

**DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİKLİ KUANTUM YÜRÜYÜŞ MODELİ
VE
UYGULAMALARI**

Meltem GÖNÜLOL

**Aralık, 2011
İZMİR**

KESİKLİ KUANTUM YÜRÜYÜŞ MODELİ VE UYGULAMALARI

**Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi
Fizik Bölümü, Fizik Anabilim Dalı**

Meltem GÖNÜLÖL

**Aralık, 2011
İZMİR**

DOKTORA TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

MELTEM GÖNÜLOL tarafından PROF. DR. HAMZA POLAT ve DOÇ. DR. Ekrem AYDINER (ikinci danışman) yönetiminde hazırlanan “KESİKLİ KUANTUM YÜRÜYÜŞ MODELİ VE UYGULAMALARI” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir doktora tezi olarak kabul edilmiştir.



Prof. Dr. Hamza POLAT

Danışman



Doç. Dr. Ekrem AYDINER



Prof. Dr. İsmail SÖKMEN

İkinci Danışman



Prof. Dr. Şennur SOMALI

Tez İzleme Komitesi Üyesi




Prof. Dr. Doğan DEMİRHAN

Tez İzleme Komitesi Üyesi



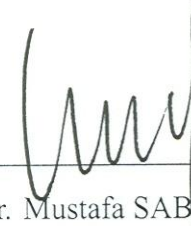
Prof. Dr. Fevzi BÜYÜKKILIÇ

Jüri Üyesi



Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU

Jüri Üyesi



Prof. Dr. Mustafa SABUNCU

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Jüri Üyesi

TEŞEKKÜR

Bu tez çalıŐmasını sŸrdŸrŸlmesi ve tamamlanmasında çok değerli desteği ve katkıları olan danışman hocam Prof. Dr. Hamza POLAT'a (Dokuz EylŸl Ÿniversitesi Fizik BŸlŸmŸ Ŗgretim Ÿyesi) ok teŐekkŸr ederim.

Bu tezin ortaya çıkması, sŸrdŸrŸlmesi ve tamamlanması sŸrecinde çok emeği olan ve bilimsel birikiminden her zaman yararlandığım ikinci danıŐmanım Doç. Dr. Ekrem AYDINER'e (İstanbul Ÿniversitesi Fizik BŸlŸmŸ Ŗgretim Ÿyesi) ve ayrıca bilimsel katkılarından dolayı Doç. Dr. ŖzgŸr Esat MŸSTECAPLIOęLU'na (Koç Ÿniversitesi Fizik BŸlŸmŸ Ŗgretim Ÿyesi) ok teŐekkŸr ederim.

Bu tez çalıŐması, yŸrŸtŸcŸlŸęŸnŸ Doç. Dr. Ekrem AYDINER'in yaptığı ve benimde bursiyer doktora Ŗęrencisi olarak yer aldığım "Kuantum YŸrŸyŸŐte EŞ-evresizlik" (109T681) adlı TŸBİTAK Araştırma Projesinde ele alınan problemlerden ŸretilmiŐtir. Bu projeyi ve dolayısıyla tez çalıŐmasını destekleyen TŸBİTAK'a teŐekkŸr ederim.

Doktora çalıŐmasını yŸrŸttŸęŸm sŸre içinde dostluklarını, manevi ve teknik desteklerini benden esirgemeyen arkadaşlarım AraŐ. Gör. Ebru KIŐ AM, Yrd. Doç. Dr. Cenk AKYŸZ, AraŐ. Gör. Dr. Ÿmit AKINCI, AraŐ. Gör. Ahmet ELİKOğLU ve AraŐ. Gör. Sevil SARIKURT'a teŐekkŸr ederim.

Ayrıca desteğini hep yanımda hissettiğim aileme çok teŐekkŸr ederim.

Meltem GŖNŸLOL

KESİKLİ KUANTUM YÜRÜYÜŞ MODELİ VE UYGULAMALARI

ÖZ

Bu tezde, kesikli kuantum yürüyüş modeli incelenmiş ve bu modelle ilgili bazı uygulamalara yer verilmiştir. Kuantum yürüyüş, kuantum algoritmalarının tasarlanmasında ve kuantum difüzyon olaylarının açıklanmasında kullanılan matematiksel bir modeldir. Kuantum yürüyüşün potansiyelini tam olarak kullanabilmek ve etkili kuantum algoritmaları oluşturabilmek için kuantum yürüyüşün özelliklerini iyi bilmek ve eş-evresizlik (decoherence) problemi karşısında kuantum yürüyüşün davranışını anlamak gerekir. Eş-evresizlik yokken ve eş-evresizlik etkisi altında kuantum yürüyüşün dinamiği ile ilgili birçok çalışma yapılmış ve çeşitli eş-evresizlik modelleri önerilmiştir. Bu konudaki çalışmalar halen devam etmektedir. Bu nedenle bu tezde, kuantum yürüyüş ve eş-evresizlik ile ilgili problemler incelenmiştir. İlk çalışmada, iki boyutlu tuzaklı örgüde kuantum yürüyüşte eş-evresizlik problemi, kuantum Hadamard, Fourier ve Grover yürüyüşleri için incelenmiş, Hadamard yürüyüşünde ortaya çıkan eş-evresizliğin Fourier ve Grover modelindeki eş-evresizlikten daha küçük olduğu gösterilmiştir. İkinci çalışmada, aynı fakat üç boyutlu tuzaklı örgü modelinde Hadamard yürüyüşü kullanılarak, kuantum eş-evresizliğin boyuta bağlılığı incelenmiş ve eş-evresizlik ile örgü-boyutu arasındaki ilişkiler bulunmuştur. Son çalışmada, kuantum yürüyücülerin tuzaklı örgüde yaşama olasılıkları tartışılmış, yürüyücülerin yaşama olasılıklarının (survival probability) zamana bağlı evriminin gerilmiş üstel yasaya uyduğu bulunmuştur.

Anahtar sözcükler: Klasik rastgele yürüyüş, kuantum yürüyüş, eş-evresizlik, yaşama olasılığı.

DISCRETE QUANTUM WALK MODEL AND ITS APPLICATIONS

ABSTRACT

In this thesis, discrete quantum walk model is examined and presented some applications of this model. Quantum walk is a mathematical model which is used for designing quantum algorithms and explaining quantum diffusion processes. In order to use the quantum walk's potential fully and compose efficient quantum algorithms, it is important to know its properties and understand its behavior against to decoherence problem. A lot of studies of the quantum walk's dynamics in the absence and presence of decoherence have been made and various decoherence models have been presented. Studies of this subject have still continued. Therefore, in this thesis, quantum walk and decoherence problems have been examined. In the first study, quantum Hadamard, Fourier and Grover walks have been analyzed in two dimensional trapped lattice and found that generated decoherence in Hadamard walk is more smaller than generated in Fourier and Grover walks. In the second study, using the same but three dimensional trapped lattice model with Hadamard walk, the dependence of dimension of decoherence has been investigated and relations between decoherence and lattice dimension have been found. In the last study, survival probability of quantum walkers has been examined in trapped lattice and found that evaluation of the time dependence of the survival probability of quantum walkers obeys the stretched exponential law.

Keywords: Classical random walk, quantum walk, decoherence, survival probability.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
DOKTORA TEZİ SINAV SONUÇ FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZ	iv
ABSTRACT	v
BÖLÜM BİR - GİRİŞ	1
BÖLÜM İKİ – KUANTUM YÜRÜYÜŞ VE EŞ-EVRESİZLİK.....	5
2.1 Giriş	5
2.2 Klasik Rastgele Yürüyüş	5
2.2.1 Bir Boyutlu Örgü Üzerinde Klasik Rastgele Yürüyüş	6
2.2.2 Klasik Rastgele Yürüyüşte Varyans ve Momentler	7
2.2.3 Klasik Rastgele Yürüyüş ve Difüzyon Denklemi	9
2.3 Kuantum Yürüyüş	12
2.3.1 Kesikli Kuantum Yürüyüş Modeli	14
2.3.2 Sürekli Kuantum Yürüyüş Modeli	18
2.4 Kuantum Yürüyüşün Fiziksel Uygulamaları	21
2.5 Kuantum Yürüyüşte Eş-Evresizlik	23
BÖLÜM ÜÇ – İKİ BOYUTLU TUZAKLI ÖRGÜDE KUANTUM YÜRÜYÜŞTE EŞEVRESİZLİK	26
3.1 Giriş	26
3.2 İki Boyutta Kuantum Yürüyüş	27
3.3 Model ve Hesaplamalar	28
3.4 Sonuçlar ve Tartışma	30

BÖLÜM DÖRT – ÜÇ BOYUTLU ÖRGÜDE KUANTUM YÜRÜYÜŞ 38

4.1 Giriş	38
4.2 Üç Boyutta Kuantum Yürüyüş	38
4.3 Model ve Hesaplamalar	40
4.4 Sonuçlar ve Tartışma	41

BÖLÜM BEŞ – BİR BOYUTLU TUZAKLI ÖRGÜDE KUANTUM YÜRÜYÜŞTE YAŞAMA OLASILIĞI 49

5.1 Giriş	49
5.2 Model ve Hesaplamalar	51
5.2.1 Çok Parçacık ile Kuantum Yürüyüş	52
5.2.2 Yaşama Olasılığı	53
5.3 Sonuçlar ve Tartışma	55
5.3.1 Kuantum Yürüyüşte Yaşama Olasılığı	55
5.3.2 Klasik ve Kuantum Yürüyüşte Yaşama Olasılığı	58
5.3.3 Tek Parçacık ile Kuantum Yürüyüşte Konum Ölçümü ve Çok Parçacık ile Kuantum Yürüyüşte Yaşama Olasılığı	60

BÖLÜM ALTI - SONUÇLAR 64

KAYNAKLAR66

BÖLÜM BİR

GİRİŞ

Kuantum yürüyüş (quantum walk), klasik rastgele yürüyüşün (classical random walk) kuantum mekaniksel karşılığıdır. Kuantum yürüyüş, son yıllarda kuantum algoritmalarının geliştirilmesi ve kuantum difüzyon olaylarının açıklanmasında yaygın olarak kullanılan bir modeldir (Grover, 1996; Shor, 1994). Kuantum yürüyüş ilk defa 1993 yılında Aharonov, Davidovich ve Zagury tarafından modellenmiştir. Fakat kuantum yürüyüşün tarihi, fizik literatüründe etraflıca çalışılmış olan kuantum difüzyon dinamiği çalışmalarına kadar gider (Feynman, Leighton ve Sands, 1964).

Günümüzde kullanılan dijital bilgisayarların algoritmik çalışma prensipleri, klasik mantık temeline dayanır. Mevcut bilgisayarların kapasiteleri geçmişe oranla şaşırtıcı hız, bellek ve işlem kapasitesine sahiptir. Fakat bilgisayar teknolojisinin sürekli gelişmeye devam etmesi ve üreticilerin giderek daha küçük devreler tasarlaması ile çok daha hızlı ve çok yüksek işlem kapasiteleri olan bilgisayarlar elde etme serüveni durmaksızın devam etmektedir. Bunun sonucu olarak bilgisayar teknolojisi de kuantum fiziğinin sınırlarına doğru evrilmektedir. Kuantum hesaplama prensiplerine göre çalışan kuantum bilgisayarı elde etmek mümkün olabilecek mi bunu zaman içinde göreceğiz. Fakat şunu söyleyebiliriz ki, günümüzde kuantum bilgisayarı elde edebilmek için hem teorik hem de deneysel çalışmalar çok yoğun olarak sürdürülmektedir.

Kuantum mekaniğinin algoritmik problemlerde kullanılma fikri, Feynman'a kadar dayanır. Feynman bu fikrin uygulamasını, kuantum mekaniksel sistemlerin ancak bir kuantum sistemi ile modellenebileceğini düşünerek gerçekleştirmiştir (Feynman, 1982, 1986). Feynman, kuantum mekaniksel sistemlerin diğer kuantum mekaniksel sistemleri modellemek için iyi bir donanıma sahip olduğunu, bu nedenle kuantum bilgisayarı ile bu tür bir modellemenin yapılabileceğini öne sürmüştür. Bu probleme bir başka yaklaşımda Deutch (1985) tarafından yapılmıştır. Deutch, kuantum mekaniği ile Church-Turing prensibini birleştirmeye çalışmıştır. Eğer makine kuantum mekaniksel ise makinenin fiziksel temeli üzerinde bir uyarılma yapılması

gerektiği dūřüncesini önermiş ve Church-Turing-Deutch prensibini oluşturmuştur. Deutch bu çalışmasında aynı zamanda klasik bilgisayarlarla çözümlü mümkün olmayan fakat kuantum fiziği prensiplerine uygun, kolay bir çözümlü olan ve ilk somut sayısal çalışma olan Deutch algoritmasını önermiştir. Bu algoritma, iki kubitten oluşan en küçük algoritma olmasının yanında sonraki algoritmaların da ana bileşenini oluşturur ve kuantum algoritmalarının nasıl çalıştığını anlamak açasından önemlidir.

Kuantum algoritmalarında esas buluş, Peter Shor (1994) tarafından yapılmıştır. Shor, büyük bir sayının çarpanlarını bulmak için etkili bir kuantum algoritması tasarlamış ve bu algoritma ile bir tamsayıyı çarpanlarına ayırma işinin en iyi bilinen klasik karşılığından üstel olarak daha hızlı yapılabileceğini göstermiştir. Shor'un ardından Grover (1996), önerdiği algoritma ile sıralı olmayan bir veri tabanında arama probleminin klasik algoritmadan kuadratik olarak daha hızlı yapılabileceğini göstermiştir. Bu gelişmeler, kuantum bilgi ve kuantum hesaplama alanlarında kuantum fiziği, bilgisayar bilimi, matematik, mühendislik gibi çok çeşitli disiplinlerde aktif çalışmalar yapılmasını sağlamıştır. Çeşitli problemlerin klasik algoritmalarından daha etkili çözümlü için önerilen kuantum algoritmalarının tasarımı ve analizi en çok ilgi gören araştırma konularından biri olmuştur (Nielsen ve Chuang, 2000).

Mevcut bilgisayarlarda kullanılan klasik algoritmaların çoğu rastgele yürüyüşü temel alır. Diğer bir söyleyişle rastgele yürüyüş, klasik algoritmaların matematiksel modelidir. Bu nedenle rastgele yürüyüş, klasik algoritmaların yapı taşıdır diyebiliriz. Benzer şekilde kuantum yürüyüş modeli de kuantum algoritmaları ve kuantum hesaplama için önemli bir yapı taşıdır.

Kesikli ve sürekli kuantum yürüyüş modellerinin ikisi de algoritmalarda çeşitli problemlerin çözümlü için yaygın bir şekilde kullanılmıştır. Kesikli kuantum yürüyüş için ilk kuantum algoritmaları Aharonov ve ark. (2001) ve Ambainis ve ark. (2001) tarafından oluşturulmuştur. Bu çalışmaları takiben, hiperküpte (hypercube) kuantum yürüyüşte bir köşeden diğer köşeye ulaşma zamanının (hitting time), klasik durumdan üstel olarak daha hızlı olduğu gösterilmiş (Kempe, 2005) ve Moore ve Russel (2002) tarafından yapılan çalışmada aynı hızlılık, yürüyüşün kararlı bir dağılıma ulaşması için gerekli zaman olan birleştirme zamanında da (mixing time) elde edilmiştir.

Kuantum yürüyüş kullanılarak kuantum arama (quantum search) algoritmaları önerilmiştir. (Aaronson ve Ambainis, 2005; Ambainis, Kempe ve Rivosh, 2005; Childs ve Glodstone 2004; Shenvi, Kempe ve Whaley, 2003). Childs ve ark. (2003) tarafından yapılan çalışmada, sürekli kuantum yürüyüş kullanarak özel bir grafikte bir köşeden diğer köşeye, klasik durumdan üstel olarak daha hızlı ulaşılabileceği gösterilmiştir. 2007 yılında Ambainis, en etkili kuantum algoritmasını oluşturmak için kuantum yürüyüşü eleman farklılığı (element distinctness) problemine uygulamıştır. Bu çalışmaların yanı sıra kuantum yürüyüş, sorgu (query) modeli olarak birçok farklı probleme uygulanmıştır. Bu problemlerden bazıları üçgen bulma (Magniez, Santha, ve Szegedy, 2005), matris çarpımını kontrol etme (Buhrman ve Spalek, 2006), grup birleşme özelliğini test etme (Magniez ve Nayak, 2007) olarak sayılabilir.

Teorik olarak kuantum yürüyüş, kauntum algoritmalarında bir model olarak kullanılabilir. Fakat kuantum yürüyüşün algoritmik realizasyonlarında önemli zorlukların ortaya çıkması kaçınılmazdır. Bu zorluklardan birisi, bir kuantum sisteminin çevresiyle etkileşerek klasik sisteme dönmesidir. Eş-evresizlik (dehorence) olarak bilinen bu durum, kuantum yürüyüşlerde de karşımıza çıkmaktadır. Kuantum yürüyüşlerde ortaya çıkabilecek bu tür sorunların detaylı olarak anlaşılabilmesi, kuantum algoritmaları açısından büyük önem taşımaktadır. Bu nedenle son yıllarda kuantum yürüyüşlerinde eş-evresizlik olayı fizikte güncel problemler arasına girmiştir. Eş-evresizlik olayı, kuantum algoritma çalışmalarında, ayrıca bir katı malzeme içinde elektron taşınımı, bir kubitin optik örgüde veya bir optik boşluk (kavite) içinde taşınımı, ya da nötral bir atomun tuzaklı bir optik uzayda taşınımı gibi pek çok kuantum sürecinde ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle günümüzde bu tür sistemler için eş-evresizliğe yol açan mekanizmaların anlaşılması ve hangi tür mekanizmaların ne miktarda eş-evresizliğe yol açtığı belirlenmesi büyük önem taşımaktadır. Eş-evresizliğin kuantum yürüyüşlerle modellendiği çeşitli çalışmalar yayımlanmıştır. Özellikle engelleyici veya soğurucu tuzakların varlığında ya da yansıtıcı veya soğurucu sınır koşullarına sahip geometrilere yapılan kuantum yürüyüş çalışmalarında, eş-evresizlik davranışı hakkında ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Ancak kuantum yürüyüşlerdeki eş-evresizliğin anlaşılması, halen güncelliğini koruyan problemler arasındadır.

Bu tezde, tuzaklı örgü modeli kullanarak, kesikli örgü (discrete lattice) uzayında kuantum yürüyüşler gerçekleştirilmiş ve bu model kullanılarak eş-evresizlik problemi incelenmiştir. Soğurucu tuzaklı uzay modelinin seçilmesinin önemli bir nedeni vardır. Bir kuantum sisteminde kuantum durumlarının tamamıyla yutulduğu fiziksel mekanizmaların olması nedeniyle bu tuzak modeli, fiziksel duruma uygun bir modeldir. Bu modeli çalışmak, kuantum taşınım ve kuantum algoritma tartışmaları açısından faydalı olacaktır. Ayrıca konunun yeni olması açısından bu konuda literatürde oldukça büyük bir boşluk vardır. Bu çalışmadan elde edilecek sonuçlar, kuantum eş-evresizlik konusunda araştırma yapanlar ve kuantum algoritması geliştirmeye çalışanlar için de önemli bir katkı sunacaktır.

Tez şu şekilde organize edilmiştir: İkinci Bölüm’de, klasik rastgele yürüyüş kısaca sunulduktan sonra kuantum yürüyüş ve kuantum yürüyüş modelleri (kesikli ve sürekli kuantum yürüyüş) ele alınarak kesikli kuantum yürüyüş modelinin dinamiği ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Ayrıca kuantum yürüyüşün fiziksel uygulamalarından bahsedilmiş ve bu bölümde son olarak, kuantum yürüyüşte eş-evresizlik olayı ele alınmıştır. Üçüncü, Dördüncü ve Beşinci Bölüm’lerde, bu tez kapsamında oluşturulan ve literatüre katkısı olan kesikli kuantum yürüyüş çalışmaları anlatılmıştır. Üçüncü Bölüm’de, iki boyutlu tuzaklı örgüde kuantum yürüyüşte eş-evresizlik problemi tartışılmıştır. Dördüncü Bölüm’de, üç boyutlu tuzaklı kuantum yürüyüşte eş-evresizliğin boyuta bağlılığı araştırılmıştır. Beşinci Bölüm’de, bir boyutlu tuzaklı örgüde, birbiriyle etkileşmeyen çok parçacıkla gerçekleştirilen kuantum yürüyüşte, parçacıkların yaşama olasılığının zaman evrimi incelenmiş ve son olarak altıncı bölümde ise yapılan çalışmaların sonuçları kısaca yorumlanmıştır.

BÖLÜM İKİ

KUANTUM YÜRÜYÜŞ VE EŞ-EVRESİZLİK

2.1 Giriş

Klasik rastgele yürüyüş, Brownian hareketin özel bir hali olup, genellikle bir örgü uzayı üzerinde gerçekleşen stokastik hareketi temsil eder. Rastgele yürüyüş, basit görüntüsüne rağmen oldukça güçlü matematiksel yapısı olan bir modeldir ve fizik, ekonomi, biyoloji, kozmoloji gibi çok çeşitli alanlarda uygulamaları vardır (Guillotini-Plantard, ve Schott, 2006). Kuantum yürüyüş modeli, klasik rastgele yürüyüş modelinde olduğu gibi pek çok alana henüz uygulanmamış olsa da kuantum hesaplama prensiplerine dayalı olarak çalışabilecek kuantum bilgisayarları için geliştirilecek algoritma modelleri oluşturmak için önemli adaylardan birisidir. Bu nedenle kuantum yürüyüş modelinin fiziksel sistemlere uygulanabilirliği, dinamiği, sonuçları oldukça önemlidir. Bu bölümde, klasik rastgele yürüyüş, kuantum yürüyüş ve kuantum yürüyüşte eş-evresizlik konuları kısaca ele alınmıştır.

2.2 Klasik Rastgele Yürüyüş

Rastgele yürüyüş terimi ilk defa 1905 yılında Pearson tarafından, "sarhoş yürüyüşü" olarak bilinen probleme çözüm önerdiği çalışmasında kullanılmıştır. Bu ilk uygulamadan kısa bir süre sonra Brownian hareketin açıklaması Einstein (1905) tarafından yapılmıştır. Brownian hareket, denge halindeki gaz yada sıvı içindeki büyük toz parçacıklarının rastgele yürüyüş ile modellenmesine dayanır. Bu modelden bağımsız olarak bir yıl sonra benzer teorik bir çalışma, Smoluchowski (1906) tarafından yapılmıştır. Klasik rastgele yürüyüşte bir veya birden fazla parçacık stokastik hareket yaparak yer değiştirebilir. Bu parçacıklar, etkileşimli veya etkileşimsiz olabilirler. Burada temel olan şey, klasik rastgele yürüyüşün fiziksel argümanın klasik bir parçacık olmasıdır. Bu yürüyüşte parçacık, koşullu veya koşulsuz olasılık dinamiği kurallarına göre hareket eder. Basit rastgele yürüyüş bize,

makroskobik bir difüzyon sürecinin mikroskobik temsilini ve modelini sunar. Geçekten de rastgele yürüyüş süreci, süreklilik limitinde makroskobik difüzyon dinamiğini verir. Bu sayede difüzyon denklemi, basit bir rastgele yayılım sürecinden elde edilebilir. Bunun yanında basit bir rastgele yürüyüş sürecine bazı ek koşullar konulduğunda, kesirli (fractional) difüzyon denklemi, Fokker-Planck, Langevin ve bu denklemlerin kesirli hallerini de elde etmek mümkündür.

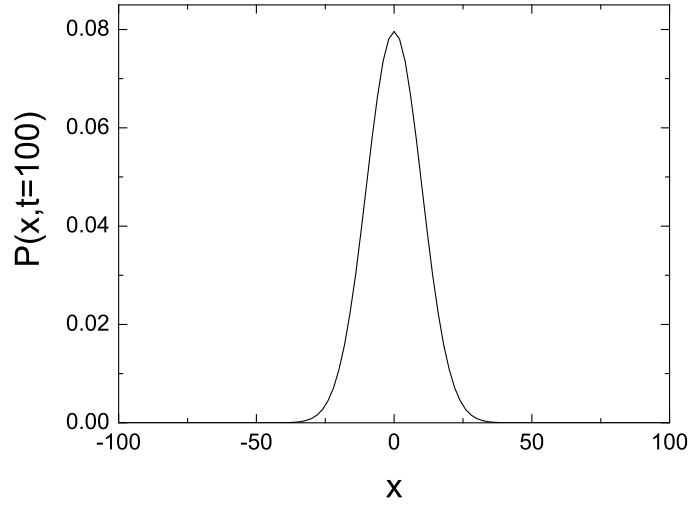
Ayrıca klasik rastgele yürüyüş, algoritmik problemlere uygulanabilmesi açısından da teorik bilgisayar biliminin yapı taşlarından biri olarak kabul edilir. Örneğin, klasik rastgele yürüyüş, grafik birleştirici (Sinclair, 1993), 3-SAT (Schöning, 1999) ya da matrisin sürekliliği (Jerrum, Sinclair, ve Vigoda, 2001) gibi birçok problemin çözümünde kullanılır.

2.2.1 Bir Boyutlu Örgü Üzerinde Klasik Rastgele Yürüyüş

Basit rastgele yürüyüş, parçacığın örgü üzerinde kesikli zaman adımlarında hareket ettiği stokastik bir süreçtir. Yürüyüşün bir boyutlu örgü üzerinde gerçekleştiğini düşünürsek, her adımda parçacık, bulunduğu konumdan sağdaki veya solundaki en yakın komşu örgü noktalarına eşit olasılıkla hareket eder. Parçacığın sağa ve sola gidişi rastgele bir olay olan para atışının yazı ve tura gelmesine göre belirlenebilir. Parçacığın ($t = 0$) anında ($x = 0$) noktasında olduğunu düşünelim. İlk adımdan sonra parçacık, $1/2$ olasılıkla $x = 1$ noktasında ya da $x = -1$ noktasında bulunur. Bu işlem birçok kez tekrarlandığında, parçacığın t anında, x konumunda bulunma olasılığı,

$$P(x, t) = \frac{1}{2}P(x - 1, t - 1) + \frac{1}{2}P(x + 1, t - 1), x \in \mathbb{Z} \quad (2.2.1)$$

şeklinde tekrarlama bağıntısı yardımıyla bulunabilir. $P(0, 0) = 1$ başlangıç koşulu ve (2.2.1) bağıntısı kullanılarak $P(x, t)$ olasılık dağılımı çizdirildiğinde, Şekil (2.1)'den de görüldüğü gibi Gaussyan dağılım elde edilir. Yürüyüşün örgü üzerinde yayılımını karakterize etmek için varyansının zamanla değişimini incelemek gerekir.



Şekil 2.1 $t = 100$ zaman adımı sonunda bir boyutta klasik rastgele yürüyüşte konumların olasılık dağılımı.

2.2.2 Klasik Rastgele Yürüyüşte Varyans ve Momentler

Bir boyutta varyans,

$$\sigma^2(t) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (2.2.2)$$

denklemleri ile verilir. Bu denklemlerde $\langle x \rangle$ ve $\langle x^2 \rangle$, $P(x, t)$ 'nin birinci ve ikinci momentleridir.

Bir boyutlu örgü üzerinde rastgele yürüyüşü gerçekleştiren M parçacık olduğunu düşünelim. i . parçacığın konumu x_i ise M parçacığın ortalama konumu ya da rastgele yürüyüşün birinci momenti,

$$\langle x \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i \quad (2.2.3)$$

şeklinde verilir. Eğer yürüyüşü x konumunda bitiren parçacık sayısı $\omega(x)$ ise bu denklem,

$$\langle x \rangle = \frac{1}{M} \sum_x \omega(x) \quad (2.2.4)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bir parçacığın sağa ve sola gitme olasılığı eşit olduğundan, x konumunda ne kadar parçacık varsa $-x$ konumunda da o kadar parçacık olacaktır. Bu durumda denklemindeki toplamda $x\omega(x)$ ve $-x\omega(x)$ birbirini yokeder ve rastgele

yürüyüş için birinci moment,

$$\langle x \rangle = 0 \quad (2.2.5)$$

olarak bulunur. Bu sonuca göre bir boyutta kuantum yürüyüşte ortalama yerdeğiştirme sıfırdır. Denklem (2.2.2)'de $\langle x \rangle$ yerine yazıldığında, bir boyutta rastgele yürüyüş için varyans,

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle \quad (2.2.6)$$

şekline dönüşür. Varyansı hesaplayabilmek için ikinci momenti bilmek gerekir.

N adım sonunda parçacığın konumu x ise, orijinden yürüyüşe başlayan parçacık için x ,

$$x = \sum_{j=1}^N \Delta_j \quad (2.2.7)$$

denklemleriyle tanımlanabilir. Bu denklemde Δ_j , j . adımdaki yerdeğiştirmeyi gösterir. x^2 'de (2.2.7) denklemine benzer şekilde,

$$x^2 = \sum_{i=1}^N \Delta_i \sum_{j=1}^N \Delta_j \quad (2.2.8)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu denklemde her iki tarafın ortalaması alınarak ikinci moment $\langle x^2 \rangle$,

$$\langle x^2 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \Delta_i \sum_{j=1}^N \Delta_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta_i \Delta_j \right\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle \Delta_i \Delta_j \rangle \quad (2.2.9)$$

olarak bulunur. Adımlar birbirinden bağımsız olduğundan, ($i \neq j$) iken $\langle \Delta_i \Delta_j \rangle = 0$ 'dır. Bu durumda (2.2.9) denklemi, ($i = j$) için yeniden yazılırsa,

$$\langle x^2 \rangle = \sum_{j=1}^N \langle \Delta_j^2 \rangle \quad (2.2.10)$$

ifadesi elde edilir. Her adım uzunluğunun aynı olduğu kabul edilip, bu uzunluk l ile gösterilirse, ikinci moment her adımda sabit bir sayıya eşit olur.

$$\langle x^2 \rangle = Nl^2 \quad (2.2.11)$$

Bu sonuca göre varyans,

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = Nl^2 \quad (2.2.12)$$

olarak bulunur ve varyansın karekökü ile tanımlanan standart sapma da,

$$\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{Nl} \quad (2.2.13)$$

ifadesine eşit olur. Standart sapma, N adım sonra parçacığın yürüyüşe başladığı noktadan ne kadar uzakta olduğunu gösterir. Bu sonuca göre adım uzunluğu $l = 1$ alındığında, bir boyutlu örgüde rastgele yürüyüş yapan parçacık, başlangıç noktasından adım sayısının karekökü kadar uzaklaşmış olur.

2.2.3 Klasik Rastgele Yürüyüş ve Difüzyon Denklemi

Rastgele yürüyüş, süreklilik limitinde, klasik difüzyon denklemi ile tanımlanabilir (Hughes, 1995; Weiss, 1994). Difüzyon denklemi elde edilirken, bir boyutlu rastgele yürüyüşü kullanmak, matematiksel ifadelerin türetilmesinde kolaylık sağlar. Bu alt bölümde, bir boyutlu klasik rastgele yürüyüşten yola çıkılarak difüzyon denkleminin elde edilişi ve bu denklemin çözümü gösterilmiştir.

Bir boyutta rastgele yürüyüşte, yürüyücünün sağa doğru bir adım atma olasılığı a , sola doğru bir adım atma olasılığı $b = 1 - a$ ile gösterilirse, yürüyücünün $N + 1$ adım sonunda i konumunda olma olasılığı $P(i, N + 1)$,

$$P(i, N + 1) = aP(i - 1, N) + bP(i + 1, N) \quad (2.2.14)$$

şeklinde tanımlanan tekrarlılama bağıntısı yardımıyla bulunabilir. Süreklilik limitinde, kesikli değişkenler (i, N) , sürekli değişkenler (x, t) ile yerdeğiştirmelidir. Değişkenler arasındaki ilişki,

$$t = N\Delta t \quad \text{ve} \quad x = i\Delta x \quad (2.2.15)$$

şeklinde verilir. Burada Δx , örgü noktaları arasındaki mesafeyi, Δt , ard arda gelen

adımlar arasındaki zamanı belirtir. Bu tanımlamalar altında $P(i, N + 1)$,

$$P[i, N + 1] = p[i\Delta x, (N + 1)\Delta t] \quad (2.2.16)$$

formunda yazılabilir ve denklem (2.2.14) de,

$$p[i\Delta x, (N + 1)\Delta t] = ap[(i - 1)\Delta x, N\Delta t] + bp[(i + 1)\Delta x, N\Delta t] \quad (2.2.17)$$

şekline dönüşür. $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ limitinde, $x = 0$ ve $t = 0$ civarında, denklem (2.2.17) Taylor serisine açıldığında, bu denklemdeki terimler tek tek aşağıdaki gibi bulunur.

$$p[i\Delta x, (N + 1)\Delta t] \approx p(x, t) + \Delta t \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \dots \quad (2.2.18)$$

$$p[(i \pm 1)\Delta x, N\Delta t] \approx p(x, t) \pm \Delta x \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \dots \quad (2.2.19)$$

Bu terimlere göre denklem (2.2.17) yeniden düzenlenip, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\Delta t \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = (a - b)\Delta x \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.2.20)$$

denklemini elde edilir. $((\Delta x)^2/2\Delta t)$ oranı sonlu iken, $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ limitinde,

$$D = \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \quad (2.2.21)$$

ve

$$v = \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} (b - a) \frac{(\Delta x)}{\Delta t} \quad (2.2.22)$$

tanımlamaları yapılırsa denklem (2.2.20),

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \quad (2.2.23)$$

şeklini alır. (2.2.23) denklemi, Fokker-Planck denklemi olarak bilinir ve bu denklemde D , difüzyon katsayısını, v , sürüklenme hızını gösterir. Rastgele yürüyüşte her zaman adımında sağa ve sola adım atma olasılığı eşit ise sürüklenme hızı, $v = 0$ olur ve bu durumda (2.2.23) denklemi,

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.2.24)$$

klasik difüzyon denkleminde indirgenir.

$-\infty < x < \infty$ aralığında ve $t > 0$ iken denklem (2.2.24)'ün çözümü, $p(x, 0) = \delta(x)$ başlangıç koşulu kullanılarak Fourier dönüşümü yardımı ile yapılabilir. $p(x, t)$ 'nin Fourier dönüşümü,

$$\tilde{p}(w, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} p(x, t) dx \quad (2.2.25)$$

şeklindedir. $(\frac{\partial^n}{\partial x^n} p(x, t))$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü ise,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \frac{\partial^n}{\partial x^n} p(x, t) = (-iw)^n \tilde{p}(w, t) \quad (2.2.26)$$

şeklinde verilir. (2.2.25) ve (2.2.26) bağıntıları kullanılarak, (2.2.24) denkleminin Fourier dönüşümü,

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p}(w, t) = -Dw^2 \tilde{p}(w, t) \quad (2.2.27)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$\tilde{p}(w, t) = \tilde{p}(w, 0) \exp(-Dw^2 t) \quad (2.2.28)$$

formundadır. (2.2.28) denklemdeki $\tilde{p}(w, 0)$ terimi, $p(x, 0) = \delta(x)$ ile verilen başlangıç koşulunun Fourier dönüşümünü ifade eder ve bu dönüşüm,

$$\tilde{p}(w, 0) = 1 \quad (2.2.29)$$

olarak bulunur. Bu durumda denklem (2.2.28),

$$\tilde{p}(w, t) = \exp(-Dw^2 t) \quad (2.2.30)$$

şekline dönüşür. $p(x, t)$ fonksiyonunu elde etmek için denklem (2.2.30)'a ters Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} \tilde{p}(w, t) dw \quad (2.2.31)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iwx - Dw^2 t) dw \quad (2.2.32)$$

ifadesi elde edilir. İntegralin kolay alınabilmesi için üstel ifade tam kare formunda

yazılırsa,

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\sqrt{Dt}w - \frac{ix}{2\sqrt{Dt}} \right)^2 - \frac{x^2}{4Dt} \right] dw \quad (2.2.33)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{x^2}{4Dt} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\sqrt{Dt}w - \frac{ix}{2\sqrt{Dt}} \right)^2 \right] dw \quad (2.2.34)$$

denklemini elde edilir. $\xi = \left(\sqrt{Dt}w - \frac{ix}{2\sqrt{Dt}} \right)$ değişken dönüşümü yapıp, (2.2.34) ifadesi tekrar düzenlenirse,

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 Dt}} \exp \left(-\frac{x^2}{4Dt} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi \quad (2.2.35)$$

şeklinde bilinen bir integral ifadesine dönüşür. Bu integralin çözümü,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = \sqrt{\pi} \quad (2.2.36)$$

şeklinde verilir. İntegralin çözümü, denklem (2.2.35)'de yerine yazılarak,

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left(-\frac{x^2}{4Dt} \right) \quad (2.2.37)$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen bu çözüme göre olasılık dağılım fonksiyonu $p(x, t)$, konum ortalaması sıfır, varyansı $2Dt$ olan Gaussyan dağılıma uymaktadır.

2.3 Kuantum Yürüyüş

Kuantum yürüyüş, klasik rastgele yürüyüşün süperpozisyon (üst üste binme) ve girişim gibi kuantum mekaniği sonuçları kullanılarak genelleştirilmiş halidir. Klasik rastgele yürüyüşte, yürüyüşü gerçekleştiren eleman bir parçacıktır ve bu parçacık, konum uzayında belirli bir olasılıkla hareket eder. Kuantum yürüyüşün elemanı ise parçacık değil, bir kuantum durumudur (quantum state). Klasik yürüyüşte parçacıklar girişim yapmaz ve her hangi bir t anında uzayın yalnızca bir noktasında bulunabilirler. Fakat kuantum yürüyüş yapan bir durum, aynı anda uzayın her noktasında bulunabilir. Bir kuantum ölçümü yapana kadar kuantum durumunun uzayın hangi noktasına

lokalize olacağını bilmek olası değildir. Ancak ölçüm sonucunda, kuantum durumunu bir parçacık olarak uzayın her hangi bir noktasında gözlemlememiz mümkündür. Ayrıca kuantum fiziği ilkelerine göre kuantum durumları girişim yapma özelliğine de sahiptirler. Kuantum yürüyüşte bir kuantum durumu, aynı anda muhtemel yolları kontrol ederek farklı yolların girişimine karşılık gelen genlikler ile hareket eder. Bu durum, kuantum yürüyüşte varyansın, adım sayısının karesiyle orantılı artmasına yol açar. Klasik yürüyüşte ise varyans, adım sayısı ile lineer artar. Bu da bize, kuantum yürüyüşün klasik rastgele yürüyüşten kuadratik olarak daha hızlı yayıldığını gösterir ve kuantum algoritması olarak kullanılabilceğinin sinyallerini verir.

Kuantum yürüyüşte klasik parçacığın yerini, elektron, atom yada foton gibi bir kuantum parçacığı ve stokastik evrimin yerini, üniter evrim alır. Kuantum yürüyüşün zaman evrimi, ara basamaklarda ölçüm yapılmadan her zaman adımında evrim operatörünün başlangıç durumuna uygulanmasıyla oluşur ve zaman evriminde kuantum girişimden dolayı kuantum yürüyüş, klasik rastgele yürüyüşten farklı davranış gösterir (Kempe, 2003). Klasik rastgele yürüyüşte yıkıcı girişim bulunmamasına rağmen kuantum yürüyüşte aynı noktada buluşan iki farklı yol birbirini yok ederek yıkıcı girişime neden olabilir ve bu durum kuantum yürüyüşte, klasik rastgele yürüyüşün olasılık dağılımı olan Gaussyan dağılımdan çok farklı bir olasılık dağılımının oluşmasına neden olur.

Sürekli kuantum yürüyüş ve kesikli kuantum yürüyüş olmak üzere kuantum evrimini karakterize eden iki farklı model bulunur. 1998 yılında Farhi ve Gutmann tarafından kullanılan sürekli kuantum yürüyüşte, yürüyüş direkt olarak konum uzayı ile tanımlanabilir. Yönelim uzayına gerek yoktur. 1990'ların başında Aharonov ve ark. tarafından kullanılan kesikli kuantum yürüyüşte ise parçacığın yönelimini belirlemek için konum uzayının yanında, yönelim uzayına da ihtiyaç vardır. Sürekli kuantum yürüyüş ile kesikli kuantum yürüyüşün sonuçları genellikle benzerdir. Fakat kesikli kuantum yürüyüş, kuantum algoritmaları oluşturmada daha etkilidir. Çünkü bir kuantum bilgisayar, kesikli kayıtlarla çalışır. Kuantum yürüyüşün kesikli olması ise onu, bir kuantum bilgisayar ile hesaplamamıza olanak verecektir. Böylece kuantum yürüyüşü kullanarak, bir kuantum bilgisayarında kullanılacak daha etkili algoritmalar bulmak olasıdır. Bu nedenle bu tez kapsamında, kesikli kuantum yürüyüş

üzerine yoğunlaşmıştır.

2.3.1 Kesikli Kuantum Yürüyüş Modeli

Bir boyutta kuantum yürüyüşte, her bir zaman adımında parçacık, sağ ve sol genliklerin eşit olduğu süperpozisyon durumunda hareket eder. Fakat böyle bir yürüyüş, yöntemin üniter olmamasından dolayı fiziksel olarak imkansızdır. Sadece homojen üniter yöntemler komşu örgü noktaları arasındaki geçişi sağlar. Eğer parçacık, hareketini destekleyen ekstra bir serbestlik derecesine sahip olursa, üniter bir yürüyüş sağlanabilir. Böylece parçacık, yönelim ve konum olmak üzere iki serbestlik derecesine sahip olur.

Yürüyüş Hilbert uzayında $\mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_P$ ile gösterilir. \mathcal{H}_C yönelim uzayı, \mathcal{H}_P konum uzayıdır. t anında sistemin durumu,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=0}^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{j,m}(t) |j\rangle |m\rangle \quad (2.3.1)$$

ile verilir. $A_{j,m}$ genliği, reel yada kompleks sayı olabilir ve $\sum_{j,m} |A_{j,m}|^2 = 1$ denklemini sağlar. Durum vektörü $|m\rangle$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ olmak üzere örgü üzerinde yürüyücünün konumunu belirtir. Durum vektörü $|j\rangle$, $|\uparrow\rangle = |0\rangle$ yada $|\downarrow\rangle = |1\rangle$ durumlarında bulunur ve sağa veya sola yönelimi belirtir. $|\uparrow\rangle$ ve $|\downarrow\rangle$ standart bazlarda,

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

vektörleriyle gösterilir. Kuantum yürüyüşün zaman evrimi,

$$|\psi(t+1)\rangle = U |\psi(t)\rangle \quad (2.3.3)$$

ile gösterilir. Yürüyüşün bir adımı, U operatörü ile verilir. U operatörü,

$$U = S(C \otimes I) \quad (2.3.4)$$

olarak gösterilir. C , Coin (kuantum para) operatördür ve sadece yönelim uzayına etki eder. S , öteleme operatörü ise durum uzayına etki eder. I , birim operatördür. Üniter dönüşüm C 'nin seçimi keyfidir ve C 'yi değiştirerek farklı davranışlarda birçok yürüyüş tanımlanabilir. Herbir zaman adımında parçacığın yöneliminin Hadamard dönüşümü sonucunda belirlendiği yürüyüşe Hadamard yürüyüşü denir.

Bir boyutta Hadamard operatörü,

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

olarak verilir. Hadamard dönüşümü ayrılabilir ve uzaysal serbestlik dereceleri arasında dolaşıklık oluşmaz. Bu özellik bize, Hadamard dönüşümünü her uzay boyutu için bir işlemciye ayırma olanağı verir. Bir boyut için Hadamard operatörü, P ve Q gibi iki işlemciye ayrılabilir.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.6)$$

$H = P + Q$ 'ya eşittir. P , yürüyücünün sağa doğru Q , sola doğru eşit olasılıkla hareketini temsil eder.

Hadamard işlemcisi $|\uparrow\rangle$ ve $|\downarrow\rangle$ durumlarına uygulandığında,

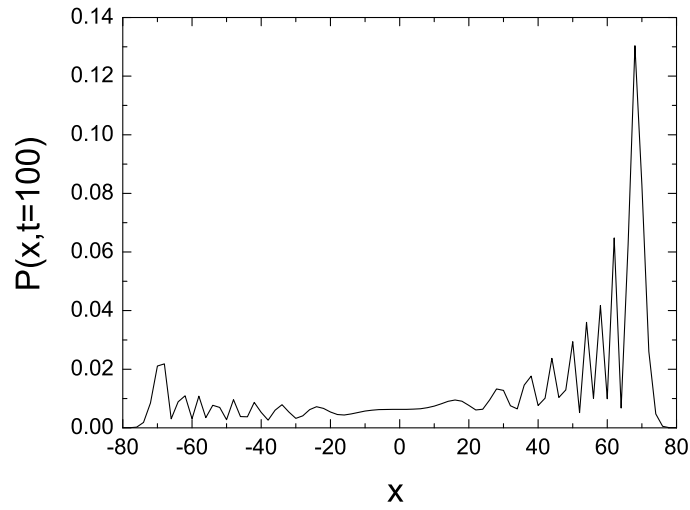
$$H|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad (2.3.7)$$

$$H|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \quad (2.3.8)$$

süperpozisyon durumları oluşur. Bundan sonra öteleme operatörü S , yürüyücünün hareketini durum vektörlerine göre aşağıdaki gibi belirler.

$$S|\uparrow\rangle|m\rangle = |\uparrow\rangle|m+1\rangle \quad (2.3.9)$$

$$S|\downarrow\rangle|m\rangle = |\downarrow\rangle|m-1\rangle \quad (2.3.10)$$



Şekil 2.2 Başlangıç durumu $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ olan kuantum yürüyüşü için 100 adım sonunda konumların asimetrik olasılık dağılımı.

U dönüşümü sonucunda, $t + 1$ anında, m konumunda yürüyücünün dalga fonksiyonu,

$$|\psi(m, t + 1)\rangle = P |\psi(m + 1, t)\rangle + Q |\psi(m - 1, t)\rangle \quad (2.3.11)$$

denklemlerle bulunur. Dalga fonksiyonu,

$$|\psi(m, t)\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_{\uparrow}(m, t)\rangle \\ |\psi_{\downarrow}(m, t)\rangle \end{pmatrix} \quad (2.3.12)$$

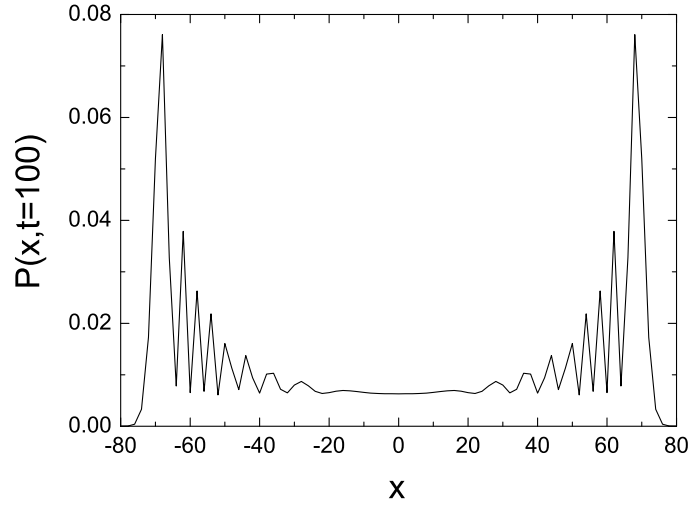
şeklinde iki bileşene sahiptir. Yürüyücünün, t anında, m konumunda bulunma olasılığı da,

$$P(m, t) = |\langle \uparrow | \psi(m, t) \rangle|^2 + |\langle \downarrow | \psi(m, t) \rangle|^2 \quad (2.3.13)$$

bağıntısı ile verilir.

H ve S operatörlerinin $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ durumuna sırasıyla uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle &\xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle \\ &\xrightarrow{S} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$



Şekil 2.3 Başlangıç durumu $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$ olan kuantum yürüyüşü için 100 adım sonunda simetrik olasılık dağılımı.

elde edilir. Bu durumun standart bazlarda ölçülmesi ile $1/2$ olasılıkla $\{|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle, |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle\}$ sonuçlarından biri elde edilir. Bu ölçümden sonra spinler arasında korelasyon olmaz. Eğer kuantum yürüyüşe, her iterasyonda ölçüm yaparak devam edilirse, klasik rastgele yürüyüşün sonuçlarına ulaşılır.

Kuantum yürüyüşte ara iterasyonlarda ölçüm yapılmaz. Böylece farklı konumlar arasındaki korelasyon korunmuş olur. Bu, daha sonraki adımlarda durumlar arasında girişim etkilerinin oluşmasına neden olur. Girişim etkileri nedeniyle kuantum yürüyüş, dağılımın Gaussyan olmaması ve dağılımın yürüyüşteki adım sayısına lineer bağlı olmaması gibi farklı davranışlar sergiler.

$|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ başlangıç durumu ile başlandığında, 100 adım sonunda kuantum yürüyüş, Şekil (2.2)'den de görüldüğü gibi asimetrik olasılık dağılımı verir. Bu asimetriklik, kuantum durumlarının yapıcı ve yıkıcı girişiminden kaynaklanır. Yürüyüşe $|\downarrow\rangle \otimes |0\rangle$ durumu ile başlandığında, bu sefer sola doğru meyil gözlenir. Simetrik bir dağılım elde etmek için $|\uparrow\rangle$ ve $|\downarrow\rangle$ durumlarının süperpozisyonu olan bir durumla başlamak gerekir. Böylece başlangıç durumu,

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle \quad (2.3.15)$$

olur. Hadamard operatörü duruma herhangi bir kompleks genlik ilave etmeyeceğinden, $|\uparrow\rangle$ durumu için reel, $|\downarrow\rangle$ durumu için tamamen sanal kısımlar elde edilir ve böylece bu durumlar arasındaki girişim engellenmiş olur ve toplam dağılım Şekil (2.3)'te görüldüğü gibi simetrik hale gelir.

Klasik rastgele yürüyüşte t adım sonra varyans, $\sigma^2 = t$ olur ve orjinden beklenen uzaklık, $\sigma = \sqrt{t}$ 'dir. Kuantum yürüyüşte varyans, $\sigma^2 = t^2$ olup orjinden beklenen uzaklık, $\sigma \sim t$ kadardır. Bu sonuç, kuantum yürüyüşün kuadratik olarak daha hızlı olduğunu gösterir. Ayrıca Şekil (2.2) ve (2.3)'ten de görüldüğü gibi yürüyüş, $[-\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}]$ aralığına yayılmıştır. Bu durum da klasik duruma tamamen zıttır. Çünkü klasik durumda dağılım, orjin etrafında bir pik yapar ve üstel olarak düşerek orjinden uzaklaşır.

2.3.2 Sürekli Kuantum Yürüyüş Modeli

Kesikli yürüyüş modeli, kuantum olaylarını rastgele yürüyüşe uygulamanın yollarından biridir. Bir diğer yol ise sürekli zaman modelidir. Bu model, kesikli modelden çok uzak görünmesine rağmen bazı benzer yanları da vardır.

Sürekli kuantum yürüyüşte konum uzayı H_p 'dir. Kesikli kuantum yürüyüşteki gibi bir yönelim uzayına gerek yoktur. Bu modelin temeli, sürekli klasik Markov zincirine dayanır. Bunu, V tepe noktası takımına sahip grafik üzerinde rastgele yürüyüş ile açıklamaya çalışalım. Klasik rastgele yürüyüşte bir adım, M matrisi ile gösterilebilir. $M_{i,j}$ girişleri, yürüyüşün bir adımında parçacığın i 'den j 'ye geçme olasılığını verir. $\vec{p}^t = (p_1^t, p_2^t, \dots, p_{|V|}^t)$, t zamanda V tepe noktası üzerinden olasılık dağılımı ise,

$$p_i^{t+1} = \sum_j M_{i,j} P_j^t \quad (2.3.16)$$

ile verilir. Diğer bir yazım şekliyle,

$$\vec{p}_{t+1} = M\vec{p}_t \quad (2.3.17)$$

şeklinde ifade edilir. Sadece i 'den j 'ye geçme olasılığı sıfırdan farklı olduğunda, $M_{i,j}$

girişleri sıfırdan farklı olur.

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1/d_j, & i \neq j \text{ ve } i \text{ ve } j \text{ bağlı} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.3.18)$$

Bu denklemde d_j , tepe nokası j 'nin derecesini belirtir. İşlem, M 'in iterasyonu ile devam eder ve sadece tamsayı zamanlarda durumları dönüştürür. Yöntemi zamanda sürekli yapmak için geçişlerin her zaman olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda, parçacığın bir tepe noktasından komşusuna atlama oranı γ ile verilir. γ zamandan bağımsız bir sabittir. Yani komşu düğümler arasındaki geçiş, her birim zamanda γ olasılıkla gerçekleşir. Bu yöntem için sonsuz küçük, üretici matris H ,

$$H_{i,j} = \begin{cases} -\gamma, & i \neq j \text{ ve } i \text{ ve } j \text{ bağlı} \\ 0, & i \neq j \text{ ve } i \text{ ve } j \text{ bağlı değil} \\ d_i\gamma, & i = j \end{cases} \quad (2.3.19)$$

şeklinde verilir. Eğer $p_i(t)$, parçacığın t anında, i tepe noktasında bulunma olasılığını gösterirse geçiş, (2.3.16) denklemiyle benzer olur ve aşağıdaki diferansiyel denklemlerle tanımlanır.

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = - \sum_j H_{i,j} p_j(t) \quad (2.3.20)$$

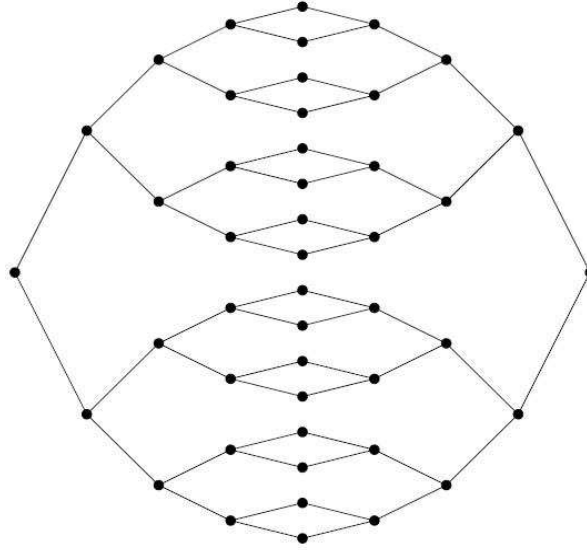
Bu denklemi çözerek, (2.3.17) denkleminin benzeri,

$$\vec{p}(t) = \exp(-Ht)\vec{p}(0) \quad (2.3.21)$$

eşitliğini elde ederiz. Markov zinciri teorisi, kesikli ve sürekli modeller arasında birçok bağlantı sağlar. Birleştirme zamanları (mixing times), soğurma olasılığı gibi büyüklükler, iki modelde de benzer davranışa sahiptir.

Bu yapıyı kuantum durumuna taşımak için Farhi ve Gutman (1998) tarafından bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışmada üretici matris yerine, $U(t)$ evrimini üreten Hamiltonyen kullanılmıştır. Bu durumda (2.3.20) denklemi, aşağıdaki gibi Schrödinger denklemine dönüşür.

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -iH |\psi(t)\rangle \quad (2.3.22)$$



Şekil 2.4 G_4 grafiği.

Bu denklemin çözümü ile zaman evrimi de aşağıdaki forma dönüşür.

$$U(t) = \exp(-iHt) \quad (2.3.23)$$

$|\psi\rangle$ başlangıç durumu ile başlayarak, t zaman için U dönüşümünü uygularsak ve sonuç durumlarının konumunu ölçersek önceki gibi grafiğin tepe noktaları üzerinden bir olasılık dağılımı elde ederiz. Bu tanımlamalar altında, kuantum yürüyüşte grafikler çalışılmıştır (Farhi ve Gutmann, 1998). Childs, Farhi ve Gutmann (2002) tarafından yapılan çalışmada, sonlu bir grafikte bir köşeden diğer köşeye ulaşma zamanının (hitting time) klasik ve kuantum yürüyüşte üstel ayrım gösterdiği bulunmuştur. Böyle bir grafiğe örnek olarak Şekil (2.4)'te 2 tane 4 düzeyli parçadan oluşan G_4 grafiği verilmiştir.

Klasik olarak sürekli yürüyüş, kesikli yürüyüşte zaman adımının uzunluğu sıfıra yaklaştığında oluşan limit durumdur. Fakat kuantum yürüyüş için bu doğru değildir. Eğer kesikli yürüyüşte zaman adımını giderek küçültürsek, 'yönelim' kaydı değişmeden kalır. Bu yüzden limit durum, sürekli yürüyüşü vermez. Bu sonuçtan yola çıkarak, bazı durumlarda kuantum yürüyüşün bir çeşidinin diğerinden daha faydalı olabileceği anlamını çıkarabiliriz. Fakat bütün bilinen örnekler, iki yürüyüşte de benzer davranışlar göstermektedir.

2.4 Kuantum Yürüyüşün Fiziksel Uygulamaları

Kuantum yürüyüşün fiziksel olaylara uygulanması, kuantum bilgisayarları ile yapılabilir. Fakat bu makinaların henüz geniş ölçekli inşa edilememesi, fiziksel uygulamaları kısıtlamaktadır. Bir grafiğin yapısının kullanılabilmesi yada bir paranın karakterinin kullanılabilmesi gibi özellikler kuantum yürüyüşün gerçek fiziksel sistemlere uygulanmasını kolaylaştırmaktadır. Böyle bir uygulama, tam donamlı bir kuantum bilgisayarı oluşturmak için yeterli değildir. Fakat kuantum yürüyüşü çalışmak ve kuantum yürüyüşü temel alarak algoritmik problemler çözmek hala memnun edici sonuçlar vermektedir. Bu nedenle çeşitli fiziksel sistemler için öneriler yapılmaktadır (Dür ve ark. 2002; Sanders, Bartlett, Tragetta ve Knight, 2002; Travaglione ve Milburn, 2002).

Bugün itibarıyla, hangi fiziksel yapının kuantum bilgisayarları inşa etmek için en uygun olduğu belli değildir. Bir kuantum bilgisayarı için kuantum mantık kapılarına ve kubitlere ihtiyacımız olduğunu biliyoruz. Bu da birçok yoldan yapılabilir. Kuantum bilginin bu karşılanabilirliği, nükleer manyetik rezonans sistemleri, optik oyuklar, katıhal uygulamaları, iyon tuzaklarında optik örgüler gibi birçok alanda çalışmaların yapılmasına sebep olmuştur.

Benzer şekilde, kuantum yürüyüş uygulamaları da çok geniştir. Tabii ki yürüyüşün konumlarının, fiziksel uygulamada gerçek konumlar olması gerekli değildir. Konumlar, herhangi bir kesikli serbestlik derecesi içinde kodlanabilir. Aynı şekilde, yönelim uzayının da spin 1/2 parçacığının spinine karşılık gelmesi gerekli değildir. Örneğin, Travaglione ve Milburn (2002) tarafından yapılan çalışmada, kuantum yürüyüşün çizgi üzerinde uygulamasına dayanan bir iyon-tuzak önerilmiştir. Burada bir iyon, radyo frekansında iyon tuzagında hapsedilmiş durumda bulunmaktadır. Tuzak içindeki iyonun $|i\rangle$ konumları, kesikli hareket halindeki durumlarla şifrelenmiştir. İyon, hareketli taban durumu $|0\rangle$ 'da bulunur. İyonun elektronik iç durumları, yönelim durumları $|\uparrow\rangle$ ve $|\downarrow\rangle$ ile kodlanmıştır. Yönelim dönüşümünü sağlamak için Raman ışın atmaları uygulanır.

Bir başka çalışmada (Sanders ve ark., 2002) kuantum yürüyüş, kuantum elektrodinamik makinaların içine uygulanmıştır. Burada fiziksel sistem, bir atomun içinden geçtiği optik bir oyuktur. İçinden geçme sırasında atomun iç elektronik seviyeleri oyuk ile etkileşir. Ayrıca iç atomik düzeyler, mikrodalga atmaları ile idare edilmektedir. Bu çalışmanın amacı, kuantum yürüyüşü günümüz teknolojisi ile mikrodalga oyukta gerçekleştirmektir. Kuantum yürüyüşün konumları, tek oyuk moduna yönelim durumları ise iç atomik durumlara kodlanmıştır. Buradan halka üzerinde yürüyüşe ulaşılmaktadır.

Kuantum yürüyüşün optik örgüde uygulaması, Dür ve ark. (2002) tarafından önerilmiştir. Bu çalışmada, optik örgüde nötr bir atomun tuzaklanması kullanılmıştır ve çalışmanın binlerce adımı günümüz teknolojisinde gerçekleştirilebilmektedir.

Bu çalışmalara ek olarak, Du ve ark. (2003) tarafından yapılan çalışmada, sürekli kuantum yürüyüş 2-kubit, Ryan ve ark. (2005) tarafından yapılan çalışmada ise kesikli kuantum yürüyüş 3-kubit, Nükleer Manyetik Rezonans (NMR) sistemine uygulanmıştır. Grossman ve ark. (2004), Bose-Einstein yoğunlaşmasını ve yakınlarda Perets ve ark. (2008), dalga klavuzunda ilerleyen fotonları kullanarak kesikli kuantum yürüyüş uygulamalarını gerçekleştirmişlerdir. Ayrıca Manouchehri and Wang (2008), kuantum noktaları (quantum dots) kullanarak kuantum yürüyüşün fiziksel uygulamalarını gerçekleştirmişlerdir.

Tek atom ve fotonların deneysel kontrolünde dikkate değer gelişmeler olmasıyla birlikte kuantum yürüyüşün bu ilk uygulamalarının yerini, daha dayanıklı ve kontrol edilebilir uygulamalar almıştır (Schreiber ve ark., 2010; Zähringer ve ark., 2010). Kuantum yürüyüşün üstünlüğü (Shenvi ve ark., 2003), deneysel olarak gösterilmiştir (Lu ve ark., 2010) . Ayrıca son zamanlarda yapılan deneysel çalışmada (Broome ve ark., 2010), soğurucu tuzakların kuantum yürüyüş üzerine etkisi araştırılmıştır.

2.5 Kuantum Yürüyüşte Eş-evresizlik

Eş-evresizlik (decoherence), bir kuantum mekaniği kavramıdır ve eş-evreli (coherent) durumdan sapmayı anlatmak için kullanılmaktadır. Bir kuantum süreci (kuantum sistemi), kuantum eş-evreliliği kaybettiğinde klasik duruma, yani klasik sisteme yaklaşır. Bir kuantum sisteminin klasik limite gitmesinde en önemli etken, kuantum sisteminin çevreyle etkileşmesi (çeşitli fiziksel mekanizmalar, sıcaklık etkileşimi vb.) ya da dışarıdan bir ölçmeye maruz bırakılmasıdır. Bu hallerde sistem, eş-evreli halini kaybeder. Klasik sistem gibi davranır.

Son yıllarda, eş-evresizliğin kuantum yürüyüşlerle modellendiği çeşitli çalışmalar yayınlanmıştır. Özellikle engelleyici veya soğurucu tuzakların bulunduğu örgülerde ya da yansıtıcı veya soğurucu sınır koşullarına sahip geometrilerde yapılan kuantum yürüyüş çalışmalarından, eş-evresizlik davranışı hakkında ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Bu tür mekanizmaların, kuantum yürüyüşlerinde eş-evresizliğe yol açtığı anlaşılmıştır.

Bir kuantum yürüyüşünde kuantumdan klasiğe geçişin sistematik bir değerlendirmesi, Kendon ve Sanders (2004) tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmada, kuantum yürüyüşün hem dalga (tamamıyla kuantum) hem de parçacık dinamiği gösterdiği fakat üniter olmayan kuantum yürüyüş için eş-evresizliğin artması veya azalması nedeniyle bu dinamiğin, iki farklı davranış arasında gidip gelebileceği gösterilmiştir.

Eş-evresizliğe sahip kuantum yürüyüşün algoritmik karşılığı, ilk kez Kendon ve Tregenna (2003) tarafından bir numerik çalışmada ele alınmıştır. Deneysel hataların olası formlarından esinlenen bu çalışmada, ayrıca standart sapmanın Gaussyan yayılımı uygulanarak mükemmel olmayan Hadamard yürüyüşü, bir boyutlu uzayda modellenmiş ve elde edilen sonuçlar, Mackay ve ark. (2002)'nin sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca Shapira ve ark. (2003) tarafından mükemmel olmayan kuantum yürüyüş operasyonları (üniter gürültü), bir boyutta modellenmiş ve detaylı numerik sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmada, Kendon ve Tregenna (2003)'ün elde

ettiği sonuçlarla benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bir boyutlu çalışmaların yanı sıra Alagić ve Russell (2005) yaptıkları çalışmada, eş-evresizlik formalizmini d-boyutlu bir hiperküp için genelleştirmeye çalışmışlardır.

Kuantum yürüyüş ile gerçekleştirilen mükemmel olmayan öteleme (imperfect shift) Dür ve ark. (2002) tarafından çalışılmıştır. Yine benzer bir çalışma, kırık bağcıklara sahip bir boyutlu kesikli kuantum yürüyüşte eş-evresizlik problemi, Romanelli ve ark. (2005) tarafından çalışılmıştır. Konno (2005b) tarafından yapılan çalışmada ise rastgele hareket eden bir kuantum paranın (coin) daha genel durumu, bir boyutlu kesikli kuantum yürüyüş için analitik yaklaşım kullanılarak ele alınmış ve mükemmel olmayan (imperfect) yani eş-evresizliğe yol açan etkilerin varlığı durumunda, kuantum yürüyüşten klasik yürüyüşün elde edilebileceği gösterilmiştir.

Oliveira, Portugal ve Donangelo (2006), iki boyutlu kuantum yürüyüşü kırık bağcıkların bulunduğu iki boyutlu örgüye genelleştirerek, böyle bir uzayın kuantum yürüyüş üzerindeki etkisini analiz etmişler, farklı başlangıç koşulları kullanarak kuantum yürüyüşler için olasılık dağılım fonksiyonları ve difüzyon katsayılarını hesaplamışlardır. Böylece kullandıkları model için Hadamard yürüyüşünün Grover'dan daha dayanıklı, Grover'in da Fourier yürüyüşünden daha dayanıklı olduğunu göstermişlerdir. Eş-evresizlik konusunda detaylı bir çalışma, Kendon (2007) tarafından yayınlanmıştır. Kendon bu çalışmada, eş-evresizlik konusunda yapılan çalışmaları gözden geçirmiştir. Karski ve ark. (2009), bir boyutlu spin-bağlı (spin dependent) optik örgüde eş-evresizliği, kuantum yürüyüşü kullanarak tartışmışlardır. Gönüloğlu, Aydiner ve Müstecaplıoğlu (2009) tarafından yapılan çalışmada, iki boyutlu tuzaklı uzayda Hadamard, Fourier ve Grover kuantum yürüyüşleri incelenmiştir. Bu çalışmada, tuzak yoğunluğunun eş-evresizliği artırdığı bulunmuştur. Ayrıca bir boyutlu tuzaklı uzayda kuantum difüzyon dinamiğinin incelendiği modelde (Gönüloğlu, Aydiner, Shikano ve Müstecaplıoğlu, 2011), kuantum yürüyüşe ait olasılık dağılım fonksiyonlarının yayılma hızlarının, gerilmiş üstel (stretched exponential) karakterde olduğu gösterilmiştir.

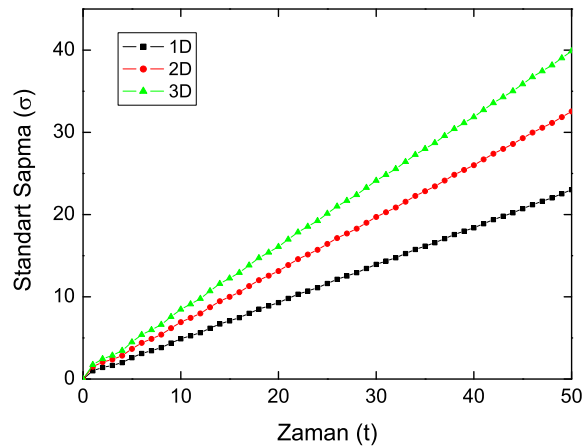
Yukarıda belirttiğimiz gibi eş-evresizlik probleminin anlaşılması hem kuantum algoritmalarının modellenmesinde hem de kuantum difüzyon süreçlerinin

anlaşılmasında büyük önem taşımaktadır. Literatürden de görülebileceği gibi eş-evresizliğin kuantum yürüyüş modelleri, günümüze gelene kadar çok fazla çalışılmamıştır. Bu konu üzerinde çalışmalar, yeni yeni yaygınlaşmaya başlamıştır. Yapılan bu çalışmalarda, çeşitli geometrik mekanizmaların eş-evresizliğe yol açtığı anlaşılmıştır. Yansıtıcı sınır koşulları, optik tuzaklar veya soğurucu tuzaklar, eş-evresizliğe yol açan geometrik yapılara iyi bir örnek oluşturmaktadır. Ancak eş-evresizliğin boyuta bağlılığı henüz anlaşılmamıştır.

Eş-evresizliğin nicel ölçümü, standart sapmanın zamanla değişimi incelenerek bulunabilir. Eş-evresizlik parametresi p , sıfır değerini aldığı anda, ideal kuantum yürüyüş gerçekleşir. Bu durumda kuantum yürüyüş için standart sapma, $\sigma_q \sim t$ şeklinde değişir. Eş-evresizlik parametresi p 'nin değeri arttıkça, standart sapmanın eğimi azalır ve sonunda belirli bir p değeri için klasik rastgele yürüyüşün standart sapmasına ($\sigma_q \sim t^{1/2}$) ulaşılır. Bir, iki ve üç boyutta başlangıç durumları sırasıyla $|1\rangle|0\rangle$, $|11\rangle|00\rangle$, $|111\rangle|000\rangle$ olan Hadamard yürüyüşü için sistemde eş-evresizlik yokken ($p = 0$) standart sapmaların zamanla değişimi Şekil (2.5)'deki gibidir. Üç boyut içinde değişim zamanla lineer olarak artar. Fakat eğimleri farklıdır. Eğimler,

$$\left(\frac{\Delta\sigma_1}{\Delta t}, \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta t}, \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta t}\right) = \left(\frac{\Delta\sigma_1}{\Delta t}, \sqrt{2}\frac{\Delta\sigma_1}{\Delta t}, \sqrt{3}\frac{\Delta\sigma_1}{\Delta t}\right) \quad (2.5.1)$$

şeklinde değişir (Mackay ve ark., 2002).



Şekil 2.5 Hadamard yürüyüşü için bir, iki ve üç boyutta standart sapmanın zamanla değişimi.

BÖLÜM ÜÇ

İKİ BOYUTLU TUZAKLI ÖRGÜDE KUANTUM YÜRÜYÜŞTE EŞ-EVRESİZLİK

3.1 Giriş

Kuantum yürüyüşte, eş-evresizliğe neden olabilecek durumları ve bunların etkilerini anlamak oldukça önemlidir. Çünkü fiziksel uygulamalarda bu tür durumlar sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca bir boyuttan daha yüksek boyutlarda çalışmak da önemlidir. İki boyutta, bir boyuttan farklı davranışlar elde edilebilmektedir (Oliveira ve ark., 2006). Bunun yanında iki ve daha yüksek boyutlarda yapılan çalışmalar, gerçek sistemlere daha yakın olacaktır.

Soğurucu tuzaklar, eş-evresizliğe neden olan mekanizmalardan birisidir. Çünkü tuzaklar, kuantum yürüyücünün yayılma doğrultusu boyunca belirli yerlerde soğurulmasını sağlayarak üniter olmayan yürüyüş meydana getirirler. Bu da eş evreli kuantum yürüyüşü bozar ve eş-evresizliğe neden olur. Bu olay, optik realizasyonlarda fotonun soğurulması ya da iyon-tuzak yapılarında atom ya da iyonun termal dalgalanmalarla ya da çarpışmalarla kaybı gibi fiziksel durumlara karşılık gelir. Kuantum yürüyüşte eş-evresizliği incelemek için önerdiğimiz bu modelde (Gönüloğlu, Aydın ve Müstecaplıoğlu, 2009), tuzakların rastgele (random) fakat düzgün (uniform) olarak dağıldığı iki boyutlu örgüde kuantum yürüyüş ele alınmıştır. Kuantum Hadamard, Fourier ve Grover yürüyüşlerindeki eş-evresizlik, farklı tuzak yoğunlukları için ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca bu yürüyüşlerde ortaya çıkan ve nicel olarak ölçülebilen eş-evresizlikler karşılaştırılmıştır.

3.2 İki Boyutta Kuantum Yürüyüş

İki boyutlu örgüde kesikli kuantum yürüyüş yapan yürüyücünün, t anındaki durumu,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j,k=0}^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{j,k;m,n}(t) |j, k\rangle |m, n\rangle \quad (3.2.1)$$

şeklinde verilir. Bu tür bir yürüyüşün bir adımı, $U = S(C \otimes I_4)$ operatörü ile gerçekleşir. C , Coin (kuantum para) operatörüdür ve

$$C = \sum_{j,k=0}^1 \sum_{j',k'=0}^1 C_{j,k;j',k'} |j, k\rangle \langle j', k'| \quad (3.2.2)$$

ifadesiyle verilir. Burada Coin operatörü yerine kullanılan operatörler Hadamard, Fourier ve Grover operatörleridir. Ayrıca I_4 , 4×4 birim matris S , öteleme (translational) operatörüdür ve aşağıdaki gibi verilir.

$$S |j, k\rangle |m, n\rangle = |j, k\rangle |m + (-1)^j, n + (-1)^k\rangle \quad (3.2.3)$$

Zaman evrim operatörü U , denklem (3.2.1)'de verilen kuantum durumuna, herhangi bir t anında uygulandığında, bu kuantum durumunun $t + 1$ anında, (m, n) konumunda bulunma olasılığına ait genlik, zamanın fonksiyonu olacak şekilde,

$$A_{j,k;m,n}(t+1) = \sum_{j',k'=0}^1 C_{j,k;j',k'} A_{j',k';m-(-1)^j, n-(-1)^k}(t) \quad (3.2.4)$$

şeklinde verilir. Öte yandan bir kuantum yürüyücünün, her hangi bir t anında, (m, n) konumunda bulunma olasılığı ise,

$$P_{m,n}(t) = \sum_{j,k=0}^1 |A_{j,k;m,n}(t)|^2 \quad (3.2.5)$$

ifadesiyle verilir.

Denklem (3.2.2) ile tanımladığımız Coin operatörleri, Hadamard, Fourier ve Grover

operatörleri, iki boyutlu yürüyüş için aşağıdaki gibi verilir.

$$C_H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

$$C_F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \quad (3.2.7)$$

$$C_G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2.8)$$

Coin operatörleri yürüyüşün gerçekleştiği uzay boyutuna bağlıdır. Bu nedenle her boyut için Coin operatörlerini yeniden yazmak gereklidir. Öte yandan bir kuantum yürüyüş söz konusu olduğunda, klasik rastgele yürüyüşten farklı olarak kuantum durumunun başlangıç durumu çok önemlidir. Kuantum durumları, klasik parçacık gibi davranmazlar. Bu nedenle kuantum Hadamard, Fourier ve Grover yürüyüşleri için başlangıç durumlarının seçimi önemlidir.

3.3 Model ve Hesaplamalar

Bu modelde tuzaklar, rastgele fakat düzgün dağılım oluşturacak şekilde iki boyutlu örgüye yerleştirilir. Tuzakların konumları, bir kuantum yürüyüşün gerçekleştirilme süresince değişmeden kalır. Modelde bir kuantum yürüyücü, $t = 0$ anında ($m = 0, n = 0$) konumundan yürüyüşe başlar ve bu yürüyüş için her zaman adımında U dönüşümü gerçekleştirir. İlgili kuantum yürüyüş gerçekleştirildiğinde, kuantum durumları örgü üzerinde örgü noktalarını ziyaret edecek şekilde yayılmış olurlar. Bazı kuantum durumları, örgü noktalarını ziyaret edecek şekilde ilerlerler.

Fakat tuzakla karşılaşan durumlar, tuzak tarafından soğurularak ortadan kaldırılırlar. Kuantum durumlarının her bir örgü noktasında bulunma olasılıkları ve olasılık genlikleri farklıdır. Birbirleriyle bir örgü noktasında karşılaşan durumlar üst-üste binerken, tuzak ile karşılaşan durumlar ise soğurularak, yok olurlar. Dolayısıyla her bir örgü noktasında bir kuantum durumunun bulunma olasılığı ve olasılık genlikleri zamanla değişir. Her adım sonunda kuantum durumuna ait yeni genlikler, (3.2.4) denklemi ile bulunur. Kuantum yürüyücü tuzak ile karşılaştığında, tuzak noktasında (konumunda) kuantum durumunun bulunma olasılığı ve bu olasılığa ait genlik değeri sıfır olur. Öte yandan yürüyücünün, t anında, (m, n) konumunda bulunma olasılığı, (3.2.5) denklemindeki ifade yardımıyla bulunur.

Kuantum Hadamard, Fourier ve Grover yürüyüşleri için başlangıç durumlarının seçimi önemlidir. Bu seçimlerin sayısı sınırlıdır. Örneğin Tregenna ve ark. (2003), bu yürüyüşler için başlangıç durumlarını, örgü üzerinde maksimum yayılım gerçekleştirecek şekilde;

$$|\psi(0)\rangle_H = \frac{1}{2}(|00\rangle + i|01\rangle - i|10\rangle + |11\rangle) |0, 0\rangle \quad (3.3.1)$$

$$|\psi(0)\rangle_F = \frac{1}{2}(|00\rangle + \frac{1-i}{\sqrt{2}}|01\rangle + |10\rangle - \frac{1-i}{\sqrt{2}}|11\rangle) |0, 0\rangle \quad (3.3.2)$$

$$|\psi(0)\rangle_G = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |0, 0\rangle \quad (3.3.3)$$

şeklinde seçmişlerdir. Bu çalışmada da kuantum durumları, denklem (3.3.1), (3.3.2) ve (3.3.3)'deki gibi seçilmiştir.

Bu çalışmada soğurucu tuzaklar, Fortran dilinde bir program yardımıyla kesikli örgü uzayına (discrete lattice space) rastgele dağılım gösterecek şekilde yerleştirilmiştir. Bunun için bir Monte Carlo sayı üretici kullanılmıştır. Diğer ilgili bağıntılar da bu program yardımıyla numerik olarak hesaplanmıştır.

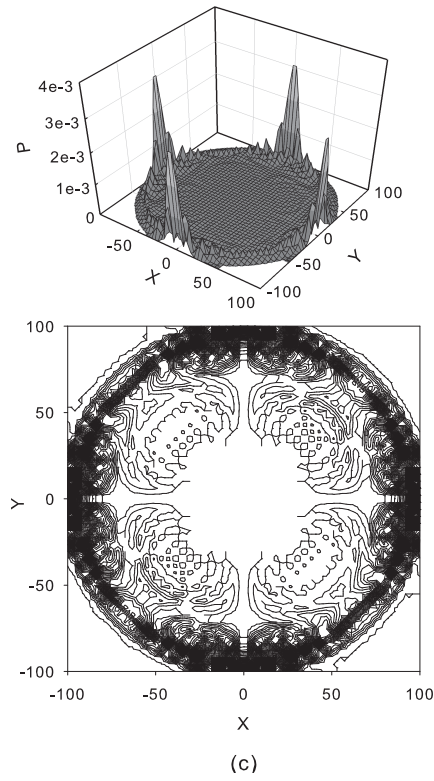
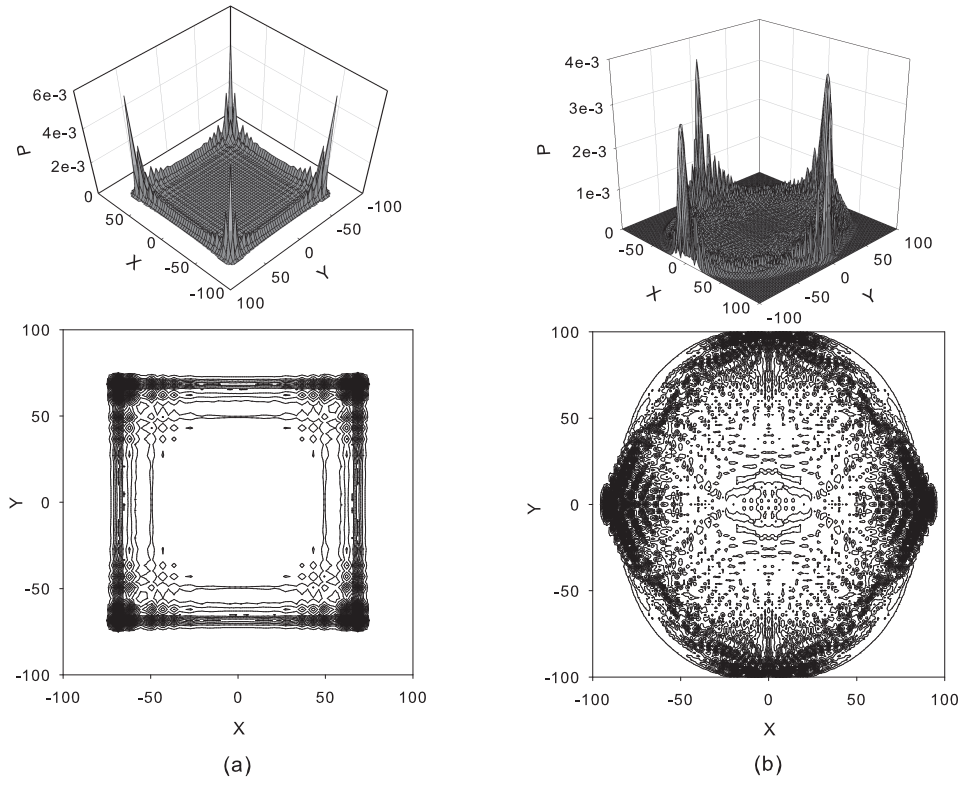
3.4 Sonuçlar ve Tartışma

Soğurucu tuzakların bulunmadığı iki boyutlu kesikli uzayda, denklem (3.3.1), (3.3.2) ve (3.3.3)'te verilen başlangıç koşulları kullanılarak kuantum yürüyüşler gerçekleştirildiğinde, $t = 40$ adım sonra elde edilen olasılık dağılımları, hem yüzey hem de kontür çizimleri olarak Şekil (3.1(a)), (3.1(b)) ve (3.1(c))'de verilmiştir. Şekillerden görülebileceği gibi seçilen başlangıç kuantum durumları, simetrik dağılımlar üretmektedir.

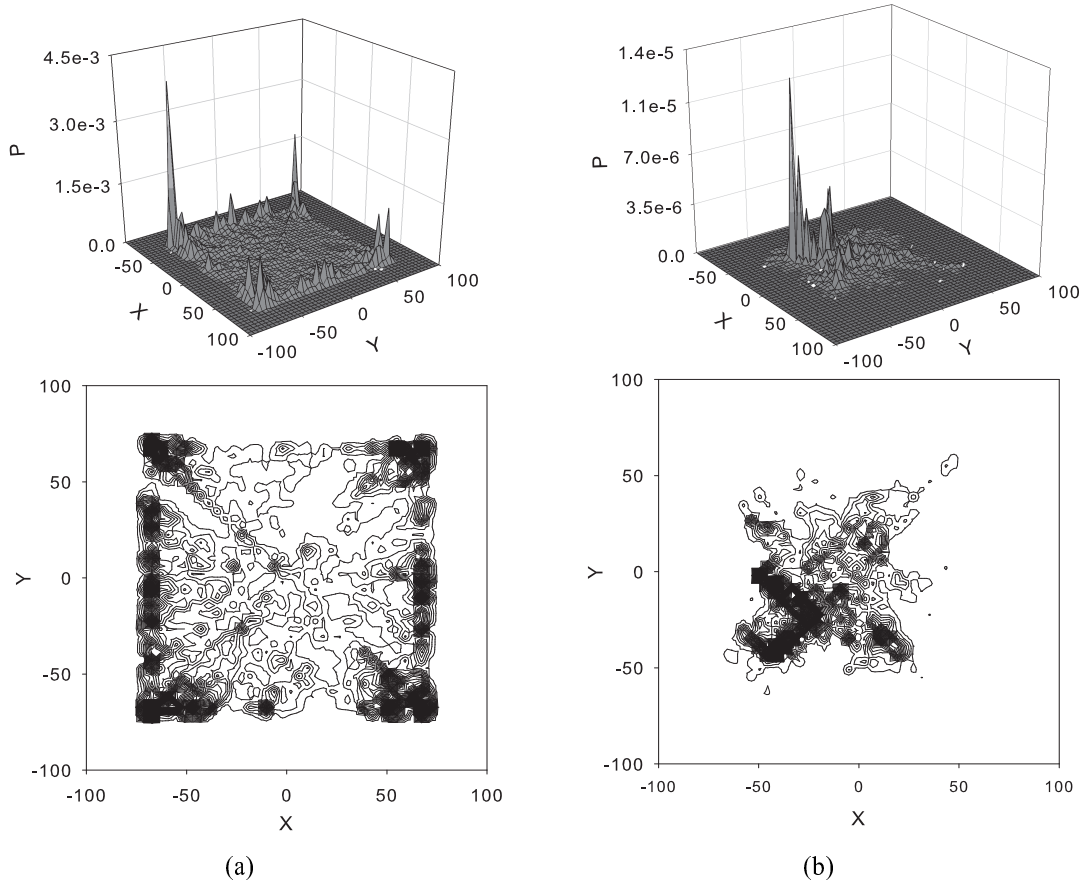
İlk olarak Hadamard yürüyüşünün olasılık dağılımı, farklı tuzak yoğunlukları için incelenmiştir. Tuzak yoğunluğu, $p = 0.01$ ve $p = 0.1$ olacak şekilde seçilmiş ve denklem (4.3.1) ile verilen başlangıç durumu için Hadamard yürüyüşü gerçekleştirilmiştir. Zaman adımı $t = 100$ olduğunda, bu yürüyüşe ait dağılım fonksiyonları çizdirilmiştir. Şekil (3.2(a))'da $p = 0.01$ iken kuantum davranışı oldukça baskındır. Fakat $p = 0.1$ iken Şekil (3.2(b))'de görülebileceği gibi klasik davranış baskın hale gelir.

Bu türden olasılık dağılımları, kuantum yürüyüşte ortaya çıkan eş-evresizlik konusunda sağlıklı bilgi vermezler. Oysa standart sapmanın zamanla değişimi, tuzak yoğunluklarına bağlı olarak ortaya çıkan eş-evresizliği anlamamıza yardım eder. Bu nedenle Şekil (3.3)'te Hadamard yürüyüşüne ait standart sapma, farklı tuzak yoğunlukları için $\log - \log$ skalasında çizdirilmiştir. Bu grafikte, $p = 0$ için çizilen standart sapma eğrisi, örgü uzayında hiçbir soğurucu tuzağın olmadığı durumu göstermektedir. Tuzak yoğunluğu arttıkça, kuantum yürüyüşteki lineer artışın kaybolduğu ve klasiğe yaklaştığı görülür. Bu grafik içinde, klasik rastgele yürüyüşe ait standart sapma eğrisi de verilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi tuzak yoğunluğu arttıkça, standart sapma eğrileri klasik rastgele yürüyüşe ait eğriye doğru yaklaşmaktadır.

Örgüde hiç tuzak yokken ($p = 0$) kuantum yürüyüş, maksimum yayılıma sahiptir. Tuzak yokken iki boyutlu örgü uzayının $(0,0)$ noktasından harekete başlayan kuantum durumuna ait standart sapmanın zamanla değişimi, $\sigma_q \sim t$ şeklindedir. Buna

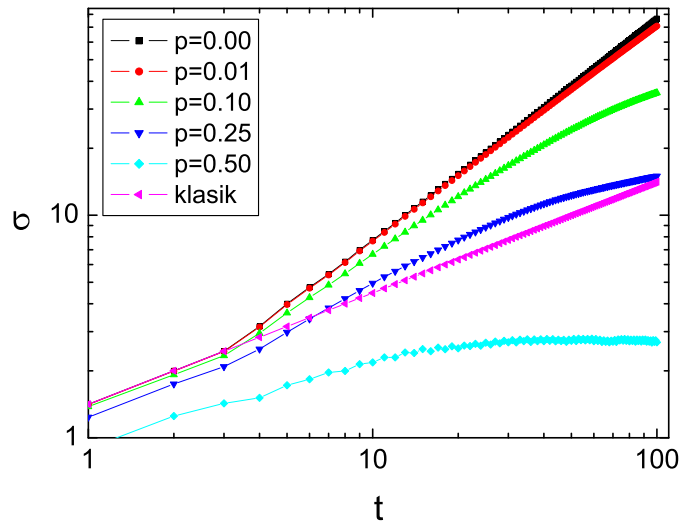


Şekil 3.1 $t = 100$ zaman adımı sonunda, a) Hadamard yürüyüşü, b) Fourier yürüyüşü, c) Grover yürüyüşü için olasılık dağılımı.



Şekil 3.2 a) $p = 0.01$, b) $p = 0.1$ tuzak yoğunlukları için $t = 100$ zaman adımı sonunda Hadamard yürüyüşüne ait olasılık dağılımları.

karşılık tuzaksız uzayda gerçekleşen klasik rastgele yürüyüşün standart sapması, $\sigma_{cl} \sim \sqrt{t}$ şeklinde değişmektedir. Fakat örgü uzayına yerleştirilen tuzakların yoğunluğu artırıldığında, her bir yoğunluk değeri için elde edilen standart sapma ifadelerinin, tuzak yoğunluğunun artışına bağlı değiştiği görülebilir. Örneğin, düşük tuzak yoğunluğu için yayılımların halen klasik yayılımdan hızlı olduğu söyleyenebilir. Gerçekten de düşük tuzak yoğunlukları için Hadamard yürüyüşüne ait σ_q standart sapması, klasik rastgele yürüyüşe ait σ_{cl} standart sapma değerinden daha büyüktür. Bu sonuç, tuzaklı örgü uzayında gerçekleştirilen Hadamard yürüyüşünün, tuzaksız uzayda gerçekleştirilen klasik rastgele yürüyüşten daha hızlı yayılacağına işaret eder. Fakat tuzak yoğunluğunun belli bir değerinden sonra kuantum yürüyüşün yayılma hızı, klasik yürüyüşün hızı ile aynı olabilir ve hatta ondan daha küçük bir değer de alabilir. Örneğin bu çalışmada, tuzak yoğunluğunun $p > 0.5$ değerinden sonra, Hadamard yürüyüşüne ait standart sapma eğrisinin, klasik rastgele yürüyüşe ait

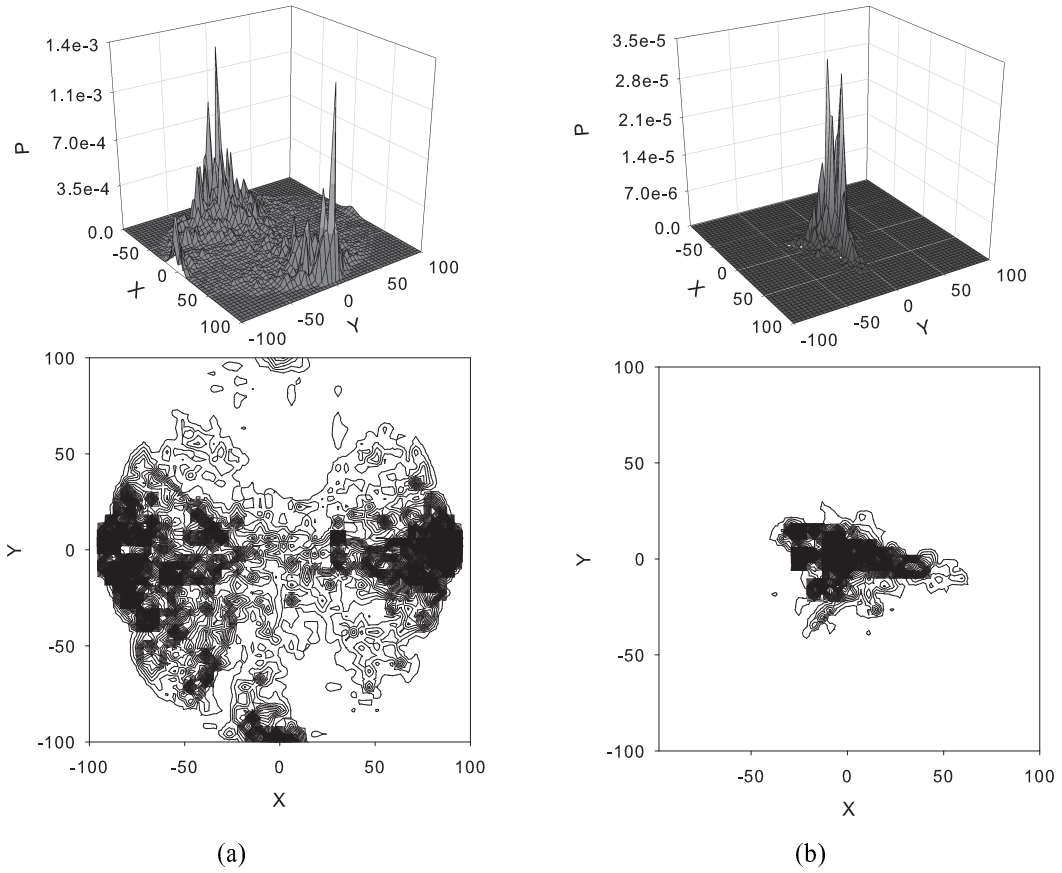


Şekil 3.3 $p = 0, p = 0.01, p = 0.1, p = 0.25, p = 0.5$ tuzak yoğunlukları için Hadamard yürüyüşüne ve klasik rastgele yürüyüşe ait standart sapma fonksiyonlarının zamanla değişimi.

standart sapma eğrisinin altına düşütüğü görülebilir. Bu sonuç bize, belli bir tuzak yoğunluğu değerinin üstünde kuantum yürüyüşlerin yayılma hızlarının, klasik rastgele yürüyüşlerden daha yavaş olacağını söyler.

Elde ettiğimiz bu sonuca bakarak şunu söyleyebiliriz: İki boyutlu tuzaklı uzayda gerçekleştirilen Hadamard yürüyüşünde σ_q standart sapmasının, tuzak yoğunluğunun artmasına bağlı olarak azalarak σ_{cl} 'ye gitmesi, kuantum yürüyüşte bir eş-evresizliğin ortaya çıktığına işaret eder. Tuzak yoğunluğu arttıkça, kuantum yürüyüşteki eş-evresizlik, nicel olarak artmaktadır. Kuantum yürüyüşte ortaya çıkan eş-evresizlik, kuantum durumunun çevresiyle (burada tuzaklar) etkileşmesi sonucunda klasik duruma gitmesi şeklinde yorumlanabilir. Bu modelde soğurucu tuzaklar, Hadamard yürüyüşünde eş-evresizliğe yol açmaktadır. Fakat tuzak yoğunluğunun belli bir kritik değerine kadar Hadamard yürüyüşünün hala klasik rastgele yürüyüşten daha hızlı olduğu görülmektedir.

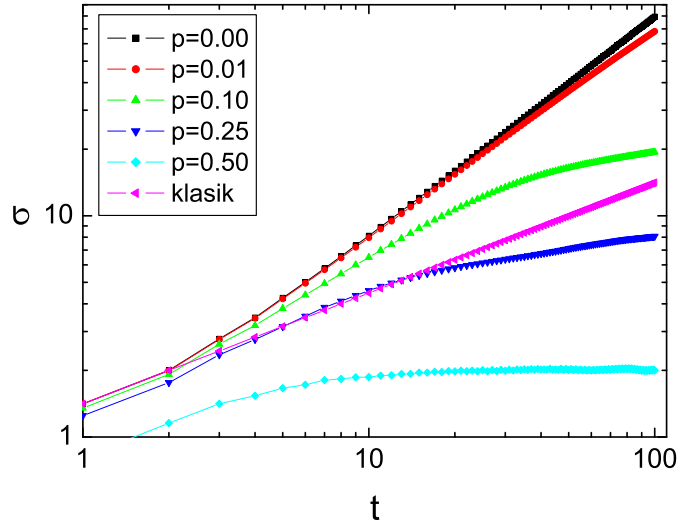
Kuantum bilgisayarlarında kullanılacak kuantum algoritmalarının bir matematiksel modeli olarak kabul edilen kuantum yürüyüş, her zaman eş-evresizliğe maruz kalmaya açıktır. Bu çalışmada, Hadamard yürüyüşünün tuzaklı bir uzayda nasıl davranacağı



Şekil 3.4 a) $p = 0.01$, b) $p = 0.1$ tuzak yoğunlukları için $t = 100$ zaman adımı sonunda Fourier yürüyüşüne ait olasılık dağılımları.

incelenmiştir. Öyle görünüyor ki, eş-evresizliğe neden olacak soğurucu tuzakların varlığı durumunda bile Hadamard yürüyüşü, kuantum algoritmalarının realizasyonu için halen önemli adaylardan birisidir.

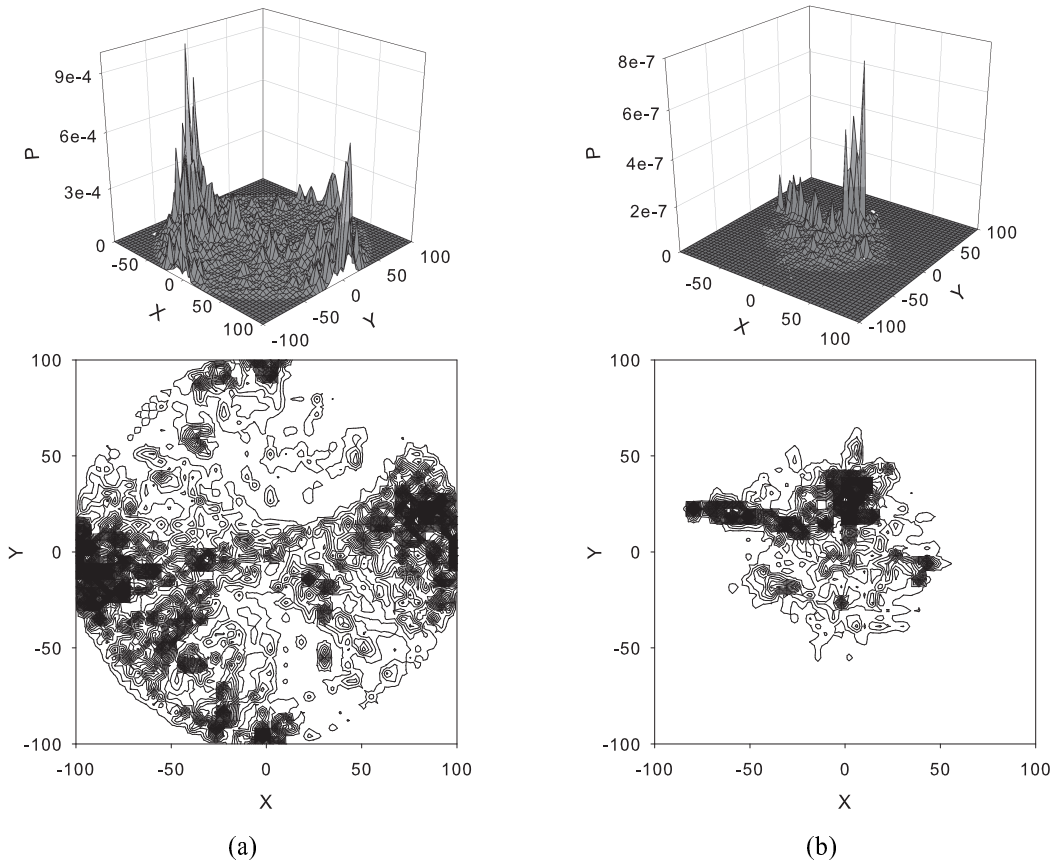
Hadamard yürüyüşünden sonra aynı model kullanılarak Fourier ve Grover yürüyüşlerinde ortaya çıkan eş-evresizlikler incelenmiştir. Tuzak yoğunluğu, $p = 0.01$ ve $p = 0.1$ olacak şekilde seçilmiş ve başlangıç durumu denklem (3.3.2) ile verilen kuantum durumu için kuantum Fourier yürüyüşü gerçekleştirilmiştir. Zaman adımı $t = 100$ olduğunda, bu yürüyüşe ait olasılık dağılım fonksiyonları çizdirilmiştir. Hadamard yürüyüşüne benzer şekilde, Şekil (3.4(a))'da $p = 0.01$ iken kuantum davranışı oldukça baskındır. Fakat $p = 0.1$ iken Şekil (3.4(b))'de görülebileceği gibi klasik davranış baskın hale gelir. Fakat bu yürüyüşte ortaya çıkan eş-evresizliği anlamak için standart sapma fonksiyonuna ihtiyaç vardır.



Şekil 3.5 $p = 0, p = 0.01, p = 0.1, p = 0.25, p = 0.5$ tuzak yoğunlukları için Fourier yürüyüşüne ve klasik rastgele yürüyüşe ait standart sapma fonksiyonlarının zamanla değişimi.

Şekil (3.5)'te Fourier yürüyüşü için farklı tuzak yoğunluklarında standart sapmanın zamanla değişimi görülmektedir. Hadamard yürüyüşünde olduğu gibi Fourier yürüyüşünde de tuzak yoğunluğu arttıkça, eş-evresizliğin arttığı ve kuantum yürüyüşün klasik yürüyüşe doğru kaydığı görülmektedir. Düşük tuzak yoğunlukları için Fourier yürüyüşünün yayılma hızı, tuzaksız uzayda gerçekleştirilen Fourier yürüyüşünün hızına yakın olmakla birlikte, tuzak yoğunluğu artırıldığında, Fourier yürüyüşünün aynı tuzak yoğunluğu için Hadamard yürüyüşünden daha çabuk bir şekilde klasik rastgele yürüyüş limitine yaklaştığı söylenebilir. Bunu, Şekil (3.3) ile Şekil (3.5)'te verilen standart sapma eğrilerini karşılaştırarak görmek mümkündür.

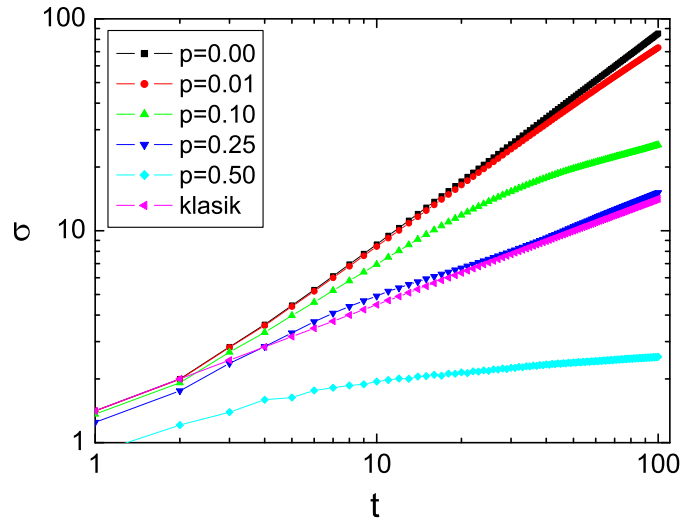
Bu bölümde son olarak, tuzaklı uzayda Grover yürüyüşü ele alınmış ve bu yürüyüşte ortaya çıkan eş-evresizlik incelenmiştir. Burada da yine tuzak yoğunluğu, $p = 0.01$ ve $p = 0.1$ olacak şekilde seçilmiş ve başlangıç durumu denklem (3.3.3) ile verilen kuantum durumu için kuantum Grover yürüyüşü gerçekleştirilmiştir. Zaman adımı $t = 100$ olduğunda, bu yürüyüşe ait dağılım fonksiyonları çizdirilmiştir. Hadamard ve Fourier yürüyüşüne benzer şekilde, Şekil (3.6(a))'da $p = 0.01$ iken kuantum davranışı oldukça baskındır. Fakat $p = 0.1$ iken (3.6(b))'de görülebileceği gibi klasik davranış baskın olur. Diğer yürüyüşlerde olduğu gibi bu yürüyüşte ortaya çıkan eş-evresizliği



Şekil 3.6 a) $p = 0.01$, b) $p = 0.1$ tuzak yoğunlukları için $t = 100$ zaman adımı sonunda Grover yürüyüşüne ait olasılık dağılımları.

anlamak için de standart sapma fonksiyonuna ihtiyaç vardır.

Şekil (3.7)'de Grover yürüyüşü için farklı tuzak yoğunluklarına bağlı olarak standart sapmanın zamanla değişimi görülmektedir. Hadamard ve Fourier yürüyüşlerinde olduğu gibi Grover yürüyüşünde de tuzak yoğunluğu arttıkça, eş-evresizliğin arttığı ve kuantum yürüyüşün klasik yürüyüşe doğru kaydığı görülmektedir. Düşük tuzak yoğunlukları için Grover yürüyüşünün yayılma hızı, tuzaksız uzayda gerçekleştirilen Grover yürüyüşünün hızına yakın olmakla birlikte, tuzak yoğunluğu artırıldığında Grover yürüyüşü, tıpkı Fourier yürüyüşü gibi aynı tuzak yoğunluğu için Hadamard yürüyüşünden daha çabuk bir şekilde klasik rastgele yürüyüş limitine yaklaşmaktadır. Bu sonucu, Şekil (3.3), (3.5) ve (3.7)'de verilen standart sapma eğrilerini karşılaştırarak görmek mümkündür.



Şekil 3.7 $p = 0, p = 0.01, p = 0.1, p = 0.25, p = 0.5$ tuzak yoğunlukları için Grover yürüyüşüne ve klasik rastgele yürüyüşe ait standart sapma fonksiyonlarının zamanla değişimi.

Bu çalışmada, üç farklı kuantum yürüyüş ele alınmış ve bu yürüyüşler iki boyutlu tuzaklı örgü uzayında gerçekleştirilmiştir. Kuantum yürüyücü, tuzakla karşılaştığında ortadan kaldırılmıştır. Böyle bir mekanizmanın varlığı altında, kuantum yürüyüşün halen kuantum yürüyüş olarak kalıp kalmayacağı incelenmiştir. Düşük tuzak yoğunlukları için üç kuantum yürüyüşün de bozulmadığı yani bu yürüyüşlerdeki eş-evreli (coherence) durumun kaybolmadığı fakat tuzak yoğunluğunun artırıldığı durumlarda, bu yürüyüşlerde eş-evresizliğin ortaya çıktığı bu nedenle kuantum yürüyücünün yayılma hızının, tuzak yoğunluğuna bağlı olarak değiştiği görülmüştür. Eş-evresizlik arttığında, kuantum durumunun yayılma hızının, klasik rastgele yürüyücünün yayılma hızına doğru gittiği gözlenmiştir. Öte yandan aynı tuzak yoğunluğu değeri için daha düşük değerli eş-evresizliğe sahip olduğu için bu kuantum yürüyüşler arasında en dayanıklı yürüyüşün, Hadamard yürüyüşü olduğu görülmüştür.

BÖLÜM DÖRT

ÜÇ BOYUTLU TUZAKLI ÖRGÜDE KUANTUM YÜRÜYÜŞTE EŞ-EVRESİZLİK

4.1 Giriş

Bu çalışma, bir önceki çalışmanın devamı niteliğindedir. Önceki çalışmada, soğurucu tuzakların kuantum yürüyüş için iyi bir eş-evresizlik kaynağı olduğu ve eş-evresizliğe en dayanıklı kuantum yürüyüşünün Hadamard yürüyüşü olduğu bulunmuştur. Ancak eş-evresizliğin kuantum yürüyüşün gerçekleştiği uzay boyutu ile ilişkisi, henüz ele alınmamıştır. Bu nedenle bu çalışmada, örgü uzayına rastgele olarak yerleştirilen soğurucu tuzakların kuantum Hadamard yürüyüşünde yol açtığı eş-evresizliği ve eş-evresizliğin boyuta bağlılığı ele alınmıştır. Böylece üç boyutlu kuantum Hadamard yürüyüşünde ortaya çıkan eş-evresizlik, farklı tuzak yoğunlukları için nicel olarak analiz edilmiş ve ayrıca eş-evresizliğin uzay boyutuna bağlı olarak değiştiği gösterilmiştir.

4.2 Üç Boyutta Kuantum Yürüyüş

Kesikli bir Hilbert uzayında tanımlanan herhangi bir kuantum durumunun Hilbert uzayında tasvir edilen yürüyüşü, $\mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_P$ ile gösterilir. \mathcal{H}_C yönelim uzayı, \mathcal{H}_P konum uzayıdır. Üç boyutlu örgüde kesikli kuantum yürüyüş yapan yürüyücünün t anındaki durumu, iki boyutta verilen ifadeye benzer şekilde,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i,j,k=0}^1 \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} A_{i,j,k;l,m,n}(t) |i, j, k\rangle |l, m, n\rangle \quad (4.2.1)$$

bağıntısı ile verilir. Bu ifade içinde yer alan $A_{i,j,k;l,m,n}$, olasılık genliği olarak tanımlanır. Genlik fonksiyonu, reel ya da kompleks sayı olabilir ve bu fonksiyon, $\sum_{i,j,k} |A_{i,j,k;l,m,n}|^2 = 1$ denklemini sağlar. Durum vektörü $\{|l, m, n\rangle, l, m, n, \text{tamsayı}\}$ olmak üzere, örgü üzerinde yürüyücünün Hilbert uzayındaki konumunu belirtir. $|i, j, k\rangle$ vektörleri ise $\{|i, j, k\rangle, i, j, k \in \{0, 1\}\}$ olmak üzere parçacığın yönelimini belirtir.

Kuantum yürüyüşün zaman evrimi,

$$|\psi(t+1)\rangle = U |\psi(t)\rangle \quad (4.2.2)$$

ile gösterilir. Yürüyüşün bir adımı, $U = S(C \otimes I)$ operatörü ile gerçekleşir. U , kuantum yürüyüşü gerçekleştirecek olan zaman evrim operatörüdür. Bilindiği gibi C , kuantum para olarak tanımladığımız Coin operatörüdür. Öte yandan I , birim matris S ise öteleme operatörüdür. Üç boyutlu örgü uzayında gerçekleşen kuantum yürüyüşü için Coin operatörü,

$$C = \sum_{i,j,k=0}^1 \sum_{i',j',k'=0}^1 C_{i,j,k} |i, j, k\rangle \langle i', j', k'| \quad (4.2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu çalışmada, kuantum Hadamard yürüyüşünde eş-evresizlik incelendiği için Hadamard operatörünü tanımlamak gerekmektedir. Üç boyutlu uzayda gerçekleşecek kuantum Hadamard yürüyüşü için Hadamard operatörü,

$$C_H = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

matrisi ile tanımlanır. Bunun dışında gerekli olan öteleme operatörü S ise,

$$S |i, j, k\rangle |l, m, n\rangle = |l + (-1)^i, m + (-1)^j, n + (-1)^k\rangle \quad (4.2.5)$$

ifadesiyle verilir. Bu operatörler tanımlandıktan sonra kuantum yürüyüşü, U operatörü yardımıyla gerçekleştirmek mümkündür.

Zaman evrim operatörü U , denklem (4.2.1)'de verilen kuantum durumuna, herhangi bir t anında uygulandığında, bu kuantum durumunun, $t+1$ anında, herhangi bir (l, m, n) konumunda bulunma olasılığına ait genlik, zamanın fonksiyonu olacak şekilde,

$$A_{i,j,k;l,m,n}(t+1) = \sum_{i',j',k'=0}^1 C_{i,j,k;i',j',k'} A_{i',j',k';l-(-1)^i,m-(-1)^j,n-(-1)^k}(t) \quad (4.2.6)$$

biçiminde verilir. Öte yandan aynı kuantum durumunun, yani yürüyücünün, herhangi bir t anında, her hangi bir (l, m, n) konumunda bulunma olasılığı,

$$P_{l,m,n}(t) = \sum_{i,j,k=0}^1 |A_{i,j,k;l,m,n}(t)|^2 \quad (4.2.7)$$

ifadesiyle belirlenir.

4.3 Model ve Hesaplamalar

Önerilen model, bir önceki çalışmada önerilen modelin aynısı fakat üç boyutlusudur. Bu modelde de tuzaklar, tam soğurucu bir karaktere sahiptir. Yani herhangi bir kuantum durumu bir tuzağa girerse, bu kuantum durumunun soğurularak tamamıyla ortadan kalktığı varsayılır. Modelde, Hadamard Coin operatörü kullanılmıştır. Hadamard Coin operatörü için Hadamard yürüyüşü yapacak olan kuantum durum vektörü,

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(|000\rangle + i|001\rangle + i|010\rangle - |011\rangle - i|100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + i|111\rangle) \quad (4.3.1)$$

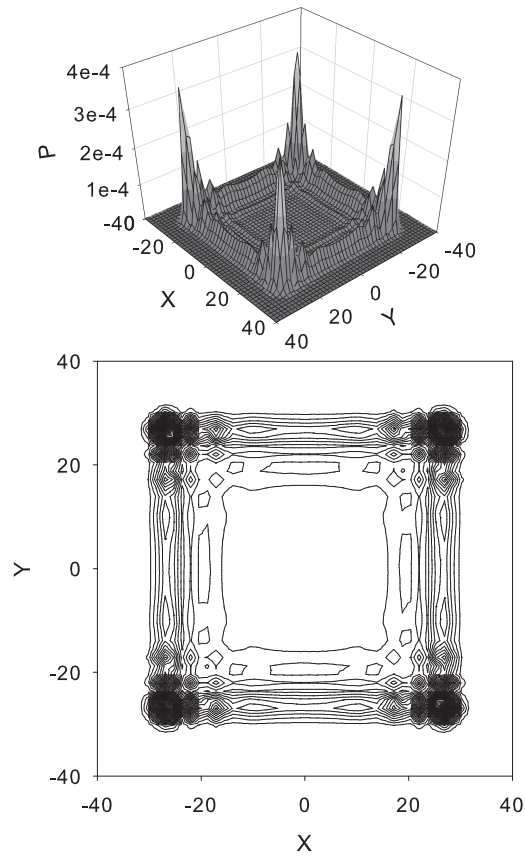
şeklinde seçilmiştir. Fakat bir kuantum durumunu temsil eden başka olası permütsayonlar da tercih edilebilir. Bu modelde, $t = 0$ anında örgü uzayının ($l = 0, m = 0, n = 0$) koordinat noktasında bulunan bir kuantum yürüyücü, bulunduğu konumu terk eder ve her zaman adımında, tuzaklı örgü uzayı içerisinde kuantum yürüyüş gerçekleştirecek şekilde hareket eder. Üç boyutlu örgü uzayında hareket eden kuantum yürüyücünün, her zaman adımındaki hareketi, U zaman evrim operatörü ile belirlenir. Öte yandan bu yürüyücünün, her hangi bir t anında, (l, m, n) konumunda bulunma olasılığı da (4.2.7) denklemi yardımıyla bulunur.

Bu yürüyüşte ortaya çıkan eş-evresizliğin nicel ölçüsü ise iki boyutlu çalışmada olduğu gibi yürüyüşe ait standart sapma yardımıyla belirlenebilir. Ayrıca standart sapmanın eğimi incelenerek, eş-evresizliğin boyuta bağlılığı ortaya çıkarılabilir.

4.4 Sonuçlar ve Tartışmalar

Soğurucu tuzakların bulunmadığı, üç boyutlu kesikli uzayda gerçekleşen kuantum Hadamard yürüyüşüne ait olasılık dağılımının, $t = 40$ adım sonraki XY düzlemi üzerindeki projeksiyonu, hem yüzey hem de kontür çizimleri olarak Şekil (4.1)'de verilmiştir. Olasılık dağılım fonksiyonun diğer düzlemlerdeki projeksiyonları da çizilebilirdi. Fakat diğer projeksiyonlar da XY düzlemindekine benzer biçimde olacaktır. Üç boyutlu örgü uzayındaki Hadamard yürüyüşünün XY düzlemindeki projeksiyonu ile iki boyutlu örgü uzayındaki Hadamard yürüyüşüne ait olasılık dağılımlarının genel formlarının birbirine ne ölçüde benzediğini görmek mümkündür.

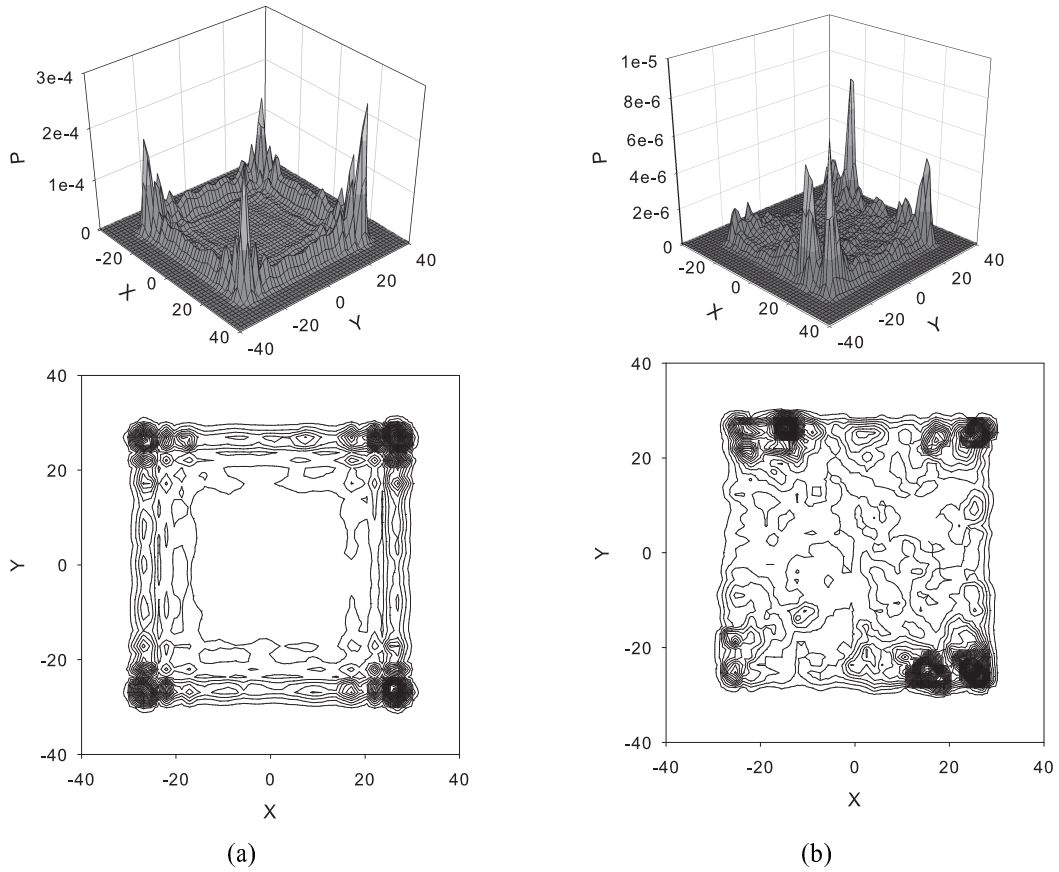
Soğurucu tuzakların rastgele olarak yerleştirildiği, üç boyutlu kesikli uzayda gerçekleşen Hadamard yürüyüşünde, tuzakların eş-evresizliğe yol açıp açmadığını görmek için yürüyüş, ilk olarak $p = 0.01$ ve $p = 0.1$ tuzak yoğunlukları için gerçekleştirilmiş ve bu yürüyüşlere ait olasılık dağılım fonksiyonları, $t = 40$ zaman adımı sonunda çizdirilmiştir. İki boyutlu kuantum Hadamard yürüyüşünde olduğu gibi üç boyutlu yürüyüşte de Şekil (4.2(a)) ve Şekil (4.2(b))'den görülebileceği gibi $p = 0.01$ iken kuantum davranışı oldukça baskındır. Yani bu kuantum yürüyüşe ait



Şekil 4.1 Hadamard yürüyüşünde $t = 40$ zaman adımı sonunda olasılık dağılımı.

olasılık dağılım fonksiyonu Şekil (4.1)'de verilen tuzaksız yürüyüşe ait olasılık dağılım fonksiyonu ile benzerlik göstermektedir. Fakat $p = 0.1$ iken, Şekil (4.2(b))'de görülebileceği gibi olasılık fonksiyonu dramatik şekilde bozulmaktadır. Bu durum bize, kuantum yürüyüşün iyice bozulduğunu ve klasik davranışın baskın olduğunu ifade eder. Benzer şekilde $p = 0.25$ ve $p = 0.5$ tuzak yoğunlukları için Hadamard yürüyüşleri gerçekleştirilmiş, bu yürüyüşlere ait olasılık dağılım fonksiyonları, $t = 40$ adımda Şekil (4.3(a)) ve (4.3(b))'de çizdirilmiştir. Şekilden görülebileceği gibi olasılık dağılımları, Hadamard yürüyüşü yapan kuantum durumunun örgü uzayında ilerleyemediğini, harekete başladığı koordinat noktası civarında yığılıp kaldığını ortaya koymaktadır.

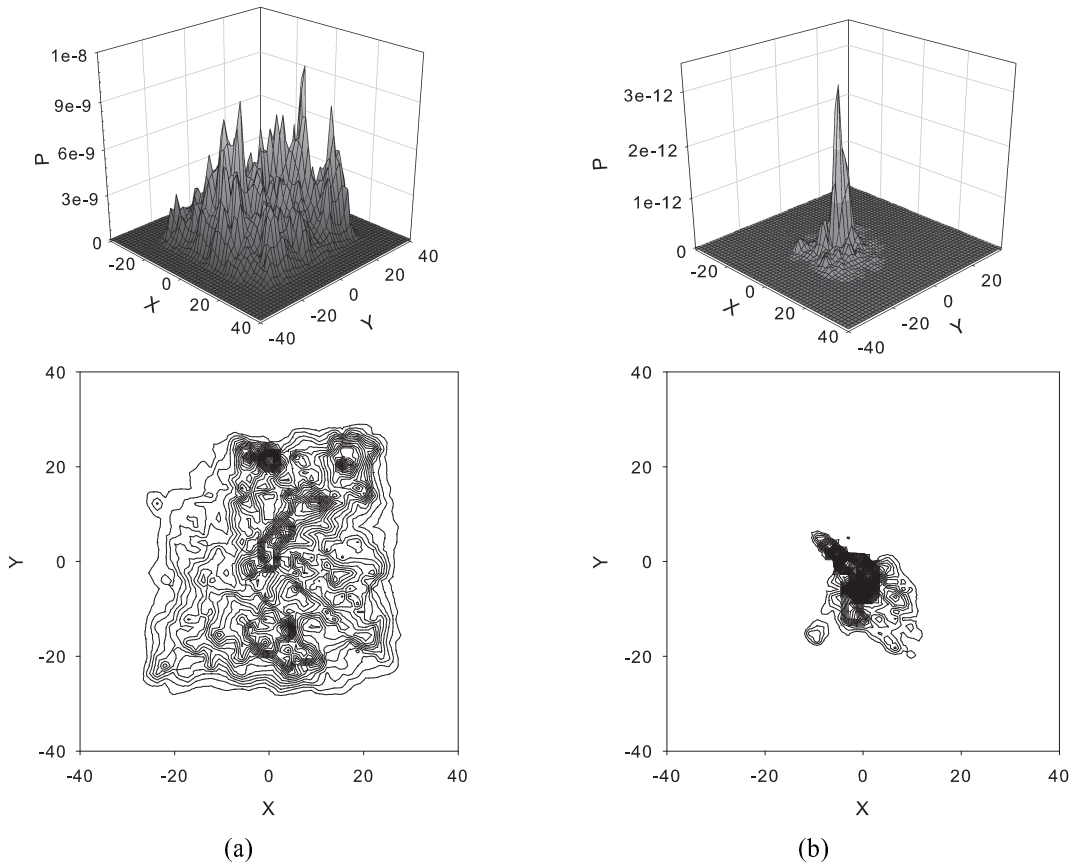
Şekil (4.1), (4.2) ve (4.3)'e bakıldığında, üç boyutlu tuzaklı örgü uzayındaki Hadamard yürüyüşü ile iki boyutlu tuzaklı örgü uzayındaki Hadamard yürüyüşünün



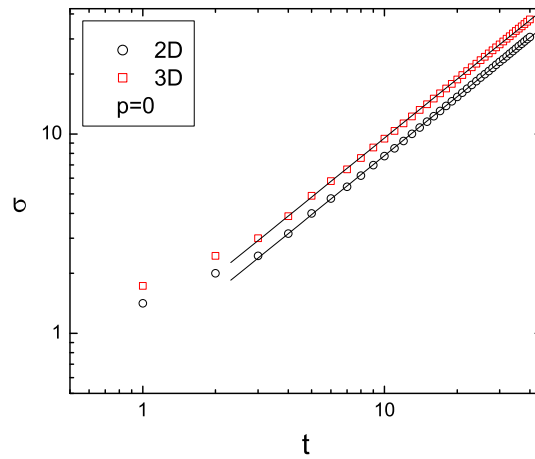
Şekil 4.2 a) $p = 0.01$ ve b) $p = 0.1$ tuzak yoğunlukları için $t = 40$ zaman adımı sonunda Hadamard yürüyüşüne ait olasılık dağılımları.

ortak karakteristiğe sahip olduğu söylenebilir. Öte yandan tuzak yoğunluğu arttıkça, yürüyüşte eş-evresizliğin artmış olduğu, bu olasılık dağılım profillerine bakarak söylenebilir. Ancak her bir tuzak yoğunluğu için eş-evresizlik yine yürüyüşe ait standart sapma ifadesi ile kestirilebilir. Bu nedenle bu tuzak yoğunlukları için aşağıda standart sapmaları ve bunların eğimleri verilmiştir. Fakat bir önceki çalışmadan farklı olarak, standart sapma ifadeleri bu kez, aynı tuzak yoğunluğu değerleri için hem iki hem de üç boyutlu yürüyüş için hesaplanarak karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma, eş-evresizliğin boyuta bağlılığı hakkında bilgi sağlaması bakımından oldukça önemlidir.

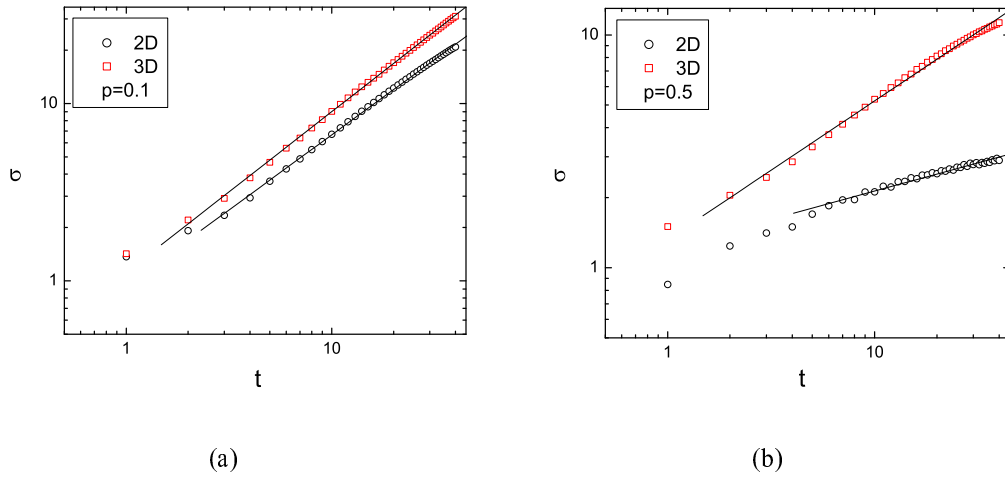
Örgüde hiçbir tuzağın olmadığı, $p = 0$ durumunda, iki ve üç boyutlu kesikli örgü uzayında gerçekleştirilen kuantum yürüyüşe ait standart sapma fonksiyonlarının zamanla değişimleri, Şekil (4.4)'de verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi standart



Şekil 4.3 a) $p = 0.25$ ve b) $p = 0.5$ tuzak yoğunlukları için $t = 40$ zaman adımı sonunda Hadamard yürüyüşüne ait olasılık dağılımları.



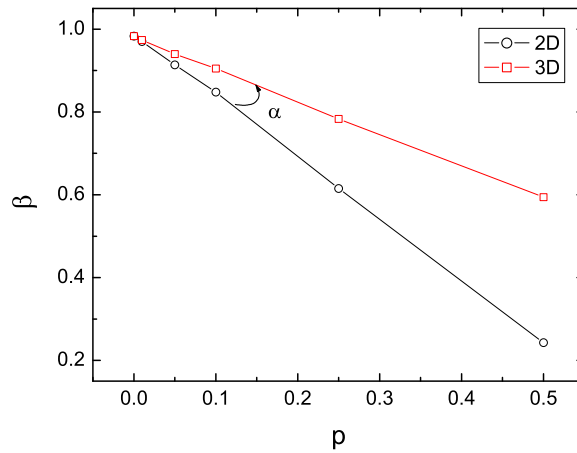
Şekil 4.4 Tuzaksız ($p = 0$), iki ve üç boyutlu örgüde Hadamard yürüyüşüne ait standart sapmanın zamanla değişimi.



Şekil 4.5 a) $p = 0.1$, b) $p = 0.5$ tuzak yoğunlukları için iki ve üç boyutlu Hadamard yürüyüşüne ait standart sapma fonksiyonlarının zamanla değişimi.

sapma eğimleri, kuantum yürüyüş için üst üste düşmemektedir. Bunun nedeni standart sapma ifadesinin değerinin, boyuta bağlı olarak değişmesidir. Çünkü boyut arttıkça, standart sapma eğrisinin eğimi değişmektedir. Bu durum, hem klasik hem de kuantum yürüyüşler için geçerlidir. Bu iki yürüyüşe (bir ve iki boyutlu) ait standart sapma eğrilerinin bir arada çizilmesinin nedeni yürüyücünün yayılma hızının bir ölçüsü olan standart sapma fonksiyonun davranışlarını karşılaştırabilmektir.

Tuzak yoğunluğu $p = 0.1$ ve $p = 0.5$ için iki ve üç boyutlu örgü uzayında kuantum yürüyüşlere ait standart sapmaların zamana bağlı değişimleri sırasıyla Şekil (4.5(a)) ve (4.5(b))'de verilmiştir. Bu iki şekilden görülebileceği gibi tuzak yoğunluğu arttıkça, iki ve üç boyuta ait standart sapmalar birbirlerinden ciddi ölçüde ayrılmaktadırlar. Bu şekiller ister tuzaksız, ister tuzaklı örgü modeli olsun her iki durumda da kuantum yürüyücünün üç boyutlu uzayda daha hızlı yayılacağını göstermektedir. Dolayısıyla bu davranış, üç boyutlu kuantum yürüyüşte ortaya çıkan eş-evresizliğin, iki boyutlu yürüyüşte ortaya çıkan eş-evresizlikten daha az olacağını gösterir. Ancak bu eğrilerin eğimleri, bize daha doğru bilgi verecektir. Son olarak şunu söyleyebiliriz: Özellikle yüksek tuzak yoğunluklu örgü uzaylarında gerçekleştirilen kuantum yürüyüşler, yeterince uzun zaman adımı için izlenebilirse, belli bir zaman adımı sonunda çok keskin olmayan bir geçişin ortaya çıkması beklenebilir. Bu geçiş, başka yollar kullanılarak görülebileceği gibi standart sapma eğrisine bakarak da görülebilir.

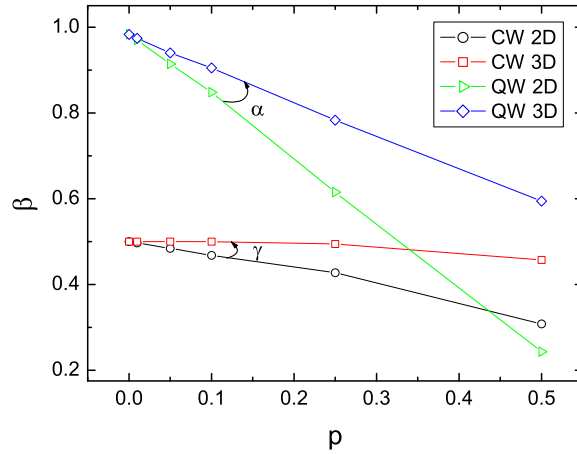


Şekil 4.6 İki ve üç boyutlu kuantum yürüyüş için β parametresinin tuzak yoğunluğu p 'ye göre değişimi.

Kuantum yürüyüşün numerik hassasiyetinin fazla olması nedeniyle daha uzun zaman adımlarına gitmek zor olmaktadır. Ancak yine de standart sapma eğrisindeki bükülmeler, yüksek tuzak yoğunluğu için (4.5(b))'de daha net olarak görülmektedir ve bu bükülme sürecinde kuantum yürüyüşün, eş-evresizlikten başka, aynı zamanda bir anormal difüzyon sürecine uyduğuna işaret etmektedir.

Şekil (4.6)'da iki ve üç boyutlu kuantum yürüyüşlere ait standart sapma eğimlerinin tuzak yoğunluğuna bağlılığı verilmiştir. Şekilden de görüleceği gibi hem iki hem de üç boyutlu kuantum yürüyüş için β lineer olarak azalmaktadır. Her iki eğim arasında belli bir açı vardır. Bu açı, yürüyüşün boyuta bağlılığından kaynaklanmaktadır. β parametresi, yürüyüşlerdeki eş-evresizliği ölçen bir niceliktir. Bu parametrenin eğimine bakarak, eş-evresizliğin iki boyutlu kuantum yürüyüşte daha fazla olduğunu söylememiz mümkündür. Aynı tuzak yoğunluğu için üç boyutlu uzayda kuantum yürüyüşçüler, iki boyuttakinden daha hızlı yayılmaktadırlar.

Şekil (4.6), iki ve üç boyutlu tuzaklı örgü uzayında gerçekleşen kuantum yürüyüşte ortaya çıkan eş-evresizliğe bağlı olarak yürüyüşçünün uzayda yayılma hızı hakkında fikir verir. Fakat bu yürüyüşün yayılma hızının, klasik rastgele yürüyüşün yayılma hızına nasıl gittiğini görmek için aynı tuzak yoğunluk değerleri göz önünde bulundurularak, bu kez, klasik rastgele yürüyüş ve kuantum yürüyüş süreçleri, iki ve üç boyut için



Şekil 4.7 İki ve üç boyutlu kuantum yürüyüş ve klasik rastgele yürüyüş için β parametresinin tuzak yoğunluğu p 'ye göre değişimi.

karşılaştırılmıştır. Şekil (4.7)'de iki ve üç boyutlu klasik rastgele yürüyüş ve kuantum yürüyüşün hem tuzaksız hem de tuzaklı uzayda yayılım hızlarının değişimleri çok açık bir şekilde görülmektedir. Örneğin $p = 0$ değerinde, hem iki hem üç boyutlu uzayda gerçekleşen klasik rastgele yürüyüşün, zamana bağlı olarak standart sapmasının $\sigma \sim t^{1/2}$, kuantum yürüyüşün ise $\sigma \sim t$ şeklinde değiştiğini söyleyebiliriz. Bu, bizim beklediğimiz bir sonuç olup aynı zamanda elde edilen numerik sonuçların doğruluğunu onaylar niteliğe sahiptir.

Şekil (4.7)'den görülebileceği gibi klasik rastgele yürüyüş için standart sapmanın eğimleri, boyuta bağlılık göstermektedir. Tıpkı kuantum yürüyüşte olduğu gibi klasik rastgele yürüyüşte de iki boyutlu uzayda gerçekleşen yürüyüşlerin standart sapma değerleri ile üç boyutlu uzayda gerçekleşen yürüyüşlerin standart sapma değerleri birbirlerinden bir açı yapacak şekilde ayrılmaktadır. Bu da, bizim beklediğimiz bir sonuçtur. Fakat her iki yürüyüşe ait açıların, birbirlerinden farklı olması ilginçtir. Bu açıların arasındaki ilişki, yayılmanın hızıyla ilişkili olmalıdır.

Düşük tuzak yoğunlukları için kuantum durumlarının yayılma hızlarının, klasik parçacıkların yayılma hızlarından daha yüksek olacağı açıktır ve bu, Şekil (4.7)'de çok net olarak görülmektedir. Fakat tuzak yoğunlukları artırıldığında, her iki boyutta gerçekleşen kuantum yürüyüşün (burada Hadamard yürüyüşü) örgü uzayındaki

yayıma hızları giderek, klasik rastgele yürüyüşlerin yayılma hızlarına yaklaşmaktadır. Örneğin, iki boyutlu kuantum yürüyüşünün yayılma hızı, yaklaşık olarak $p = 0.35$ değeri civarında üç boyutlu klasik yayılım hızına ulaşmaktadır. Tuzak yoğunluğu artırıldığında ise klasik yürüyüşün yayılım hızının altına düşmektedir. Öte yandan üç boyutlu kuantum yürüyüşün yayılım hızı, tuzak yoğunluğu ile azalmakla birlikte yine de en yüksektir.

BÖLÜM BEŞ

BİR BOYUTLU TUZAKLI ÖRGÜDE KUANTUM YÜRÜYÜŞTE YAŞAMA OLASILIĞININ ZAMAN EVRİMİ

5.1 Giriş

Bir klasik yürüyüşün zaman evrimini veren kare-ortalama yerdeğiştirme fonksiyonunun, boyuttan bağımsız olarak $\langle r^2 \rangle \sim t$ şeklinde gittiği bilinmektedir. Bu, Einstein yasası olarak bilinir. Ancak aynı klasik rastgele yürüyüş, eğer yürüyüşü engelleyecek uzaysal bozukluklar, deformasyonlar, kusurlar, soğurucu tuzaklar, kuyu veya bariyerlerin olduğu bir uzayda gerçekleştirilirse, bu durumda uzayın yapısına bağlı olarak yürüyüşün yayılma hızı, Einstein yasasından saparak, hızlı veya yavaş olarak adlandırılan difüzyon sürecine uyacak şekilde davranır. Bu süreçler, anormal difüzyon süreçleri olarak bilinir. Hızlı difüzyon, ‘anormal super-diffusion’ ve yavaş difüzyon ise ‘anormal sub-diffusion’ olarak adlandırılır. Deformasyonlar, kusurlar, soğurucu tuzaklar, kuyu veya bariyerlerin olduğu uzaylar, temelde Öklid uzayı olarak geçmekle birlikte bu tür uzaylara gömülmüş (embeded) uzaylar demek daha doğrudur. Bu uzayların sağladığı eşitsizlikler ile kusursuz Öklid uzayının sağladığı eşitsizlikler farklıdır. Soğurucu tuzakların yer aldığı uzayda parçacık yayılımını incelemek, diğer uzaylardaki kadar ilginçtir. Bu nedenle önceki bölümlerde, soğurucu tuzakların olduğu uzaylarda gerçekleştirilen kuantum yürüyüşler incelenerek, bu yürüyüşlerdeki eş-evresizlik problemleri ele alınmıştır. Fakat önceki çalışmalarda, tuzakların kuantum durumlarının yayılma hızları üzerindeki etkisi, zamana bağlı olarak detaylı olarak incelenmemiştir. Bu çalışmada, farklı bir model kullanılarak, bu kez tuzakların varlığı durumunda kuantum durumlarının yaşama olasılıkları zamana bağlı olarak incelenmiştir. Kuantum durumlarının yaşama olasılığı, yürüyüşteki eş-evresizliğe bağlıdır. Eş-evresizlik, kuantum durumlarının örgü uzayındaki yayılma hızı ile ilgiliyken, yaşama olasılığı ise tuzaklara yakalanmadan yaşamaya devam eden kuantum durumlarının sayısı ile ilgilidir. Tuzaklara düşmeyen ve yayılıma devam

eden kuantum durumları, yayılım sürecinde halen var olan eş-evreliliğe karşı geleceğinden, eş-evresizlik ile yaşama olasılığı birbirleriyle ilişkilidir.

Tuzaklı örgülerde ortaya çıkan anormal difüzyon sürecinin ilginç bir özelliği vardır. Bu tip difüzyon süreci (bu difüzyon süreci tek bir paçacığı veya çok sayıda paçacığı içine alır), Einstein yasasına uymaz. Bu tür difüzyon süreçleri, difüzyonun gerçekleştiği uzay boyutuna bağlı olmaktadır. Ayrıca bu tür difüzyon süreçlerinde, difüzyonun kısa zaman ve uzun zaman limitlerinde, yayılma karakteristikleri değişmektedir. Yani difüzyonun yayılma hızında, kritik bir zaman değerinde, ölçeklenebilir bir geçiş (time crossover) gözlenmektedir. Benzer davranışın kuantum durumlarının yayılımında ortaya çıkıp çıkmadığını görmek için bu çalışmada, bir model önerilmiştir.

Tuzaklı klasik rastgele yürüyüşte yaşama olasılığının, hem kısa zaman hem de uzun zaman diliminde, nasıl değiştiği literatürde ayrıntılı olarak çalışılmıştır (Anlauf, 1984; Gallos ve Argyrakis, 2001; Havlin ve Avraham, 1987; Weiss, 1994). Klasik rastgele yürüyüşte kısa zaman davranışı, Rosenstock (RS) (Rosenstock, 1970) rejimi olarak bilinir ve RS rejiminde, düşük tuzak yoğunluğunda bir boyutlu klasik rastgele yürüyüşte yaşama olasılığı, üstel olarak zamanın karekökü ile ($t^{1/2}$) orantılı azalır. Asimptotik olarak uzun zaman davranışında, RS rejiminden farklı bir rejime geçiş gözlenir (Barkema ve ark., 2001). Bu rejim, Donkser ve Varadhan (DV) (Donsker ve Varadhan, 1979; Grassberger ve Procaccia, 1982; Haus ve Kehr, 1987; Havlin ve ark., 1984) olarak adlandırılır ve bu rejimde yüksek tuzak yoğunluklarında yaşama olasılığı üstel olarak ($t^{1/3}$) ile orantılı azalır (Jayannavar ve Köhler, 1990; Lifshitz, 1964; Nieuwenhuizen, 1989).

Kuantum yürüyüşteki girişim etkisi ve kuantum eşevreliliği nedeniyle klasik sonuçların kuantuma nasıl genişletileceği belli değildir. Bu nedenle bu çalışmada (Gönülo, Aydın, Shikano ve Müstecaplıoğlu, 2011), bir boyutlu tuzaklı örgüde kuantum difüzyon dinamiği, özellikle de klasik erken zaman Rosenstock (RS) ve uzun zaman Donsker ve Varadhan (DV) rejimlerinin kuantum yürüyüşteki karşılıkları araştırılmıştır.

5.2 Model ve Hesaplamalar

Klasik rastgele yürüyüşte, RS'den DV'ye geçişi görmek zordur. Klasik rastgele yürüyüşte, yaşama olasılığının zamanla değişiminde, sadece çok uzun zaman sonra geçiş gözlenir. Fakat daha yüksek tuzak yoğunlukları için ya da daha büyük difüzyon sabitleri (Schotland, 1988) için bu geçiş, daha erken olabilmektedir. Bu çalışmada, klasik rastgele yürüyüşte difüzyon sabitinin, geçiş zamanını kısaltması esas alınarak, kuantum yürüyücülerin DV rejimine klasik yürüyücülerden daha erken gireceği öngörülmüştür. Klasik rastgele yürüyüşte, geniş soğurucu bölgelerin bulunduğu yürüyüşlerde, niteliksel olarak farklı DV ölçeklendirmeleri olabilmektedir (Grassberger ve Procaccia, 1982). Bu bölgelerin yaşama olasılığına katkısı, daha yaygın ve küçük tuzak bölgelerinin yürüyücülerini kaybettikten sonra dominant olur. Kuantum yürüyüşte, yürüyücülerin yayılımı daha geniş olduğundan, bu tuzak bölgelerinin daha geniş ve daha seyrek olması gerekir ve bu bölgelerin ortalamasının, klasik karşılıklarından daha düşük azalma zamanı vermesi beklenir.

Gerçekten de sürekli zaman bir boyutlu taşınım probleminde, yaşama olasılığının üstel olarak $t^{1/4}$ ile orantılı azaldığı görülmüştür (Parris, 1989a). Kuantum yürüyüş temelli çok ajanla arama algoritmalarında, kuantum eş-evreliliğin bu yavaşlaması, kuantum hızliliğine küçük hedef (tuzak) yoğunluklarında bile ek bir sınırlama getirebilir. Bu sınırlama da genel kuantumdan klasiğe geçişi gösteren eş-evresizlik problemlerine ek olarak dikkate alınmalıdır.

Florry benzeri heuristik argumanları (Florry, 1971) temel alan tahminlerimizi test edebilmek için bu çalışmadaki tartışmalar, kesikli bir boyutlu kuantum yürüyüşle sınırlandırılmıştır. Fakat sürekli kuantum yürüyüşte de taşınım problemleri gibi karşılaştırma yapılabilecek çalışmalar bulunmaktadır (Mülken ve ark., 2007, Agliari ve ark., 2010, Parris, 1989a). Sonuçların güncel deneysel sistemlere yararlı olması için detaylı numerik simülasyonlar gerçekleştirilmiştir. Tuzaklı klasik yürüyüş ile direkt benzerliği sağlayabilmek için çok sayıda yürüyücü ile çalışılmış ve klasik sistemdeki gibi örgüye rastgele yerleştirilmiş durgun tuzaklarla kuantum yürüyüş gerçekleştirilmiştir. Kısa zaman davranışında, düşük tuzak yoğunluğu araştırılmıştır.

Bunun yanında RS ve DV rejimindeki farkı anlamak için ve kuantumdan klasiğe geçiş dinamiğini araştırmak için yüksek tuzak yoğunluklarıyla da çalışılmıştır.

5.2.1 Çok Parçacık ile Kuantum Yürüyüş

Çok parçacıkla gerçekleştirilen kuantum yürüyüş, özellikle kuantum arama algoritmalarında birden fazla parçacıkla (kuantum durumu ile) arama yapılabildiği için çok avantajlıdır. Son zamanlarda yapılan çalışmalar da çok parçacık ile gerçekleştirilen kuantum yürüyüşün önemini ortaya koymaktadır (Goyal ve Chandrashekar, 2010; Omar, Paunkoviç, Sheridan ve Bose 2006). Kuantum yürüyüşün bir parçacık yerine, herbiri örgü üzerinde farklı noktalarda yürüyüşe başlayan, ayırdedilebilir ve birbiriyle etkileşmeyen N tane parçacık ile gerçekleştirildiğini düşünelim. Bu N parçacık için Hilbert uzayı, tek parçacık Hilbert uzaylarının tensör çarpımı ile verilir.

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N (\mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_P)_i \quad (5.2.1)$$

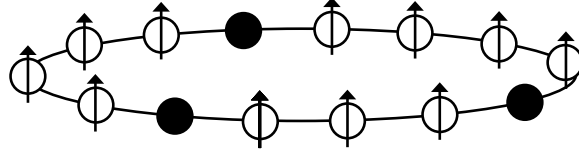
Parçacıklar (kuantum durumları), birbirinden bağımsız olarak yürüyüşü gerçekleştirdiğinden, N parçacığın her bir adımı bütün sistemin evrim operatörü ile,

$$U_{1,2,\dots,N} = U^{\otimes N} \quad (5.2.2)$$

şeklinde belirlenir. Bu bağıntıda U , $U = S(C \otimes I)$ ile verilen tek parçacık zaman evrim operatörüdür ve tüm parçacıklar için aynıdır.

N parçacığın başlangıç durumları, her bir parçacık için verilen başlangıç durumlarının tensör çarpımı ile bulunur. Bütün parçacıkların aynı $|\chi\rangle$ yönelimine sahip olduğu ve Şekil (5.1)'de gösterildiği gibi tuzak haricindeki bütün x_i , ($x_i = 1, \dots, N$) örgü noktalarının dolu olduğu düşünülürse, sistemin başlangıç durumu,

$$|\psi(0)\rangle = \bigotimes_{i=1}^N |\chi, x_i\rangle_i \quad (5.2.3)$$



Şekil 5.1 $|\uparrow\rangle$ başlangıç durumuna sahip 11 parçacık ve 3 tuzak noktası (siyah renk) ile gerçekleştirilen kuantum yürüyüşün şematik gösterimi.

şeklinde ifade edilir. t zaman adımı sonunda sistemin durumu, (5.2.2) ve (5.2.3) bağıntıları yardımıyla,

$$|\psi(t)\rangle = U_{1,2,\dots,N}^t |\psi(0)\rangle \quad (5.2.4)$$

olarak bulunur. İndirgenmiş tek parçacık yoğunluk matrisi,

$$\Phi_i(t) = \text{Tr}_{j \neq i} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \quad (5.2.5)$$

bağıntısı ile bulunur. Bu bağıntı kullanılarak, t anında tek parçacık için olasılık dağılımı,

$$P_i(x, t) = \sum_{j=\uparrow,\downarrow} \langle j, x | \Phi_i(t) | j, x \rangle \quad (5.2.6)$$

şeklinde elde edilir. $P_i(x, t)$, $t = 0$ anında, x_i konumundan yürüyüşe başlayan parçacığın, t anında, x konumunda olma olasılığını gösterir. Bu da $P_i(x, t)$ 'nin şartlı olasılık gibi yorumlanabileceğini gösterir. $i = 1, \dots, N$ 'e bütün parçacıklar için $\{P_i(x, t)\}$ 'ler, tek parçacık için $\{x_i\}$ 'den x 'e geçme olasılıklarından oluşan bir takım oluşturur. Bu nedenle çalışılan çok parçacık problemi, farklı başlangıç konumlarından harekete başlayan tek parçacığın hareketine eşdeğerdir.

5.2.2 Yaşama Olasılığı

Bu çalışmada, klasik rastgele yürüyüşte yaşama olasılığını hesaplamak için tam sayma yöntemi (exact enumeration method) kullanılmıştır. (Havlin ve ark., 1984). Bu yöntemde, yürüyüşün başlangıcında ($t = 0$) tuzaklar, bir boyutlu örgüye rastgele yerleştirilir. Tuzak olmayan her örgü noktasında bir parçacık bulunur. Her zaman

adımında N parçacık, bir boyutlu örgü üzerinde klasik rastgele yürüyüşü gerçekleştirir. Bir parçacığın, t anında, belirli bir x konumunda bulunma olasılığı $P_i(x, t)$, $t-1$ anında, en yakın komşularının bulunma olasılıklarının toplamının ikiye bölümü ile bulunur. t adım sonunda örgü uzayındaki tüm parçacıklar için yaşama olasılığı ise,

$$P_r(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{x=1}^K P_i(x, t) \quad (5.2.7)$$

bağıntısı ile bulunur. Burada N , rastgele yürüyüşü gerçekleştiren parçacık sayısı, r , herhangi bir konfigürasyonu gösterir. N , örgü uzunluğu K ve tuzak sayısı n cinsinden $N = K - n$ şeklinde ya da tuzak yoğunluğu $\rho = n/K$ 'ya bağlı olarak $N = K(1 - \rho)$ şeklinde ifade edilebilir. Örgü noktaları örgü üzerinde $\{1, 2, 3, \dots, K-1, K\}$ şeklinde sıralanır.

Tuzaklar, tamamen soğurucu ve hareketsiz olduğundan, yürüyüş boyunca parçacıkların tuzak noktalarda bulunma ve yaşama olasılıkları sıfırdır. Bu nedenle yaşama olasılığı hesaplanırken yapılan toplam, tuzak noktalardan etkilenmez.

Klasik rastgele yürüyüşte yaşama olasılığı incelendikten sonra yaşama olasılığının kuantum karşılığına (Jayannavar, 1991; Parris, 1989a, 1989b) bakılmıştır. Kuantum yürüyüşte, bir boyutlu kesikli bir örgüde uzayın her bir noktasında ya bir kuantum durumu ya da bir soğurucu tuzak vardır. Tuzaklar, örgü üzerine rastgele dağıtılır ve sonsuz potansiyel kuyuları gibi yutucu karaktere sahiptir. Bu tuzaklarda her hangi bir kuantum durumunun yaşamayacağı kabul edilir. Tuzaklar dışındaki noktalar ise hareketin başlangıcında belirlenen bir kuantum durumunda bulunurlar. Kuantum durumları, her bir zaman adımında örgü üzerinde kuantum yürüyüşü gerçekleştirirler. Her bir zaman adımında yeni konumlar ve kuantum durumları, U üniter dönüşümü ile belirlenir. Kuantum durumlarının her hangi bir t anında her hangi bir x konumunda bulunma olasılığı da,

$$P(x, t) = |\psi_{\uparrow}(x, t)|^2 + |\psi_{\downarrow}(x, t)|^2 \quad (5.2.8)$$

denklemleriyle hesaplanır.

Kuantum parçacıklarının yaşama olasılıklarının bulunabilmesi için bir önceki

bölümde anlatılan basitleştirmeden yararlanılarak, t anında tüm parçacıkların yaşama olasılıkları, farklı konumlardan harekete başlayan bir parçacığın yaşama olasılıklarının toplamı olarak klasik yaşama olasılığına benzer şekilde denklem (5.2.7) deki gibi bulunabilir.

Kuantum yürüyücü, tuzak noktalardan birine geldiğinde tuzak tarafından soğrulur. Bir başka deyişle tuzak noktalar, kuantum yürüyücünün kuantum durumlarını yok eder. Bu nedenle tuzak noktalar için yaşama olasılığından bahsedilemez. Yürüyüş boyunca tuzak noktaların yaşama olasılıkları sıfırdır.

Kuantum yürüyüşte yaşama olasılığı, üç farklı başlangıç durumu için incelenmiştir. Birinci durumda, bütün kuantum durumları $|\uparrow\rangle$, ikinci durumda rastgele olarak $|\uparrow\rangle$ ya da $|\downarrow\rangle$ ve son durumda $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ şeklinde süperpozisyon durumunda seçilmiştir. Bu durumlar sırasıyla yukarı, miks (karışık) ve simetrik olarak adlandırılabilir.

Tuzakların rastgele dağılımını sağlamak için farklı başlangıç şekillenimleri üzerinden yaşama olasılığının istatistik ortalaması hesaplanmıştır.

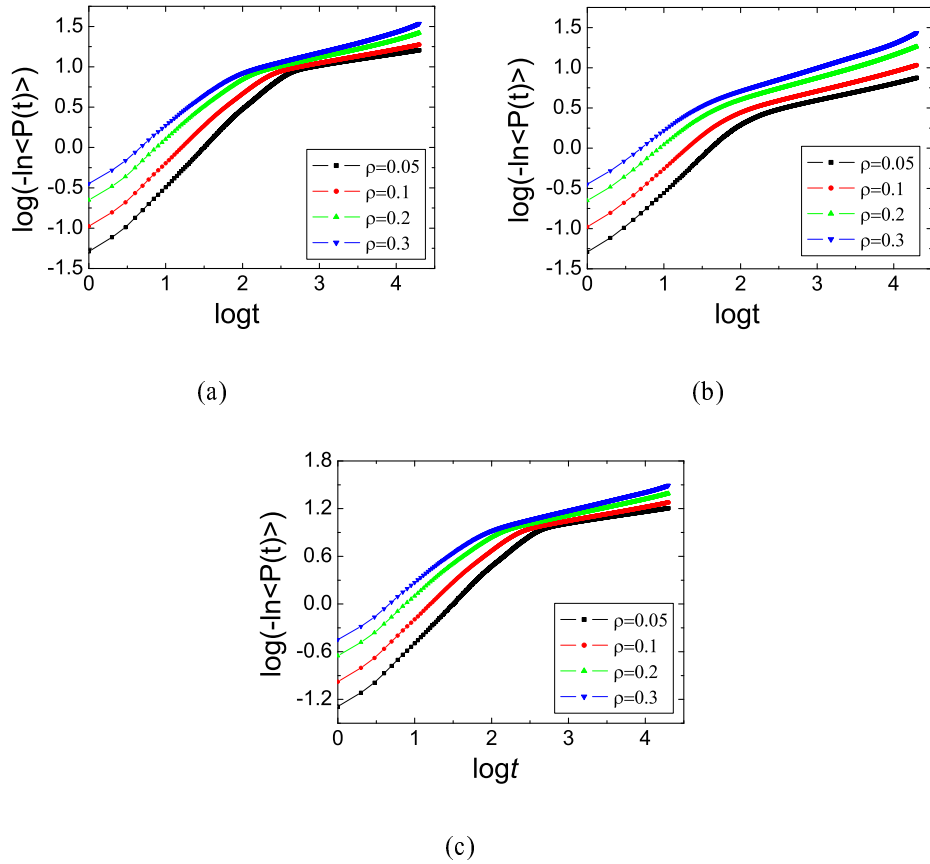
$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M P_r(t) \quad (5.2.9)$$

Burada M , farklı şekillenim sayısını gösterir.

5.3 Sonuçlar ve Tartışma

5.3.1 Kuantum Yürüyüşte Yaşama Olasılığı

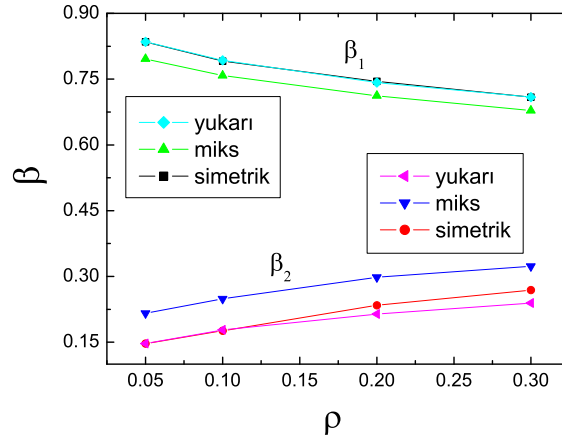
Farklı tuzak yoğunluklarında ($\rho = 0.05$, $\rho = 0.1$, $\rho = 0.2$ ve $\rho = 0.3$), durumların yaşama olasılığının zamanla değişimini incelemek için yukarı, miks ve simetrik başlangıç durumu için $t = 200000$ zaman adımı, $K = 101$ örgü noktası ve $M = 10000$ farklı şekillenim kullanılarak Şekil (5.2) çizdirilmiştir.



Şekil 5.2 Başlangıç durumları a) $|\uparrow\rangle$ (yukarı), b) $|\uparrow\rangle$ yada $|\downarrow\rangle$ (miks), c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ (simetrik) olan kuantum yürüyüşünde $\rho = 0.05$, $\rho = 0.1$, $\rho = 0.2$ ve $\rho = 0.3$, $T = 20000$, $K = 101$, $M = 10000$ için kuantum durumlarının yaşama olasılığının zamanla değişimi.

Yaşama olasılığı, beklendiği gibi zamanla azalır ve tuzak yoğunluğu arttıkça daha düşük değerler alır. Yaşama olasılığının dinamiğini daha yakından inceleyebilmek için $\log(-\ln\langle P(t)\rangle) - \log t$ skalasında bakıldığında, Şekil (5.2)'den de görüldüğü gibi üç farklı başlangıç durumu içinde yaşama olasılığının zamanla değişiminde iki farklı rejim ortaya çıkar. Bu iki rejim, belirli bir t_c zamanında bir geçişe (crossover) neden olur. t_c 'nin yeri, tuzak yoğunluğuna bağlıdır. Geçiş zamanı (crossover time) t_c , yukarı ve simetrik başlangıç durumu için $t_c \approx 25/\rho$, miks başlangıç durumu için $t_c \approx 8/\rho$ 'da gözlenir.

Geçiş zamanından önce ve sonra, $t = 1$ 'den $t = t_c$ 'ye ve $t = t_c$ 'den $t = T$ 'ye yaşama olasılığı zamana lineer olarak bağlıdır. Bu lineer bağıllık, yaşama olasılığının zamanla değişiminin gerilmiş üstel (stretched exponential) fonksiyona (Phillips, 1996)



Şekil 5.3 Yukarı, miks ve simetrik başlangıç durumları kullanılarak gerçekleştirilen kuantum yürüyüşte $T = 20000$, $K = 101$, $M = 10000$ için $\beta_{1,2}$ parametrelerinin ρ ile değişimi.

uyduğunu gösterir.

$$\langle P(t) \rangle \sim \exp[-t^\beta] \quad (5.3.1)$$

Burada β , $\langle P(t) \rangle$ 'nin azalma hızını belirleyen parametredir. Bu parametre t_c 'den önce ve sonra sırasıyla β_1 ve β_2 değerlerini alır. Şekil(5.3)'de β_1 ve β_2 'nin tuzak yoğunluğuna göre değişimleri görülmektedir. Tuzak yoğunluğu arttıkça, β_1 azalırken, β_2 artar. Düşük tuzak yoğunluğunda β_1 'in davranışı, klasik RS yaklaşım metodu ile anlaşılabilir. s_t , t adım sonunda ziyaret edilen farklı noktaların sayısı ise yürüyücünün tuzaklanmama olasılığı $p_t = (1 - \rho)^{s_t}$ olarak yazılabilir. Ortalama olasılık ise $\lambda = -\ln(1 - \rho)$ tanımı ile birlikte $P(t) = \langle p_t \rangle = \langle \exp(-\lambda s_t) \rangle$ biçiminde ifade edilebilir. RS yaklaşımını, kısa zaman ve düşük tuzak yoğunluğunda kullanmak için $P(t) \approx \exp(-\lambda \langle s_t \rangle)$ olarak alınabilir. Klasik rastgele yürüyüş için $\langle s_t \rangle \sim \sqrt{t}$ olduğundan $P(t) \approx \exp(-\lambda \sqrt{t})$ ifadesi, bilinen RS ölçeklendirme formunu verir. Kuantum yürüyüş için $\langle s_t \rangle \sim t$ olduğundan (Konno, 2002; Konno, 2005a) RS rejiminin kuantum karşılığında $\beta_1 \sim 1$ bulunur.

$\langle s_t \rangle$ 'nin en büyük değeri, perdeleme (screening) yada nüfuz etme (penetration) uzunluğu ile ilişkilendirilir ve yürüyücülerin başlangıç noktası ile tuzaklandığı nokta arasındaki mesafeyi belirtir. Kuantum yürüyücüler, klasik bir yürüyücüden daha büyük nüfuz etme uzunluğuna sahiptir ve daha büyük gruplarda yürüyüşe başladıklarında çok

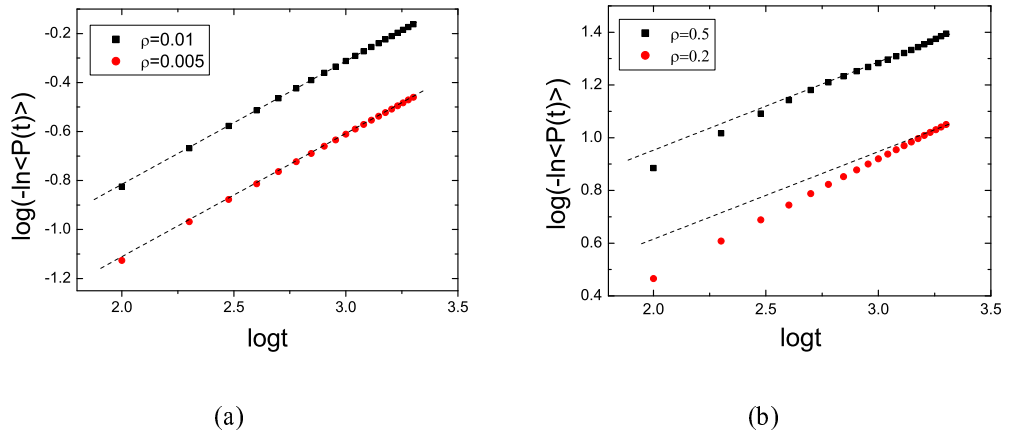
uzun süre tuzaklanmadan kalabilirler. DV rejiminin kuantum karşılığında bu dominant gruplar, klasik DV rejiminde olduğundan daha büyük olmalıdır. Yavaş azalan bu büyük grupların ortalaması, DV rejiminin kuantum karşılığında yaşama olasılığının klasik difüzyondan daha yavaş azalmasına neden olur. Benzer şekilde sürekli kuantum yürüyüşle yapılan kuantum taşınım probleminde, $\beta = 1/4$ olarak bulunmuştur (Parris, 1989a). Şekil (5.3)'den de görüldüğü gibi β_2 bu değere $\rho > 0.3$ için yakınsar.

Yapılan bu analizler sonucunda, Şekil (5.2)'de görülen geçişin, RS'den DV'ye geçişin kuantum karşılığı olduğu söylenebilir. Klasik rastgele yürüyüşte bu geçiş, çok uzun zaman sonra ortaya çıkar ve gözlenmesi zordur. Klasik sistemlerde, tuzak yoğunluğunu arttırarak ya da büyük difüzyon katsayıları olan sistemler kullanılarak t_c azaltılabilir. Kuantum yürüyüş içinde t_c 'nin ρ arttıkça azaldığı Şekil (5.2)'den görülebilir.

Tuzak yoğunluğunun artması, kuantum yürüyüşte eşvreliliği bozar ve kuantumdan klasiğe geçiş gözlenir (Romanelli ve ark., 2005, Chandrashekar ve ark., 2007, Gönülol ve ark., 2009). Ayrıca DV rejiminin kuantum karşılığında yaşama olasılığının klasik difüzyondan daha yavaş azalması, kuantum yürüyüş temelli arama algoritmalarının uygulamalarının, düşük tuzak yoğunluğu ile sınırlandırılmasına neden olabilir. Kuantumdan klasiğe geçişte bilinen kısıtlama faktörü, yüksek tuzak yoğunluğu için geçerlidir. Bu nedenle aşağıdaki alt başlıkta, yüksek tuzak yoğunluğunda kuantum yürüyüşün davranışı araştırılmış ve kuantumda RS'den DV'ye geçişin, klasikten daha önce gerçekleştiği kanıtlanmıştır.

5.3.2 *Klasik ve Kuantum Yürüyüşte Yaşama Olasılığı*

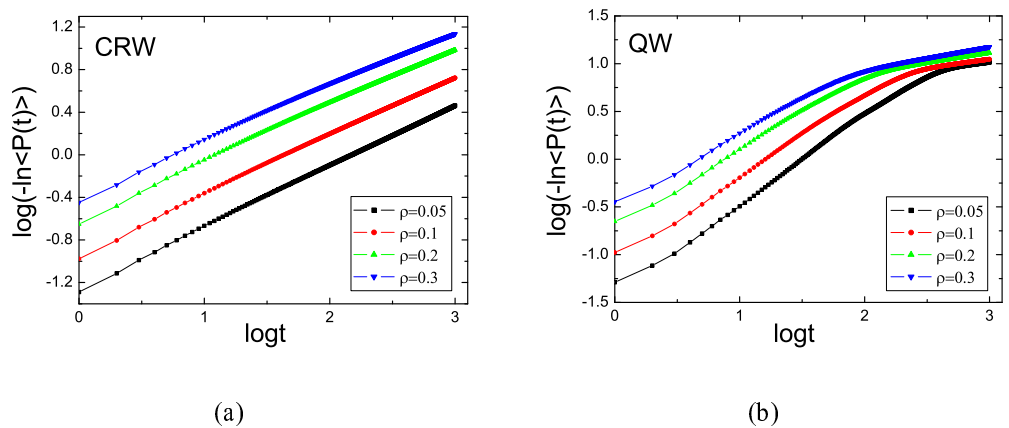
Klasik rastgele yürüyüşte yaşama olasılığının kısa ve uzun zaman davranışı ve RS'den DV'ye geçişin belirtileri Şekil (5.4)'de görülüyor. Kısa zaman davranışında yaşama olasılığı Şekil (5.4(a))'daki gibi düşük tuzak yoğunluğunda RS rejimi ile ve $\beta = 1/2$ ile uyumludur. Tuzak yoğunluğu arttırıldığında, eğim azalır ve yüksek tuzak yoğunlukları için Şekil (5.4(b))'de görüldüğü gibi DV davranışına ulaşılır ve $\beta, 1/3$ 'e



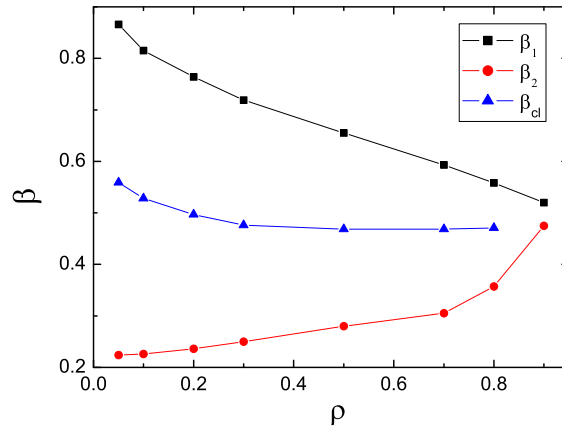
Şekil 5.4 Farklı tuzak yoğunluklarında $K = 50000$ için klasik rastgele yürüyüşte yaşama olasılığının zamanla değişimi a) $T = 2000$ ve $\rho = 0.01, \rho = 0.005$. Kesikli çizgiler $\beta = 1/2$ eğimi belirtir. b) $T = 2000$ ve $\rho = 0.2, \rho = 0.5$. Kesikli çizgiler $\beta = 1/3$ eğimi belirtir.

yakınsar. DV ölçeklendirme formuna yakınsama, daha yüksek tuzak yoğunluklarında daha hızlı olur. Bu analitik değerler, termodinamik olarak büyük sistemler için geçerlidir.

Kuantum yürüyüş ile klasik yürüyüşü karşılaştırabilmek için örgü uzunluğu $K = 101$ seçilerek $T = 1000$ zaman adımı sonunda Şekil (5.5(a))'da klasik yürüyüş için Şekil (5.5(b))'de kuantum yürüyüş için yaşama olasılıklarının zamanla değişimi çizdirilmiştir. Bu durumda, kuantum yürüyüşte RS'den DV'ye geçiş olmasına rağmen klasik yürüyüşün hala RS rejiminde olduğu görülmektedir.



Şekil 5.5 a) Klasik rastgele yürüyüşte, b) başlangıç durumları $|\uparrow\rangle$ olan kuantum yürüyüşte yaşama olasılığının zamanla değişimi.

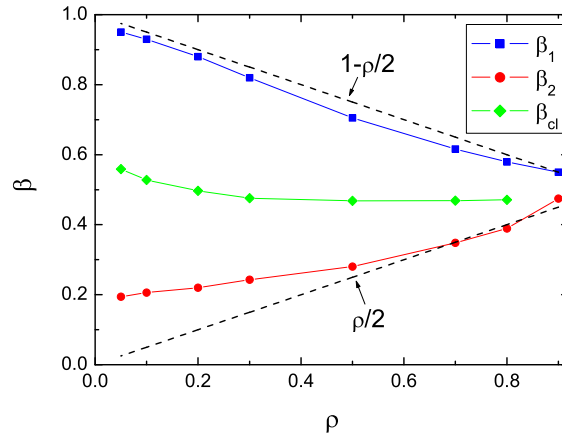


Şekil 5.6 Klasik rastgele yürüyüş ve kuantum yürüyüşte azalma parametresi β 'nin tuzak yoğunluğu ρ ile değişimi.

Tuzak yoğunluğunun ölçeklendirmeye etkisini sistematik bir şekilde inceleyebilmek için Şekil (5.6)'da β_1 , β_2 , ve β_{cl} 'nin tuzak yoğunluğu ile değişimi çizdirilmiştir. Tuzak yoğunluğu arttıkça β_1 ve β_{cl} azalırken, β_2 tam tersine artar. RS ve DV rejimin en iyi ayırtılabildiği tuzak yoğunluğu aralığı Şekil (5.5(b))'deki gibidir. Çok yüksek tuzak yoğunluklarında bu ayırım, zor ayırılır ve $\beta_{1,2}$, Şekil (5.6)'da görüldüğü gibi β_{cl} değerine yakınsar. Bu durum, yüksek tuzak yoğunluklarında kuantumdan klasiğe geçiş tahminleriyle uyumaktadır. Şekil (5.5(b))'de görülen kuantum yürüyüşteki kısa ve uzun zaman davranışı arasındaki dinamik geçişin, Şekil (5.6)'ya bakarak kuantumdan klasiğe geçiş olmadığı, bu geçişin, klasik RS den DV'ye geçişin kuantum karşılığı olduğu anlaşılmaktadır.

5.3.3 Tek Parçacık ile Kuantum Yürüyüşte Konum Ölçümü ve Çok Parçacık ile Kuantum Yürüyüşte Yaşama Olasılığı

Bu altbölümde, yaşama olasılığı ile bir boyutta kuantum yürüyüşte konum ölçümü arasındaki ilişki analitik olarak gösterilmiştir. Bir boyutta kuantum yürüyüşte konum ölçümünde (Shikano ve ark., 2010; Chisaki ve ark., 2010; Shikano, 2011), konum Hilbert uzayı $\mathcal{H}_P = \{|z\rangle : z \in \mathbb{Z}\}$ olarak verilir. Kuantum yürüyüşte bir adım



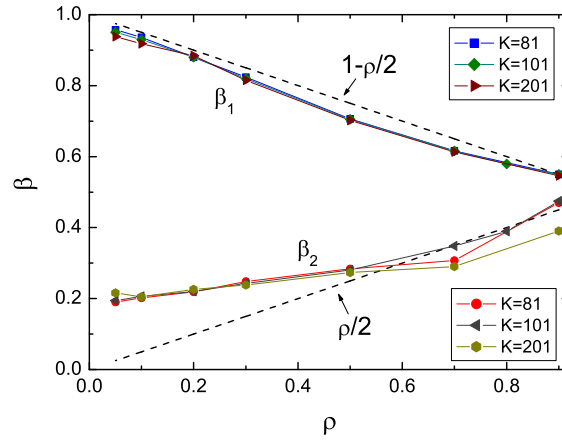
Şekil 5.7 $K = 101$ ve $t = 1000$ için klasik rastgele yürüyüşte ve $|\uparrow\rangle$ başlangıç durumu ile kuantum yürüyüşte azalma parametresi β 'nin tuzak yoğunluğu ρ 'ya göre değişimi. Kesikli çizgiler analitik sonuçları gösterir.

dinamiği,

$$\begin{aligned} \rho(t+1) &= (1-p)U\rho(t)U^\dagger \\ &+ p|\chi\rangle\langle\chi| \otimes \text{Tr}_C \sum_{z,z' \in \mathbb{Z}} \left[(\hat{I} \otimes |z\rangle\langle z|) \hat{U} \rho(t) \hat{U}^\dagger (\hat{I} \otimes |z'\rangle\langle z'|) \right] \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

denklemleriyle bulunur. Denklemlerde $|\tilde{\psi}(0)\rangle = |\chi, 0\rangle$, $\rho(0) = |\tilde{\psi}(0)\rangle\langle\tilde{\psi}(0)|$ ve $p \in [0, 1]$ ile verilir. $p = 1/t^\gamma$ ($0 \leq \gamma \leq 1$) iken kuantum yürüyüşte konum ölçümü için asimptotik davranış, $\langle s_t^{(D)} \rangle \sim t^{(1+\gamma)/2}$ olarak elde edilir (Shikano ve ark., 2010; Chisaki ve ark., 2010).

Termodinamik limitte $K \rightarrow \infty$ (ρ sabit, t yeteri kadar büyük iken), çok parçacık ile kuantum yürüyüş, tek parçacık ile kuantum yürüyüşe indirgenebilir. Birbiriyle etkileşmeyen kuantum parçacıkları ve kuantum para (coin) için çok parçacık ile kuantum yürüyüş modelindeki parçacığın tuzak noktasına düşerek soğurulması, konum ölçümü durumuna eşdeğerdir. Bu yüzden kuantum yürüyüşte konum ölçümü sonuçları, bu sisteme uygulanabilir. Kuantum yürüyüşün asimptotik davranışını gösteren $\langle s_t^{(D)} \rangle \sim t^{(1+\gamma)/2}$ bağıntısında, t anında parçacığın tuzağa düşme olasılığı $p = t^\rho/t = (1/t)^{(1-\rho)}$ yerine yazıldığında, $\langle s_t^{(T)} \rangle \sim t^{1-\frac{\rho}{2}}$ elde edilir. Bu, ortalama serbest yol olarak alınabilir. Termodinamik limitte, merkezi limit teoremi uygulanarak



Şekil 5.8 $|\uparrow\rangle$ başlangıç durumu ile başlayan kuantum yürüyüşünde $K = 81$, $K = 101$ ve $K = 201$ örgü noktası için azalma parametresi β 'nin tuzak yoğunluğu ρ ile değişimi.

yaşama olasılığının serbest yol ile,

$$\langle P(t) \rangle \sim \exp \left[-\frac{\langle s_t^{(NT)} \rangle}{\langle s_t^{(T)} \rangle} \right] \sim \exp \left[-t^{\frac{\rho}{2}} \right] \quad (5.3.3)$$

şeklinde üstel azaldığı bulunur. Bu denklemde $\langle s_t^{(NT)} \rangle \sim t$, tuzak noktalar olmadan ortalama serbest yolu belirtir. Aynı zamanda konum ölçümü olmadan kuantum yürüyüş davranışını belirtir.

Sabit tuzak yoğunluğunda yaşama olasılığı, termodinamik limit $t \ll K$ ve $t \sim K$ durumları için incelenirse; Birinci durum, geçişten (crossover) önceki zamanı belirtir. Bu durumda yaşama olasılığı, küçük t 'ler için hesaplanmalıdır. Bu nedenle yaşama olasılığı için denklem (5.3.3) direkt olarak kullanılamaz. Yaşama olasılığı küçük t 'ler için,

$$\langle P(t) \rangle \approx 1 - \langle s_t^{(T)} \rangle \sim 1 - t^{(1-\frac{\rho}{2})} \quad (5.3.4)$$

şeklinde yeniden yazılmalıdır.

$\langle P(t) \rangle \sim \exp [-t^{\beta_1}] \approx 1 - t^{\beta_1}$ olduğundan β_1 ,

$$\beta_1 = 1 - \frac{\rho}{2} \quad (5.3.5)$$

olarak elde edilir. İkinci durum, geçişten sonraki zamanı belirtir ve üstel azalma için denklem (5.3.3) direk olarak kullanılabilir. Bu durumda β_2 ,

$$\beta_2 = \frac{\rho}{2} \quad (5.3.6)$$

olarak elde edilir.

Bu analitik sonuçlar, numerik sonuçlarla Şekil (5.7)'deki gibi karşılaştırılabilir. Çok parçacık ile kuantum yürüyüşte, numerik hesaplamalarda, belirli bir yönelim durumu kullanılmış olsa da Şekil(5.7)'de görüldüğü gibi analitik ve numerik sonuçlar birbiri ile uyumludur. Bunun yanında Şekil (5.8)'de, sonlu boyut ölçeklenmesi olup olmadığını araştırılmıştır. Örgü boyu arttırıldığında ve azaltıldığında analitik sonuçlarla uyumda herhangi bir değişiklik olmadığından sonlu boyut ölçeklenmesi olmadığı söylenebilir.

BÖLÜM ALTI

SONUÇLAR

Bu tez kapsamında, kesikli kuantum yürüyüş modeli incelenmiş ve konu ile ilgili üç çalışma sunulmuştur. Dördüncü ve beşinci bölümde tanıtılan, iki boyutlu tuzaklı örgüde kuantum yürüyüşte eşevresizlik ve üç boyutlu tuzaklı örgüde eşevresizliğin boyuta bağlılığı çalışmaları, kuantum yürüyüşün zaman evriminde büyük öneme sahip olan ve kuantum yürüyüşün klasik yürüyüşe geçişine neden olan eşevresizlik ile ilgilidir. Bu çalışmalarda eşevresizlik, soğurucu tuzaklarla modellenerek, literatürdeki çalışmalara yeni bir bakış açısı getirilmiştir. Altıncı bölümde tanıtılan son çalışmada ise bir boyutlu tuzaklı örgüde gerçekleştirilen kuantum yürüyüşte parçacıkların yaşama olasılıklarının zamanla değişimi incelenmiştir.

İki boyutlu tuzaklı örgüde kuantum Hadamard, Fourier ve Grover yürüyüşlerinde eşevresizliğin incelendiği ilk çalışmada, kritik bir tuzak yoğunluğu değerine kadar kuantum yürüyüşün hızının, her zaman klasik parçacıkların yayılma hızından büyük olduğu görülmüştür. Ayrıca, bu üç yürüyüş arasında eşevresizliğe en dayanıklı olanın Hadamard yürüyüşü olduğunu bulunmuştur.

Üç boyutlu tuzaklı örgüde Hadamard yürüyüşünde eşevresizliğin boyuta bağlılığının araştırıldığı ikinci çalışmada, ortaya çıkan eş-evresizliğin kuantum durumların yayılma hızlarını etkilediği ve bu eş-evresizlik nedeniyle kuantum durumlarının yayılma hızlarının klasik rastgele yürüyüşteki yayılma hızına gittiği görülmüştür.

Üçüncü ve son çalışmada ise bir boyutlu tuzaklı örgüde çok parçacık ile kuantum yürüyüş gerçekleştirilmiştir. Bu modelde, eş-evresizliğin tersi olan eş-evreli olma hali kuantum yürüyücülerin yaşama olasılığı cinsinden modellenmiştir. Bu çalışmada, diğerlerine göre farklı bir model kullanılsa da aslında önceki iki çalışmanın devamı niteliğinde olup, önceki çalışmalarda ele alınmayan ama aslında önemli olan bir

problemi tartışmak için yapılmıştır. Bu çalışmada, kuantum durumların yaşama olasılığı, diğer bir ifadeyle eş-evrelilik, zamanın bir fonksiyonu olarak farklı tuzak yoğunlukları için incelenmiş ve kuantum durumların yaşama olasılığının zaman evriminin, gerilmiş üstel yasaya uyduğu bulunmuştur. Ayrıca kısa zaman ile uzun zaman limiti arasında bir kritik geçiş gözlenmiş olup, bu geçişin tuzaklı örgüde gerçekleştirilen klasik rastgele yürüyüşteki RS den DV ye geçiş olduğu görülmüştür.

Elde edilen bu sonuçlar, tuzakların kuantum yürüyüşler için iyi bir eş-evresizlik mekanizması olduğunu ortaya koymaktadır. Kuantum yürüyüşün, eş-evresizlik mekanizmaları altında nasıl davrandığını bilmek önemlidir. Çünkü fiziksel realizasyonlarda, her zaman tuzak veya tuzağa benzer davranışlar sergileyen eş-evresizlik mekanizmaları sistemde yer alabilir. Kuantum algoritma geliştirme çalışmaları, eş-evresizlik probleminden bağımsız olarak düşünülemez. Kuantum yürüyüş modelleri, kuantum algoritmalarının matematiksel modeli olarak kullanılmaya aday olması nedeniyle kuantum yürüyüş modellerinde, eş-evresizlik olaylarının anlaşılması önemlidir. Yapılan bu üç çalışma, bu problemin anlaşılmasına yönelik katkı niteliğindedir.

KAYNAKLAR

- Aaronson, S. ve Ambainis, A. (2005). Quantum search of spatial regions. *Monte Carlo Methods in Theoretical Physics. 1*, 47-49.
- Agliari, E., Mülken, O., ve Blumen, A. (2010). Continuous-time quantum walks and trapping. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 20(2), 271-279.
- Aharonov, D., Ambainis, A., Kempe, J., ve Vazirani, U. (2001). Quantum walks on graphs. *Proceeding of the 33rd ACM Symposium on Theory of Computing*, New York: ACM Press.
- Aharonov, Y., Davidovich L., and Zagury, N. (1993). Quantum random walks. *Phys. Rev. A*, 48(2), 1687-1690.
- Alagić, G. ve Russell, A. (2005). Decoherence in quantum walks on the hypercube. *Phys. Rev. A*, 72, 062304.
- Ambainis, A., Bach, E., Nayak A., Vishwanath A., ve Watrous J. (2001). One dimensional quantum walks. *Proceeding of the 33rd ACM Symposium on Theory of Computing*, New York: ACM Press.
- Ambainis A., Kempe J., ve Rivosh A. (2005). Coins make quantum walks faster. *Proceedings of ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, New York: AMC Press.
- Ambainis, A. (2007). Quantum walk algorithm for element distinctness. *SIAM Journal on Computing*, 37(1), 210-239.
- Anlauf, J. K. (1984). Asymptotically exact solution of the one-dimensional trapping problem. *Phys. Rev. Lett.*, 52(21), 1845-1848.
- Barkema, G. T., Biswas, P. ve Van Beijeren, H. (2001). Diffusion with random distribution of static traps. *Phys. Rev. Lett.*, 87(17), 170601.

- Broome, M. A., Fedrizzi, A. P., Lanyon, B., Kassal, I., Aspuru-Guzik, A., ve White, A. G. (2010). Discrete single-photon quantum walks with tunable decoherence. *Phys. Rev. Lett.*, *104*(15), 153602.
- Buhrman, H. and Spalek, R. (2006). Quantum verification of matrix products. *Proceedings of the 17th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. USA: ACM Press.
- Chandrashekar, C. M., Srikanth, R., ve Banerjee, S.(2007). Symmetries and noise in quantum walk. *Phys. Rev. A*, *76* (2), 022316.
- Childs, A. M., Farhi, E., ve Gutmann S. (2002). An example of the difference between quantum and classical random walks. *Quantum Information Processing*, *1*, 35-43.
- Childs, A. M., Cleve, R., Deotto E., Farhi, E., Gutmann, S., ve Spielman, D.A. (2003). Exponential algorithmic speedup by quantum walk. *Proceeding of the 35th ACM Symposium on Theory of Computing*, New York: ACM Press.
- Childs, A. M. ve Goldstone, J. (2004). Spatial search by quantum walk. *Phys. Rev. A*, *70*, 022314.
- Chisaki, K., Konno , N., Segawa, E. ve Shikano, Y. (2011). Crossovers induced by discrete-time quantum walks. *Quantum Information and Computation*, *11*, 0741-0760.
- Deutch, D. (1985). Quantum theory, the Church-Turing Principle and the universal quantum computer. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, *400*, 97.
- Donsker, M., ve Varadhan, S. R. S. (1979). On the number of distinct sites visited by a random walk. *Commun. Pure Appl. Math.* *32* (6), 721-747.
- Du, J., Li, H., Xu, X., Shi, M., Wu, J., Zhou, X., ve Han, R. (2003). Experimental implementation of the quantum random-walk algorithm. *Phys. Rev. A*, *67*, 042316.
- Dür, W., Raussendorf, R., Kendon, V. M., ve Briegel, H. J.(2002). Quantum walks in optical lattices. *Phys. Rev. A*, *66* (5) 052319.

- Einstein, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Ann. Phys. (Leipzig)* 322 (8), 549-560.
- Farhi, E., ve Gutmann, S.(1998). Quantum computation and decision trees. *Phys. Rev. A*, 58 (2), 915-928.
- Feynman, R.P., Leighton, R.B., ve Sands, M. (1964). Feynmann Lectures on Physics. Boston: Addison Wesley.
- Feynman, R. P. (1982). Simulating physics with computers. *Int. J. Theo. Phy.*, 21 (6), 467-488.
- Feynman, R. P. (1986). Quantum mechanical computers. *Foundation of Physics*, 16 (6), 507-531.
- Flory, P. J. (1971). Principles of polymer chemistry. Ithaca, NY: Cornell University Press.
- Gallos, L. K. ve Argyrakis, P. (2001). Accurate estimation of the survival probability for trapping in two dimensions. *Phys. Rev. E*, 64 (5), 051111.
- Gönüloğlu, M., Aydiner, E. ve Mustecaplıoğlu, Ö. E. (2009). Decoherence in two-dimensional quantum random walks with traps. *Phys. Rev. A*, 80 (2), 022336.
- Gönüloğlu, M., Aydiner, E., Shikano, Y., ve Mustecaplıoğlu, Ö. E. (2011). Survival probability in a one-dimensional quantum walk on a trapped lattice. *New J. Phys.*, 13, 033037.
- Goyal, S. K. ve Chandrashekar, C. M. (2010). Spatial entanglement using a quantum walk on a many-body system. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 43 (23), 235303.
- Grassberger, P. ve Procaccia, I. (1982). The long time properties of diffusion in a medium with static traps. *J. Chem. Phys.*, 77 (12), 6281.
- Grossman, J. M., Ciampini, D., D'Arcy, M., Helmerson, K., Lett, P. D., Phillips, W. D., Vaziri, A., ve Rolston, S. L. (2004). Implementation of a quantum random walk with a sodium Bose- Einstein condensate. *The 35th Meeting of the Division of Atomic, Molecular and Optical Physics*, Tuscon, AZ: (DAMOP04).

- Grover, L. K. (1996). A fast quantum mechanical algorithm for database search. *Proceeding, 28th Annual ACM Symposium on the theory of computation*. New York: ACM Press.
- Guillotín-Plantard, N. ve Schott, R. (2006). Dynamic random walks: Theory and application. Amsterdam: Elsevier.
- Haus, J. W., ve Kehr, K. W. (1987). Diffusion in regular and disordered lattices. *Phys. Rep.*, 150 (5-6), 263-406.
- Havlin, S., Weiss, G. H., Kiefer, J. E. ve Dishon, M. (1984). Exact enumeration of random walks with traps. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 17 (6), L347.
- Havlin, S., ve Ben-Avraham, D. (1987), Diffusion in disordered media. *Adv. Phys.*, 36 (6), 695-798.
- Hughes, B. D. (1995). Random walks and random environments: Volume 1: Random walks, United States: Oxford University Press.
- Jayannavar, A. M. ve Köhler, J. (1990). Density of states in the band tails and random multiplication in a diffusive medium. *Phys. Rev. A*, 41 (6), 3391-3394.
- Jayannavar, A. M. (1991). Quantum transport in the presence of traps. *Solid State Commun.*, 77 (6), 457-460.
- Jerrum, M., Sinclair, A., and Vigoda E. (2001). A polynomial-time approximation algorithm for the permanent of a matrix with non-negative entries. *Proceedings of the 33th STOC*, New York: ACM Press.
- Karski, M., Förster, L., Choi, J. M., Steffen, A., Alt, W., Meschede, D., ve Widera, A. (2009). Quantum walk in position space with single optically trapped atoms. *Science*, 325 (5937), 174-177.
- Kendon, V. ve Tregenna, B. (2003). Decoherence can be useful in quantum walks. *Phys. Rev. A*, 67, 042315.
- Kendon, V. M., Sanders, B. C. (2004). Complementarity and quantum walks. *Phys. Rev. A*, 71, 022307.

- Kendon, V. (2007). Decoherence in quantum walks. *Math. Struct. in Comp. Science*, 17(6), 1169-1220.
- Kempe, J. (2003). Quantum random walks: An introductory overview. *Contemp. Phys.*, 44 (4), 307-327.
- Kempe, J. (2005). Discrete quantum walks hit exponentially faster. *Probability Theory and Related Fields*, 133 (2), 215-235.
- Konno, N. (2002). Quantum random walks in one dimension. *Quantum Inf. Proc.*, 1 (5), 345-354.
- Konno, N. (2005). A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk. *J. Math. Soc. Japan* 57 (4), 1179-1195.
- Konno, N. (2005). A path integral approach for disordered quantum walks in one dimension. *Fluctuation and Noise Letters* 5 (4), 529-537.
- Lifshitz, I. M. (1964). The energy spectrum of disordered systems. *Adv. Phys.*, 13 (52), 483-536.
- Lu, D., Zhu, J., Zou, P., Peng, X., Yu, Y., Zhang, S., Chen, Q., ve Du J. (2010). Experimental implementation of a quantum random-walk search algorithm using strongly dipolar coupled spins. *Phys. Rev. A*, 81 (2), 022308.
- Mackay, T. D., Bartlett, S. D., Stephenson L. T., ve Sanders, B. C. Quantum walks in higher dimensions. (2002). *J. Phys. A: Math. Gen.*, 35 (12), 2745.
- Magniez, F., Santha, M., ve Szegedy, M. (2005). Quantum algorithms for the triangle problem. *Proceedings of 16th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. Canada: SIAM.
- Magniez, F. ve Nayak, A. (2007). Quantum complexity of testing group commutativity. *Algorithmica*, 48 (3), 221-232.
- Manouchehri, K. ve Wang, J. B. (2008). Quantum walks in an array of quantum dots. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41, 065304.

- Moore, C. ve Russell, A. (2002). Quantum walks on the hypercube. *In Proceedings of the 6th International Workshop on Randomization and Approximation Techniques*, London, UK: Springer- Verlag.
- Mülken, O., Blumen, A., Amthor, T., Giese, C., Reetz-Lamour, M. ve Weidemüller, M. (2007). Survival probabilities in coherent exciton transfer with trapping. *Phys. Rev. Lett.*, *99* (9), 090601.
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2000). Quantum computation and quantum information. Cambridge: Cambridge University Press.
- Nieuwenhuizen, Th. M. (1989). Trapping and lifshitz tails in random media, self-attracting polymers, and the number of distinct sites visited: A renormalized instanton approach in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, *62* (4), 357-360.
- Oliveira, A. C., Portugal, R., and Donangelo, R.(2006). Decoherence in two-dimensional quantum walks. *Phys. Rev. A*, *74* (1), 012312.
- Omar, Y., Paunkovic, N., Sheridan, L. ve Bose, S. (2006). Quantum walk on a line with two entangled particles. *Phys. Rev. A*, *74* (4), 042304.
- Parris, P. E. (1989). One-dimensional quantum transport in the presence of traps. *Phys. Rev. B*, *40* (7), 4928-4937.
- Parris, P. E. (1989). One-dimensional trapping kinetics at zero temperature. *Phys. Rev. Lett.*, *62* (12), 1392-1395.
- Pearson, K. (1905). The problem of the random walk. *Nature* *72*, 294.
- Perets, H. B., Lahini, Y., Pozzi, F., Sorel, M., Morandotti, R., ve Silberberg, Y. (2008). Realization of quantum walks with negligible decoherence in waveguide lattices. *Phys. Rev. Lett.*, *100*, 170506.
- Phillips, J. C. (1996). Stretched exponential relaxation in molecular and electronic glasses. *Rep. Prog. Phys.*, *59* (9), 1133.
- Romanelli, A., Siri, R., Abal, G., Auyuanet, A., ve Donandelo, R. (2005). Decoherence in the quantum walk on the line. *Physica A*, *347*, 137-152.

- Rosenstock, H. B. (1970). Random Walks on Lattices with Traps. *J. Math. Phys.*, 11 (2), 487.
- Ryan, C. A., Laforest, M., Boileau, J. C., ve Laflamme, R. (2005). Experimental implementation of discrete time quantum random walk on an NMR quantum information processor. *Phys. Rev. A*, 72 062317.
- Sanders, B. C., Bartlett, S. D., Tragenna, B., ve Knight, P. L. (2003) Quantum quincunx in cavity quantum electrodynamics. *Phys. Rev. A*, 67, 042305.
- Shapira, D., Biham, O., Bracken A. J., ve Hackett, M. (2003). One-dimensional quantum walk with unitary noise. *Phys. Rev. A*, 68 (6), 062315.
- Schotland, J. (1988). Short-time behavior of diffusion with random traps. *J. Chem. Phys.*, 88 (2), 907.
- Schöning, U. A. (1999). Probabilistic algorithm for k-sat and constraint satisfaction problem. *40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, New York: IEEE
- Schreiber, A., Cassemiro, K. N., Potoček, V., Gábris, A., Mosley, P. J., Andersson, E., Jex, I., ve Silberhorn, Ch. (2010). Photons walking the line: a quantum walk with adjustable coin operations. *Phys. Rev. Lett.*, 104 (5), 050502.
- Shenvi, N., Kempe J., ve Whaley, K. B. (2003). Quantum random-walk search algorithm. *Phys. Rev. A*, 67, 052307.
- Shikano, Y., Chisaki, K., Segawa, E. ve Konno, N. (2010). Emergence of randomness and arrow of time in quantum walks. *Phys. Rev. A*, 81 (6), 062129.
- Shikano, Y. (2011). Differences between quantum walks and classical random walks in limit distributions. *AIP Conf. Proc.*, 1327, 487-491.
- Shor, P. W. (1994). Algorithms for quantum computation : Discrete logarithms and factoring. *Proceeding, 35th Annual Symposium on foundations of Computer Science*. Los Alamitos, CA: IEEE Press.
- Sinclair, A. (1993). Algorithms for random generation and counting, a markov chain approach. Boston: Birkhauser Press.

- Smoluchowski M.(1906). Zur kinetischen theorie der brownschen molekularbewegung und der suspensionen. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 326 (14), 756-780.
- Travaglione, B. C. ve Milburn, G. J. (2002). Implementing the quantum random walk. *Phys. Rev. A*, 65, 032310.
- Tregenna, B., Flanagan,W., Maile, R., ve Kendon, V. (2003). Controlling discrete quantum walks: coins and initial states. *New J. Phys.*, 5, 83.
- Weiss, G. H. (1994). Aspects and applications of the random walk, Amsterdam: North-Holland.
- Zähringer, F., Kirchmair, G., Gerritsma, R., Solano, E., Blatt, R., ve Roos, C. F. (2010). Realization of a quantum walk with one and two trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 104 (10), 100503.