangle = a|0,0\rangle + b|1,0\rangle, \quad (2.3.1)$$

şeklinde yazılabilir. KDEĞİL kapısı (2.3.1) ile verilen girdi durumuna uygulandığında elde edilen çıktı durumu $a|0,0\rangle + b|1,1\rangle$ olur. Buradan anlaşıldığı gibi $|\psi\rangle |\psi\rangle$ oluşturmak için sadece $|\psi\rangle$ ’nin $|0\rangle$ veya $|1\rangle$ olduğu girdi durumlarının Şekil 2.5’deki devreye uygulanmasıyla kopyalama gerçekleşir. Yani $|0\rangle$ veya $|1\rangle$ şeklinde kodlanmış klasik bilgiyi kopyalamak için kuantum devreleri kullanılabilir.

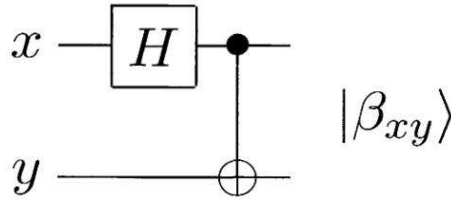
Fakat daha genel bir $a|0\rangle + b|1\rangle$ durumu için kopya durumu

$$|\psi\rangle|\psi\rangle = a^2|0,0\rangle + ab|0,1\rangle + ab|1,0\rangle + b^2|1,1\rangle, \quad (2.3.2)$$

olur. (2.3.1) ve (2.3.2) ifadelerinin karşılaştırılması sonucu $ab = 0$ olmadıkça kopyalama devresi girdiğimiz kuantum durumunu kopyalayamaz. Böylece bilinmeyen bir kuantum durumunun kopya edilemeyeceğini söyleriz. Kubitlerin bu kopyalanmama özelliği kopyalanamama teoremi olarak bilinir ve klasik ile kuantum bilgi teorisi arasındaki en temel farklardan birini oluşturur.

2.3.2 Bell Durumları

Bell durumları kuantum hesaplama ve kuantum bilgi teorisi için çok önemli yer tutar. Şekil 2.6'da görülen devre Bell durumlarını üreten kuantum devresidir. Şekilden de görüldüğü gibi bu devre bir Hadamard kapısından ve onu



Şekil 2.6 Bell durumları üreten kuantum devresi.

takip eden bir KDEĞİL kapısından oluşur. Kullanılan bu kuantum devresi $|0,0\rangle$, $|0,1\rangle$, $|1,0\rangle$ ve $|1,1\rangle$ şeklindeki dört kompütasyonel baz durumunu

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|0,0\rangle + |1,1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.3.3)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|0,1\rangle + |1,0\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.3.4)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|0,0\rangle - |1,1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.3.5)$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{|0, 1\rangle - |1, 0\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.3.6)$$

durumlarına dönüştürür. Bu durumlar Bell durumları veya EPR çiftleri olarak bilinirler. Kapının yapmış olduğu işlemi $|0, 0\rangle$ durumu üstünde açıklayacak olursak, ilk olarak Hadamard kapısına $|0, 0\rangle$ durumu uygulanır. Hadamard kapısı kubitini $(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle/\sqrt{2}$ şeklinde bir süperpozisyon durumuna dönüştürür. Daha sonra elde edilen bu durum KDEĞİL kuantum mantık kapısına uygulanır ve $(|0, 0\rangle + |1, 1\rangle)/\sqrt{2}$ bulunur. Diğer kompütasyonel baz durumları için de benzer işlemler yapılarak Bell durumları elde edilir (Nielsen ve Chuang, 2000).

BÖLÜM ÜÇ

KUANTUM DOLAŞIKLIK

Bu bölümde kuantum dolaşıklığı (quantum entanglement) tanımlayıp, dolaşıklığın nicel ve nitel ölçülerinden (measure) bazılarını kısa bir bakış yapacağız.

3.1 Genel Bakış

1930'ların başlarında relativistik olmayan kuantum mekaniğinin temel ilkelerinin tamamlanmasından kısa bir süre sonra 1935'te Einstein, Podolsky ve Rosen (EPR) (1935) ve yine aynı dönemde Schrödinger (1935), kuantumsal işleyişin fiziğinin 21.yy'da ilgi merkezlerinden birini oluşturacak ilginç bir özelliğini ortaya koymuşlardır. Bu özellik birleşik (composite) bir sistemin global kuantum durumlarının var olduğunu söyler ve bu birleşik sistem, kendini oluşturan alt sistemlerin her birinin kuantum durumlarının bir çarpımı şeklinde yazılamaz. Bu olgu dolaşıklık (entanglement) olarak bilinir ve birleşik bir sistemi oluşturan alt sistemler arasında istatistiksel ilişkilerin içsel bir düzenini belirtir (Schrödinger, 1935).

Kuantum formalizminin en klasik olmayan ifadesi olarak düşünülen dolaşıklığın ilk olarak Einstein, Podolsky ve Rosen tarafından kuantum mekaniğinin tamamlanmamış bir teori olduğunu ileri sürdükleri ünlü EPR çalışmasında (1935) kullanılmış olması çok ilginçtir. Onlara göre fiziksel nicelikler, ölçme yapılmadan önce de ölçme yapıldığındaki değerlere sahiptir, ancak Bell (1964) daha sonra bu görüşün aksini göstermiştir. Bell'e göre dolaşıklık EPR'nin önerdiği bu düşünceyi tamamen dışlar.

1964'te Bell EPR'nin sonucu olarak fiziksel gerçekliğin kuantum tanımının tamamlanmamış olan görüşünü doğru bir hipotez olarak kabul edip, EPR'nin deterministik dünya görüşünü yerel gizli değişkenler modeli (local hidden variable model (LHVM)) olarak formalize etmiştir. Bu model şu üç durumu kabul

eder:

- (i) Parçacıkların özelliklerini belirlemek için yapılan ölçmelerin sonuçları bu ölçme işlemlerinden bağımsızdır (realism),
- (ii) Herhangi bir yerden elde edilen sonuçlar bu yerden tamamen farklı bir yerde oluşan olaylardan bağımsızdır (locality),
- (iii) Bir yerde yerel ölçü aletlerinin bulunması oradaki yerel sonuçları belirleyen gizli değişkenlerden bağımsızdır (free will).

Bell (1964) çalışmasında bu üç kabulün iki kısımlı (bipartite) sistemleri içeren deneylerdeki istatistiksel korelasyonlara, Bell eşitsizlikleri şeklinde sınırlamalar yapacağını göstermiştir. Hemen arkasından da bazı dolaşık (entangled) kuantum durumlarının uygun şekilde ölçümleri yapıldığında, sonuçlardan elde edilen olasılıkların Bell eşitsizliğine uymadığını göstermiştir. Bu şekilde dolaşıklık, kuantum formalizminin belirleyici bir özelliği olduğu sonucuna varılmıştır. Bu nedenle kuantum korelasyonlarını herhangi bir klasik formalizm ile ifade etmek imkansızdır.

Daha sonra Greenberger, Horne ve Zeilinger'in (GHZ) (1989) ikiden fazla parçacığın olması durumundaki dolaşıklığın LHVM ile bir çelişkiye yol açacağını göstermesi ile bu alanda yapılan çalışmalarda Bell eşitsizliklerinin de ilerisine gidilmiştir. Bu şekilde 90'ların başlarında Bell eşitsizliklerinin ihlali ile ilgili genel teorik sonuçlar elde edilmiştir (Gisin, 1991; Popescu ve Rohrlich, 1992).

Dolaşıklığın düşünce deneylerinden laboratuvar gerçekliğine geçmesi ise 1960'ların ortalarında başlamıştır (Freedman ve Clauser, 1972; Kocher ve Commins, 1967), ancak deneysel olarak Bell eşitsizliklerinin ihlal edilmesini inandırıcı bir şekilde ilk olarak test eden Aspect, Grangier ve Roger olmuştur (1982). Bu dönemden sonra laboratuvar ortamında LHVM'e karşı kuantum formalizmini deneysel olarak test eden pek çok çalışma gerçekleştirilmiştir (Bovino, Castagnoli, Cabello, ve Lamas-Linares, 2006; Hasegawa, Loidl, Baron, ve Rauch, 2003; Kwiat ve diğer., 1995; Ou ve Mandel, 1988; Rowe ve diğer., 2001).

Aslında dolaşıklıkla klasik olmayan temel bir yönü daha 1935'te anlaşılmıştı. EPR makalesinden esinlenen Schrödinger (1935) kuantum formalizminin bazı fiziksel sonuçlarını analiz etmiş ve bunun sonucunda şunu belirtmiştir: İki parçacıklı EPR durumunda, her bir parçacığı bireysel olarak düşünüp bunların alt sistemler olarak ifade edilmesine imkan verilmemesi, alt sistemlerin dolaşık olması anlamına gelmektedir. Bu nedenle iki parçacığın birden ifade edildiği daha büyük boyutta bir uzay gereklidir. Bunun sonucunda birleşik sistem hakkında maksimum bilgi durumuna sahip olduğumuz halde bireysel sistemlerin her biri hakkındaki bilgimiz azalır ve yetersiz kalır.

Malesef dolaşıklıkla bu tuhaf görüntüsü kuantum çerçevesinde bilgi kavramı ile ilişkilendirilmiş olduğu halde uzun süre anlaşılamamıştır. Daha sonra von Neumann entropisine dayanan entropik eşitsizlikler cinsinden tekrar şekillendirilmiştir (Cerf ve Adami, 1997; R. Horodecki, P. Horodecki, ve M. Horodecki, 1996). Bu eşitsizliklerin ihlali kuantum durumlarının dolaşıklığının bir işaretidir. Ancak bunun fiziksel anlamı çok açık değildir.

Günümüzde dolaşıklık teorisi kuantum kriptoloji (quantum cryptography) (Ekert, 1991), kuantum yoğunkodlama (quantum dense coding) (Bennett ve Wiesner, 1992), kuantum teleportasyon (quantum teleportation) (Bennett ve diğer., 1993) ve dolaşıklık değiş-tokuşu (entanglement swapping) (Bose, Vedral, ve Knight, 1998; Yurke ve Stoller, 1992a, 1992b; Zukowski, Zeilinger, Horne, ve Ekert, 1993) gibi önemli keşiflere kaynak oluşturmuştur. Dolaşıklıkla dayanan bu çalışmalar yenilikçi deneylerle de gösterilmiştir (Boschi, Branca, Martini, Hardy, ve Popescu, 1998; Bouwmeester ve diğer., 1997; Furusawa ve diğer., 1998; Jennewein, Simon, Weihs, Weinfurter, ve Zeilinger, 2000). Tüm bu çalışmalar kuantum bilgi kavramı adı verilen yeni bir disiplinler arası alanın temellerini oluşturur ve bunların hepsi dolaşıklıkla merkezi bir kavram olarak içine alır (Bouwmeester, Ekert, ve Zeilinger, 2000; Nielsen ve Chuang, 2000).

Kuantum dolaşıklık, temelde hoş olmayan ama ilginç üç özelliğe sahiptir. Genel olarak dolaşıklık oldukça karmaşık bir yapıdır, çevreyle olan etkileşmesi nedeniyle çok kırılmalıdır ve sistemler temas halinde olmayıp birbirlerinden çok uzak olsalar

bile ortalama bir artış göstermez. Bunların dahilinde dolaşıklık teorisi şu üç soruya cevap arar:

- (i) Teorik ve deneysel olarak en uygun dolaşıklığı nasıl belirleriz?
- (ii) Dolaşıklığın bozulması nasıl tersine çevrilebilir?
- (iii) Dolaşıklığı nasıl kontrol edip, nicel olarak nasıl belirleyebiliriz?

İlk iki sorunun kaynağı olarak Werner (1989) ve Popescu'nun (1995) çalışmaları gösterilebilir. Werner çalışmasında sadece ayrılabilir durumlar için kesin bir tanım vermemiş bunun yanında ayrılabilir durumlara benzer şekilde LHVM'e izin veren ve bu şekilde de Bell eşitsizliğini ihlal etmeyen dolaşık kuantum durumlarının olduğunu da belirtmiştir. Popescu ise çalışmasında bu şekilde bir kuantum durumunda bulunan bir sisteme yerel işlemler uygulayarak yeni bir kuantum durumu elde edileceğini ve bu durumun dolaşıklığının, Bell eşitsizlikleriyle belirlenebileceğini belirtmiştir.

Hemen arkasından Peres (1996), ele alınan kuantum durumu eğer ayrılabilir ise birleşik iki durumlu bir sistemin yoğunluk matrisinin, bu birleşik sistemin alt sistemlerinin biri üzerinden kısmi transpozunun alınmasından sonra da ayrılabilir olduğunu ifade etmiştir. İlginç bir şekilde Peres koşulu, dolaşıklık için güçlü bir testtir. Bunun sonucunda kısmi transpoz bir pozitif eşleşme (positive map) olduğundan, pozitif eşleşmeler dolaşıklık için iyi birer belirleyici olarak hizmet kullanılabilirler, ancak fiziksel olmadıkları için laboratuvarında doğrudan uygulanamazlar. Bu noktada Jamiolkowski izomorfizmi (Jamiolkowski isomorphism) fiziksel ölçülebilir nicelikleri yani Hermitik operatörleri kullanmamıza izin verir (Jamiolkowski, 1972). Bu hem fiziksel gözlemlenebilirleri hem de fiziksel olmayanları biraraya getirip ayrılabilirlik için gerekli ve yeterli bir koşul oluşturur (M. Horodecki, P. Horodecki, ve R. Horodecki, 1996).

3.2 Bell Eşitsizlikleri

Klasik dünya ile kuantum dünyası arasında bir takım farklılıklar vardır. Bu farklılıkların anlaşılması klasik olarak yapılması zor veya imkansız olan bilgi işlemelerinin anlaşılması açısından çok önemlidir. Bell eşitsizlikleri ise klasik ile kuantum arasındaki farklılığı ortaya koyan en temel ve ilgi çekici örneklerdir. Bu nedenle bu kısımda Bell eşitsizliklerine değineceğiz ancak bunu yaparken amacımız kuantum dünyasında karşılaşılan paradoksları göstermek değil dolaşıklığı nicel ve nitel olarak incelemektir.

Şöyle bir deney düşünelim: Bir çift kuantum parçacığımız olsun ve bu parçacıklardan biri Ayşe'nin diğeri de Bora'nın olsun. Ayşe'nin parçacığını A ile Bora'nın parçacığını da B ile gösterelim. Ayrıca Ayşe'ninkiler A_1 ve A_2 , Bora'ninkiler B_1 ve B_2 olmak üzere her biri iki kısım ölçme aletine sahip olsunlar. Her ikisi de aynı anda ve birbirlerinden bağımsız olarak bir ölçme aleti seçip bunu kullanarak ölçme yapsınlar. Her bir ölçmenin sonucu da $+1$ yada -1 olsun. Bell eşitsizlikleri olarak adlandırılan geniş bir grubun bir üyesi olarak Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) eşitsizliği

$$E(A_1B_1) + E(A_2B_1) + E(A_2B_2) - E(A_1B_2) \leq 2, \quad (3.2.1)$$

şeklinde belirtilir (Clauser, Horne, Shimony, ve Holt, 1969). Buradaki $E(A_iB_j)$ ifadesi Ayşe'nin A_i ile Bora'nın da B_j ile ölçme yaptığındaki beklenen değeri göstermektedir.

Bu durumda iki kabul yapılır:

- (i) Her bir ölçme, sistemin objektif olarak bir özelliğini gösterir. Bunun anlamı parçacığın aynı klasik fizikte olduğu gibi ölçme yapılmadan önce o parçacığın o özelliğine ait bir niceliğe sahip olmasıdır.
- (ii) Ayşe'nin yaptığı ölçme Bora'nın yaptığı ölçmeyi etkilemez. Bu relativite teorisinden kaynaklanır çünkü hiç bir sinyal ışık hızından daha hızlı hareket

edemez.

Eşitsizliği ispat etmek için beklenen değerlerin toplamını

$$\begin{aligned} E(A_1B_1) + E(A_2B_1) + E(A_2B_2) - E(A_1B_2) \\ = E(A_1B_1 + A_2B_1 + A_2B_2 - A_1B_2), \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$= E(A_1(B_1 - B_2) + A_2(B_1 + B_2)), \quad (3.2.3)$$

şeklinde yazarız. Her bir ölçmenin sonucu ± 1 olduğundan bu bizi şöyle iki sonuca götürür:

- $B_1 = B_2$: Bu durumda $B_1 - B_2 = 0$ ve $B_1 + B_2 = \pm 2$ olduğundan, $A_1(B_1 - B_2) + A_2(B_1 + B_2) = \pm 2$ olur.
- $B_1 = -B_2$: Bu durumda $B_1 - B_2 = \pm 2$ ve $B_1 + B_2 = 0$ olduğundan, $A_1(B_1 - B_2) + A_2(B_1 + B_2) = \pm 2$ olur.

Böylece her iki durumda da $A_1B_1 + A_2B_1 + A_2B_2 - A_1B_2 = \pm 2$ olur. Bu durumda Bell eşitsizliği

$$\begin{aligned} E(A_1B_1) + E(A_2B_1) + E(A_2B_2) - E(A_1B_2) \\ = E(A_1B_1 + A_2B_1 + A_2B_2 - A_1B_2), \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$= \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2)(a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 - a_1b_2) \leq 2, \quad (3.2.5)$$

olur. Burada $p(a_1, a_2, b_1, b_2)$ ile belirtilen ifade ölçme yapılmadan önce sistemin $A_1 = a_1, A_2 = a_2, B_1 = b_1$ ve $B_2 = b_2$ durumunda bulunma olasılığıdır.

Kuantum mekaniği bu eşitsizliği ihlal eder. Şimdi de kısaca Ayşe ve Bora'nın bu eşitsizliği nasıl ihlal ettiğine bakalım. Bunu görmek için her birine iki farklı

gözlemlenebilir verelim

$$A_1 = Z_1, \quad (3.2.6)$$

$$A_2 = X_1, \quad (3.2.7)$$

$$B_1 = \frac{-Z_2 - X_2}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.8)$$

$$B_2 = \frac{Z_2 - X_2}{\sqrt{2}}. \quad (3.2.9)$$

Ayrıca

$$|\psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.10)$$

olmak üzere bu gözlemlenebilirlerin beklenen değerleri

$$E(A_1B_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.11)$$

$$E(A_2B_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.12)$$

$$E(A_2B_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.13)$$

$$E(A_1B_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.14)$$

şeklindedir. Böylece (3.2.1) ifadesi ile verilen eşitsizliğin sağlanmadığı görülür

$$E(A_1B_1) + E(A_2B_1) + E(A_2B_2) - E(A_1B_2) = 2\sqrt{2} \not\leq 2. \quad (3.2.15)$$

Buradan da anlaşıldığı gibi bir EPR çiftinin yani dolaşık kuantum durumlarının Bell eşitsizliğini ihlal ettiği görülür.

3.3 Dolaşık ve Ayrılabilir Kuantum Durumları

Kuantum bilgi işlemde kullanılan pek çok kavram en iyi şekilde iki kısımlı sistemler kullanılarak açıklanabildiği için ve tezin kapsamında yapmış olduğumuz hesaplamalarda iki kısımlı sistemleri kullandığımız için dolaşıklık ile ilgili matematiksel tanımlamalarımızı iki kısımlı sistemleri göz önünde bulun-

durarak yapacağız.

Kuantum mekaniğinin çok büyük bir kısmı ayrılabilir durumlardan oluşur ve bunlar Bell eşitsizliklerini ihlal etmezler. Matematiksel olarak tanımlamak gerekirse, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ Hilbert uzayında bulunan bir $|\psi\rangle$ saf durumu (pure state) $|\psi^A\rangle \in \mathcal{H}_A$ ve $|\psi^B\rangle \in \mathcal{H}_B$ olmak üzere;

$$|\psi\rangle = |\psi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle, \quad (3.3.1)$$

şeklinde yazılabiliyorsa ayrılabilir. Aksi halde bu $|\psi\rangle$ kuantum durumu dolaşıktır denir. Ayrılabilir saf durumlara örnek olarak $|\psi\rangle = |0,0\rangle$ kuantum durumu verilebilir. Dolaşık saf durumlara örnek olarak ise daha önce (2.3.3-6) ifadeleri ile verilen $|\beta_{00}\rangle$, $|\beta_{01}\rangle$, $|\beta_{10}\rangle$ ve $|\beta_{11}\rangle$ şeklindeki Bell durumları verebilir.

Bir karma durum (mixed state) ise eğer iki kişi arasında klasik bir yolla hazırlanıyorsa ayrılabilir. Bu şekilde hazırlanmış bir yoğunluk matrisi (density matrix) sadece klasik korelasyonlar içerir. Matematiksel olarak ifade edecek olursak bir karma durum eğer

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i^A\rangle \langle \psi_i^A| \otimes |\psi_i^B\rangle \langle \psi_i^B|, \quad (3.3.2)$$

$$= \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \quad (3.3.3)$$

şeklinde yazılabiliyorsa ayrılabilir, yazılamıyorsa dolaşıktır. Buradaki p_i katsayıları olasılıklar olup $0 \leq p_i \leq 1$ ve $\sum_i p_i = 1$ koşullarını sağlarlar. Ayrılabilir bir karışım durumuna örnek olarak $\rho = \frac{1}{2}(|0,0\rangle \langle 0,0| + |1,1\rangle \langle 1,1|)$ verilebilir. Dolaşık bir karma durumuna örnek olarak ise $1/3 < p < 1$ olmak üzere $\rho_W = (1-p)\frac{1}{4}\mathbb{I} + p|\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|$ Werner durumu verilebilir. Buradaki $|\Phi^+\rangle = |\beta_{00}\rangle$ şeklindeki Bell durumudur. Tüm dolaşık saf kuantum durumları Bell eşitsizliklerini ihlal ederler ancak aynı koşulu karma durumlar için söylemek zordur. Buna örnek olarak Werner durumu olarak belirtilen kuantum durumu verilebilir.

3.4 Ayrılabilirlik Kriterleri

Verilen bir ρ yoğunluk matrisi için (3.3.2) ifadesinde belirtildiği gibi bir ayrıştırma (decomposition) bulmak her zaman kolay değildir. Bu nedenle bu şekilde bir ayrıştırma, kullanımı kolay olan bir kriter değildir. Bunun yerine daha kullanışlı kriterler gerekir. Şimdi kısaca bunlara bakalım.

3.4.1 İşlemsel Ayrılabilirlik Kriteri

3.4.1.1 Schmidt Ayrıştırması:

Schmidt ayrıştırması (Schmidt decomposition) saf kuantum durumlarının ayrılabilir olup olmadığını incelemek için gerekli ve yeterli olan basit bir koşuldur.

Şimdi, $\text{boyut}(\mathcal{H}_A) = M$ ve $\text{boyut}(\mathcal{H}_B) = N \geq M$ olmak üzere, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ uzayında bulunan birleşik bir sistem düşünelim. $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ olmak üzere bir $|\psi\rangle$ saf durumu

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |\psi_i^A\rangle |\psi_i^B\rangle, \quad (3.4.1)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $|\psi_i^A\rangle$ ifadesi A sistemine ait, $|\psi_i^B\rangle$ ifadesi ise B sistemine ait ortonormal kuantum durumlarıdır. Bunlara bazen Schmidt bazları da denir. $\lambda_i \geq 0$ ve $\sum_i \lambda_i^2 = 1$ olmak üzere λ_i katsayılarına Schmidt katsayıları denir. Bu katsayılar

$$\text{Tr}_B(|\psi\rangle \langle\psi|), \quad (3.4.2)$$

şeklindeki indirgenmiş yoğunluk matrisinden (reduced density matrix) hesaplanır ve bu matris λ_i^2 özdeğerlerine sahiptir. Bu özdeğerler içinden sıfırdan farklı olanların sayısı Schmidt sayısı olarak adlandırılır ve r ile gösterilir. Eğer $r = 1$ ise verilen saf kuantum durumu ayrılabilir. $r > 1$ olduğunda ise verilen saf kuantum durumu dolaşık olur.

Saf kuantum durumları için kolay olan bu kriter karma kuantum durumlarında ise daha zordur. Bu nedenle başka işlemsel kriterler gereklidir.

3.4.1.2 Peres-Horodecki Kriteri (PPT):

Verilen bir yoğunluk matrisinin dolaşık olup olmadığını belirlemek için Peres-Horodecki kriteri veya diğer bir deyişle pozitif kısmi transpoz (PPT) koşulu kullanılabilir.

boyut(\mathcal{H}_A) = M ve boyut(\mathcal{H}_B) = $N \geq M$ olmak üzere, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ Hilbert uzayında bulunan birleşik bir sistemin yoğunluk matrisi

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i^A\rangle \langle \psi_i^A| \otimes |\psi_i^B\rangle \langle \psi_i^B|, \quad (3.4.3)$$

şeklinde yazılabilir. Birleşik bir sisteme ait yoğunluk matrisinin kısmi transpoz alt sistemlerden sadece birinin transpoz alınarak bulunabilir. Böylece herhangi bir ayrılabilir kuantum durumunun B alt sistemine göre kısmi transpoz

$$\rho^{T_B} = \sum_i p_i |\psi_i^A\rangle \langle \psi_i^A| \otimes (|\psi_i^B\rangle \langle \psi_i^B|)^T, \quad (3.4.4)$$

şeklinde bulunur. $(|\psi_i^B\rangle \langle \psi_i^B|)^T$ ifadesi B sistemi için yine bir yoğunluk matrisi olacağından $\rho^{T_B} \geq 0$ olur. Aynı sonuç A sistemine göre kısmi transpoz alınmasıyla da bulunabilir. Buna göre ayrılabilir bir kuantum durumunun herhangi bir alt sisteme göre kısmi transpoz pozitifdir (Peres, 1996).

İki kısımlı sistemler için bu sonucun tersi yani $\rho^{T_B} \geq 0$ ise verilen kuantum durumunun ayrılabilir olması, sadece birleşik sistemlerin boyutları 2x2 ve 2x3 olarak belirtilen düşük boyutlu sistemler için geçerlidir. Bu sistemlerde PPT ayrılabilirlik için gerekli ve yeterli bir koşul oluşturur (M. Horodecki, P. Horodecki ve R. Horodecki, 1997). Daha büyük boyutlar için ise PPT sadece gerekli bir koşul oluşturur (Horodecki, 1997).

3.4.1.3 İndirgeme Kriteri:

İndirgeme kriteri (reduction criterion) PPT kriterinden daha az etkin bir ayrılabilirlik kriteri olmasına rağmen damıtılabilir dolaşıklıkta ilginç bir rol oynamasından dolayı önemlidir. Tüm ayrılabilir kuantum durumları bu kriteri sağlarlar. Kriterin sağlanmaması ise kuantum durumun dolaşık olduğunu gösterir. Bu kriter

$$\Lambda_r(\sigma) = \mathbb{I} Tr\sigma - \sigma, \quad (3.4.5)$$

şeklinde bir eşleşme kullanır. Buradaki \mathbb{I} ifadesi birim operatörü göstermektedir. Eğer $\sigma \geq 0$ ise $\mathbb{I} Tr\sigma - \sigma \geq 0$ olacak ve böylece Λ pozitif bir eşleşme olacaktır. Eğer verilen bir yoğunluk matrisi ayrılabilir ise $(\mathbb{I} \otimes \Lambda_r)\rho \geq 0$ olacağından

$$\rho_A \otimes \mathbb{I} - \rho \geq 0, \quad (3.4.6)$$

$$\mathbb{I} \otimes \rho_B - \rho \geq 0, \quad (3.4.7)$$

koşulları sağlanacaktır. Buradaki ρ_A ve ρ_B ifadeleri indirgenmiş yoğunluk matrisleri olup $\rho_A = Tr_B(\rho)$ ve $\rho_B = Tr_A(\rho)$ şeklinde tanımlıdır.

PPT kriterinde olduğu gibi bu kriterde sadece birleşik sistemin boyutları 2×2 ve 2×3 olduğu durumlarda ayrılabilirlik için gerekli ve yeterli bir koşuldur. Diğer boyutlardaki sistemler için ise sadece yeterli bir koşul oluşturur (M. Horodecki ve P. Horodecki, 1999).

3.4.2 İşlemsel Olmayan Ayrılabilirlik Kriteri:

İşlemsel olmayan ayrılabilirlik kriterleri (nonoperational separability criteria) ana probleme yönelen ancak verilen bir kuantum durumunun ayrılabilirlik özelliğini kontrol etmek için basit bir uygulama sağlamayan kriterlerdir. Şimdi bunlardan ikisine kısaca değinelim.

3.4.2.1 Pozitif Eşleşmeler:

Pozitif bir eşleşme (positive map) pozitif operatörleri pozitif operatörlere eşleştirir. Bu eşleşmenin daha geniş bir Hilbert uzayına genişletilmesi de pozitif bir eşleşme ise bu eşleşmeye tamamen pozitif (completely positive (CP)) eşleşme denir. Ancak iki kısımlı bir sistemin tüm fiziksel durumlarının ayrılabilir olduğu düşünülürse eşleşmenin pozitif olması yeterli bir koşul olur. Buna göre verilen bir ρ yoğunluk matrisi, sadece ve sadece herhangi bir Λ pozitif eşleşmesi için

$$(\mathbb{I} \otimes \Lambda)\rho \geq 0, \quad (3.4.8)$$

koşulunu sağlıyorsa ayrılabilir (M. Horodecki, P. Horodecki ve R. Horodecki, 1996). Bunu daha açık olarak (3.3.3) ifadesine uyguladığımızda

$$(\mathbb{I} \otimes \Lambda)\rho = (\mathbb{I} \otimes \Lambda) \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \quad (3.4.9)$$

$$= \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \Lambda \rho_i^B \geq 0, \quad (3.4.10)$$

şeklinde görürüz. Sonuçtan da görüldüğü gibi ρ yoğunluk matrisi ayrılabilir.

3.4.2.2 Dolaşıklık Kanıtı:

Dolaşıklık kanıtı (entanglement witness) kriteri bir kuantum durumunun dolaşıklığını belirlemek için kullanılır. Buna göre verilen bir yoğunluk matrisi, \mathcal{W} Hermitik bir operatör olmak üzere eğer sadece ve sadece

$$\text{Tr}(\mathcal{W}\rho) < 0, \quad (3.4.11)$$

koşulunu sağlıyorsa dolaşıktır. Buna karşın herhangi bir ayrılabilir durum için ise

$$\text{Tr}(\mathcal{W}\rho) \geq 0, \quad (3.4.12)$$

koşulunu sağlar (M. Horodecki, P. Horodecki ve R. Horodecki, 1996). Dolaşıklık kanıtının kullanımı matematiksel olarak oldukça işlevseldir, fakat pratik açıdan bakıldığında bu işlevselliğini kaybeder; çünkü sistemin boyutlarının büyümesi durumunda elde edilmesi oldukça zordur.

3.5 Nicel Olarak Dolaşıklık

Şimdiye kadar incelemiş olduğumuz kriterler dolaşıklıkla nitel olarak inceler, yani verilen bir kuantum durumunun dolaşık veya ayrılabilir olduğunu belirler, fakat bunların miktarları hakkında herhangi bir yorum yapmaz. Verilen bir kuantum durumunun dolaşıklıkla nicel olarak belirlenmesi oldukça zordur, ancak bazı durumlarda iyi sonuçlar veren dolaşıklık ölçüleri bulunmaktadır. Bu nedenle bu kısımda dolaşıklık ölçülerinin genel özelliklerine değinerek bazı önemli dolaşıklık ölçülerine bakacağız.

3.5.1 Dolaşıklık Özellikleri

E ile gösterdiğimiz dolaşıklık ölçüleri bazı koşulları sağlamak zorundadırlar, ancak bu koşulların hepsinin gerekli olup olmadığı henüz kesin olarak bilinmemektedir ve gerçekte bazı dolaşıklık ölçüleri bu koşullardan bazılarını sağlamazlar. Şimdi bu özelliklere bakalım:

1. Dolaşıklık hiç bir zaman negatif olamaz,

$$E(\rho) \geq 0.$$

2. Verilen bir kuantum durumu eğer ayrılabilir ise dolaşıklık sıfırdır,

$$E(\rho) = 0.$$

3. Dolaşıklık yerel işlemler ve klasik iletişim (LOCC) altında artmaz,

$$E(\Lambda_{LOCC}(\rho)) \leq E(\rho).$$

4. Süreklidir yani iki yoğunluk matrisi arasındaki uzaklığın sıfıra gittiği durumda bu yoğunluk matrislerinin dolaşıklıkları arasındaki fark da sıfıra gider,

$$\|\rho - \sigma\| \rightarrow 0 \quad \text{için} \quad E(\rho) - E(\sigma) \rightarrow 0.$$

5. Toplanabilirdir yani n tane özdeş kuantum durumunun dolaşıklığı bir tane kuantum durumunun dolaşıklığının n katıdır,

$$E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho).$$

6. ρ ve σ gibi iki yoğunluk matrisinin tensör çarpımının dolaşıklığı bunların ayrı ayrı dolaşıklıklarının toplamından daha büyük olamaz,

$$E(\rho \otimes \sigma) \leq E(\rho) + E(\sigma).$$

7. Dolaşıklık ölçüsü $0 < \lambda < 1$ için konveks bir fonksiyon olmalıdır,

$$E(\lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma) \leq \lambda E(\rho) + (1 - \lambda)E(\sigma).$$

3.5.2 Bazı Dolaşıklık Ölçüleri

İki kısımlı bir sistemin $|\psi\rangle$ ile verilen bir kuantum saf durumu için bu sisteme ait indirgenmiş yoğunluk matrisinin von Neumann entropisi iyi bir dolaşıklık ölçüsüdür

$$S(\rho_{\text{ind}}) = -Tr(\rho_{\text{ind}} \log \rho_{\text{ind}}). \quad (3.5.1)$$

Buradaki ρ_{ind} ifadesi sistemin indirgenmiş yoğunluk matrisini göstermektedir.

Karma kuantum durumları için ise tek bir dolaşıklık ölçüsü yoktur, ancak tüm

dolaşıklık ölçüleri iki kısımlı saf kuantum durumları ile uyumlu ve bunun yanında indirgenmiş yoğunluk matrisinin von Neumann entropisine de eşit olmalıdır.

Bazı önemli dolaşıklık ölçüleri olarak dolaşıklık maliyeti (entanglement cost), oluşum dolaşıklığı (entanglement of formation), dolaşıklık relatif entropisi (relative entropy of entanglement) ve damıtılabilir dolaşıklık (distillable entanglement) belirtilebilir. Şimdi kısaca bunlara bakalım.

3.5.2.1 Dolaşıklık Maliyeti:

Dolaşıklık maliyeti (entanglement cost) bize dolaşık bir kuantum durumunu oluşturmanın ne kadar pahalı olduğunu belirtir. Bu ölçü $|\Phi^+\rangle$ maksimum dolaşık girdi kuantum durumlarının üretilen çıktı kuantum durumu ρ 'ya olan oranının tüm yerel işlemler ve klasik iletişim (LOCC) işlemleri üzerinden minimize edilmiş şeklidir

$$E_C(\rho) = \min_{\{\Lambda_{LOCC}\}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_{|\Phi^+\rangle}^{\text{girdi}}}{n_{\rho}^{\text{çikti}}} . \quad (3.5.2)$$

3.5.2.2 Oluşum Dolaşıklığı:

Herhangi bir ρ karma kuantum durumu $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ şeklinde kuantum saf durumlarının konveks kombinasyonu şeklinde yazılabilir. $|\psi_i\rangle$ saf kuantum durumlarından oluşmuş bir yoğunluk matrisi için oluşum dolaşıklığı (entanglement of formation), bu yoğunluk matrisinden elde edilmiş indirgenmiş yoğunluk matrisinin olası tüm ayrıştırmalar (decomposition) üzerinden minimize edilmiş von Neumann entropisidir

$$E_F(\rho) = \min_{\{ayr\}} \sum_i p_i S(\rho_i^{\text{ind}}) . \quad (3.5.3)$$

3.5.2.3 Dolaşıklık Relatif Entropisi:

Dolaşıklık relatif entropisini (relatif entropy of entanglement) sezgisel olarak dolaşık ρ kuantum durumunun en yakın ayrılabilir σ kuantum durumuna mesafesi olarak düşünmek mümkündür

$$E_R(\rho) = \min_{\sigma \in \mathcal{S}} \text{Tr}[\rho (\log \rho - \log \sigma)], \quad (3.5.4)$$

ancak bu matematiksel bir mesafe değildir (Vedral, Plenio, Rippin, ve Knight, 1997).

3.5.2.4 Damıtılabilir Dolaşıklık:

Damıtılabilir dolaşıklık (distillible entanglement) bize ρ gibi dolaşık bir kuantum durumundan ne kadar dolaşıklık çıkarabileceğimizi gösterir. Yani $|\Phi^+\rangle$ dolaşık çıktı kuantum durumlarının maksimum sayısının gerekli girdi kuantum durumu ρ 'ya olan oranının tüm yerel işlemler ve klasik iletişim (LOCC) üzerinden maksimize edilmiş şeklidir

$$E_D(\rho) = \max_{\{\Lambda_{LOCC}\}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_{|\Psi^+\rangle}^{\text{çıktı}}}{n_{\rho}^{\text{girdi}}}. \quad (3.5.5)$$

Bu tanıma göre damıtılabilir dolaşıklık maliyetinin tersi gibi düşünmek mümkündür.

Tüm bu dolaşıklık ölçülerinin büyüklükleri arasında bazı ilişkiler vardır. Buna göre damıtılabilir dolaşıklık tüm ölçüler içinde bir alt sınır, dolaşıklık maliyeti ise bir üst sınır oluşturur. Bu durumda karma kuantum durumlarına ait dolaşıklık ölçüleri için

$$E_D(\rho) \leq E(\rho) \leq E_C(\rho), \quad (3.5.6)$$

ilişkisi yazılabilir.

Görüldüğü gibi dolaşıklık ölçüsü olarak farklı kavramlar önerilmiştir, ancak oluşum dolaşıklığı yöntemiyle geliştirilmiş olan uyum (concurrency) yöntemi iki parçacıktan oluşmuş sistemlerin karma durumlarının dolaşıklığı için en çok kullanılan bir yöntem olmuştur (Hill ve Wootters, 1997; Wootters, 1998). Tezin kapsamında çalışılmış olan homojen olmayan bir manyetik alanda bulunan iki kubitlik Ising zincirinin dolaşıklığının incelenmesinde de uyum yöntemi kullanılmıştır. Bu amaçla yöntem ile ilgili kavramlar ve işleyiş modelin incelendiği beşinci bölümde verilmiştir.

Bunun yanında iyi bir dolaşıklık ölçüsü olmasına rağmen uyum üç durumlu sistemlerin incelenmesi için iyi bir ölçü değildir. Böyle durumlar için ise Peres-Horodecki kriterinin nicel versiyonu olarak geliştirilmiş olan negatiflik (negativity) iyi bir yöntemdir (Vidal ve Werner, 2002). Literatürde çok sayıdaki çalışmada kullanılmış olan bu yöntem tezin altıncı bölümünde incelenen Dzialoshinski-Moriya (DM) etkileşmesine sahip iki kutritlik Ising zincirinin dolaşıklığının incelenmesinde de kullanılmıştır. Bu amaçla bu yöntem ile ilgili kavramlar ve işleyiş tezin altıncı bölümünde belirtilmiştir.

BÖLÜM DÖRT

KUANTUM DOLAŞIKLIĞIN UYGULAMALARI

Dolaşıklık kuantum hesaplama ve kuantum bilgi işlemi için bir kaynaktır çünkü klasik olarak yapılması mümkün olmayan iletişim ve bilgi işlemlerinin gerçekleştirilmesi için dolaşıklık kullanılabilir. Bu nedenle bu kısımda kuantum teleportasyon, dolaşıklık değiş-tokuşu ve süperyoğunluklu kodlama gibi dolaşıklığın önemli ölçüde kullanıldığı ve kuantum bilgi işlemlerinin anlaşılmasında önemli bir rol oynadığı bu uygulamalara kısaca değineceğiz.

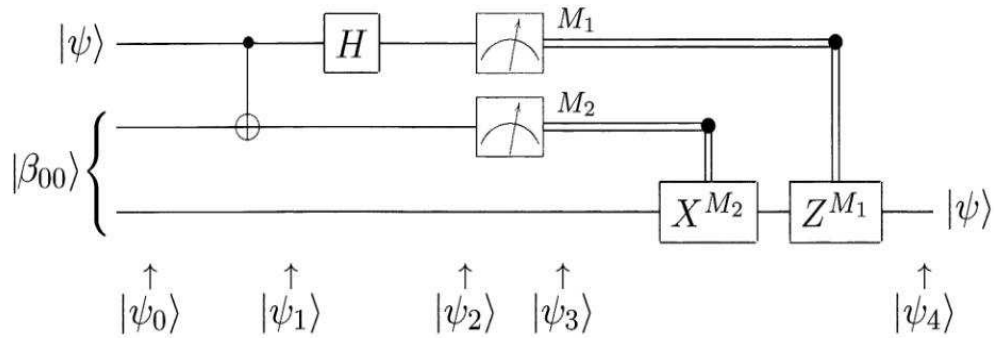
4.1 Kuantum Teleportasyon

Kuantum teleportasyon, verici ile alıcı arasında kuantum durumlarını hareket ettirip bir yerden başka bir yere gönderebilen bir yöntemdir. Kuantum teleportasyonun nasıl çalıştığını anlamak için şu örneğe bakalım. Ayşe Bora'yla iletişim kurmak için Bora'ya $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ şeklinde durumu bilinmeyen bir kubit göndermek istemektedir. Bu iletişimin gerçekleşmesi için Ayşe ve Bora sadece bir telefon ve bir çift dolaşık kubitte sahiptirler. Ayşe için bunu gerçekleştirmenin bir yolu kubiti ölçüp ölçme sonucuna göre, kubiti tahmin edip bunu telefonla Bora'ya anlatmaktır, ancak bu şekilde bir kuantum durumu tam doğrulukla aktarılamaz. Genel olarak durumu bilinmeyen bir kubit klasik anlamda olduğu gibi kopyalanıp aktarılarak ifade edilemez. Bu, bilinmeyen bir kuantum durumunda bulunan bir kubitin kopyalanamayacağı şeklinde belirtilen kuantum bilgi teorininin çok temel bir ilkesini (Dieks, 1982; Wootters ve Zurek, 1982) ihlal etmek demektir.

Ayşe Bora'ya durumu bilinmeyen bu $|\psi\rangle$ kubitini ancak teleportasyon ile gönderebilir. Böylece bu kuantum durumu bir yerden başka bir yere aktarılmış olur. Yapılan iş kopyalanma değildir sadece kubitin bir yerden başka bir yere taşın-

masıdır. Bu işlemin maksimum dolaşık bir çift kubit kullanılarak nasıl gerçekleştirileceği sorusuna ise Bennet ve diğer. (1993) tarafından yanıt verilmiştir.

Teleportasyon işlemi şöyle gerçekleşir: Ayşe ve Bora bir arada buldukları dönemde bir EPR çifti oluşturmuşlar ve ayrılırlarken herbiri bu EPR çiftinin bir parçasını almıştır. Daha sonra Ayşe teleportasyon yapmak istediğinde, $|\psi\rangle$ kubitini EPR çiftinin kendinde olan parçasıyla etkileştirir. Ardından bu iki kubitte ölçme yapar ve 00, 01, 10 ve 11 gibi olası dört sonuçtan birini elde eder. Elde ettiği bu bilgiyi Bora'ya gönderir. Ayşe'nin gönderdiği bu klasik mesaja göre Bora EPR çiftinin kendinde bulunan parçasına bu dört işlemden birini uygular ve tekrar orjinal $|\psi\rangle$ kuantum durumunu elde eder. Teleportasyon işleminin daha kesin açıklanması ise aşağıdaki şekilde verilen kuantum devresi üzerinden gösterilebilir (Nielsen ve Chuang, 2000). Şimdi adım adım devre üzerinde bu işlemi inceleyelim: Teleport edilecek durum $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ kubitini ile verilmiştir. Burada α ve β



Şekil 4.1 Bir kubitin teleportasyonu için kullanılan kuantum devresi.

bilinmeyen genliklerdir. Devredeki girdi durumu

$$|\psi_0\rangle = |\psi\rangle |\beta_{00}\rangle, \quad (4.1.1)$$

$$= |\psi\rangle \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}} = |\psi\rangle \frac{|0,0\rangle + |1,1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.1.2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha |0\rangle (|0,0\rangle + |1,1\rangle) + \beta |1\rangle (|0,0\rangle + |1,1\rangle)], \quad (4.1.3)$$

şeklindedir. Burada devredeki işlem boyunca dikkat etmemiz gereken nokta ilk iki kubitin Ayşe'ye üçüncü kubitin ise Bora'ya ait olduğudur. Ayrıca daha önce de açıkladığımız gibi Ayşe'nin ikinci kubitini ile Bora'nın kubitini bir EPR çiftidir.

Ayşe kendi iki kubitini bir KDEĞİL kuantum mantık kapısına gönderir ve

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha |0\rangle (|0, 0\rangle + |1, 1\rangle) + \beta |1\rangle (|1, 0\rangle + |0, 1\rangle)], \quad (4.1.4)$$

elde eder. Elde ettiği bu kuantum durumunun ilk kubitine Hadamard kapısını uygularsa

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}[\alpha(|0\rangle + |1\rangle)(|0, 0\rangle + |1, 1\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)(|1, 0\rangle + |0, 1\rangle)], \quad (4.1.5)$$

kuantum durumunu elde eder ve terimlerin tekrar gruplanmasıyla bu

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle = & \frac{1}{2}[|0, 0\rangle (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) + |0, 1\rangle (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle) \\ & + |1, 0\rangle (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) + |1, 1\rangle (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle)], \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

şeklinde yazılıp dört terime ayrılmış olur. İlk terim $|0, 0\rangle$ kuantum durumundaki Ayşe'nin kubit ve $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ kuantum durumundaki Bora'nın kubitinden oluşur. Buradan da görüldüğü gibi Bora'nın kubit $|\psi\rangle$ orjinal kuantum durumudur. Eğer Ayşe kendi kubitini ölçer ve sonucu $|0, 0\rangle$ bulursa Bora'nın kubit $|\psi\rangle$ kuantum durumunda olacaktır. Benzer şekilde Ayşe'nin ölçüm sonuçlarından Bora'nın kuantum durumunu okumak mümkündür:

$$00 \rightarrow |\psi_3(0, 0)\rangle \equiv [\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle], \quad (4.1.7)$$

$$01 \rightarrow |\psi_3(0, 1)\rangle \equiv [\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle], \quad (4.1.8)$$

$$10 \rightarrow |\psi_3(1, 0)\rangle \equiv [\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle], \quad (4.1.9)$$

$$11 \rightarrow |\psi_3(1, 1)\rangle \equiv [\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle]. \quad (4.1.10)$$

Sonuçta Ayşe'nin ölçüm sonucuna bağlı olarak Bora'nın kubit bu olası dört sonuçtan birinde bulunacaktır, ancak hangisinin olduğunun bilinmesi için Ayşe'nin ölçüm sonucunu Bora'ya göndermesi gerekmektedir. Bora bir kere ölçme sonucunu öğrenirse uygun kuantum kapılarını kullanarak $|\psi\rangle$ 'yi tekrar elde edip kendi durumunu belirginleştirir. Örneğin Ayşe'nin ölçmesinin 00 verdiği sonuçta Bora'nın birşey yapmaya ihtiyacı yoktur çünkü elde edilen orjinal durumun aynısıdır. Eğer ölçme sonucu 10 ise Bora kuantum Z kapısını, eğer ölçme sonucu 01 ise kuan-

tum X kapısını kullanarak kendi durumunu belirginleştirir. Ölçme sonucu 11 olduğunda ise önce X sonra da Z kapısını uygulayarak kendi durumunu belirginleştirir. Sonuç olarak Bora'nın $|\psi\rangle$ kuantum durumunu tekrar elde edebilmesi için kendi qubitine $Z^{M_1}X^{M_2}$ dönüşümünü uygulaması gerekmektedir.

Kuantum teleportasyonun iki ilginç sonucu vardır: Birincisi ışıktan hızlı iletişime izin vermez çünkü teleportasyonun tamamlanması için Ayşe'nin kendi ölçme sonucunu Bora'ya telefon, e-mail veya radyo dalgası gibi klasik bir iletişim kanalı üzerinden göndermesi şarttır. Klasik iletişim kanalı ise ışık hızıyla sınırlı olduğu için ışık hızından daha hızlı bir iletişim gerçekleşmez ve relativite ilkesi ihlal edilmemiş olur. İkincisi ise teleportasyon için kuantum durumunun bir kopyasının yapılmasıdır; fakat bu işlem klonlanamama teoremi ile çelişir, ancak buradaki bir ihlal değildir çünkü teleportasyondan sonra sadece hedef kubit $|\psi\rangle$ kuantum durumundadır. İlk kubitte yapılan ölçme sonucuna bağlı olarak orjinal data kubitini ise $|0\rangle$ veya $|1\rangle$ kompütasyonel baz durumlarından birinde olur.

Buradan görüldüğü gibi, teleportasyonda yerel işlemler ve klasik iletişimin (local operations and classical communication (LOCC)) iki temel unsur olduğu sonucuna varılabilir. Her bir birey kendi kubitine yerel kuantum mekaniksel işlemler yapmıştır. Ölçme sonuçlarının iletilmesi için de klasik iletişim kullanılmıştır.

Teorik olarak teleportasyon burada anlatıldığı gibidir, ancak deneysel olarak da teleportasyonun gerçekleştirildiği çalışmalar bulunmaktadır (Boschi ve diğer., 1998; Bouwmeester ve diğer., 1997; Nielsen, Knill, ve Laflamme, 1998; Furusawa ve diğer., 1998; Barrett ve diğer., 2004; Marcikic ve diğer., 2004; Riebe ve diğer., 2004; Ursin ve diğer., 2004; Sherson ve diğer., 2006).

4.2 Dolaşıklık Değiş-Tokuşu

Genellikle kuantum dolaşıklık, birbirlerine yakın olan iki parçacık arasında gerçekleşen doğrudan bir etkileşmeden kaynaklanır. Bunun yanında daha önce

birbirleriyle hiç etkileşmemiş ve aralarında çok büyük uzaklıklar bulunan iki parçacık arasında da kuantum dolaşıklık olması mümkündür (Bennett ve diğer., 1993; Yurke ve Stoller, 1992; Zukowski ve diğer., 1993). Bu olaya dolaşıklık değiş-tokuşu (entanglement swapping) denir ve önceden dolaşık olan sistemlerden dolaşık olmayan sistemlere dolaşıklığın aktarılması olarak tanımlanır. Bu bağlamda dolaşıklık değiş-tokuşu, kuantum teleportasyon ile yakından ilgilidir. Bilindiği gibi kuantum teleportasyonda, bir sistemin kuantum durumu klasik iletişim kanalları aracılığıyla bağımsız fiziksel bir sisteme ortak bir dolaşıklık kaynağının kullanılmasıyla iletilir. Buna karşılık dolaşıklık değiş-tokuşunun amacı ise şimdiye kadar hiç aralarında dolaşıklık olmamış sistemler arasında dolaşıklık oluşturmaktır.

Dolaşıklık değiş-tokuşunda iki EPR çifti kullanılır. Bu EPR çiftlerindeki her bir kubit 1, 2, 3 ve 4 sayıları ile belirtilir. 1 ve 4 numaralı kubitler Ayşe'ye, 2 ve 3 numaralı kubitler ise Bora'ya aittir. 1 ve 2 numaralı kubitler dolaşıktırlar ve

$$|\beta_{00}\rangle_{12} = \frac{|0, 0\rangle_{12} + |1, 1\rangle_{12}}{\sqrt{2}}, \quad (4.2.1)$$

şeklinde bir Bell durumunda bulunurlar. Benzer olarak 3 ve 4 numaralı kubitler de dolaşıktır ve

$$|\beta_{00}\rangle_{34} = \frac{|0, 0\rangle_{34} + |1, 1\rangle_{34}}{\sqrt{2}}, \quad (4.2.2)$$

Bell durumunda bulunurlar. Bu iki kuantum durumunun çarpımı

$$|\beta_{00}\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{34} = \left(\frac{|0, 0\rangle_{12} + |1, 1\rangle_{12}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0, 0\rangle_{34} + |1, 1\rangle_{34}}{\sqrt{2}} \right), \quad (4.2.3)$$

$$= \frac{1}{2} (|0, 0\rangle_{12} |0, 0\rangle_{34} + |0, 0\rangle_{12} |1, 1\rangle_{34} + |1, 1\rangle_{12} |0, 0\rangle_{34} + |1, 1\rangle_{12} |1, 1\rangle_{34}), \quad (4.2.4)$$

şeklindedir. (4.2.4) ifadesinin 1 ve 4 numaralı kubitler ile 2 ve 3 numaralı kubitler birarada olacak şekilde yeniden düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned} |\beta_{00}\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{34} &= \frac{1}{2} (|0, 0\rangle_{14} |0, 0\rangle_{23} + |0, 1\rangle_{14} |0, 1\rangle_{23} \\ &\quad + |1, 0\rangle_{14} |1, 0\rangle_{23} + |1, 1\rangle_{14} |1, 1\rangle_{23}), \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

elde edilir. Ayrıca

$$|\beta_{00}\rangle_{14} |\beta_{00}\rangle_{23} = \left(\frac{|0,0\rangle_{14} + |1,1\rangle_{14}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0,0\rangle_{23} + |1,1\rangle_{23}}{\sqrt{2}} \right), \quad (4.2.6)$$

$$= \frac{1}{2} (|0,0\rangle_{14} |0,0\rangle_{23} + |0,0\rangle_{14} |1,1\rangle_{23} + |1,1\rangle_{14} |0,0\rangle_{23} + |1,1\rangle_{14} |1,1\rangle_{23}), \quad (4.2.7)$$

şeklindedir. (4.2.5) ile (4.2.7) ifadelerini karşılaştırdığımızda, (4.2.5) ifadesinde bazı terimlerin eksik olduğunu görürüz. Gerekli cebirsel düzenlemelerin yapılmasıyla

$$|\beta_{00}\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{34} = \frac{1}{2} (|\beta_{00}\rangle_{14} |\beta_{00}\rangle_{23} + |\beta_{10}\rangle_{14} |\beta_{10}\rangle_{23} + |\beta_{01}\rangle_{14} |\beta_{01}\rangle_{23} + |\beta_{11}\rangle_{14} |\beta_{11}\rangle_{23}), \quad (4.2.8)$$

elde edilir. 1 ve 4 numaralı parçacıklar Ayşe'ye ait parçacıklardır ve Ayşe bu parçacıkları ölçtüğünde 1/4 olasılıkla $|\beta_{00}\rangle_{14}$, $|\beta_{10}\rangle_{14}$, $|\beta_{01}\rangle_{14}$ ve $|\beta_{11}\rangle_{14}$ şeklindeki dört olası sonuçtan birini bulacaktır. Ölçme yapıldığı anda Bora'nın sistemi ise $|\beta_{00}\rangle_{23}$, $|\beta_{10}\rangle_{23}$, $|\beta_{01}\rangle_{23}$ veya $|\beta_{11}\rangle_{23}$ gibi dört olası kuantum durumundan birine çökecektir. Böylece bundan sonra 2 ve 3 numaralı parçacıklar dolaşık olacaktır.

Görüldüğü gibi Ayşe ve Bora birbirlerinden çok uzakta bile olsalar Ayşe 1 ve 3 numaralı kendi parçacıklarına bir ölçme yaptığında, kuantum durumları çökecek ve Bora'nın 2 ve 3 numaralı parçacıkları dolaşık olacaklardır. Bu olay 2 ve 3 numaralı parçacıklar daha önce birbirleriyle hiç etkileşmeseler bile gerçekleşir. Olayın önemini daha iyi kavramak için Ayşe ölçme yapmadan önce Cem'in 3 numaralı parçacığı alıp uzak bir yere gittiğini düşünelim. Böylece Ayşe kendi parçacıklarına ölçme yaptığında Bora ve Cem bir çift dolaşık parçacığı aralarında paylaşmış olacaklardır. Böylece de teleportasyonu kullanarak birbirlerine bir kuantum durumu aktarabilmek için bir kaynak yaratmış olurlar.

Bu düşünce birden fazla gruba dolaşıklık dağıtmak için benimsenmiş (Dür, Briegel, Cirac, ve Zoller, 1999) ve çok parçacıklara olan genelleştirilmesi Bose, Vedral, ve Knight tarafından yapılmıştır (1998). Deneysel olarak ise 1998'de Pan, Bouwmeester, Weinfurter, ve Zeilinger, tarafından gerçekleştirilmiştir (1998).

4.3 Kuantum Yoğunkodlama

Kuantum yoğunkodlama kuantumsal iletişimde dolaşıklıkla nasıl kullanıldığının basit fakat önemli bir örneğidir. Kuantumsal iletişimde kuantum formalizminden kaynaklanan bazı sınırlamalar bulunur. Bunlardan biri Holevo sınırıdır (Holevo bound). Buna göre bir kubit en fazla bir bitlik klasik bilgi taşıyabilir, ancak daha sonra Bennett ve Wiesner'in (1992) geliştirmiş olduğu bir protokol olan kuantum yoğunkodlama ile Holevo sınırlaması aşılmıştır. Kuantum yoğunkodlama iki bitlik klasik bilginin, dolaşık bir kubit kullanılarak iletilmesine olanak sağlar. Bunu gerçekleştirmek için tek bir kubit ve bir EPR çifti kullanır. EPR çifti mesajı gönderen ve alan arasında paylaşılır. İki bitlik klasik bilgi aktarmak için sadece bir kubit ihtiyacı vardır. Bunun gerçekleşmesini sağlayan ise dolaşıklığıdır. Dolaşıklık, iki kubitlik bir kuantum durumunu dört ortogonal kuantum durumundan birine sadece bir kubit ile etkileştirerek dönüştürür.

İşlemin gerçekleşmesi şöyledir. Ayşe ve Bora başlangıçta

$$|\psi\rangle = \frac{|0,0\rangle + |1,1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.3.1)$$

$$= \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}}, \quad (4.3.2)$$

şeklinde bir EPR çiftini paylaşırlar. Bu ifadeden de anlaşılacağı gibi ilk kubit Ayşe'ye ikinci kubit Bora'ya aittir. Ayrıca aralarında şöyle bir kod üzerinde anlaşmışlardır: xy gibi klasik bir bit dizisi $|\beta_{xy}\rangle$ şeklinde Bell durumlarıyla ifade edilecektir. Burada $xy = 00, 01, 10$ veya 11 şeklinde olabilir. Ayşe Bora'ya gerçekten kendi kubitini göndererek bilgiyi aktaracaktır. Ayşe hangi klasik bit dizisini göndermek istediğine bağlı olarak seçimine uygun olan tek kubitlik bir kuantum mantık kapısını kendi kubitine uygular. Örneğin 00 şeklinde bir klasik bit dizisi göndermek istiyorsa $(I \otimes I)$ yardımıyla $|\psi\rangle$ kuantum durumunu dört Bell durumundan birine dönüştürür

$$(I \otimes I) |\psi\rangle = \frac{|0,0\rangle + |1,1\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{00}\rangle, \quad (4.3.3)$$

eğer 01 şeklinde bir klasik bit dizisi göndermek istiyorsa $|\psi\rangle$ kuantum durumundaki kendi kubitine X kuantum mantık kapısını uygular

$$(X \otimes I) |\psi\rangle = \frac{|1, 0\rangle + |0, 1\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{01}\rangle. \quad (4.3.4)$$

Benzer şekilde 10 ve 11 şeklindeki klasik bit dizileri için ise sırasıyla Z ve Y kuantum mantık kapıları uygulanır

$$(Z \otimes I) |\psi\rangle = \frac{|0, 0\rangle - |1, 1\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{10}\rangle, \quad (4.3.5)$$

$$(iY \otimes I) |\psi\rangle = \frac{|0, 1\rangle - |1, 0\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{11}\rangle. \quad (4.3.6)$$

Bu işlemler gerçekleştirildikten sonra Ayşe kendi kubitini Bora'ya gönderir. Bora elinde bulunan kuantum durumuna ilk olarak, Ayşe'nin kubitini kontrol kubitini olmak üzere bir KONTROLLÜ-DEĞİL kuantum mantık kapısı uygular ve

$$00 : |\beta_{00}\rangle = \frac{|0, 0\rangle + |1, 0\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.3.7)$$

$$01 : |\beta_{01}\rangle = \frac{|1, 1\rangle + |0, 1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.3.8)$$

$$10 : |\beta_{10}\rangle = \frac{|0, 0\rangle - |1, 0\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.3.9)$$

$$11 : |\beta_{11}\rangle = \frac{|0, 1\rangle - |1, 1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.3.10)$$

sonuçlarından birini bulur. Daha sonra sadece ilk kubitine bir Hadamard kuantum mantık kapısı uygular ve

$$00 : |\beta_{00}\rangle = |0, 0\rangle, \quad (4.3.11)$$

$$01 : |\beta_{01}\rangle = |0, 1\rangle, \quad (4.3.12)$$

$$10 : |\beta_{10}\rangle = |1, 0\rangle, \quad (4.3.13)$$

$$11 : |\beta_{11}\rangle = |1, 1\rangle, \quad (4.3.14)$$

sonuçlarından birini bulur. Böylece Bora Ayşe'nin göndermiş olduğu klasik bit dizisini elde eder.

Kuantum yoğun kodlama ile ilgili ilk deneysel çalışma 1996'da Innsbruck'ta kaynak olarak polarize dolaşık fotonlar kullanılarak gerçekleştirilmiştir (Mattle, Weinfurter, Kwiat, ve Zeilinger, 1996), bunun ardından konuyla ilgili başka deneysel çalışmalar da yapılmıştır (Fang, Zhu, Feng, Du, ve Mao, 1999; Jietai ve diğer., 2003; Mizuno, Wakuni, Furusawa, ve Sasaki, 2005).

BÖLÜM BEŞ

HOMOJEN OLMAYAN BİR MANYETİK ALANDA BULUNAN ISING ZİNCİRİNİN DOLAŞIKLIĞI

5.1 Giriş

Kuantum hesaplama ve kuantum informasyona (Divincenzo,1995; Nielsen ve Chuang, 2000) baktığımızda daha önce de belirttiğimiz gibi kuantum teleportasyon (Bennett ve diğer., 1993), yoğunkodlama (Bennett ve Wiesner, 1992), kuantum anahtar dağılımı (Ekert, 1991), teleklonlama (Mura0, Jonathan, Plenio, ve Vedral, 1999) ve kriptografi (Ekert, 1992; Bennett, Brassard, ve Mermin, 1992) gibi çeşitli uygulama alanları görürüz. Kuantum dolaşıklık ise bu alanlardaki pek çok çalışma için potansiyel bir kaynak oluşturmaktadır. Buna karşılık bu alanlarda yapılan çalışmalar da kuantum dolaşıklığın ve onu oluşturan mekanizmaların daha iyi anlaşılmasında önemli bir yer tutmaktadır.

Bu uygulama alanlarından başka dolaşıklığın anlaşılıp geliştirilmesinde bir boyutlu spin sistemleri (spin zincirleri) de önemli bir yer tutarlar. Bunlar katıhal sistemlerinde dolaşıklık üreten mekanizmalara aday olan tipik örneklerdir, ancak sadece katıhal sistemlerinde değil başka sistemlerde de kubitler arası etkileşimler Heisenberg modeli gibi spin modelleri ile ifade edilebilir. Heisenberg modeli kubitler arası etkileşimler için iyi bir adaydır fakat sadece spin sistemleri için düşünülmemesi gerekir. Bununun yanında kuantum noktaların (quantum dots) (Loss ve Divincenzo, 1998), nükleer spinin (nuclear spin) (Kane, 1998) ve kovuk-KED'nin (cavity-QED) (İmamoğlu ve diğer., 1999; Zheng ve Guo, 2000) anlaşılmasında da Heisenberg modelleri gözönünde bulundurulmuştur. Bunlara ilaveten kuantum hesaplama (Lidar, Bacon, ve Whaley, 1999) ve KONTROLLÜ-DEĞİL kuantum mantık kapısı (Zheng ve Guo, 2000) için de kullanılmıştır.

Belirtildiği gibi potansiyel uygulamalarından ötürü spin sistemlerinde dolaşıklık incelemeleri pek çok teorik ve deneysel çalışmada detaylı ve yoğun bir şekilde gerçekleştirilmiştir. Örneğin iki spin içeren bir sistemin kullanılmasıyla gerçekleştirilen dolaşıklık kuantum durumları ile ilgili ilk çalışma Nielsen (2000) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada Nielsen z -yönündeki bir dış manyetik alan içinde bulunan izotropik bir XXX Heisenberg Hamiltoniyeni ile tanımlanmış bir spin sisteminin dolaşıklığını hesaplamıştır. Ayrıca sıfırdan farklı bir sıcaklıkta, birbirleriyle Heisenberg etkileşmesi aracılığıyla etkileşen iki kubit arasındaki dolaşıklığı da incelemiştir. Bu çalışmadan sonra O'Connor ve Wootters (2001) antiferromanyetik izotropik Heisenberg halkasının (ring) taban durumunun dolaşıklığını incelemiştir. Daha sonra da Kamta ve Starace (2002) z -yönündeki bir manyetik alanda bulunan iki kubitlik Heisenberg XY zincirinin dolaşıklığını incelemişler ve belli sıcaklık değerlerinde manyetik alanın büyüklüğünün ayarlanması ile dolaşıklık durumların ortaya çıktığını göstermişlerdir. Bunların yanında izotropik XXX Heisenberg zincirinde dolaşıklığın sıcaklık ve manyetik alana bağlılığı Arnesen, Bose, ve Vedral (2001) tarafından incelenmiş ve ferromanyetik etkileşmeler olması halinde dolaşık olmayan kuantum durumları oluşmasına rağmen antiferromanyetik etkileşmelerin olduğu durumda dolaşıklığın oluştuğunu gözlemişlerdir. Bundan sonra da Wang (2002) z -yönünde uygulanmış bir manyetik alan içerisinde bulunan izotropik Heisenberg XX kubit zinciri için dolaşıklığı taban durumda ve sıcaklığa bağlı olarak incelemiştir.

Diğer taraftan Heisenberg Hamiltoniyenlerinde görülen anizotropi ısısal dolaşıklık üzerinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle Zhou, Song, Guo, ve Li (2003) tarafından anizotropik Heisenberg XYZ zincirinin ısısal dolaşıklığı bir dış manyetik alanın olduğu durumda incelenmiştir. Ayrıca Wang (2001a, 2001b) iki kubitlik anizotropik Heisenberg XY modelinde ve anizotropik XXZ modelinde anizotropik etkileşmenin ısısal dolaşıklık üzerindeki etkisini incelemiştir. Yapılan bu çalışmalar göstermiştir ki ısısal dolaşıklık anizotropinin düzenlenmesi ile etkilenmektedir.

Taban durumda ve ısısal durumdaki dolaşıklıklar anizotropideki duruma benzer şekilde düzgün olmayan manyetik alan ile de etkilenmektedir. Homojen ol-

mayan Zeeman çiftlenimi düzgün olmayan bir manyetik alana neden olur ve kubitlerden oluşmuş bir yapıda da böyle bir homojen olmayan alan olabilir (Hu ve DasSarma, 2001; Hu, de Sousa, ve DasSarma, 2001). Bunların sonucunda daha gerçekçi bir yaklaşım olarak düzgün olmayan bir manyetik alanda dolaşıklığın incelenmesi dikkate değerdir. Bu amaçla Sun, Y. Chen, ve H. Chen (2003) düzgün olmayan bir manyetik alanda bulunan iki kubitlik Heisenberg XY modelinde ısısal dolaşıklığı çalışmışlar ve düzgün olmayan manyetik alanın ısısal dolaşıklık üzerine olan etkilerini göstermişlerdir. Ayrıca Asoudeh ve Karimipour (2005) da manyetik alandaki homojensizliklerin iki kubitlik isotropik XXX spin sisteminin ısısal dolaşıklığı üzerine olan etkilerini incelemişlerdir. Arkasından homojen olmayan bir manyetik alanda bulunan iki kubitlik Heisenberg XXZ spin zincirinin ısısal dolaşıklığı Zhang ve Li (2005) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalardan sonra Yang, Gao, Zhou, ve Song (2006) homojen olmayan bir manyetik alanda bulunan anizotropik Heisenberg XYZ zincirinde ısısal dolaşıklığı çalışmışlar ve homojen olmayan manyetik alanın dolaşıklığı nasıl etkilediğini incelemişleridir. Ayrıca Hu, Youn, Kang, ve Kim (2006) de düzgün olmayan bir manyetik alanın varlığında iki kubitlik anizotropik Heisenberg XYZ zincirinde dolaşıklığı incelemişler ve hem düzgün olmayan manyetik alanın hem de anizotropinin dolaşıklığı nasıl etkilediğini göstermişlerdir.

Heisenberg modellerinden başka kuantum hesaplama için yapılan bazı çalışmalarda Ising benzeri etkileşmeler de kullanılmıştır (Briegel ve Raussendorf, 2001; Raussendorf ve Briegel, 2001). Bu nedenle spin yönelimine dik (transverse) bir manyetik alanda bulunan bir boyutlu Ising modelinde dolaşıklık Štelmachovič ve Bužek (2004) tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bunun yanında Gunlycke, Kendon, Vedral, ve Bose (2001) da herhangi bir keyfi yönde bir manyetik alana sahip bir boyutlu Ising zincirinde ısısal dolaşıklığı incelemişler ve uyum karışımı (concurrence mixing) için basit bir kural ortaya koymuşlardır. Bu çalışmalara ilave olarak Terzis ve Paspalakis (2004) ise spinlerin konumuna bağlı olarak değişen bir dış manyetik alanda bulunan iki kubitlik Ising modelini incelemişlerdir. Terzis ve Paspalakis yaptıkları bu çalışmada çok düşük sıcaklıklar için ısısal dolaşıklığı x - z -düzleminde bulunan bir manyetik alan için hesaplamışlardır.

Burada anlatılan çalışmalardan görüldüğü gibi Heisenberg modelleri kuantum hesaplama ve kuantum bilgi işlemlerinde sıklıkla kullanılmaktadır. Diğer yandan yapılmış bazı çalışmalar da Ising spin sisteminin kuantum hesaplama için kullanılabilirliğini göstermektedir (Raussendorf ve Briegel, 2001).

Bu nedenle tezin literatüre orjinal katkısı olan yapmış olduğumuz bu çalışmada homojen olmayan bir manyetik alandaki Ising zincirinin ısısal dolaşıklığını inceledik.

5.2 Model ve Hesaplamalar

Homojen olmayan bir manyetik alanda bulunan N kubitlik izotropik Ising modelinin Hamiltoniyeni, $\hbar = 1$ ve Bohr magnetonu $\mu_B = 1$ olmak üzere

$$H = J \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \sum_{k \text{ tek}} (B + b) \sigma_k^x + \sum_{k \text{ çift}} (B - b) \sigma_k^x, \quad (5.2.1)$$

şeklinde verilir. Burada σ^α ($\alpha = x, y, z$) Pauli matrisleri olup, J komşu spinler arasındaki antiferromanyetik çiftlenim sabitidir. Homojen olmayan manyetik alan, uygulanan dış B manyetik alanına bir b homojensizlik parametresinin katılmasıyla sağlanmış ve yakın komşulara etki eden homojen olmayan manyetik alanlar sırasıyla $(B + b)$ ve $(B - b)$ şeklindedir.

Homojen olmayan bir manyetik alanda iki kubitlik Ising modelinin (5.2.1) ile verilen Hamiltoniyeni tensör çarpımları cinsinden

$$H = 2J(\sigma^z \otimes \sigma^z) + (B + b)(\sigma^x \otimes I) + (B - b)(I \otimes \sigma^x), \quad (5.2.2)$$

şeklinde verebiliriz. Ising modelinin alışılmış şeklinde olduğu gibi eğer homojen olmayan manyetik alan z -ekseni doğrultusunda olsaydı, Hamiltoniyen $\{|0, 0\rangle, |0, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$ şeklindeki standart bazda köşegen olduğu için dolaşıklık gözlenmezdi. Bu nedenle çalıştığımız bu modelde homojen olmayan manyetik alan

z -eksenine dik olan x -ekseni doğrultusunda seçilmiştir. Böylece (5.2.2) ile verilen Hamiltoniyenin matris ifadesi

$$H = \begin{pmatrix} 2J & (B-b) & (B+b) & 0 \\ (B-b) & -2J & 0 & (B+b) \\ (B+b) & 0 & -2J & (B-b) \\ 0 & (B+b) & (B-b) & 2J \end{pmatrix}, \quad (5.2.3)$$

şeklinde olur. Bu H matrisinin özdeğerleri

$$E_1 = 2\sqrt{b^2 + J^2}, \quad (5.2.4)$$

$$E_2 = -2\sqrt{b^2 + J^2}, \quad (5.2.5)$$

$$E_3 = 2\sqrt{B^2 + J^2}, \quad (5.2.6)$$

$$E_4 = -2\sqrt{B^2 + J^2}, \quad (5.2.7)$$

şeklinde olup bunlara karşılık gelen özvektörler

$$|\psi_1\rangle = \xi(|0,0\rangle - |1,1\rangle) - \eta(|0,1\rangle - |1,0\rangle), \quad (5.2.8)$$

$$|\psi_2\rangle = \zeta(|0,0\rangle - |1,1\rangle) - \alpha(|0,1\rangle - |1,0\rangle), \quad (5.2.9)$$

$$|\psi_3\rangle = \delta(|0,0\rangle + |1,1\rangle) + \chi(|0,1\rangle - |1,0\rangle), \quad (5.2.10)$$

$$|\psi_4\rangle = \gamma(|0,0\rangle + |1,1\rangle) + \kappa(|0,1\rangle - |1,0\rangle), \quad (5.2.11)$$

şeklindedir. Burada kullanılan ξ , η , ζ , α , δ , χ , γ , ve κ terimleri ise

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (\sqrt{b^2 + J^2} - J)/b, & \phi_2 &= (-\sqrt{b^2 + J^2} - J)/b, \\ \phi_3 &= (\sqrt{B^2 + J^2} - J)/b, & \phi_4 &= (-\sqrt{B^2 + J^2} - J)/b, \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \xi &= \phi_1/\sqrt{2 + 2\phi_1^2}, & \eta &= 1/\sqrt{2 + 2\phi_1^2}, \\ \zeta &= \phi_2/\sqrt{2 + 2\phi_2^2}, & \alpha &= 1/\sqrt{2 + 2\phi_2^2}, \\ \delta &= 1/\sqrt{2 + 2\phi_3^2}, & \chi &= \phi_3/\sqrt{2 + 2\phi_3^2}, \\ \gamma &= 1/\sqrt{2 + 2\phi_4^2}, & \kappa &= \phi_4/\sqrt{2 + 2\phi_4^2}, \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

şeklinde tanımlıdır.

Sistem ısısal dengede olduğunda yoğunluk matrisi

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp(-H/k_B T) = \sum_j \frac{e^{-\beta E_j}}{Z} |\psi_j\rangle \langle \psi_j|, \quad (5.2.14)$$

şeklinde olup burada belirtilen $Z = \text{Tr}[\exp(-H/k_B T)] = \sum_j \exp(-E_j/k_B T)$ ifadesi bölüşüm fonksiyonudur. T sıcaklık, k_B ise Boltzmann sabiti olup, hesaplamalarımızda $k_B = 1$ olarak alınmıştır. Wootters formülüne (Hill ve Wootters, 1997; Wootters, 1998) dayanan ve iki parçacık arasındaki dolaşıklık ölçüsü olan uyum C ise

$$C = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\}, \quad (5.2.15)$$

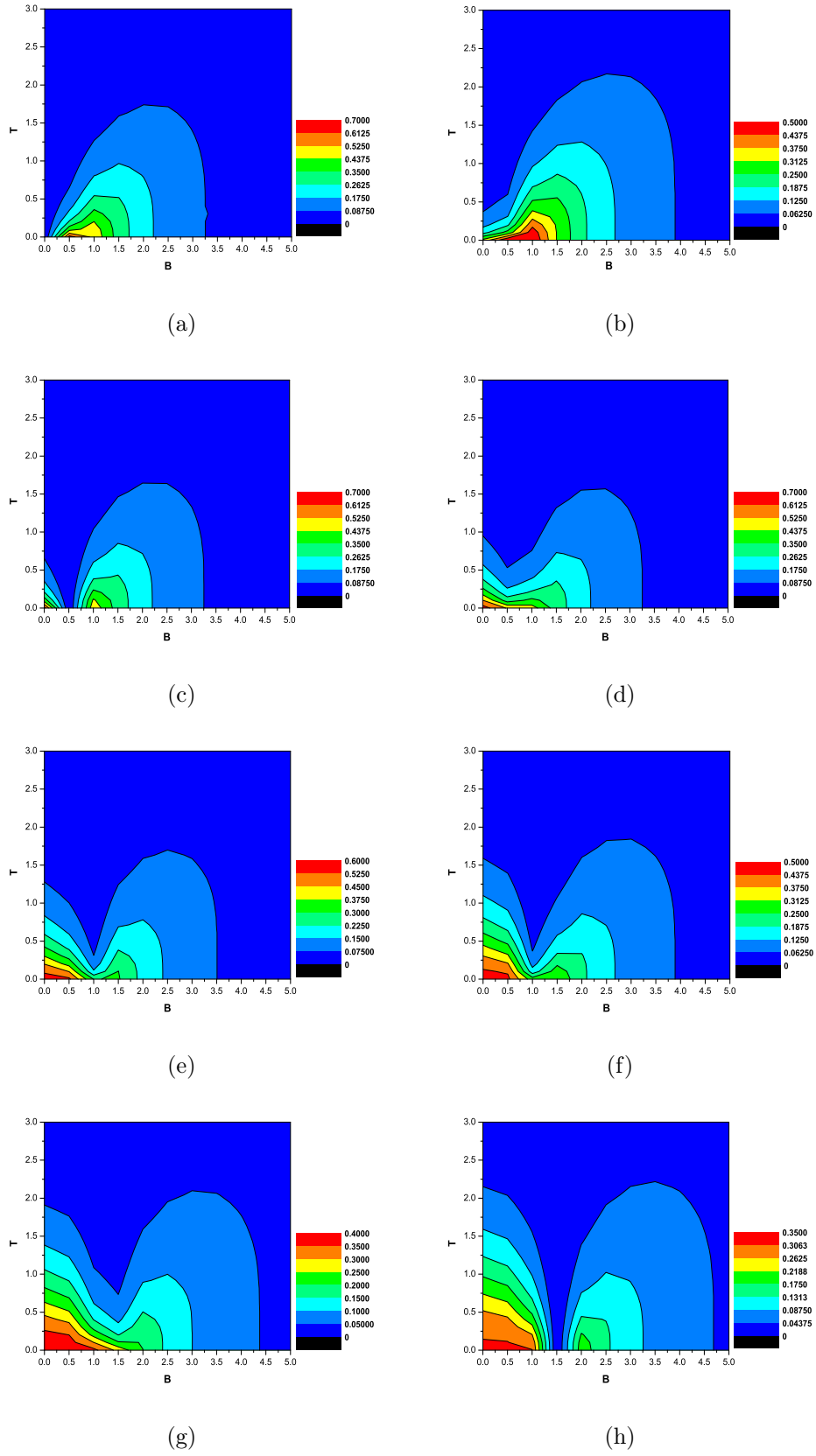
şeklinde tanımlıdır. Burada ifade edilen λ_i değerleri $\rho\tilde{\rho}$ matrisinin büyüklükleri azalan şekilde sıralanmış özdeğerleridir. Ayrıca burada ifade edilen spin döndüren (spin-flipped) $\tilde{\rho}$ matrisi

$$\tilde{\rho} = (\sigma^y \otimes \sigma^y) \rho^* (\sigma^y \otimes \sigma^y), \quad (5.2.16)$$

şeklinde tanımlıdır. (5.2.16)'da görülen ρ^* ifadesi ise yoğunluk matrisinin kompleks eşleniğidir. Biz çalışmamızda model aldığımız iki kubitlik sistemimiz için dolaşıklık ölçüsü olarak uyumun karesini kullandık. Bunun analitik olarak çözümü yapılabilir fakat çalışmamızda $\rho\tilde{\rho}$ matrisinin köşegenleştirilmesinin zor olmasından dolayı sonuçlarımızı grafiksel olarak gösterdik.

5.3 Sonuçlar ve Tartışma

Şekil 5.1'de farklı b homojensizlik değerleri için homojen olmayan bir manyetik alanda bulunan iki kubitlik Ising zincirinin dolaşıklığını T sıcaklığının ve B manyetik alanının fonksiyonu olarak çizdirdik. Tam $B = b = 0$ değerinde Hamiltoniyen $\{|0, 0\rangle, |0, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$ standart bazında köşegen olduğu için dolaşıklık oluşmaz. Buna karşın Şekil 5.1'den de anlaşıldığı gibi B ve b 'nin sıfırdan farklı olduğu değerlerde dolaşıklık oluşur. Diğer yandan, sabit manyetik alan değerinde dolaşıklık sıcaklık arttıkça azalır. Bunun yanında şekilden görüldüğü üzere b homojen-

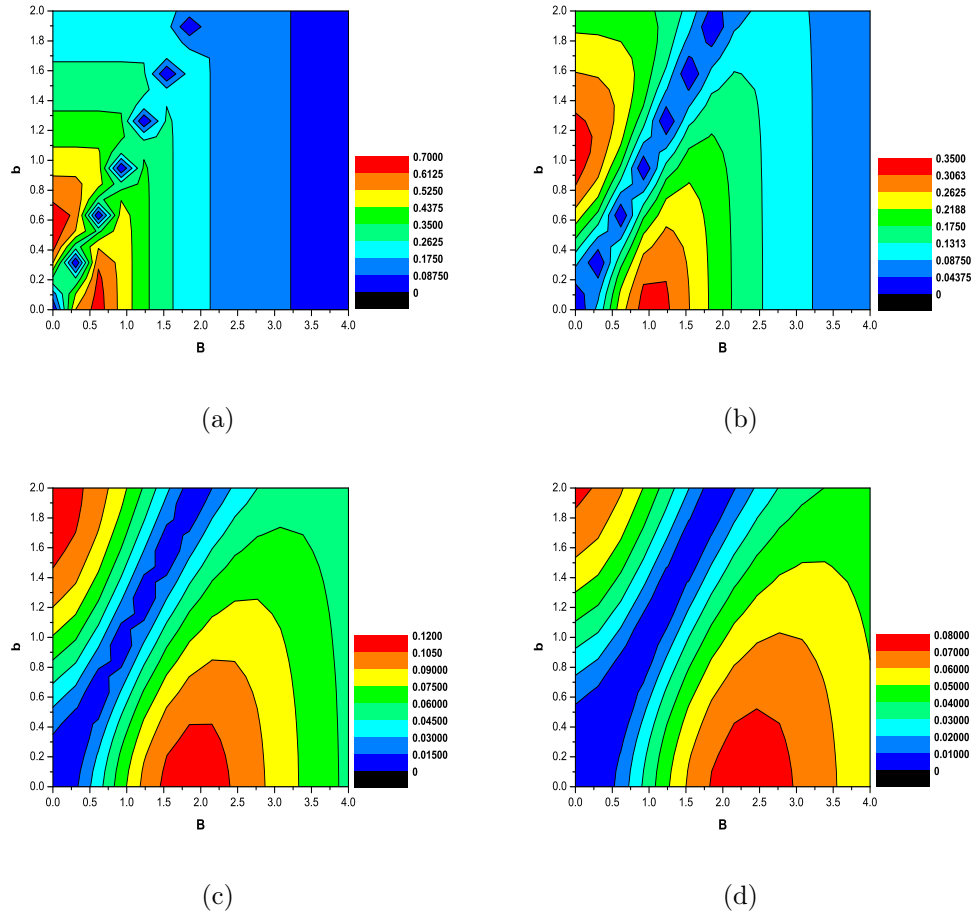


Şekil 5.1 Farklı b homojensizlik dereceleri için T sıcaklığının ve B manyetik alanının fonksiyonu olarak dolaşıklık kontur grafikleri: (a) $b = 0, 1$; (b) $b = 0, 3$; (c) $b = 0, 5$; (d) $b = 0, 7$; (e) $b = 0, 9$; (f) $b = 1, 1$; (g) $b = 1, 3$; (h) $b = 1, 5$; ($J = 1$).

sizlik derecesi iki kubitlik Ising zincirinin dolaşıklığı üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Şekillerden dolaşıklığın iki farklı bölgede yoğunlaştığı görülür ve $B = b$ değerinde B_c ile belirtilen kritik bir nokta bulunmaktadır. Hamiltoniyen'den elde edilen özvektörlere baktığımızda bunların Bell durumlarının lineer kombinasyonları olduğu görülür. Böylece tüm Bell durumları dolaşıklığa katkı yapmaktadır. Bununla beraber b 'nin küçük değerleri için dolaşıklık $B > B_c$ bölgesinde baskın bir şekilde oluşmaktadır. Bu bölgede $E_4 = -2\sqrt{B^2 + J^2}$ ile belirtilen enerji seviyesi ve buna karşılık gelen $|\psi_4\rangle$ Bell durumu dolaşıklığa büyük oranda katkı yapar. Diğer taraftan b 'nin büyük değerleri için dolaşıklık $B < B_c$ bölgesinde baskın bir şekilde oluşmaktadır. Bu bölgede enerji düzeyi $E_2 = -2\sqrt{b^2 + J^2}$ olup buna karşılık gelen $|\psi_2\rangle$ Bell durumu dolaşıklığa etkili bir şekilde katkı yapmaktadır. Dahası B_c kritik değerinde dolaşıklık Şekil 5.1 (c), (e), (f) ve (h)'den de görüldüğü gibi bazı b homojensizlik değerleri için hızlı bir şekilde azalırken, Şekil 5.1 (b), (d) ve (g)'den de görüldüğü gibi bazı b homojensizlik değerleri için yumuşak bir şekilde azalıp minimum dolaşıklık değerlerine ulaşmaktadır. Dolaşıklığın B ve b 'nin birbirlerine göre aldığı değerlere bağlı olarak B_c kritik noktasındaki bu davranışı bir salınım davranışı olarak ifade edilebilir.

Şekil 5.2'de de farklı T sıcaklık değerleri için iki kubitlik Ising zincirinin dolaşıklığının kontur grafiklerini, B manyetik alanının ve b homojensizlik derecesinin bir fonksiyonu olarak çizdirdik. Bu grafiklerden B manyetik alanının ve b homojensizlik derecesinin dolaşıklık üzerindeki etkileri açık bir şekilde görülmektedir. Grafiklere baktığımızda her sıcaklık için b ve B değerlerine bağlı olarak dolaşıklığın iki farklı bölgede yoğunlaştığı görülmektedir. Daha önce de açıkladığımız gibi maksimum dolaşıklık B manyetik alanının küçük değerleri için homojensizlik derecesi b 'ye bağlı olarak oluşuyorken, b 'nin küçük değerleri için B manyetik alanına bağlı olarak oluşur. Bu davranışın nedeni farklı Bell durumlarının dolaşıklık oluşumuna yaptıkları farklı katkılar şeklinde açıklanabilir. Gerçekten de b homojensizlik derecesi sıfıra gittiğinde, iki kubitlik sistemimize etki eden etkin alan sadece B manyetik alanı olur. Bunun yanında B manyetik alanı sıfıra gittiğinde iki kubitlik sistemimizde her bir kubite etki eden etkin alan zıt yönlü b alanlarıdır.

Diğer taraftan beklendiği gibi sıcaklık dolaşıklık üzerinde yıkıcı bir etkiye sahip-



Şekil 5.2 Farklı T sıcaklık değerleri için b homojensizlik derecesinin ve B manyetik alanının fonksiyonu olarak dolaşıklık kontur grafikleri: (a) $T = 0, 1$; (b) $T = 0, 5$; (c) $T = 1, 5$; (d) $T = 2, 0$; ($J = 1$).

tir. Şekil 5.2'den de görüldüğü gibi sıcaklığın artışıyla dolaşıklık azalır. Dolaşıklık yoğun olarak bulunduğu odak noktaları ise sıcaklığın artışı ile birlikte büyük B ve b değerlerine kayarlar. Bu davranış, manyetik alan etkisindeki ısısal dolaşıklığın doğal bir sonucudur. Buna ek olarak Şekil 5.2'den ısısal dolaşıklık B_c kritik değerinde minimum dolaşıklık değerine düşeceği sonucu çıkarılabilir. Oldukça düşük sıcaklıklar için ise B_c kritik değerindeki dolaşıklık oluşumunda çukur bölgeler oluşur. Dolaşıklık bu davranışı Şekil 5.2 (a)'dan ayrıntılı olarak görülmektedir. Bu çukur bölgeler minimum dolaşıklık değerlerine karşılık gelmektedirler. Buna karşın her çukur bölge sıcaklığın artışıyla birlikte genişlemekte ve birbirleriyle birleşmektedir. Bunun sonucunda da iki dolaşıklık adacığı birbirlerinden ayrılıp uzaklaşırlar.

BÖLÜM ALTI

DZIALOSHINSKI-MORIYA ETKİLEŞMESİNE SAHİP İKİ KUTRİTLİK ISING ZİNCİRİNİN DOLAŞIKLIĞI

6.1 Giriş

İki kısımlı bir sistem için kuantum dolaşıklığını, sistemin kuantum mekaniksel dalga fonksiyonunun ayrıştırılamaması olarak tanımlayabildiğimizi önceki kısımlarda görmüştük. Bu durum, sistemi oluşturan alt sistemlerin arasında lokal olmayan korelasyonların var olduğu anlamına gelmektedir (Schrödinger, 1935; Einstein, Podolsky, Rosen, 1935; Bell, 1964). Ayrıca teleportasyon (Bennett ve diğer., 1993), süperyoğun kodlama (Bennett ve Wiesner, 1992; Bennett, 1992), kuantum anahtar dağılımı (Ekert, 1991) ve teleklonlama (Murao ve diğer., 1999) gibi kuantum hesaplama ve kuantum bilgi alanları için dolaşıklığın bir kaynak olduğunu belirtmiştik.

Dolaşıklığın nicel bir karakterizasyonu Hill (1997) ve Wootters (1998) tarafından verilmiştir. Bunlar bir kubit çiftinin dolaşıklığını belirlemek için, uyum (concurrence) olarak adlandırılan kesin bir formül türetmişlerdir. Bir önceki kısımda yapmış olduğumuz çalışmadan da görüldüğü gibi spin-1/2 için uyum iyi bir dolaşıklık ölçüsüdür; fakat sistemin karma spinlerden veya 1/2'den daha büyük spin değerlerinden oluştuğu durumlar için uygun bir ölçü değildir. Büyük değerlere sahip spinlerin olduğu durumlarda Peres-Horodecki kriterine göre (Peres, 1996; M. Horodecki, P. Horodecki, ve R. Horodecki, 1996) pozitif kısmi transpoz (PPT), dolaşık olmayan bir kuantum durum için gerekli bir koşul oluşturur. Ayrıca PPT, iki tane 1/2 spinden veya (1/2, 1) gibi karma spinlerden oluşmuş bir sistem için de yeterli bir koşuldur. Buna karşın iki tane spin-1 parçacıktan oluşmuş bir sistem için PPT yeterli bir koşul oluşturmaz. Böyle bir durumda negatif kısmi transpoz (NPT) dolaşıklık için yeterli bir koşul verir. Peres-Horodecki kri-

teri dolaşık bir kuantum durum için nitel bir kriterdir. Bu kriterin nicel versiyonu Vidal ve Werner (2002) tarafından geliştirilmiştir. Bu ise dolaşıklığın hesaplanabilir bir ölçüsü olan negatifliktir (negativity).

Bir önceki kısımda da belirttiğimiz gibi katıhal sistemlerinde kuantum bilgi ve kuantum dolaşıklık işlemlerinin gerçekleştirilmesi pratik amaçlar için oldukça istenen bir durumdur. Ayrıca spin zincirleri de pek çok dolaşıklık özelliği sergilemelerinden dolayı karakteristik bir model olarak kuantum hesaplama ve kuantum bilgi çalışmalarında büyük öneme sahiptirler (Bose, 2003; Christandl, Datta, Ekert, ve Landahl, 2004). Bu nedenle spin zincirleri katıhal sistemlerinde yaygın olarak çalışılan bir alan oluşturur. Heisenberg spin zinciri bu spin zincirlerinden biridir ve kuantum noktalar (Loss ve Divincenzo, 1998; Burkard, Loss, ve Divincenzo, 1999) ve nükleer spin (Kane, 1998) gibi pek çok sistemde kubitlerin etkileşmesini açıklamak için kullanılabilir. Bunun sonucunda da potansiyel olarak kuantum bilgisayar gibi düşünülebilirler (Divincenzo, Bacon, Kempe, Burkard, ve Whaley, 2000).

Dolaşıklığın sıcaklık ve dış manyetik alana göre değişiminin incelenmesi, onun oluşturulması ve etkin bir şekilde kontrolü için pratik olarak gereklidir. Bu nedenle bu değişimler daha önce de belirttiğimiz gibi izotropik Heisenberg spin zinciri (Arnesen, Bose, ve Vedral, 2001), Heisenberg XX kubit çevrimi (ring) (Wang, 2002) ve Heisenberg XYZ zinciri (Zhou, ve diğer., 2003) gibi çok sayıda sistem için tartışılmıştır.

Kuantum noktaların (quantum dots) ve kovuk-KED'nin (cavity-QED) kullanıldığı kuantum bilgi işlemlerine baktığımızda ise yukarıda tanımladığımız modellerden farklı olarak daha önce de belirttiğimiz gibi kuantum Heisenberg XY modelinin önemli olduğunu görürüz. Bu bağlamda, XY Hamiltoniyeni iki kuantum noktası arasındaki etkin etkileşme Hamiltoniyeni olarak önerilebilir (İmamoğlu ve diğer., 1999) ve KONTROLLÜ-DEĞİL kuantum mantık kapısının oluşturulmasında kullanılabilir. Modelin bu şekilde öneminin belirtilmesinden sonra XY modelinde ısısal dolaşıklığın incelenmesi de önemli bir yer oluşturur (Wang, 2001b). Bunların yanında literatürden de görüldüğü gibi Heisenberg

modellerinden farklı olarak Ising tipi etkileşmeler de dolaşıklık özelliklerinin belirlenmesinde kullanılmıştır (Briegel ve Raussendorf, 2001; Raussendorf ve Briegel, 2001; Štelmachovič ve Bužek, 2001; Gunlycke ve diğer., 2001).

Kuantum bilgi işlemelerinin uygulanabilir olması için yeterli derecede uzun ömürlü ve dayanıklı dolaşık durumlar gereklidir. Bununla birlikte bu tasarı farklı ölçme ve kontrollü etkileşme basamakları içerecek şekilde başlangıç durumunun detaylı olarak oluşturulmasını gerektirir. Dahası önerilerin hepsi ısısal dalgalanmalara ve çevreyle olan olumsuz kuantum etkilere (decoherence) karşı sağlam saf bir dolaşık durum gerektirir. Genellikle mutlak sıfır sıcaklıkta bulunan taban durumlar bu gereksinimleri karşılarlar. Oysa gerçekte sistemi mutlak sıfıra kadar soğutmak imkansızdır. Bu nedenle de ısısal dolaşıklık (Arnesen, Bose, ve Vedral, 2001; Nielsen, 2000) görüşü saf taban duruma çok fazla gereksinim duyulmasını önlemek için ortaya sürülmüştür; fakat dolaşıklık hala bir kaynak olarak gözönüne alınmalıdır. Bu bir ısısal durumun yani ısısal dengede bulunan bir durumun dolaşıklığıdır. Böyle bir kavram bazı avantajlara sahiptir. Isısal dolaşıklık oldukça geniş bir ısısal aralıkta kararlıdır ve ısısal dalgalanmalara karşı güvenlidir. Örneğin NMR (Nükleer Manyetik Rezonans) gibi (Nielsen, 2000) kuantum bilgi işlemlerini dikkate alan kesin gerçek fiziksel sistemler için doğal bir başlangıç durumu olarak ısısal dolaşıklık uygundur.

Genel olarak, şimdiye kadar sözünü ettiğimiz çalışmalarda düzgün manyetik alanlar çalışılmıştır. Buna karşın kubitlerin oluşturulması ve düzenlenmesi için çalışılmış herhangi bir katıhal sisteminde homojen olmayan Zeeman çiftleniminin olma olasılığı daima mevcuttur (Hu ve Das Sarma, 2001; Hu, De Sousa, ve Das Sarma, 2001). Bu yüzden her bir spin üzerindeki manyetik alanın ayrı ayrı kontrol edilmesi oldukça dikkate değerdir. Bu amaçla, farklı çalışmalarda homojen olmayan manyetik alanda bulunan spin sistemlerinin dolaşıklık özellikleri çalışılmıştır (Sun, Y. Chen, ve H. Chen, 2003; Asoudeh ve Karimipour, 2005; Zhang ve Li, 2005; Yang ve diğer., 2006; Hu ve diğer., 2006; Terzis ve Paspalakis, 2004; Akyüz ve Aydın, 2008). Spin-1/2 sistemlerin çalışıldığı bu çalışmalardan başka spin-1 sistemlerin çalışıldığı pek çok çalışma da gerçekleştirilmiştir (Zhang, Li, ve Liang, 2005; Sun, Wang, ve Li, 2005; Zhang ve Li, 2006a, 2006b, 2006c).

Kuantum hesaplama ve kuantum bilgi iletiminde dolaşıklık oluşturulması ve çoğaltılması çok dikkate değer önemli bir noktayı oluşturur. Bu nedenle spin modellerinde bilineer spin-spin etkileşimleri önemli bir kavramdır. Dzialoshinski (1958) ve Moriya (1960a, 1960b, 1960c) antiferromanyetik kristallerin zayıf ferromanyetik özelliklerini açıklamak için Dzialoshinski-Moriya (DM) etkileşmesi olarak bilinen anizotropik antisimetrik bir değiş tokuş enerjisi önermişlerdir. Böyle bir etkileşme teriminin belirlenmesinden sonra DM etkileşmesine sahip spin modelleri düşünülmüş ve bunların dolaşıklık özellikleri incelenmiştir (Zhang, 2007; Gurkan ve Pashaev, 2008; Ma, 2008).

Literatürde bu etkileşmeye sahip spin modelleri ile yapılmış pek çok çalışma olmasına karşın DM etkileşmesine sahip iki kutritlik Ising modeli için dolaşıklık henüz incelenmemiştir. Yüksek değerli spinler kuditler ile ilişkilendirilebilirler. Bunlar kubitlerin üst boyutlardaki karşılıklarıdır ve kubit bazlı kuantum hesaplama daha etkili bir şekilde kuantum mekaniğinden faydalanarak kuantum hesaplama için avantaj sağlarlar (Barlett, De Guise, ve Sanders, 2002) çünkü kuditler daha fazla kapasitede bilgi taşırlar. Bunun yanında kuantum iletişim için etkili protokoller ileri sürerler (Brukner, Zukowski, ve Zeilinger, 2002) ve kuantum anahtar dağılımı için daha güvenlidirler (Cerf, Bourennane, Karlsson, ve Gisin, 2002). Ayrıca üç durumlu sistemlerin kuantum kriptografide iki durumlu sistemlerden daha avantajlı olduğu da bilinmektedir (Bechmann-Pasquinucci ve Peres, 2000). Farklı boyutlarda kuditlerin etkileşmesi olduğu durumda doğal, uygun ve daha uyumlu kuantum bilgi iletim işlemleri hibrit kudit kuantum mantık kapılarına dayanarak gerçekleştirilebilir (Daboul, Wang, ve Sanders, 2003). Bunlara ilaveten kuantum hesaplama kuditlerin kullanılması, kubitler ile yapılan hata düzeltmelerinden daha iyi olmaktadır (Gottesman, 1999). Bunlardan başka kuditler, işlemleri gerçekleştirmek için daha az kaynak kullanılmasına olanak sağlarlar; pek çok kubit gerektiren bir işlem daha az sayıda kudit ile gerçekleştirilebilir. Bu bize çevreden kaynaklanan olumsuz etkiler karşısında avantaj sağlar. Tüm bunların sonucunda kudit hibrit kuantum hesaplama gerçekleştirebilmek için fiziksel kuditler arasındaki etkileşmelerin etkin kontrolünün geliştirilmesinin gerekli olduğunu söyleyebiliriz.

Bu nedenle literatüre orjinal bir katkı sağlamak amacıyla yaptığımız bu çalışmada, DM anizotropik antisimetrik değiş tokuş etkileşmesine sahip iki kutritlik bir Ising zincirinde ısıl dolaşıklık incelenmiştir.

6.2 Model

Bir dış manyetik alan içinde bulunan, DM etkileşmesine sahip, N tane kutritten oluşmuş ve Ising modeli ile tanımlanan bir kuantum spin zincirini düşünelim. $\hbar = 1$ ve Bohr magnetonu $\mu_B = 1$ olmak üzere model sistemin Hamiltoniyeni

$$H = J \sum_{i=1}^{N-1} S_i^z S_{i+1}^z + \vec{B} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{S}_i + \vec{D} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} (\vec{S}_i \times \vec{S}_{i+1}), \quad (6.2.1)$$

şeklindedir. Burada \vec{B} homojen dış manyetik alanı, J en yakın komşu spinler arası çiftlenim sabitini göstermektedir. $J > 0$ ve $J < 0$ ise sırasıyla antiferromanyetik ve ferromanyetik etkileşmeleri belirtmektedir. Spin yönelimine dik (transverse) (x, y) yönleri doğrultusunda olan değiş tokuş çiftlenim terimleri oldukça küçük olarak kabul edildiğinden ihmal edilmiştir. \vec{D} , spin yörünge etkileşmesinden kaynaklanan anizotropik ve antisimetrik bir etkileşme olan DM etkileşmesidir. Bu etkileşme düşük simetrlili antiferromanyetik sistemlerde (Dzialoshinski, 1958) olduğu kadar zayıf ferromanyetik sistemler (Moriya, 1960a, 1960b, 1960c) için de çok önemlidir. Spin-1 matrisler

$$S_i^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2.2)$$

$$S_i^y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2.3)$$

$$S_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.2.4)$$

şeklinde S^z 'nin özvektörlerinden oluşmuş $|1\rangle = (1, 0, 0)^T$, $|0\rangle = (0, 1, 0)^T$ ve $|-1\rangle = (0, 0, 1)^T$ bazında verilebilir. Bu özvektörlere karşılık gelen özdeğerler ise sırasıyla $1, 0, -1$ şeklindedir.

Bu tez çalışmasında özel olarak DM etkileşmesine sahip iki kutritlik kuantum Ising zincirinin bir dış manyetik alanda bulunduğu durum incelenmiştir. Bu durumda (6.2.1) ile verilen Hamiltoniyen ifadesi

$$H = JS_1^z S_2^z + \vec{B} \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) + \vec{D} \cdot (\vec{S}_1 \times \vec{S}_2), \quad (6.2.5)$$

şekline dönüşür. Şimdi bu Hamiltoniyen ile verilen sistemi farklı durumlar için inceleyelim.

6.2.1 İki Kutritlik Ising Zinciri

İlk olarak sadece iki kutrit arasında değiş tokuş enerjisinin olduğunu yani $\vec{B} = 0$ ve $\vec{D} = 0$ olduğu durumu düşünelim. Bu durumda Hamiltoniyen

$$H = JS_1^z S_2^z, \quad (6.2.6)$$

şeklinde olacaktır.

Bu Hamiltoniyenin $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle, |0, 1\rangle, |0, 0\rangle, |0, -1\rangle, |-1, 1\rangle, |-1, 0\rangle, |-1, -1\rangle\}$ şeklindeki standart baz durumunda matris gösterimi köşegen olur. Burada S_1^2 , S_2^2 , S_1^z ve S_2^z operatörlerinin $|S_1, S_2, S_1^z, S_2^z\rangle$ özvektörleri için kısaca $|S_1^z, S_2^z\rangle$ gösterimini kullanacağız.

(6.2.6) ifadesi ile verilen durumda ne taban durum için ne de uyarılmış du-

rumlar için iki kutrit arasında dolaşıklık bulunmaz. Bu XX model olarak adlandırılan ve iki kutritin arasında sadece $H_{XX} = J(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y)$ şeklinde değiş tokuş etkileşmesinin olduğu durumun tersidir (Zhang, Li, ve Liang, 2005). XX modeli ikili korelasyonlar oluşturur ve bu XX modele ait Hamiltoniyeinin $H_{XX} = J(S_{1+} S_{2-} + h.e)$ şeklinde alçaltma ve yükseltme operatörleri cinsinden yazılması durumunda doğrudan görülebilir. Ayrıca burada belirtmiş olduğumuz Ising modeli gerçekte dolaşıklık oluşturmak için ikili kubitler arasında lineer olmayan etkileşmeler üretme yeteneğine sahiptir. Ising modelinde ikili dolaşıklık oluşturmanın yolu XX modelinden farklıdır. Ising modelinde kuantum korelasyonların nasıl oluştuğunun anlaşılması için Hamiltoniyeni

$$H = J(S_z^2 - S_1^{z2} - S_2^{z2}), \quad (6.2.7)$$

formunda tekrar yazalım. Burada $S_z = S_1^z + S_2^z$ şeklinde belirtilen toplam spin operatörünün z -bileşenidir. Hamiltoniyende görülen bu kareli terimler tek-eksenli burulma tipli etkileşmelere (single-axis twisting type interactions) yol açar ki bunlar kuantum korelasyonlara sahip sıkıştırılmış durumlar (quantum correlated spin squeezed states) oluşturur (Kitegawa ve Ueda, 1993). Bu da gösterir ki sıkıştırılmış spin durumlarında görülen bu tarz kuantum korelasyonlar dolaşıklığa karşılık gelir (Sørensen, Duan, Cirac, ve Zoller, 2001; Duan, Sørensen, Cirac, ve Zoller, 2000; Sørensen ve Mølmer, 2001). Ayrıca şunu da söylemek mümkündür: Ising modelinde ilk olarak z -eksenine dik şekilde konumlandırılmış bir başlangıç durumu ile başlarsak dolaşıklığı dinamik olarak da elde edebiliriz (Wang, Sørensen, ve Mølmer, 2001).

6.2.2 *Paralel veya Antiparalel Manyetik Alanda Bulunan İki Kutritlik Ising Zinciri*

Bu durumda bir önceki kısımda (6.2.6) ifadesi ile verilmiş olan Hamiltoniyemize $\vec{B} = B\hat{z}$ şeklinde z -yönünde homojen bir manyetik alan ilave edelim ve $\vec{D} = 0$ alarak DM etkileşmesinin olmadığını düşünelim. Bu koşullar altında

Hamiltoniyen simetrisinin kırıldığı alışılmış Ising modeli formundadır

$$H = JS_1^z S_2^z + B(S_1^z + S_2^z). \quad (6.2.8)$$

Bu Hamiltoniyene ait matris gösterimi de standart bazda köşegendir ve kutritler arasında ne taban durumda ne de uyarılmış durumlarda dolaşıklık gözlenmez. İlave edilen manyetik alan sadece z -ekseni etrafında bir dönmedir ve böylece spin çiftleri arasında kuantum korelasyonları oluşturmak için lineer olmayan eksen döndürücü etkileşmelerden (axis twisting nonlinear interactions) faydalanmamız mümkün olmaz.

6.2.3 *Spin Yöneline Dik (Transverse) Bir Manyetik Alanda Bulunan İki Kutritlik Ising Zinciri*

Şimdiki durumda $\vec{B} = B\hat{x}$ şeklinde x -yönünde bir manyetik alan olsun. Bu alan spinlerin yönelimlerinin olduğu z -eksenine diktir (transverse). $D = 0$ alıp DM etkileşmesini ihmal edelim. Bu koşullar altında sistemimizin Hamiltoniyeni

$$H = JS_1^z S_2^z + B(S_1^x + S_2^x), \quad (6.2.9)$$

şeklinde olur. Bu modele özel olarak "transverse Ising modeli" (TIM) denir. Bu model iki kubit için (Gunlycke ve diğer., 2001) ve üç kubitlik durumlar (Wang, 2004) için çalışılmıştır.

Alternatif olarak bu Hamiltoniyeni

$$H = J(S_z^2 - S_1^{z2} - S_2^{z2}) + BS_x, \quad (6.2.10)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada daha önce tanımlanmış olanlara ilave olarak S_x toplam spin operatörünün x -bileşenidir. BS_x teriminin oluşturduğu x -ekseni etrafındaki dönmeden dolayı, özellikle taban durumu olmak üzere, H matrisinin özvektörleri ikili kuantum dolaşıklığı için eksen döndürme (axis twisting) yolunu

kullanırlar. Bu Hamiltoniyen için matris temsili standart bazda artık köşegen değildir.

H matrisinin E_j özdeğerleri ve bunlara karşılık gelen $|\psi_j\rangle$ özvektörleri $H|\psi_j\rangle = E_j|\psi_j\rangle$, ($j = 1, 2, \dots, 9$) özdeğer denkleminin çözülmesiyle elde edilir. Burada özdeğerler

$$E_1 = 0, \quad (6.2.11)$$

$$E_2 = \frac{J}{2} + \frac{\sqrt{J^2 + 4B^2}}{2}, \quad (6.2.12)$$

$$E_3 = \frac{J}{2} - \frac{\sqrt{J^2 + 4B^2}}{2}, \quad (6.2.13)$$

$$E_4 = -\frac{J}{2} + \frac{\sqrt{J^2 + 4B^2}}{2}, \quad (6.2.14)$$

$$E_5 = -\frac{J}{2} - \frac{\sqrt{J^2 + 4B^2}}{2}, \quad (6.2.15)$$

$$E_6 = \frac{1}{2}\sqrt{2J^2 + 8B^2 + 2\sqrt{J^4 + 16B^4}}, \quad (6.2.16)$$

$$E_7 = -\frac{1}{2}\sqrt{2J^2 + 8B^2 + 2\sqrt{J^4 + 16B^4}}, \quad (6.2.17)$$

$$E_8 = \frac{1}{2}\sqrt{2J^2 + 8B^2 - 2\sqrt{J^4 + 16B^4}}, \quad (6.2.18)$$

$$E_9 = -\frac{1}{2}\sqrt{2J^2 + 8B^2 - 2\sqrt{J^4 + 16B^4}}, \quad (6.2.19)$$

şeklinindedir. Özdeğerler $B \rightarrow -B$ simetrisi göstermektedirler. $J > 0$ için J ve B 'nin birbirlerine göre olan şiddetlerine bağlı olarak taban durum enerjisi E_5 , E_7 veya E_9 olacaktır. (6.2.11-19) ile verilen özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise farklı derecede kuantum korelasyonlara sahip olacaklardır. Bu özvektörleri

$$|\psi_j\rangle = \sum_{m_1, m_2} a_j^{m_1 m_2}(J, B) |m_1, m_2\rangle, \quad (6.2.20)$$

şeklinde verebiliriz. Buradaki $a_j^{m_1 m_2}(J, B)$ terimleri Ek A.3'de verilmiştir.

Herhangi J ve B değerleri için, farklı baz durumlarından gelen katkıların düzgün olmamasından dolayı burada verilen durumların hiçbiri maksimum dolaşıklıkla sahip değildir. $J > 0$ olmak üzere $B \ll J$ şeklinde küçük manyetik alan

değerleri için, $|\psi_5\rangle$ ve $|\psi_7\rangle$ dejenere taban durumlarıdır. Bu durumlar bir normalizasyon sabiti ile birlikte yaklaşık $(|1, -1\rangle + |-1, 1\rangle)$ şeklindedir.

Diğer taraftan, eğer özellikle uyarılmış durumlardan küçük bir enerji boşluğu ile ayrılmış bir durum varsa herhangi bir sistemi tam taban duruma kadar soğutmak çok zordur. İncelenen bu durumda H matrisinin özdeğerleri arasındaki küçük enerji ayrılıklarından dolayı, ısısal dalgalanmalar kuantum korelasyonların derecesi üzerinde oldukça etkili olur. Manyetik alan genişlediğinde ise lineer duruma kıyasla H matrisinin dönen kısmının lineer olmayan etkileşmelerinin azaltıcı etkileri beklenmektedir. Bundan dolayı çok düşük sıcaklıklarda bile dolaşıklık kolayca yok olabilir.

6.2.4 *Paralel veya Antiparalel Manyetik Alanda Bulunan DM Etkileşmesine Sahip İki Kutritlik Ising Zinciri*

Son olarak $\vec{B} = B\hat{z}$ şeklinde z -yönünde homojen bir dış manyetik alan ve $\vec{D} = D\hat{z}$ şeklinde bir DM etkileşmesinin olduğu durumu inceleyelim. Bu şartlar altında Hamiltoniyen

$$H = JS_1^z S_2^z + B(S_1^z + S_2^z) + D(S_1^x S_2^y - S_1^y S_2^x), \quad (6.2.21)$$

şeklindedir. Eksen burucu tipte (axis twisting type) olmamasına rağmen Ising modeline benzer şekilde DM etkileşmesi kutritler arasındaki lineer olmayan etkileşmelerin bir kaynağıdır. DM etkileşmesinin ikili korelasyonları nasıl etkilediğinin açıklanabilmesi için Hamiltoniyenin

$$H = J(S^2 - S_1^2 - S_2^2) + BS_z - (gS_{1+}S_{2-} + g^*S_{1-}S_{2+}), \quad (6.2.22)$$

formunda yazılması aydınlatıcı olacaktır. Burada $g = (J - iD)/2$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu görünüm manyetik alan ve DM etkileşmesinin rekabet içinde olduğunu belirtir. Manyetik alan, B manyetik alanına ters yönelmiş spinleri alan yönünde düzenler. DM etkileşmesi ise farklı z -bileşenlerine rağmen spin durumlarını karıştırır.

rır ve koherent süperpozisyon durumların oluşması yönünde katkı yapar.

H matrisinin özdeğerleri

$$E_1 = J + 2B, \quad (6.2.23)$$

$$E_2 = -J, \quad (6.2.24)$$

$$E_3 = B - D, \quad (6.2.25)$$

$$E_4 = -B + D, \quad (6.2.26)$$

$$E_5 = -B - D, \quad (6.2.27)$$

$$E_6 = B + D, \quad (6.2.28)$$

$$E_7 = J - 2B, \quad (6.2.29)$$

$$E_8 = -\frac{J}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{J^2 + 8D^2}, \quad (6.2.30)$$

$$E_9 = -\frac{J}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{J^2 + 8D^2}, \quad (6.2.31)$$

şeklinde bulunur.

Bu şartlar altında ısısal dalgalanmalara karşı dolaşıklığın korunumu için kesin avantajlara sahip oluruz. Bir önceki kısımda incelediğimiz Ising modelinin spin yönelimine dik manyetik alan içindeki durumunda tüm özvektörler manyetik alana bağlılık göstermektedir. Bu durum onların kontrolünü zorlaştırır ve dahası bunlar birbirlerine çok yakın durumlarda bulunurlar. (6.2.23-31) ifadelerinden de görüldüğü gibi incelediğimiz bu durum için bazı özdeğerler DM etkileşmesi D 'ye, bazı özdeğerler ise sadece manyetik alan B 'ye bağlıdır. Böylece özdeğerler arasındaki relatif ayrılık daha iyi duruma gelmiştir.

Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise

$$|\psi_1\rangle = |1, 1\rangle, \quad (6.2.32)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, -1\rangle + |-1, 1\rangle), \quad (6.2.33)$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle + i|0, 1\rangle), \quad (6.2.34)$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|0, -1\rangle + |-1, 0\rangle), \quad (6.2.35)$$

$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, -1\rangle + i|-1, 0\rangle), \quad (6.2.36)$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle - i|0, 1\rangle), \quad (6.2.37)$$

$$|\psi_7\rangle = |-1, -1\rangle, \quad (6.2.38)$$

$$|\psi_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{\delta}}(-|1, -1\rangle + i\gamma|0, 0\rangle + |-1, 1\rangle), \quad (6.2.39)$$

$$|\psi_9\rangle = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(-|1, -1\rangle + i\sigma|0, 0\rangle + |-1, 1\rangle), \quad (6.2.40)$$

şeklinde olup buradaki terimler $\alpha = 2 + \sigma^2$, $\delta = 2 + \gamma^2$, $\sigma = \frac{J-\Omega}{2D}$, $\gamma = \frac{J+\Omega}{2D}$, $\Omega = \sqrt{J^2 + 8D^2}$ olarak tanımlanmışlardır.

Bu halde, söz konusu bu dokuz durum arasından sadece ikisi etkileşme parametrelerine bağlıdır ve buna ilave olarak $|\psi_1\rangle$ ve $|\psi_7\rangle$ dışında diğer tüm durumlar oldukça dolaşıktır. Ayrıca $2|B| \ll J$ olduğunda, taban durumu daima dolaşıktır ve $|\psi_1\rangle$ ve $|\psi_7\rangle$ durumunda olduğu gibi faktörize edilemez. $2|B| \gg J$ durumunda ise $|\psi_7\rangle$ 'nin faktörize bir taban durum olmasını önlemek için $D > B - J$ olacak şekilde oldukça büyük D değerine sahip olmamız gerekmektedir.

Böylece bu kısımda verilen sistemin sağlam dolaşık taban ve uyarılmış durumlarının olduğunu öngörebiliriz. Bunun sonucunda da ısısal dalgalanmalara karşı dayanıklı dolaşık durumlar elde etmiş oluruz.

6.3 Isısal Dolaşıklık

Isısal dengede bulunan bir sistemin durumu yoğunluk matrisi ile belirlenir

$$\hat{\rho}(T) = \frac{e^{-\hat{H}/k_B T}}{Z} = \sum_j \frac{e^{-\beta E_j}}{Z} |\psi_j\rangle \langle \psi_j|. \quad (6.3.1)$$

Burada $\beta = 1/k_B T$ olmak üzere $Z = \text{Tr}[\exp(-\beta \hat{H})] = \sum_j \exp(-\beta E_j)$ ifadesi bölüşüm fonksiyonudur. T sıcaklık, k_B ise Boltzmann sabitidir ve hesaplamaları-

mızda $k_B = 1$ olarak alınmıştır.

Burada dolaşıklık ölçüsü olarak negatiflik hesaplanmıştır. Bu ölçü sistemimiz için uygundur çünkü negatiflik keyfi boyuttaki Hilbert uzaylarına sahip iki kısımlı sistemler için hesaplanabilmektedir. Ayrıca damıtılabilir dolaşıklık için sınır olduğu gibi kuantum kanallarının bilgi kapasitesi için de sınır sağladığından kuantum bilgi işlemleri için pratik olarak önemlidir. Bir $\hat{\rho}$ yoğunluk matrisinin negatifliğinin tanımı

$$N(\hat{\rho}) = \sum_i |\mu_i|, \quad (6.3.2)$$

şeklinde olup, burada verilen μ_i 'ler $\hat{\rho}^{T_1}$ matrisinin negatif özdeğerleridir. T_1 ise ilk alt sisteme göre kısmi transpoz alınacağını göstermektedir. Negatiflik, $\hat{\rho}^{T_1}$ matrisinin norm izi ile de ilişkilidir ve $\|\rho^{T_1}\| = \sqrt{\text{Tr}[\rho^{T_1}]^\dagger \rho^{T_1}}$ olmak üzere bu ilişki

$$N(\hat{\rho}) = \frac{\|\rho^{T_1}\|_1 - 1}{2}, \quad (6.3.3)$$

şeklinindedir. $\hat{\rho}^{T_1}$ matrisinin norm izi, $\hat{\rho}^{T_1}$ matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerleri toplamına eşittir.

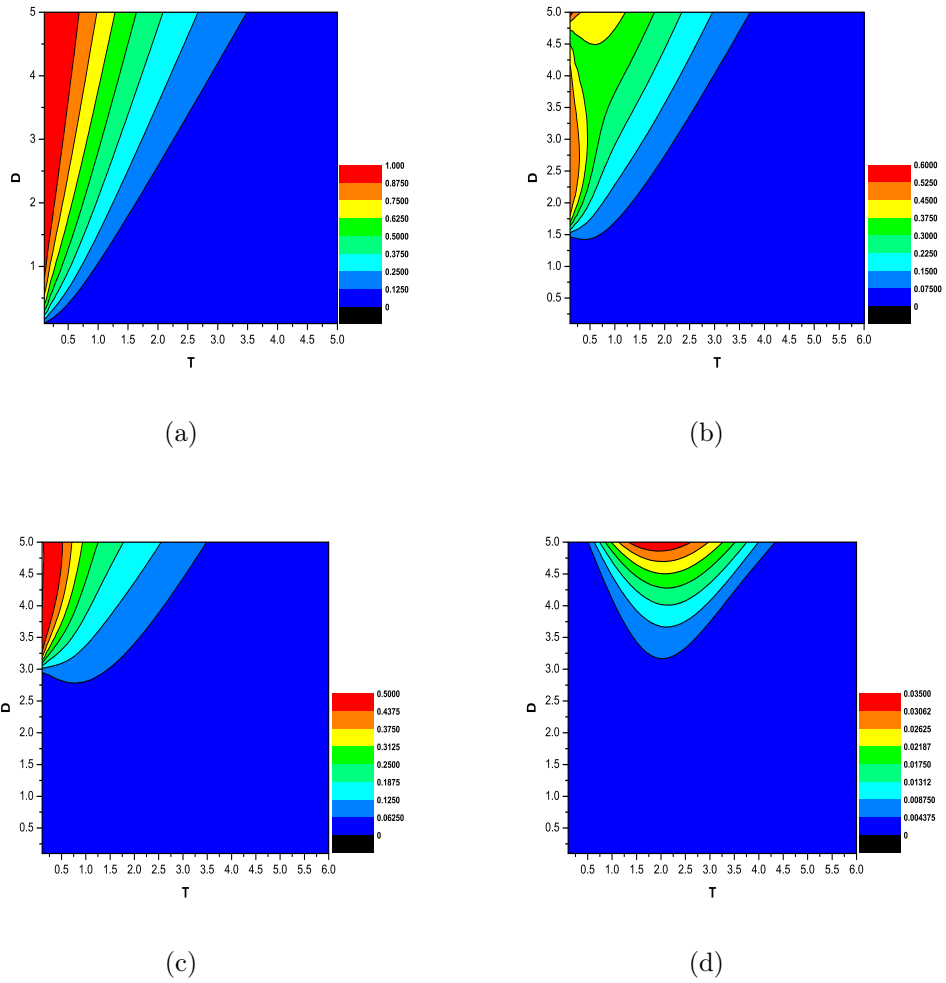
6.4 Sonuçlar ve Tartışma

Yapmış olduğumuz nümerik hesaplamalarda sadece antiferromanyetik durumu gözönüne aldık ve $J = 1$ olarak hesaplamalar yaptık. Manyetik alan için $B \in [-10 - 10]$ aralığında, DM etkileşmesini için ise $D \in [0 - 5]$ aralığında değerler kullandık.

Negatifliği hesaplamak için ilk olarak $\hat{\rho}$ ve $\hat{\rho}^{T_1}$ matrislerinin analitik ifadesini belirledik. Bu matris ifadeleri çok uzun terimler içerdiğinden Ek A.2'de verilmişlerdir. Matrisin özdeğerleri standart bir algoritmayla nümerik olarak hesaplanmış ve bu işlem parametrelerin verilen aralıklarında tekrarlanmıştır.

Negatifliğin kontrol parametreleri T , B ve D 'dir. Aslında bunlar J 'ye göre

olan değerlerdir ama $J = 1$ olması nedeniyle bağıllık sadece kontrol parametrelerine göre görünmektedir. Bir parametrenin sabit tutulmasıyla negatiflik diğer iki değişken üzerinden yüzey (kontur) grafiği olarak elde edilir. Bizde nümerik sonuçlarımızı grafiksel olarak kontur grafikleri şeklinde elde ettik. Şekil 6.1, 6.2 ve 6.3 'de iki kutritlik Ising zincirinin manyetik alan B , DM etkileşmesi D ve sıcaklık T 'ye göre değişimleri incelenip gösterilmiştir.

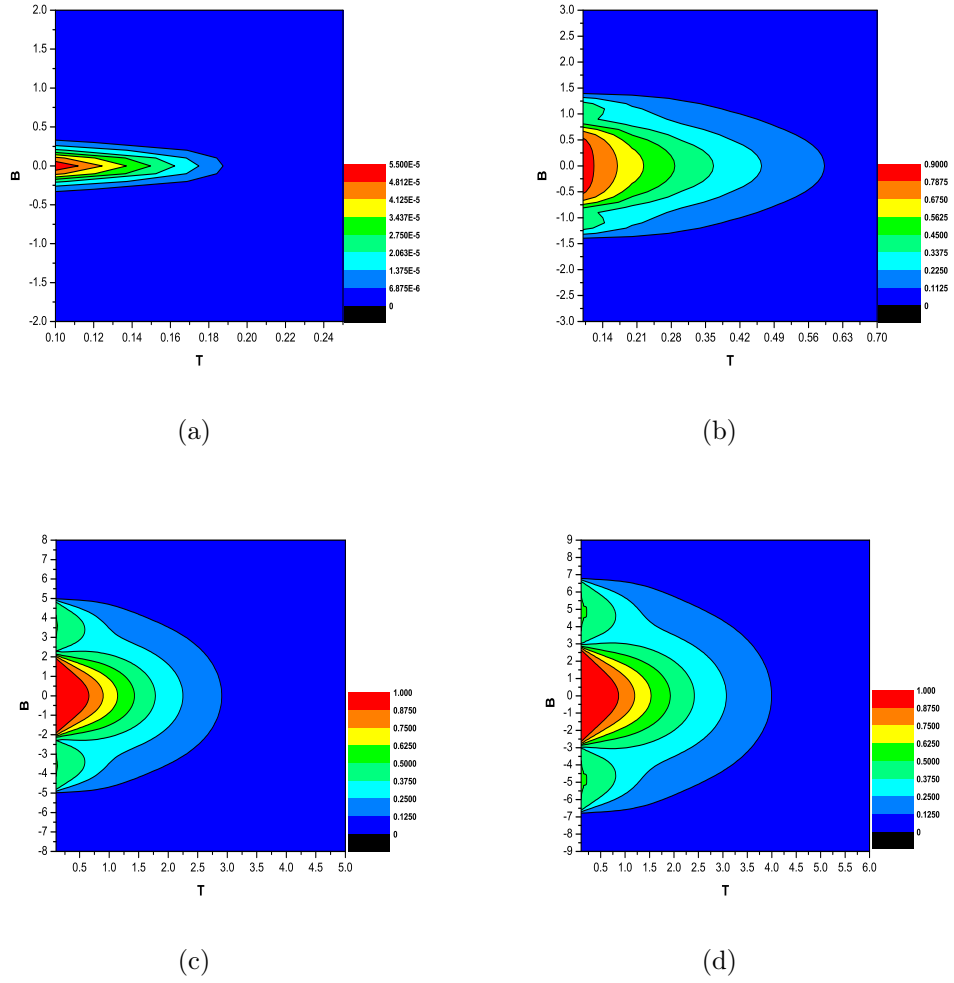


Şekil 6.1 Negatifliğin T sıcaklığının ve D DM etkileşmesinin fonksiyonu olarak farklı B manyetik alan değerleri için kontur grafikleri: (a) $B = 0, 7$; (b) $B = 2, 5$; (c) $B = 4, 0$; (d) $B = 7, 0$; ($J = 1$).

Şekil 6.1'de B manyetik alanı dört farklı değer için sabit tutulmuş ve bunlara karşı gelen sonuçlar gösterilmiştir. Burada negatifliğin, T sıcaklığına ve

D anizotropik antisimetrik DM etkileşmesine bağlılığı kontur grafikleri olarak gösterilmiştir. Bu bağlılık sisteme ait Hamiltoniyenin özvektörleriyle yapmış olduğumuz tahminlerle uyumludur. Ayrıca oldukça düşük sıcaklıklarda negatifliğin DM etkileşmesiyle arttığını görürüz. Manyetik alanın değeri daha büyük yapıldığında ise DM etkileşmesinin değeri ikili kuantum korelasyonlarına neden olacaktır. D 'nin minimum değeri B 'nin bunu denkleştirici etkisini gerektirecektir ve bu durum $D = B - J$ şeklindeki teorik tahminimizle uyumlu olacaktır. Şekil 6.1 (a)'dan görüldüğü üzere $B = 0,7$ gibi düşük bir manyetik alan değerinde olduğunda taban durum $|\psi_9\rangle$ olur ve bu durumda negatiflik $N \sim 1$ kadardır. Şekil 6.1(c) deki gibi manyetik alanın $B = 4,0$ olduğu bir ara değerde eğer D değeri $D > B - J$ gibi yeteri kadar büyükse taban durum $|\psi_5\rangle$ olacaktır. Bu durumdaki negatiflik değeri ise $N \sim 0,5$ kadardır. Şekil 6.1(d) den görüldüğü üzere $B = 7,0$ gibi daha büyük manyetik alan değerleri için ise $|\psi_7\rangle$ durumu baskın olacak ve negatiflik $N = 0$ olacaktır. Bu durumda bazı sıcaklıklarda kuantum korelasyonlarında bir miktar artış gözlenmesine rağmen bu önemsizmeyecek kadar azdır. Şekil 6.1 (b)'de görülen davranış düşük sıcaklıklarda taban durum dolaşıklığı cinsinden açıklanabilir. $E_5 = -B - D$ ve $E_7 = 1 - 2B$ enerji düzeyleri manyetik alan $B = 2,5$ değerinde olduğunda $D = 1,5$ değerinde karşılaşılırlar. $D = 1,5$ 'tan az olduğu değerlerde ise taban durum $|\psi_7\rangle$ olur, bu ayrıştırılabilir bir durum olup bu durumda negatiflik $N = 0$ 'dır. $D = 1,5$ 'tan büyük değerleri için ise taban durum $|\psi_5\rangle$ olur. Bu durum negatiflik değerinin $N \sim 0,5$ olduğu dolaşık bir durumdur. Benzer şekilde böyle bir enerji düzeyi karşılaşması $D = 4,5$ değeri civarında olur. Bu durumda $E_9 = -0,5 - 0,5\sqrt{1 + 8D^2}$ düzeyi E_5 ile karşılaşır. $D \sim 4,5$ değerinden büyük değerlerde ise taban durum $|\psi_9\rangle$ olur. Bu da dolaşıktır ve değeri $N \sim 1$ civarında olup $|\psi_5\rangle$ 'in olduğu durumdaki değerden daha büyüktür. Şekillerde tam $T = 0$ değeri gösterilmemiştir fakat sıfıra oldukça yaklaşık değerler kullanılmıştır. Böylece ısıl dolaşıklık taban durum sıcaklığının bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır. Daha yüksek sıcaklıklarda ise beklenildiği gibi kuantum korelasyonları zayıflamaktadır.

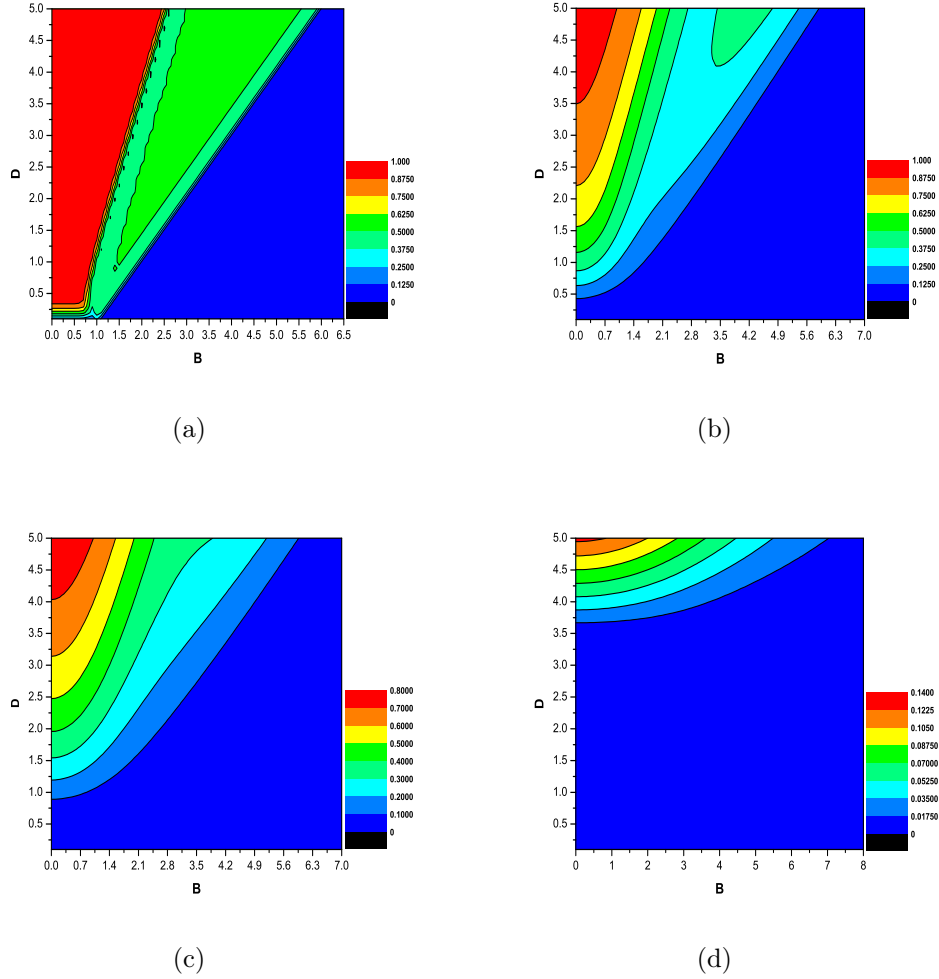
Şekil 6.2'de D dört farklı değerinde sabit tutulmuş ve buna karşı gelen sonuçlar gösterilmiştir. Bu şekilde negatifliğin kontur grafikleri B manyetik alanının T sıcaklığına göre değişimi için elde edilmiştir. Şekil 6.2 (a)'dan görüldüğü gibi nega-



Şekil 6.2 Negatifliğin T sıcaklığının ve B manyetik alanının fonksiyonu olarak farklı D DM etkileşmesi değerleri için kontur grafikleri: (a) $D = 0,0001$; (b) $D = 0,4$; (c) $D = 4,0$; (d) $D = 5,8$; ($J = 1$).

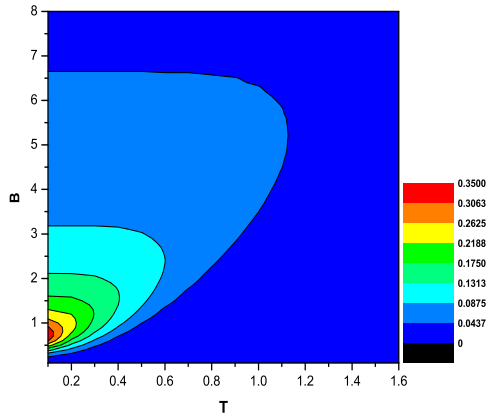
tiflik, DM etkileşmesinin çok küçük olduğu durumda veya B manyetik alanının çok büyük olduğu durumda oldukça düşüktür. Bu durumlarda taban durumu ayrıştırılabilir $|\psi_9\rangle$ durumu olur ve bu durum için $N = 0$ değerindedir. Ayrıca negatiflik değeri sıcaklık arttırıldığında azalmakta ve genel olarak DM etkileşmesiyle birlikte artmaktadır. Şekilden görebildiğimiz, manyetik alanın düşük değerler aldığı bölgelerde negatifliğin maksimum olduğudur. Bu yerlerde taban durum $|\psi_9\rangle$ olup $N \sim 1$ şeklindedir. Buna karşın düşük sıcaklıklarda bu bölgenin yanında iki simetrik lob bulunur. Bu loblarda kısmi bir dolaşıklık bulunabilir. Bu, düşük enerjili $|\psi_5\rangle$ ve $|\psi_3\rangle$ dolaşık durumlarından gelen katkılarda olduğu gibi $B \rightarrow -B$

koşulu altında Hamiltoniyenin simetrisini gösterir. D ve B 'nin her ikisi birden yeteri kadar büyük olduğunda ise $|\psi_5\rangle$ ve $|\psi_3\rangle$ durumları katkıda bulunacaklardır. Bu durumlar etkileşme katsayılarından bağımsızdır ve $N \sim 0,5$ olmak üzere aynı miktarda kuantum korelasyonlara sahiptir. Bu loblar aynı maksimum dolaşıklık bölgesinde olduğu gibi DM etkileşmesinin artmasıyla genişlemektedir. Böylece D ve B 'nin J 'ye göre en uygun seçimiyle, istenilen bir sıcaklık aralığında, istenilen miktarda ve tipte dayanıklı kuantum dolaşıklık oluşturulabilir. Bu ise taban duruma ulaşmak için oldukça düşük sıcaklıklara kadar soğutulma işlemi yapılmasından kurtulmak için kullanılabilir.



Şekil 6.3 Negatifliğin B manyetik alanının ve D DM etkileşmesinin fonksiyonu olarak farklı T sıcaklık değerleri için kontur grafikleri: (a) $T = 0,05$; (b) $T = 0,6$; (c) $T = 1,0$; (d) $T = 3,5$; ($J = 1$).

Şekil 6.3’de ise belirli dört sıcaklık değeriinde manyetik alanın DM etkileşmesine göre değişimi için negatifliğin kontur grafikleri verilmiştir. Buradan da gördüğümüz gibi negatiflik DM etkileşmesinin artışıyla artmaktadır ve B manyetik alanının artışıyla birlikte azalmaktadır. Farklı sıcaklıklar kutrit çiftleri arasında maksimum kuantum dolaşıklık için farklı $D - B$ bölgelerine sahiptirler.



Şekil 6.4 T sıcaklığının ve B manyetik alanının fonksiyonu olarak negatifliğin kontur grafiği, ($J = 1$).

Şekil 6.4’te ise Bölüm 6.2.3.’te verilen durum incelenmiştir. Bu durumda iki kutritlik Ising zinciri spin yönelimlerine dik homojen bir manyetik alan içerisinde bulunmaktadır. Negatifliğin, sıcaklık ve manyetik alanın fonksiyonu olarak kontur grafikleri elde edilmiştir. Sistemin Hamiltoniyeninden elde edilen özvektörler ve enerji spekturumundan yaptığımız tahminlerle uyumlu şekilde, oldukça düşük sıcaklıklarda bile kuantum dolaşıklık etkili şekilde azalmaktadır. Yaklaşık J ’ye kadar olan küçük B değerleri için en düşük enerji durumu $|\psi_5\rangle$ ve $|\psi_7\rangle$ ’dir. Bu durumlar içinde bulunan baz durumlarının genlikleri B ’ye kuvvetli bir şekilde bağlıdır. B arttırıldığında dolaşıklık miktarı ilk olarak hızlı bir şekilde $B \sim J$ değerine kadar artmaktadır. B daha da arttırılmaya devam edildiğinde diğer durumlar da küçük enerji aralıklarından dolayı ısıl dolaşıklığa katkıda bulunurlar. Bunun sonucunda düşük dolaşıklıklı geniş bölgeler oluşur. Böylece düşük sıcak-

lıklarda kritik bir B olduğu görülür. Bu bölgede kuantum korelasyonları maksimumdur. Bu sistemde dikkate değer bir dolaşıklık oluşturmak için bu şekilde simetriyi kıran bir manyetik alan kullanmak ve uygun en düşük sıcaklığa kadar sistemi soğutmak gereklidir.

BÖLÜM YEDİ

SONUÇLAR

Bu tezde kuantum hesaplama ve kuantum bilgi işlemi için bir kaynak olarak gösterilen kuantum dolaşıklık hakkında iki çalışma gerçekleştirilmiştir. Bunlardan birincisi homojen olmayan bir manyetik alanda iki kubitlik bir Ising zinciri için dolaşıklığın incelenmesidir. Diğeri ise bir dış manyetik alanın bulunduğu ortamda anizotropik ve antisimetrik DM etkileşmesine sahip iki kubitlik bir Ising zincirinin dolaşıklığının incelenmesidir.

Spin-1/2 gibi iki durumlu veya spin-1 gibi üç durumlu Ising zinciri sadece z -yönünde spinler arası etkileşmelere sahip olması nedeniyle bir boyutlu spin sistemlerinin en basit örneğidir ve bu haliyle herhangi bir dolaşık kuantum duruma sahip değildir; ancak Ising zincirine, homojen veya homojen olmayan spin yönelimine dik (transverse) bir manyetik alan uygulanması yada DM etkileşmesi gibi lineer olmayan bir etkileşmenin ilave edilmesi modelin dolaşık kuantum durumlarına sahip olmasına neden olur. Yapılan her iki çalışmada da bu sonuçları görmek mümkündür.

İlk çalışmada, kullandığımız iki kubitlik Ising zincirine baktığımızda literatürden de bilindiği üzere spin yönelimine dik homojen bir manyetik alanın olması durumunda sistem dolaşık kuantum durumlarına sahip olmaktadır. Spin yönelimine dik homojen bir manyetik alan yerine çalışmamızda gösterdiğimiz gibi sistem üzerinde daha etkin bir kontrol sağlayabileceğimiz yine spin yönelimine dik homojen olmayan bir manyetik alan bulunması durumunda ise kullandığımız model sistem yine dolaşık kuantum durumlara sahip olmaktadır. İncelediğimiz sistemde homojen olmayan manyetik alan b homojensizlik derecesi ile sağlanır ve bu parametrenin aldığı değerlere bağlı olarak maksimum veya minimum dolaşıklık bölgeleri oluşturulabilir. Bunun nedeni ise b parametresine bağlı olarak dolaşıklığa farklı Bell durumlarının katkı yapmasıdır. Tüm bunların sonucunda beşinci bölümde gösterilen bu çalışmanın elde edilen sonuçlarına dayanarak homojensizliğin manyetik alana katılmasının dolaşık durumlar üzerinde etkin bir rol oy-

nadığını söyleyebiliriz.

Tezde belirtilen ikinci çalışmadan elde ettiğimiz sonuçlara baktığımızda ise spin yörünge etkileşmesinden kaynaklanan anizotropik ve antisimetrik DM etkileşmesinin dolaşıklık üzerinde etkin bir rol oynadığını söyleyebiliriz.

Literatürden bilindiği üzere Heisenberg spin zincirleri Ising spin zincirlerinin aksine dolaşık taban durumlara sahiptirler; ancak çalışmamızdan elde ettiğimiz sonuçlar Ising spin zincirinde dolaşık taban durumlar oluşturmak için spin yönelimine dik bir manyetik alana veya DM etkileşmesine ihtiyaç olduğunu göstermiştir.

Kuantum hesaplama ve kuantum bilgi işlemi açısından baktığımızda ise sistemlerin çevreyle olan etkileşmelerinden kaynaklanan olumsuz etkilerden (decoherence) dolayı oldukça kararlı ve güçlü dolaşık kuantum durumları oluşturmak çok önemlidir. Yapmış olduğumuz çalışmanın elde edilen önemli sonuçlarından biri de DM etkileşmesine sahip iki kutritlik Ising zincirinin spin yönelimine dik bir manyetik alanda bulunan iki kutritlik Ising zincirinden daha dayanıklı ve güçlü dolaşık durumlara yol açtığıdır. Sonuç olarak altıncı bölümde belirtilen bu çalışmadan elde edilen verilere göre dolaşıklığın sadece T sıcaklığına ve B manyetik alanına değil bunların yanında D ile belirttiğimiz DM etkileşmesine de önemli ölçüde bağlı olduğunu söyleyebiliriz.

KAYNAKLAR

- Akyüz, C. ve Aydın, E. (2008). Entanglement in Ising chain with inhomogeneous magnetic field. *Chin. Phys. Lett.*, 25 (5), 1557-1560.
- Arnesen, M. C. Bose, S. ve Vedral, V. (2001). Natural thermal and magnetic entanglement in the 1D Heisenberg model. *Phys. Rev. Lett.*, 87 (1), 017901-1-4.
- Asoudeh, M. ve Karimipour, V. (2005). Thermal entanglement of spins in an inhomogeneous magnetic field. *Phys. Rev. A*, 71 (2), 022308-1-6.
- Aspect, A., Grangier, P. ve Roger, G. (1981). Experimental test of realistic local theories via Bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 47 (7), 460-463.
- Aspect, A., Dalibard, J. ve Roger, G. (1982). Experimental test of Bell's inequalities using time varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49 (25), 1804-1807.
- Barlett, S. D., De Guise, H. ve Sanders, B. C. (2002). Quantum encodings in spin systems and harmonic oscillators. *Phys. Rev. A*, 65 (5), 052316-1-4.
- Barrett, M. D., Chiaverini, J., Schaetz, T., Britton, J., Itano, W. M., Jost, J. D., ve diğer. (2004). Deterministic quantum teleportation of atomic qubits. *Nature* 429 (6993), 737-739.
- Bechmann-Pasquinucci, H. ve Peres, A. (2000). Quantum cryptography with 3-state systems. *Phys. Rev. Lett.*, 85 (15), 3313-3316.
- Bell, J. S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1 (3), 195-200.
- Bennett, C. H. ve Wiesner, S. J. (1992). Communication via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, 69 (20), 2881-2884.
- Bennett, C. H., Brassard, G. ve Mermin, N. D. (1992). Quantum cryptography without Bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 68 (5) 557-559.

- Bennett, C. H. (1992). Quantum cryptography using only two nonorthogonal states. *Phys. Rev. Lett.*, *68* (21), 3121-3124.
- Bennett, C. H., Brassard, C., Crépeau, C., Jozsa, R., Peres, A. ve Wootters, W. K. (1993). Teleporting on unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, *70* (13), 1895-1899.
- Boschi, D., Branca, D., Martini, M. D., Hardy, L., ve Popescu, S. (1998). Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, *80* (6), 1121-1125.
- Bose, S., Vedral, V. ve Knight, P. L. (1998). Multiparticle generalization of entanglement swapping. *Phys. Rev. A*, *57* (2), 822-829.
- Bose, S. (2003). Quantum communication through an unmodulated spin chain. *Phys. Rev. Lett.*, *91* (20), 207901-1-4.
- Bouwmeester, D., Pan, J.-W., Mattle, K., Eible, M., Weinfurter, H. ve Zeilinger, A. (1997). Experimental quantum teleportation. *Nature*, *390* (6660), 575-586.
- Bouwmeester, D., Ekert, A. K., ve Zeilinger, A. (2000). *The physics of quantum information: Quantum cryptography, quantum teleportation, quantum computation*. New York: Springer.
- Bovino, F., Castagnoli, G., Cabello, A. ve Lamas-Linares, A. (2006). Experimental noise-resistant Bell inequality violations for polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A*, *73* (6), 062110-1-4 .
- Briegel, H. J. ve Raussendorf, R. (2001). Persistent entanglement in arrays of interacting particles. *Phys. Rev. Lett.*, *86* (5), 910-913.
- Brukner, C., Zukowski, M. ve Zeilinger, A. (2002). Quantum communication complexity protocol with two entanglement qutrits. *Phys. Rev. Lett.*, *89* (19), 197901-1-4.
- Burkard, G., Loss, D. ve Divincenzo, D. P. (1999). Coupled quantum dots as quantum gates. *Phys. Rev. B*, *59* (3), 2070-2078.

- Cerf, N. J. ve Adami, C. (1997). Negative entropy and information in quantum mechanics. *Phys. Rev. Lett.*, *79* (26), 5194-5197.
- Cerf, N. J., Bourennane, M., Karlsson, A. ve Gisin, N. (2002). Security of quantum key distribution using d-level systems. *Phys. Rev. Lett.*, *88* (12), 127902-1-4.
- Christandl, M., Datta, N., Ekert, A. ve Landahl, A. J. (2004). Perfect state transfer in quantum spin networks. *Phys. Rev. Lett.*, *92* (18), 187902-1-4.
- Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A. ve Holt, R. A. (1969). Proposed experiment to test local hidden variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, *23* (15), 880-884.
- Daboul, J., Wang, X. ve Sanders, B. (2003). Quantum gates on hybrid qudits. *Phys. A: Math. Gen.*, *36* (10), 2525-2536.
- Dieks, D. (1982). Communication by EPR devices. *Phys. Lett. A*, *92* (6), 271-272.
- Divincenzo, D. P. (1995). Quantum computation. *Science*, *270* (5234), 255-261.
- Divincenzo, D. P., Bacon, D., Kempe, J., Burkard, G. ve Whaley, K. B. (2000). Universal quantum computation with the exchange interaction. *Nature*, *408* (6810), 339-342.
- Duan, L.-M., Sørensen, A., Cirac, J. I. ve Zoller, P. (2000). Squeezing and entanglement of atomic beams. *Phys. Rev. Lett.*, *85* (19), 3991-3994.
- Dür, W., Briegel, H.-J., Cirac, J. I. ve Zoller, P. (1999). Quantum repeaters based on entanglement purification. *Phys. Rev. A*, *59* (1), 169-181.
- Dzialoshinski, I. (1958). A thermodynamic theory of weak ferromagnetism of antiferromagnetics. *J. Phys. Chem. Solid*, *4* (4), 241-255.
- Einstein, A., Podolsky, B. ve Rosen, N. (1935). Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete. *Phys. Rev.*, *47* (10), 777-780.
- Ekert, A. K. (1991). Quantum cryptography based on Bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, *67* (6), 661-663.
- Ekert, A. (1992). Beating the code breakers. *Nature*, *358* (6381), 14-15.

- Fang, X., Zhu, X., Feng, M., Du, F. ve Mao, X. (1999). Experimental implementation of dense coding using nuclear magnetic resonance. *Phys. Rev. A*, *61* (2), 022307-1-5.
- Feynman, R. P. (1982). Simulating physics with computers. *Int. J. Theo. Phy.*, *21* (6), 467-488.
- Feynman, R. P. (1986). Quantum mechanical computers. *Foundation of Physics*, *16* (6), 507-531.
- Freedman, S. J. ve Clauser, J. F. (1972). Experimental test of local hidden variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, *28* (14), 938-941.
- Furusawa, A., Sorensen, J. L., Braunstein, S. L., Fuchs, C. A., Kimble, H. J. ve Polzik, E. S. (1998). Unconditional quantum teleportation. *Science*, *282* (5389), 706-709.
- Gisin, N. (1991). Bell's inequality holds for all non-product states. *Phys. Lett. A*, *154* (5-6), 201-202 .
- Gottesman, D. (1999). Fault-tolerant quantum computation with higher dimensional systems. *Chaos Solitons Fractals*, *10* (10), 1749-1758.
- Greenberger, D., Horne, M. A. ve Zeilinger, A. (1989). *Going beyond Bell's theorem in Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe*. Dordrecht-Boston-London: Kluwer.
- Grover, L. (1996). *Proceeding, 28th Annual ACM Symposium on the theory of computation*. New York: ACM Press.
- Gunlycke, D., Kendon, V. M., Vedral, V. ve Bose, S. (2001). Thermal concurrence mixing in a one dimensional Ising model. *Phys. Rev. A*, *64* (4), 042302-1-7.
- Gurkan, Z. N. ve Pashaev, O. K. (04 Nisan 2008). Two qubit entanglement in magnetic chains with DM antisymmetric anisotropic exchange interaction. <http://arxiv.org/abs/0804.0710>.

- Hasegawa, Y., Loidl, R., Baron, G. B. M. ve Rauch, H. (18 Kasım 2003). Violation of a Bell-like inequality in neutron optical experiments: Quantum contextuality. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0311121>.
- Hill, S. ve Wootters, W. K. (1997). Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, 78 (26), 5022-5025.
- Horodecki, R., Horodecki, P. ve Horodecki, M. (1996). Quantum α -entropy inequalities: Independent condition for local realism. *Phys. Lett. A*, 210 (6), 377-381.
- Horodecki, M., Horodecki, P. ve Horodecki, R. (1996). Separability of mixed states: Necessary and sufficient conditions. *Phys. Lett. A*, 223 (1-2), 1-8.
- Horodecki, M., Horodecki, P. ve Horodecki, R. (1997). Inseparable two spin-1/2 density matrices can be distilled to a singlet form. *Phys. Rev. Lett.*, 78 (4), 574-577.
- Horodecki, P. (1997). Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition. *Phys. Lett. A*, 232 (5), 333-339.
- Horodecki, M. ve Horodecki, P. (1999). Reduction criterion of separability and limits for a class of distillation protocols. *Phys. rev. A*, 59 (6), 4206-4216.
- Hu, X. ve Das Sarma, S. (2001). Hilbert space structure of a solid state quantum computer: Two electron states of a double quantum dot artificial molecule. *Phys. Rev. A*, 61 (6), 062301-1-19.
- Hu, X., de Sousa, R. ve Das Sarma, S. (2001). Inter play between Zeeman coupling and swap action in spin based quantum computer models: Error correction in inhomogeneous magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 86 (5), 918-921.
- Hu, Z.-N., Youn, S. H., Kang, K. ve Kim, C. S. (2006). Entanglement of a two qubit system with anisotropic couplings in nonuniform magnetic fields. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39 (33), 10523-10535.
- Imamoğlu, A., Awschalom, D. D., Burkard, G., Divincenzo, D. P., Loss, D., Sherwin, M., ve diğer. (1999). Quantum information processing using quantum dot spins and cavity QED. *Phys. Rev. Lett.*, 83 (20), 4204-4207.

- Jamiolkowski, A. (1972). Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators. *Rep. Math. Phys.*, 3 (4), 275-278.
- Jennewein, T., Simon, C., Weihs, G., Weinfurter, H. ve Zeilinger, A. (2000). Quantum cryptography with entangled photons. *Phys. Rev. Lett.*, 84 (20), 4729-4732.
- Jietai, J., Jing, Z., Ying, Y., Fagang, Z., Changde, X. ve Kunchi, P. (2003). Experimental demonstration of tripartite entanglement and controlled dense coding for continuous variables. *Phys. Rev. Lett.*, 90 (16), 167903-1-4.
- Kamta, G. L. ve Starace, A. F. (2002). Anisotropy and magnetic field effects on the entanglement of a two qubit Heisenberg XY chain. *Phys. Rev. Lett.*, 88 (10), 107901-1-4.
- Kane, B. E. (1998). A silicon based nuclear spin quantum computer. *Nature*, 393 (6681), 133-137.
- Kitegawa, M. ve Ueda, M. (1993). Squeezed spin states. *Phys. Rev. A*, 47 (6), 5138-5143.
- Kocher, C. A. ve Commins, E. D. (1967). Polarization correlation of photons emitted in an atomic cascade. *Phys. Rev. Lett.*, 18 (15), 575-577.
- Kwiat, P. G., Mattle, K., Weinfurter, H., Zeilinger, A., Sergienko, A. V. ve Shih, Y. H. (1995). New high intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75 (24), 4337-4341.
- Lidar, D. A., Bacon, D. ve Whaley, K. B. (1999). Concatenating decoherence free subspaces with quantum error correcting codes. *Phys. Rev. Lett.*, 82 (22), 4556-4559.
- Loss, D. ve Divincenzo, D. P. (1998). Quantum computation with quantum dots. *Phys. Rev. A*, 57 (1), 120-126.
- Ma, X. S. (2008). Thermal entanglement of two qutrit XX spin chain with Dzialoshinski-Moriya interaction. *Opt. Commun.*, 281 (3), 484-488.

- Marcikic, I., de Riedmatten, H., Tittel, W., Zbinden, H., Legre, M. ve Gisin, N. (2004). Distribution of time-bin entangled qubits over 50 km of optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, *93* (18), 180502-1-4.
- Mattle, K., Weinfurter, H., Kwiat, P. G. ve Zeilinger, A. (1996). Dense coding in experimental quantum communications. *Phys. Rev. Lett.*, *76* (25), 4656-4659.
- Melikidze, A., Dobrovitski, V. V., De Raedt, H. A., Katsnelson, M. I. ve Harmon, B. N. (2004). Parity effects in spin decoherence. *Phys. Rev. B*, *70* (1), 014435-1-5.
- Mizuno, J., Wakui, K., Furusawa, A. ve Sasaki, M. (2005). Experimental demonstration of entanglement assisted coding using two mode squeezed vacuum state. *Phys. Rev. A*, *71* (1), 012304-1-4.
- Moriya, T. (1960). New mechanism of anisotropic superexchange interaction. *Phys. Rev. Lett.*, *4* (5), 228-230.
- Moriya, T. (1960). Theory of magnetism of NiF₂. *Phys. Rev.*, *117* (3), 635-647.
- Moriya, T. (1960). Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism. *Phys. Rev.*, *120* (1), 91-98.
- Murao, M., Jonathan, D., Plenio, M. B. ve Vedral, V. (1999). Quantum teleportation and multiparticle entanglement. *Phys. Rev. A*, *59* (1), 156-161.
- Nielsen, M. A., Knill, E. ve Laflamme, R. (1998). Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance. *Nature*, *396* (6706), 52-55.
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2000). *Quantum computation and quantum information*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Nielsen, M. A. (09 Kasım 2000). Quantum information theory. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0011036>.
- O'Connor, K. M. ve Wootters, W. K. (2001). Entangled rings. *Phys. Rev. A*, *63* (5), 052302-1-9.
- Ou, Z. Y. ve Mandl, L. (1988). Violation of Bell's inequality and classical probability in a two photon correlation experiment. *Phys. Rev. Lett.*, *61* (1), 50-53.

- Pan, J.-W., Bouwmeester, D., Weinfurter, H. ve Zeilinger, A. (1998). Experimental entanglement swapping: Entangling photons that never interacted. *Phys. Rev. Lett.*, *80* (18), 3891-3894.
- Peres, A. (1996). Collective tests for quantum nonlocality. *Phys. Rev. A*, *54* (4), 2685-2689.
- Peres, A. (1996). Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.* *77* (8), 1413-1415.
- Popescu, S. ve Rohrlich, D. (1992). Generic quantum nonlocality. *Phys. Lett. A*, *166* (5-6), 293-297.
- Popescu, S. (1995). Bell's inequalities and density matrices: Revealing hidden nonlocality. *Phys. Rev. Lett.*, *74* (14), 2619-2622.
- Raussendorf, R. ve Briegel, H. J. (2001). A one way quantum computer. *Phys. Rev. Lett.*, *86* (5), 5188-5191.
- Riebe, M., Häffner, H., Roos, C. F., Hänsel, W., Benhelm, J., Lancaster, G. P. T., ve diğer. (2004). Deterministic quantum teleportation with atoms. *Nature*, *429* (6993), 734-737.
- Rowe, M. A., Kielpinski, D., Meyer, V., Sackett, C. A., Itano, W. M., Monroe, C., Wineland, D. J., ve diğer. (2001). Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection. *Nature*, *409* (6822), 791-794.
- Schrödinger, E. (1935). Discussion of probability relations between separated systems. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, *31*, 555-563.
- Schumacher, B. (1995). Quantum coding. *Phys. Rev. A*, *51* (4), 2738-2747.
- Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Tech. J.* *27* 379-423.
- Sherson, J., Krauter, H., Olsson, R. K., Julsgaard, B., Hammerer, K., Cirac, J. I., ve diğer. (2006). Quantum teleportation between light and matter. *Nature*, *443* (7111), 557-560.

- Shor, P. W. (1994). Algorithms for quantum computation : Discrete logarithms and factoring. *Proceeding, 35th Annual Symposium on foundations of Computer Science*. Los Alamitos, CA: IEEE Press.
- Sørensen, A., Duan, L.-M., Cirac, J. I. ve Zoller, P. (2001). Many particle entanglement with Bose-Einstein condensates. *Nature*, 409 (6816), 63-65.
- Sørensen, A. S. ve Mølmer, K. (2001). Entanglement and extreme spin squeezing. *Phys. Rev. Lett.*, 86 (20), 4431-4434.
- Štelmachovič, P. ve Bužek, V. (2004). Quantum information approach to the Ising model: Entanglement in chains of qubits. *Phys. Rev. A*, 70 (3), 032313-1-16.
- Sun, Y., Chen, Y. ve Chen, H. (2003). Thermal entanglement in the two qubit Heisenberg XY model under a nonuniform external magnetic field. *Phys. Rev. A*, 68 (4), 044301-1-4.
- Sun, Z., Wang, X. G. ve Li, Y.-Q. (2005). Entanglement in dimerized and frustrated spin-one Heisenberg chains. *New Journal of Physics*, 7 (83), 1-14.
- Terzis, A. F. ve Paspalakis, E. (2004). Entanglement in a two qubit Ising model under a site dependent external magnetic field. *Phys. Lett. A*, 333 (5-6), 438-445.
- Ursin, R., Jennewein, T., Aspelmeyer, M., Kaltenbaek, R., Lindenthal, M., Walther, P., ve diğer. (2004). Quantum teleportation link across the Danube. *Nature*, 430 (7002), 849.
- Vedral, V., Plenio, M. B., Rippin, M. A. ve Knight, P. L. (1997). Quantifying entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 78 (12), 2275-2279.
- Vidal, G. ve Werner, R. F. (2002). Computable measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, 65 (3), 032314-1-11.
- Wang, X. (2001). Entanglement in the quantum Heisenberg chain. *Phys. Rev. A*, 64 (1), 012313-1-7.
- Wang, X. (2001). Effects of anisotropy on thermal entanglement. *Phys. Lett. A*, 281 (2-3), 101-104.

- Wang, X., Sørensen, A. S. ve Mølmer, K. (2001). Spin squeezing in the Ising model. *Phys. Rev. A*, *64* (5), 053815-1-6.
- Wang, X. (2002). Thermal and ground state entanglement in Heisenberg XX qubit rings. *Phys. Rev. A*, *66* (3), 034302-1-4.
- Wang, X. (2004). Entanglement and spin squeezing in the three qubit transverse Ising model. *Phys. Lett. A*, *331* (3-4), 164-169.
- Werner, R. F. (1989). Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden variable model. *Phys. Rev. A*, *40* (8), 4277-4281.
- Wootters, W. K. ve Zurek, W. H. (1982). A single quantum cannot be cloned. *Nature*, *299* (5886), 802-803.
- Wootters, W. K. (1998). Entanglement of formation of an arbitrary of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, *80* (10), 2245-2248.
- Yang, G. H., Gao, W. B., Zhou, L. ve Song, H. S. (04 Şubat 2006). The entanglement in anisotropic Heisenberg XYZ chain with inhomogeneous magnetic field. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0602051>.
- Yurke, B. ve Stoler, D. (1992). Bell's inequality experiments using independent particle sources. *Phys. Rev. A*, *46* (5), 2229-2234.
- Yurke, B. ve Stoler, D. (1992). Einstein-Podolsky-Rosen effect from independent particle sources. *Phys. Rev. Lett.*, *68* (9), 1251-1254.
- Zhang, G.-F. ve Li, S.-S. (2005). Thermal entanglement in a two qubit Heisenberg XXZ chain under an inhomogeneous magnetic field. *Phys. Rev. A*, *72* (3) 034302-1-4.
- Zhang, G.-F., Li, S.-S. ve Liang, J.-Q. (2005). Thermal entanglement in spin-1 biparticle system. *Opt. Commun.*, *245* (1-6), 457-463.
- Zhang, G.-F. ve Li, S.-S. (2006). The effects of nonlinear couplings and external magnetic field on the thermal entanglement in two-spin-qutrit system. *Opt. Commun.*, *260* (1), 347-350.

- Zhang, G.-F. ve Li, S.-S. (2006). Entanglement in a spin-one spin chain. *Solid State Commun.*, 138 (1), 17-21.
- Zhang, G.-F. ve Li, S.-S. (2006). Thermal entanglement in a two-spin-qutrit system under a nonuniform external magnetic field. *Eur. Phys. J. D*, 37 (1), 123-127.
- Zhang, G.-F. (2007). Thermal entanglement and teleportation in a two qubit Heisenberg chain with Dzyaloshinski-Moriya anisotropic antisymmetric interaction. *Phys. Rev. A*, 75 (3), 034304-1-4.
- Zheng, S. B. ve Guo, G. C. (2000). Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity QED. *Phys. Rev. Lett.*, 85 (11), 2392-2395.
- Zhou, L., Song, H. S., Guo, Y. Q. ve Li, C. (2003). Enhanced thermal entanglement in an anisotropic Heisenberg XYZ chain. *Phys. Rev. A*, 68 (2), 024301-1-4.
- Zukowski, M., Zeilinger, A., Horne, M. A. ve Ekert, A. (1993). Event-ready-detectors Bell experiment via entanglement swapping. *Phys. Rev. Lett.*, 71 (26), 4287-4290.

EKLER

A.1 Tensör Çarpımı

Tensör çarpım, vektör uzaylarını bir araya getirip daha büyük bir vektör uzayı elde etmenin bir yoludur. Bu oluşum çok parçacıklı kuantum sistemlerinin anlaşılması için önemlidir.

m -boyutlu V ve n -boyutlu W vektör uzaylarımızın olduğunu düşünelim. $V \otimes W$ şeklinde belirtilen tensör çarpımı mn -boyutlu bir vektör uzayı oluşturur. V vektör uzayının elemanları $|v\rangle$ vektörleri ve W uzayının elemanları $|w\rangle$ vektörleri olmak üzere $V \otimes W$ tensör çarpımının elemanları, $|v\rangle \otimes |w\rangle$ vektörlerinin tensör çarpımının lineer kombinasyonlarıdır. Özellikle, eğer $|i\rangle$ ve $|j\rangle$ vektörleri V ve W vektör uzayları için ortonormal bazlar ise $|v\rangle \otimes |w\rangle$ vektörlerinin tensör çarpımı da $V \otimes W$ vektör uzaylarının tensör çarpımı için bir baz olur.

$|v\rangle \otimes |w\rangle$ şeklindeki tensör çarpımını ifade etmek için genellikle $|v\rangle |w\rangle$, $|v, w\rangle$ veya $|vw\rangle$ kısaltmaları kullanılır. Örneğin V , $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ baz vektörlerine sahip iki boyutlu bir vektör uzayı ise $|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle$ ifadesi de $V \otimes V$ vektör uzayının bir elemanı olur.

A, B, C, D ve G matrisleri, $|v\rangle$, $|w\rangle$ ve $|u\rangle$ vektörleri ve a, b, c, d skalerleri göstermek üzere tensör çarpımı şu özellikleri sağlar:

$$a(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (a|v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (a|w\rangle), \quad (8.1.1)$$

$$(|v_1\rangle + |v_2\rangle) \otimes |w\rangle = |v_1\rangle \otimes |w\rangle + |v_2\rangle \otimes |w\rangle, \quad (8.1.2)$$

$$|v\rangle \otimes (|w_1\rangle + |w_2\rangle) = |v\rangle \otimes |w_1\rangle + |v\rangle \otimes |w_2\rangle, \quad (8.1.3)$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD, \quad (8.1.4)$$

$$(A \otimes B)(|v\rangle \otimes |w\rangle) = A|v\rangle \otimes B|w\rangle, \quad (8.1.5)$$

$$(A \otimes B) \left(\sum_i a_i |v_i\rangle \otimes |w_i\rangle \right) = \sum_i a_i A|v_i\rangle \otimes B|w_i\rangle, \quad (8.1.6)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \otimes G = \begin{pmatrix} A \otimes G & B \otimes G \\ C \otimes G & D \otimes G \end{pmatrix}, \quad (8.1.7)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes G = \begin{pmatrix} aG & bG \\ cG & dG \end{pmatrix}. \quad (8.1.8)$$

A.2 İki Kutritlik Ising Zincirinin Yoğunluk Matrisi

Paralel veya antiparalel manyetik alanda bulunan DM etkileşmesine sahip iki kutritlik Ising zincirinin yoğunluk matrisi $\hat{\rho}$ ve bu yoğunluk matrisinin ilk alt sisteme göre kısmi transpozu $\hat{\rho}^{T_1}$:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \exp(-\beta E_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_3 & 0 & -\mathcal{M}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_5 & 0 & \mathcal{M}_4 & 0 & \mathcal{M}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_1 & 0 & \mathcal{M}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{M}_4 & 0 & \mathcal{M}_6 & 0 & \mathcal{M}_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_8 & 0 & \mathcal{M}_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_2 & 0 & -\mathcal{M}_4 & 0 & \mathcal{M}_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{M}_7 & 0 & \mathcal{M}_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \exp(-\beta E_7) \end{pmatrix},$$

ve

$$\hat{\rho}^{T_1} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \exp(-\beta E_1) & 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_1 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_2 \\ 0 & \mathcal{M}_3 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{M}_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_3 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{M}_4 & 0 \\ -\mathcal{M}_1 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_6 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{M}_7 \\ 0 & \mathcal{M}_4 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_4 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_8 & 0 \\ \mathcal{M}_2 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_7 & 0 & 0 & 0 & \exp(-\beta E_7) \end{pmatrix},$$

şeklindedir. Burada

$$\mathcal{M}_1 = \frac{i}{2} \exp(-\beta E_3) - \frac{i}{2} \exp(-\beta E_6), \quad (8.2.1)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{1}{2} \exp(-\beta E_2) - \frac{\exp(-\beta E_8)}{\delta} - \frac{\exp(-\beta E_9)}{\alpha}, \quad (8.2.2)$$

$$\mathcal{M}_3 = \frac{1}{2} \exp(-\beta E_3) + \frac{1}{2} \exp(-\beta E_6), \quad (8.2.3)$$

$$\mathcal{M}_4 = \frac{i\gamma}{\delta} \exp(-\beta E_8) + \frac{i\sigma}{\alpha} \exp(-\beta E_9), \quad (8.2.4)$$

$$\mathcal{M}_5 = \frac{1}{2} \exp(-\beta E_2) + \frac{\exp(-\beta E_8)}{\delta} + \frac{\exp(-\beta E_9)}{\alpha}, \quad (8.2.5)$$

$$\mathcal{M}_6 = \frac{\gamma^2 \exp(-\beta E_8)}{\delta} + \frac{\sigma^2 \exp(-\beta E_9)}{\alpha}, \quad (8.2.6)$$

$$\mathcal{M}_7 = \frac{i}{2} \exp(-\beta E_4) - \frac{i}{2} \exp(-\beta E_5), \quad (8.2.7)$$

$$\mathcal{M}_8 = \frac{1}{2} \exp(-\beta E_4) + \frac{1}{2} \exp(-\beta E_5), \quad (8.2.8)$$

şeklinde olup

$$E_1 = J + 2B, \quad E_2 = -J, \quad E_3 = B - D,$$

$$E_4 = -B + D, \quad E_5 = -B - D, \quad E_6 = D + B,$$

$$E_7 = J - 2B, \quad E_8 = -\frac{J}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{J^2 + 8D^2}, \quad E_9 = -\frac{J}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{J^2 + 8D^2},$$

ve

$$\alpha = 2 + \sigma^2, \quad \delta = 2 + \gamma^2, \quad \sigma = \frac{J-\Omega}{2D}, \quad \gamma = \frac{J+\Omega}{2D}, \quad \Omega = \sqrt{J^2 + 8D^2},$$

tanımlamaları yapılmıştır.

A.3 (6.2.20) Denkleminin Katsayıları

Burada (6.2.20) ifadesinde verilen katsayılar görülmektedir:

$$\begin{aligned} a_1^{-1-1}(J, B) &= a_1^{-11}(J, B) = a_1^{00}(J, B) = a_1^{1-1}(J, B) = a_1^{11}(J, B) = 0, \\ a_1^{0-1}(J, B) &= a_1^{01}(J, B) = -a_1^{-10}(J, B) = -a_1^{10}(J, B) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2^{-11}(J, B) &= a_2^{00}(J, B) = a_2^{1-1}(J, B) = 0, \\ a_2^{01}(J, B) &= a_2^{10}(J, B) = -a_2^{-10}(J, B) = -a_2^{0-1}(J, B) = \frac{B}{\sqrt{4B^2 + (J+\xi)^2}}, \\ a_2^{11}(J, B) &= -a_2^{-1-1}(J, B) = \frac{(J+\xi)}{\sqrt{8B^2 + 2(J+\xi)^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3^{-11}(J, B) &= a_3^{00}(J, B) = a_3^{1-1}(J, B) = 0, \\ a_3^{01}(J, B) &= a_3^{10}(J, B) = -a_3^{-10}(J, B) = -a_3^{0-1}(J, B) = \frac{B}{\sqrt{4B^2 + (J-\xi)^2}}, \\ a_3^{11}(J, B) &= -a_3^{-1-1}(J, B) = \frac{(J-\xi)}{\sqrt{8B^2 + 2(J-\xi)^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4^{-1-1}(J, B) &= a_4^{00}(J, B) = 0, \\ a_4^{0-1}(J, B) &= a_4^{10}(J, B) = -a_4^{-10}(J, B) = -a_4^{01}(J, B) = \frac{B}{\sqrt{4B^2 + (-J+\xi)^2}}, \\ a_4^{1-1}(J, B) &= -a_4^{-11}(J, B) = \frac{(-J+\xi)}{\sqrt{8B^2 + 2(-J+\xi)^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5^{-1-1}(J, B) &= a_5^{00}(J, B) = 0, \\ a_5^{0-1}(J, B) &= a_5^{10}(J, B) = -a_5^{-10}(J, B) = -a_5^{01}(J, B) = \frac{B}{\sqrt{4B^2 + (-J-\xi)^2}}, \\ a_5^{1-1}(J, B) &= -a_5^{-11}(J, B) = \frac{(-J-\xi)}{\sqrt{8B^2 + 2(-J-\xi)^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_6^{11}(J, B) &= a_6^{-1-1}(J, B) = \zeta_1, \\ a_6^{10}(J, B) &= a_6^{01}(J, B) = a_6^{0-1}(J, B) = a_6^{-10}(J, B) = \zeta_2, \end{aligned}$$

$$a_6^{00}(J, B) = \zeta_3 \quad ,$$

$$a_6^{1-1}(J, B) = a_6^{-11}(J, B) = \frac{1}{\sqrt{\nu_6}} \quad ,$$

$$a_7^{11}(J, B) = a_7^{-1-1}(J, B) = \eta_1 \quad ,$$

$$a_7^{10}(J, B) = a_7^{01}(J, B) = a_7^{0-1}(J, B) = a_7^{-10}(J, B) = \eta_2 \quad ,$$

$$a_7^{00}(J, B) = \eta_3 \quad ,$$

$$a_7^{1-1}(J, B) = a_7^{-11}(J, B) = \frac{1}{\sqrt{\nu_7}} \quad ,$$

$$a_8^{11}(J, B) = a_8^{-1-1}(J, B) = \theta_1 \quad ,$$

$$a_8^{10}(J, B) = a_8^{01}(J, B) = a_8^{0-1}(J, B) = a_8^{-10}(J, B) = \theta_2 \quad ,$$

$$a_8^{00}(J, B) = \theta_3 \quad ,$$

$$a_8^{1-1}(J, B) = a_8^{-11}(J, B) = \frac{1}{\sqrt{\nu_8}} \quad ,$$

$$a_9^{11}(J, B) = a_9^{-1-1}(J, B) = \kappa_1 \quad ,$$

$$a_9^{10}(J, B) = a_9^{01}(J, B) = a_9^{0-1}(J, B) = a_9^{-10}(J, B) = \kappa_2 \quad ,$$

$$a_9^{00}(J, B) = \kappa_3 \quad ,$$

$$a_9^{1-1}(J, B) = a_9^{-11}(J, B) = \frac{1}{\sqrt{\nu_9}} \quad ,$$

şeklinde olup, burada

$$\xi = \sqrt{J^2 + B^2}, \quad \zeta_1 = - \left(\frac{3JB^2 + 4B^2E_6 - E_6^3 - JE_6^2}{JB^2\sqrt{\nu_6}} \right), \quad \zeta_2 = \frac{J+E_6}{B\sqrt{2\nu_6}},$$

$$\zeta_3 = \frac{2JB^2 + 4B^2E_6 - E_6^3 + J^2E_6}{JB^2\sqrt{\nu_6}},$$

$$\nu_6 = \frac{22J^2B^4 + 64JB^4E_6 - 32JB^2E_6^3 - 2J^2B^2E_6^2 + 3E_6^6 - 24B^2E_6^4 + 48B^4E_6^2}{J^2B^4}$$

$$+ \frac{8J^3B^2E_6 + J^4E_6^2 + 2J^4B^2 + 4JE_6^5 + 2J^2B^4}{J^2B^4},$$

$$\eta_1 = - \left(\frac{3JB^2 + 4B^2E_7 - E_7^3 - JE_7^2}{JB^2\sqrt{\nu_7}} \right), \quad \eta_2 = \frac{J+E_7}{B\sqrt{2\nu_7}}, \quad \eta_3 = \frac{2JB^2 + 4B^2E_7 - E_7^3 + J^2E_7}{JB^2\sqrt{\nu_7}},$$

$$\nu_7 = \frac{22J^2B^4 + 64JB^4E_7 - 32JB^2E_7^3 - 2J^2B^2E_7^2 + 3E_7^6 - 24B^2E_7^4 + 48B^4E_7^2}{J^2B^4} + \frac{8J^3B^2E_7 + J^4E_7^2 + 2J^4B^2 + 4JE_7^5 + 2J^2B^4}{J^2B^4},$$

$$\theta_1 = -\left(\frac{3JB^2+4B^2E_8-E_8^3-JE_8^2}{JB^2\sqrt{\nu_8}}\right), \quad \theta_2 = \frac{J+E_8}{B\sqrt{2\nu_8}}, \quad \theta_3 = \frac{2JB^2+4B^2E_8-E_8^3+J^2E_8}{JB^2\sqrt{\nu_8}},$$

$$\nu_8 = \frac{22J^2B^4 + 64JB^4E_8 - 32JB^2E_8^3 - 2J^2B^2E_8^2 + 3E_8^6 - 24B^2E_8^4 + 48B^4E_8^2}{J^2B^4} + \frac{8J^3B^2E_8 + J^4E_8^2 + 2J^4B^2 + 4JE_8^5 + 2J^2B^4}{J^2B^4},$$

$$\kappa_1 = -\left(\frac{3JB^2+4B^2E_9-E_9^3-JE_9^2}{JB^2\sqrt{\nu_9}}\right), \quad \kappa_2 = \frac{J+E_9}{B\sqrt{2\nu_9}}, \quad \kappa_3 = \frac{2JB^2+4B^2E_9-E_9^3+J^2E_9}{JB^2\sqrt{\nu_9}},$$

$$\nu_9 = \frac{22J^2B^4 + 64JB^4E_9 - 32JB^2E_9^3 - 2J^2B^2E_9^2 + 3E_9^6 - 24B^2E_9^4 + 48B^4E_9^2}{J^2B^4} + \frac{8J^3B^2E_9 + J^4E_9^2 + 2J^4B^2 + 4JE_9^5 + 2J^2B^4}{J^2B^4}.$$

ile tanımlıdır.