

150709

# İÇİNDE AKIŞ OLAN DENİZ DEŞARJ BORULARININ DİNAMİK ANALİZİ

Dokuz Eylül Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

Deniz Bilimleri ve Teknolojisi Enstitüsü

Kıyı Mühendisliği Bölümü

Bozkurt Burak ÖZHAN

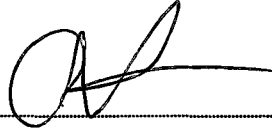
Ocak, 2004

İZMİR

150809

## Yüksek Lisans Tezi Sınav Sonuç Formu

**BOZKURT BURAK ÖZHAN** tarafından **ÖĞR. GÖR. DR. A. HÜSNÜ ERONAT** yönetiminde hazırlanan “**İÇİNDE AKIŞ OLAN DENİZ DEŞARJ BORULARININ DİNAMİK ANALİZİ**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



Öğr. Gör. Dr. A. Hüsnü Eronat  
Yönetici

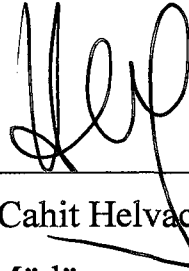
Yrd. Doç. Dr. Erdem Sayın

Jüri Üyesi



Doç. Dr. Hakan Boyacı

Jüri Üyesi



Prof. Dr. Cahit Helvacı

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

---

## TEŞEKKÜR

---

Ne zormuş böyle bir yazıyı yazmak. Nereden başlasam bilemiyorum. Yaşadığım süre zarfında bana destek olmuş, hayatımı paylaştığım herkesi birden buraya sığdırabilmem imkansız görünüyor. Duygularımı birazcık genel cümlelerle aktarmam gerekiyor galiba...

Öncelikle beni bugünlere getiren aileme ve tüm sevdiklerime çok teşekkür ederim. Öğrenim hayatım boyunca –ana okulundan bugüne- bana emeği geçen bütün öğretmenlerime şükran ve saygılarımı sunarım. Biliyorum hiçbirinin hakkını ödeyemem...Sağ olsunlar...

Tez danışmanım Sn. Öğr. Gr. Dr. Attila Hüsnü ERONAT' a , Sn..Arş. Gr. Adem EREN' e , sevgili Tolga, Şafak ve Selahattin'e, tüm okul ve sınıf arkadaşlarıma, ayrıca biz öğrencilerle ilgilenen Fen Bilimleri Enstitüsü ile Deniz Bilimleri ve Teknolojisi Enstitüsünün öğretim kadrosuna ve personeline teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca bana ışık tutan, referanslar bölümünde belirttiğim, makale, kitap ve diğer çalışmaların yazarları değerli bilim adamlarına da saygılarımı sunarım.

Ve Sn. Arş. Gr. B. Gültekin SINIR' a tez çalışmamız boyunca gösterdiği yakın ilgiden, rehberliğinden ve paylaşımından dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım .

Bozkurt Burak ÖZHAN

---

## ÖZET

---

Bu çalışmada akışkan taşıyan, elastik zemin üzerinde ve hareketli olan sınır şartları bulunan borular üzerinde çalışılmıştır. Hareket denklemi Hamilton prensibi kullanılarak çıkarılmıştır. Sonuç olarak gelen kısmi diferansiyel denklemler Galerkin metodu kullanılarak ayrıştırılmıştır. Sonuçlar Galerkin metodunda, seri için bir ve iki terim kesimle incelenmiştir. Böylelikle sonuçlar olarak bulunur. Nümerik sonuçlarda bunu desteklemektedir. Nümerik sonuçlar bize sistemin rezonans değerlerini göstermektedir. Bu noktalar sistem stabilitesi açısından çok önemlidir.

**Anahtar Sözcükler : Akışkan taşıyan boru, hareketli sınır şartları, Galerkin metodu, boru titreşimi**

---

## ABSTRACT

---

In this study pipes conveying fluid on elastic foundation with moving boundary conditions are studied. The equation of motion is developed using Hamilton's principle. The resulting partial differential equations are discretized using Galerkin's method. One and two series approximation are considered in the Galerkin's method. The one and two term approximations leads to ordinary differential equations, the solution of which is well know. Its solution can be found exactly. Numerical results support it. The numerical results show the resonance points of the system. They are very important for the system stability.

**Keywords:** Pipe conveying fluid, moving boundary conditions, Galerkin's method, pipe vibrations

---

## İÇİNDEKİLER

---

	Sayfa
Teşekkür.....	I
Özet.....	II
Abstract.....	III
İçindekiler.....	IV
Şekil Listesi.....	VI

### Bölüm Bir

#### GİRİŞ

1. 1. Akışkan Taşıyan Boruların Dinamiği Çalışmaları .....	1
1. 2. Bu Çalışmadaki Yaklaşım.....	3

### Bölüm İki

#### HAREKET DENKLEMLERİ

2. 1. Hamilton Prensibi.....	4
2. 2. İçinde Akış Olan Boru İçin Potansiyel Ve Kinetik Enerjinin Yazılması.....	4
2. 2. 1. Potansiyel Enerji.....	5
2. 2. 2. Kinetik Enerji.....	5
2. 3. Sistem Lagrangianı.....	6
2. 4. Hamilton Prensibinin Uygulanması.....	6
2. 4. 1. En Genel Euler- Lagrange Çözümü.....	7
2. 4. 2. En Genel Euler-Lagrange Çözümünün Sisteme Uygulanması.....	7

**Bölüm Üç****ELASTİK ZEMİN VE DIŞ KUVVET ETKİLERİ**

3. 1. Genel.....	9
3.2. Elastik Zemin Katsayısı.....	10
3.3. Dış Kuvvet Etkisi (Zorlanma).....	11

**Bölüm Dört****SINIR ŞARTLARI**

4. 1. Sistemde Kullanılan Sınır Şartları.....	12
4. 2. Denklem Boyutsuzlaştırılması.....	13

**Bölüm Beş****DENKLEMİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ**

5. 1. Denklem En Son Hali.....	17
5. 2. Galerkin Yöntemi.....	17
5. 3. $Y_n(x)$ Fonksiyonunun Bulunması.....	18
5. 4. Galerkin Yönteminin Uygulanması.....	19

**Bölüm Altı****SONUÇLAR**

6. 1. Sonuçlar.....	30
6. 2. Değerlendirme.....	39
Referanslar.....	40

---

## ŞEKİL LİSTESİ

---

Şekil 2. 1. İçinde akış olan boru.....	5
Şekil 3. 1. Elastik zemine oturmuş kiriş.....	8
Şekil 6. 1. zemin parametreleri $k_0 = 50$ ve $\gamma = 0.0$ $\gamma = 1.0$ $\gamma = 2.0$ durumu....	33
Şekil 6. 2. zemin parametreleri $k_0 = 100$ ve $\gamma = 0.0$ $\gamma = 1.0$ $\gamma = 2.0$ durumu....	34
Şekil 6. 3. zemin parametreleri $k_0 = 150$ ve $\gamma = 0.0$ $\gamma = 1.0$ $\gamma = 2.0$ durumu....	35
Şekil 6. 4. zemin parametreleri $k_0 = 50$ ve $\gamma = 0.0$ $\gamma = 1.0$ $\gamma = 2.0$ ile doluluk oranı $\beta = 0.8$ durumu.....	36
Şekil 6. 5. zemin parametreleri $k_0 = 100$ ve $\gamma = 0.0$ $\gamma = 1.0$ $\gamma = 2.0$ ile doluluk oranı $\beta = 0.8$ durumu .....	37
Şekil 6. 6. zemin parametreleri $k_0 = 150$ ve $\gamma = 0.0$ $\gamma = 1.0$ $\gamma = 2.0$ ile doluluk oranı $\beta = 0.8$ durumu .....	38



---

## BÖLÜM BİR

### GİRİŞ

---

#### 1. 1. Akışkan Taşıyan Boruların Dinamiği Çalışmaları

Akışkan taşıyan borularla ilgili çalışmalar oldukça eskiye dayanmaktadır. Bu konu hakkında ilk geniş kapsamlı, başka bir deyişle ilk ciddi çalışma İkinci Dünya Savaşı' nın patlak verdiği yılda (1939) Bourrieres tarafından yayınlanmıştır (Paidoussis, M. P. ve Lee, G. X. 1993) .

O günlerden itibaren bu konu birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve günümüze kadar oldukça çok çalışma yapılmıştır. Bu konu ele alınış itibariyle bir hayli çeşitlilik gösteren bir konudur. Bu sebeple değişik mühendislik disiplinleri tarafından ele alınabilir. Elbetteki temeli “mekanik” konusudur. Ancak akış taşıyan boru bir makine elemanı olarak düşünülürse Makine Mühendisliği disiplini altında, deşarj borusu olarak düşünülürse Kıyı – İnşaat – Çevre Mühendisliği disiplinleri altında incelenebilir. Sisteme etkiyen dış etkenler açısından bakılacak olursa; örneğin zemin etkileri konuyu Zemin Mekanik Mühendisliği alanına taşır. Denizdeki akış taşıyan boruya etkiyen dalga, akıntı kuvvetleri açısından bakılırsa dalga mekaniği yani Kıyı Mühendisliğinin çalışma alanına girer. Denklemlerin çözümleri açısından bakılacak olursa Uygulamalı Matematik disiplini için ilgi çekici bir çalışma olarak görülebilir.

Akış taşıyan boru dinamiğinin günümüzde geldiği noktalara bakılacak olursa konunun önemi ve genişliği daha iyi anlaşılır. Bu alanda yapılan dinamik analizlere bakılacak olursa borunun, mesnetlerin, temelin, boru içi akışın durumu ve konumuna göre analizler çeşitlendirilebilir.

Yapılan dinamik analizlerde ele alınan bazı çalışmalar şöyledir; Mesnetli düz borularda akışkan kuvvetlerinin ele alınışı ve deneysel gerçeklemeler, konsol düz boruların lineer ve lineer olmayan dinamik açısından incelenmesi, elastik mesnetli sistemler, kütle eklenmiş sistemler, elastik temel, kaos dinamiği, boruların kararsız akış içermesi durumu, ayrıca düz olmayan boruların incelenmesi (Paidoussis ve X.Li 1993). Konsol borularda titreşimin kontrolü için akışkan hareketini kullanmak, koriolis kuvveti etkisinin bir titreşim kontrolörü olduğunu kanıtlamak, ayrıca yapısal sönüm etkisinin dikkate alınması ve sonlu farklar metodu ile hareket denkleminin çözümü (S. E. Semercigil, Ö. F. Turan ve S. Lu 1997). Titreşimi belirli aralıklarla mesnet kullanımı ile azaltma (G. H. Koo ve Y. S. Park 1998). Su altında, eğimli ve iç ile dış akımı olan boru tasarımı, rezonans frekansı hesabı, çalışma koşulları içindeki bazı parametrelerin tasarımdaki önemi, frekans dağılımı, eğim etkileri, optimum akış hızı seçeneği, kritik boru boyu, derinlik etkisi (X. Wang ve F. Bloom 1999). Akışkan taşıyan yapıların perturbasyon yaklaşımı ile titreşim analizinin yapılması (Lees, A. W 1999). Zamana bağlı olarak değişen hıza sahip eksenel hareketli kirişlerin titreşimi ( Pakdemirli M. ve Öz, H. R. 1999). Değişken akış hızı olan borular için titreşim analizi (Öz, H. R. ve Boyacı H. 2000). Sınır şartları ideal olan ve akışkan taşıyan konsol boruların dinamik stabilitesi, elastik bir zemin üzerinde olma durumu (P. Djondjorov, V. Vassilev ve V. Dzhupanov 2001). İdeal olmayan sınır şartlarının sürekli sistemlerin titreşimine etkileri (Pakdemirli, M . ve Boyacı, H. 2001). Esnek, uzayabilen ve akışkan taşıyan deniz borularının sınır şartlarının ideal olduğu durum için dinamik analizi (şekil değişimi)(S. Chucheepsakul, T. Monprapussorn ve T. Huang 2003). Orta noktasında ideal olmayan mesneti bulunan basit mesnetli kirişlerin titreşimi (Pakdemirli, M. ve Boyacı, H. 2003)

Görüldüğü gibi çalışmalar boru konumu, mesnet durumu, sınır şartları, zemin durumu ve sistemlerin matematiksel çözümleri gibi faktörler göz önüne alınarak çeşitlilik göstermektedir.

## 1. 2. Bu Çalışmadaki Yaklaşım

Bu çalışmada elastik zemin üzerine oturmuş, içinde akış olan bir deşarj borusu düşünülmüştür. Boru mesnedi basit-basit mesnet olarak temsil edilmiştir. Ayrıca burada ele alınan borunun sınır şartlarının homojen olmadığı varsayılmıştır. Homojen olmayan sınır şartlarında mesnetlerde zamana bağlı bir hareket söz konusudur (bkz. Bölüm Dört). Sınır şartları homojen hale getirilip öyle çözülmüştür.

Denklem, sistem Lagrangian'ının yazılması, Hamilton prensibine en genel Euler-Lagrange yönteminin uygulanması ile bulunmuştur. Sistem, sınır şartları homojen hale getirildikten sonra Galerkin yöntemi ile diferansiyel denklem yarı analitik olarak çözülmüştür. Nümerik sonuçlar alınarak analiz edilmiştir. Bu analizde sisteme, hareketli mesnetlerden dolayı etkiyen dış kuvvetin frekansı ile sistemin frekansı incelenmiştir. Matematiksel denklemlerle açık olarak görülebilen rezonans noktaları belirtilmiştir. Bu noktalarda genlik sonsuza gitmekte ve sistem rezonans haline geçmektedir. Stabilite analizi için bu durum önemlidir.

---

## BÖLÜM İKİ

# HAREKET DENKLEMLERİ

---

### 2. 1. Hamilton Prensibi

Burada önce türevler hakkında bilgi vermek faydalı olacaktır. Bu çalışmada konuma göre türevler ( ) ile gösterilmiştir. Zamana bağlı türevler ise ( ) ile gösterilmiştir.

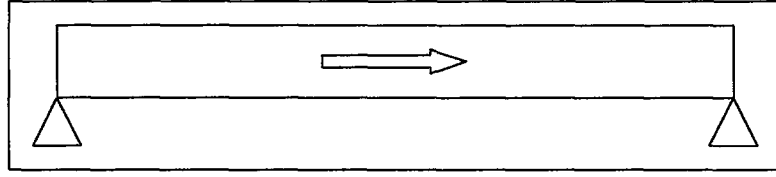
Hamilton prensibi en genel tanımıyla bir sistemin Lagrangian' ının (bkz. Bölüm 2. 4. ) belirli bir t (zaman) aralığında integralinin varyasyonunun sıfır olmasıdır. Bu tanımın matematiksel ifadesi şöyledir;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

İlerideki bölümlerde enerjiler bulunup sistem Lagrangian' ı yazıldıktan sonra bu prensip uygulanacaktır.

### 2. 2. İçinde Akış Olan Boru İçin Potansiyel Ve Kinetik Enerjinin Yazılması

İçinde akış olan boruyu şekil 2. 3. ile gösterebiliriz. Şekilde boru düşey yer değiştirmesi (titreşim) “ W ” ile, akışkan yer değiştirmesi ise “v “ ile gösterilmiştir. Boru düşey yer değiştirmesi konuma ve zamana bağlı bir fonksiyondur. Akışkan hızı ise sabit alınmıştır. Ayrıca denklemde bir ” u “ yatay yerdeğiştirme fonksiyonu da ele alınmıştır. Ancak hareket denklemi çıkarılırken bu fonksiyon “sıfır” alınacak böylelikle yatay yerdeğiştirme etkisi olmayacaktır.



Şekil 2. 1. İçinde akış olan boru

### 2. 2. 1. Potansiyel Enerji

Boru için potansiyel enerji - kırıktan farklı olarak- şekil değiştirme ve eksensel gerilme etkileri düşünülmeden sadece yatay eksen boyunca “  $W(x,t)$  ” düşey yer değişimi faktörü ele alınarak ;

$$P.E. = \frac{1}{2} EI \int_0^L (W'')^2 dx$$

şeklinde yazılır. Burada “  $EI$  ” boru rijitliğidir.

### 2. 2. 2. Kinetik Enerji

Toplam kinetik enerji;

$$K.E. = \frac{1}{2} \rho_A A_A \int_0^L \left[ (u + u'v + v)^2 + (W + W'v)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \rho_B A_B \int_0^L (W')^2 dx$$

şeklinde yazılır. Denklemdaki kütle ifadesindeki indislerden anlaşılacağı gibi birinci integral akışkan, ikinci integral ise boru ile ilgili terimlerdir.

Denklemden geçen “  $\rho_A A_A$  ” akışkan kütlelerini ( $m_A$ ), “  $\rho_B A_B$  ” boru kütlelerini ( $m_B$ ) göstermektedir.

### 2. 3. Sistem Lagrangianı

“L” terimi ile ifade edilen Lagrangian’dır. Bu terim sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerinin farkını temsil eder. Zamana bağlı olarak alınan integralinin varyasyonu Hamilton prensibini gerçekler. İçinde akış olan boru için elde ettiğimiz enerji denklemlerinin lagrangianı ;

$$L = K.E. - P.E$$

$$L = \frac{1}{2} \rho_A A_A \int_0^L \left[ (u + u'v + v)^2 + (\dot{W} + W'v)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \rho_B A_B \int_0^L (\dot{W})^2 dx - \frac{1}{2} EI \int_0^L (W'')^2 dx$$

olarak bulunur.

### 2. 4. Hamilton Prensibinin Uygulanması

Lagrangianın zamana bağlı integralinin varyasyonu zaman ve konuma bağlı çift katlı integralin çözümünü gerektirir;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{1}{2} \left\{ \rho_A A_A \left[ (u + u'v + v)^2 + (\dot{W} + W'v)^2 \right] + \left[ \rho_B A_B (\dot{W})^2 \right] - \left[ EI (W'')^2 \right] \right\} dx dt = 0$$

Euler-Lagrange çözümünde kullanılacak fonksiyon;

$$f = \frac{1}{2} m_A \left[ (u + u'v + v)^2 + (\dot{W} + W'v)^2 \right] + \left[ m_B (\dot{W})^2 \right] - \left[ EI (W'')^2 \right]$$

### 2. 4. 1. En Genel Euler-Lagrange Çözümü

bağımsız değişken sayısı “ m “

bağımlı değişken sayısı “ n ”

p’inci türevler 
$$“ u_{n,m}^p = \frac{\partial^p u_n}{\partial x_m^p} “$$

olarak kabul edilsin.

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

.

.

.

$$u_n = u_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

şeklinde tanımlanırsa;

“ En genel Euler-Lagrange denklemi “

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x_j^k} \left( \frac{\partial f}{\partial u_{i,j}^k} \right) = 0$$

i = 1, 2, 3, .....n olarak yazılır.

### 2. 4. 2. En Genel Euler-Lagrange Çözümünün Sisteme Uygulanması

Sistemimizde oluşturacağımız fonksiyonda bağımlı değişkenlerimiz “ u “ ile “ W “ dir. Bağımsız değişkenlerimiz ise “ x “ ile “ t “ dir.

$$u = u(x, t)$$

$$W = W(x, t)$$

olmak üzere,

$f(u, W, x, t, u', \dot{u}, W', \dot{W}, W'')$  fonksiyonu için Euler-Lagrange denklemini şu şekilde yazarız;

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial u'} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial W} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial W'} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{W}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial W''} \right) = 0$$

Yazılan iki denklem ışığında ve borunun yatay yer değiştirmesi " $u(x, t)$ " nin sıfır olduğu kabulü ile gerekli türevler alınıp yerine yazılırsa ortaya sistemimizin "Hareket Denklemi" çıkar;

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2m_A v \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + (m_B + m_A) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + m_A v^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$



---

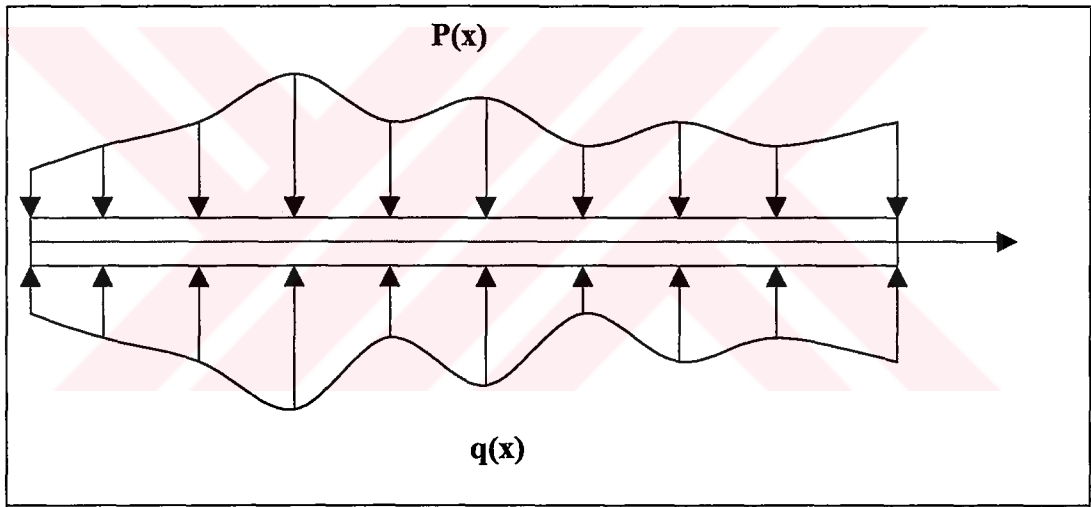
## BÖLÜM ÜÇ

### ELASTİK ZEMİN VE DIŞ KUVVET ETKİLERİ

---

#### 3. 1. Genel

Şekil 3. 1. de görülen kiriş elastik zemine oturmuştur. “  $p(x)$  “ yükleri kirişe “  $W(x)$  “ çökmelerini yaptırır ve kiriş zeminden “  $q(x)$  “ tepkilerini görür.



**Şekil 3. 1. Elastik zemine oturmuş kiriş**

Kiriş üzerindeki bileşke yük “  $p(x) - q(x)$  “ tir. Sistem için diferansiyel denklem;

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = p(x) - q(x) \quad \text{olarak yazılır.}$$

Denklemdaki  $q(x)$  için ortaya atılan bir hipotez “ Winkler Hipotezi “ dir. Bu hipotezde elastik ortam için herhangi bir noktada meydana gelen “  $q$  “ tepkimesinin o noktadaki “  $W$  “ çökmesi ile orantılı olduğu söylenmiştir. “  $k$  “ elastik zemin sabiti olmak üzere;

$$q(x) = k W(x)$$

olur. Diferansiyel denklemde yerine konulursa;

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = p(x) - k W(x)$$

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + k W(x) = p(x)$$

haline gelir. Bu ifade için homojen ve özel çözümler yapılır.

### 3. 2. Elastik Zemin Katsayısı

İçinde akış olan boru için çıkardığımız hareket denkleminde zemin etkisi ortaya konmamıştır. Ancak deşarj borusu elastik bir zemine oturduğundan, hareket denklemini içinde bu etki ortaya konmalıdır. Eksensel düzlem boyunca ( $x$ - ekseni boyunca) zeminin yatak katsayısı için aşağıdaki kabul yapılmıştır (P. Djondronov, V. Vassilev ve V. Dzhupanov 2001)

$$k(x) = \frac{EI}{L^4} k_0 \left\{ 4(1-\gamma) \left( \frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \right) + 1 \right\}$$

Bu ifadede  $k_0$  ve  $\gamma$  zemin parametreleridir.

### 3. 3. Dış Kuvvet Etkisi ( Zorlanma )

Bölüm 3. 1. de bahsedilen “  $p(x)$  “ x-ekseni boyunca sisteme etkiyen dış kuvvettir. Bu çalışmada sayısal işlem aşamasında dış kuvvet sıfır olarak kabul edilmiştir.Sistem serbest titreşim halinde olmakla beraber dış kuvvet terimi sadece görülmesi amacıyla ele alınmıştır.



---

## BÖLÜM DÖRT

### SINIR ŞARTLARI

---

#### 4. 1. Sistemde Kullanılan Sınır Şartları

Elastik zemin ve dış kuvvet etkilerinin eklenmesi ile denklem şu hale gelmiştir;

$$(EI) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + (2m_A v) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + (m_B + m_A) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + (m_A v^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + k(x)W = p(x,t)$$

$$W(0) = k_1(x,t)$$

$$W(L) = k_2(x,t)$$

$$W''(0) = 0$$

$$W''(L) = 0$$

Görüldüğü gibi basit mesnet sınır şartları homojen olmayan sınır şartları olarak tanımlanmıştır. Mesnetlerde bir “ hareket “ söz konusudur.

Bu hareketin fonksiyonları şunlardır;

$$k_1(t) = \Omega_0 \cos \Omega_1 t$$

$$k_2(t) = \Omega_0 \cos \Omega_2 t$$

#### 4. 2. Denklemin Boyutsuzlaştırılması

Sınırları küçültmek dolayısı ile işlem kolaylığı açısından denklemin boyutsuzlaştırılalım;

( not: Denklemdaki değişkenler geçici olarak üstel ( ^ ) şeklinde gösterilecektir. Denklem boyutsuz yazılırken tekrar üstel olmayan yazıma dönülecektir. Böylece denklemin boyutsuz olarak yazarken gösterimde açıklık sağlanması amaçlanmıştır.)

$$(EI) \left( \frac{\partial^4 \hat{W}}{\partial \hat{x}^4} \right) + (2m_A v) \left( \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} \right) + (m_B + m_A) \left( \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \hat{t}^2} \right) + (m_A v^2) \left( \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \hat{x}^2} \right) + k(\hat{x}) \left( \hat{W} \right) = p(\hat{x}, \hat{t})$$

$$W = \frac{\hat{W}}{L}$$

$$x = \frac{\hat{x}}{L}$$

$$t = \hat{t} \sqrt{\frac{EI}{(m_A + m_B)L^4}}$$

$$\frac{\partial^4 \hat{W}}{\partial \hat{x}^4} = \frac{1}{L^3} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} = \frac{1}{L^2} \left[ \frac{EI}{m_A + m_B} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \hat{t}^2} = \frac{1}{L^3} \frac{EI}{(m_A + m_B)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \hat{x}^2} = \frac{1}{L} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$\beta = \frac{m_A}{m_A + m_B} \quad (\text{doluluk oranı})$$

$$V = v L \sqrt{\frac{m_A}{EI}} \quad (\text{boyutsuz hız})$$

$$K(x) = k_0 \{ 4(1-\gamma)(x^2 - x) + 1 \}$$

$$f(x, t) = \frac{L^3}{EI} p(\hat{x}, \hat{t})$$

olmak üzere boyutsuz denkleminiz şöyledir ;

$$\left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) + 2\sqrt{\beta} V \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \right) + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) + V^2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + K(x) (W) = f(x, t)$$

Bu boyutsuz denklemin sınır şartları ise;

$$W(0) = k_1(x, t)$$

$$W(1) = k_2(x, t)$$

$$W''(0) = 0$$

$$W''(1) = 0$$

Bu şekilde boyutsuz ve homojen olmayan sınır şartlarındaki denklemin yazmış olduk.

Bundan sonraki aşamada bu sınır şartlarının homojen gibi ele alınması için bir yöntem uygulanacaktır.

Sınır şartlarını homojen hale getirmek için aşağıdaki işlemler yapılır;

$W = z + y$  olsun. (Aliyev, G. G. 1998)

$z(x, t) = k_1(t) + (k_2(t) - k_1(t))x$  fonksiyonunun sınır şartları;

$$z(0) = k_1(t)$$

$$z(1) = k_2(t) \quad \text{olur.}$$

“y” fonksiyonunun sınır şartları ise;

$y(0) = 0$  ve  $y(1) = 0$  olacaktır.

Böylelikle “W” fonksiyonunu parçalamış olduk. Şimdi ise parçalanmış hali ile bunu ana denkleminize uygulayalım;

$$\left( \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) + 2\sqrt{\beta V} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right) + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + V^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + K(x)(z + y) = f(x, t)$$

gerekli türevleri alırsak;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = \dot{k}_2(t) - \dot{k}_1(t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \ddot{k}_1(t) + \left( \ddot{k}_2(t) - \ddot{k}_1(t) \right) x$$

bu türevler ışığında gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra denklem şu hale gelir;

$$\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right) + 2\sqrt{\beta} V \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right) + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) + V^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + K(x) (y) = f_1(x, t)$$

$$f_1(x, t) = f(x, t) - 2\sqrt{\beta} V \left[ k_2^*(t) - k_1^*(t) \right] - \left[ k_1^{**}(t) + (k_2^{**}(t) - k_1^{**}(t))x \right]$$

$$- K(x) [k_1(t) + (k_2(t) - k_1(t))x]$$

Buradaki  $f(x, t)$  kuvvetimiz işlemlerde sıfır alınmıştır.





---

## BÖLÜM BEŞ

# DENKLEMİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

---

### 5. 1. Denklemin En Son Hali

Bütün yapılan işlemlerden sonra analitik ve sayısal olarak çözeceğimiz denklem ve sınır şartları aşağıdaki gibidir;

$$\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right) + 2\sqrt{\beta}V \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right) + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) + V^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + K(x) (y) = f_1(x, t)$$

Basit-Basit mesnet sınır şartları;

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 0$$

$$y''(0) = 0$$

$$y''(1) = 0$$

### 5. 2. Galerkin Yöntemi

Ortaya çıkan kısmi diferansiyel denklemi zamana bağlı adi diferansiyel denkleme dönüştürmek için Galerkin Yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntemde kısmi diferansiyel denklemin şu formda olduğu varsayılır;

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n(x)$$

Bu ifadede yer alan “  $Y_n(x)$  ” fonksiyonu bir baz fonksiyonudur. Titreşim problemlerinde bu fonksiyon en basit lineer çözümün fonksiyonu olarak alınır.

Problemin çözümünde karşımıza çıkacak olan “Kronecker Delta” işlemlerinde “  $Y_n$  ” fonksiyonlarının ortogonalite koşulu uygulanacaktır;

$$\int_0^1 Y_n(x)Y_m(x)dx = \delta_{nm} = 1 \quad n=m$$

$$= 0 \quad n \neq m$$

### 5. 3. $Y_n(x)$ Fonksiyonunun Bulunması

bu ifadede “  $w$  ” sistem frekansı olmak üzere;

$$Y_n^{IV}(x) - w^4 Y_n(x) = 0 \quad \text{denkleminin en genel çözümü}$$

$$Y(x) = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx + c_3 \cosh wx + c_4 \sinh wx$$

olarak alınır ve

$$Y(0) = 0$$

$$Y(1) = 0$$

$$Y''(0) = 0$$

$$Y''(1) = 0$$

sınır koşulları altında çözülürse;

$$w_n^2 = n^2 \pi^2 \quad \text{ve}$$

$$Y_n(x) = c \sin n\pi x \quad \text{bulunur.}$$

Bulunan fonksiyona normalizasyon işlemi uygulanırsa;

$$\int_0^1 (Y_n(x))^2 dx = 1$$

$c = \sqrt{2}$  sonucu bulunur. Bu ifadeyi yerine yazarsak fonksiyonumuz;

$$Y_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x \quad \text{olacaktır.}$$

#### 5. 4. Galerkin Yönteminin Uygulanması

$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n(x)$  eşitliğini uygularsak;

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n^{iv}(x) + 2\sqrt{\beta} V \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n(x) +$$

$$V^2 \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n''(x) + K(x) \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n(x) = f_1(x, t)$$

Burada Galerkin Metodunun uygulaması olarak “R” eşitliği alınırsa;

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n^{iv}(x) + 2\sqrt{\beta} V \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n(x) +$$

$$V^2 \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n''(x) + K(x) \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n(x) - f_1(x, t) \quad \text{ifadesi elde edilir.}$$

$\int_0^1 R Y_m(x) dx = 0$  durumu için ifade;

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \int_0^1 Y_n^{IV}(x) Y_m(x) dx + 2\sqrt{\beta} V \sum_{n=1}^{\infty} q_n^*(t) \int_0^1 Y_n'(x) Y_m(x) dx \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{**}(t) \int_0^1 Y_n(x) Y_m(x) dx + V^2 \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \int_0^1 Y_n''(x) Y_m(x) dx \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \int_0^1 K(x) Y_n(x) Y_m(x) dx - \int_0^1 f_1(x,t) Y_m(x) dx = 0 \end{aligned}$$

halini alır. Bu denklemi düzenlersek;

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ q_n^{**} \left( \int_0^1 Y_n(x) Y_m(x) dx \right) + q_n^* \left( 2\sqrt{\beta} V \int_0^1 Y_n'(x) Y_m(x) dx \right) \right. \\ & \left. + q_n \left( \int_0^1 Y_n^{IV}(x) Y_m(x) dx + V^2 \int_0^1 Y_n''(x) Y_m(x) dx + \int_0^1 K(x) Y_n(x) Y_m(x) dx \right) \right\} \\ & - \left( \int_0^1 f_1(x,t) Y_m(x) dx \right) = 0 \end{aligned}$$

Denklemi bu şekilde yazdıktan sonra aşağıdaki matrisleri tanımlayabiliriz;

$$[M] = \int_0^1 Y_n(x) Y_m(x) dx \quad (\text{Kütle matrisi})$$

$$[C] = 2\sqrt{\beta} V \int_0^1 Y_n'(x) Y_m(x) dx \quad (\text{Sönüm matrisi})$$

$$[K] = \int_0^1 Y_n^{IV}(x) Y_m(x) dx + V^2 \int_0^1 Y_n''(x) Y_m(x) dx + \int_0^1 K(x) Y_n(x) Y_m(x) dx \quad (\text{Rijitlik matrisi})$$

$$[F] = \int_0^1 f_1(x, t) Y_m(x) dx \quad (\text{kuvvet matrisi})$$

Bu matrisleri denklemdaki konumları ile gösterirsek;

$$\ddot{q}_n [M] + \dot{q}_n [C] + q [K] - [F] = 0 \quad \text{olacaktır.}$$

n ve m değerlerinin değişimine göre matrislerin alacağı değerleri göstermek gerekirse;

$$[M] = \int_0^1 Y_n(x) Y_m(x) dx$$

$$n = m \quad \text{için} \quad 1$$

$$n \neq m \quad \text{için} \quad 0 \quad \text{değerlerini alır.}$$

$$[C] = 2\sqrt{\beta} V \int_0^1 Y_n'(x) Y_m(x) dx$$

$$n = m \quad \text{için} \quad 0$$

$$n \neq m \quad \text{için} \quad n + m = 2i \quad \text{ise} \quad 0$$

$$n + m = 2i + 1 \quad \text{ise} \quad 2\sqrt{\beta} V \left( \frac{2n}{n+m} - \frac{2n}{-n+m} \right)$$

değerlerini alır. ( i = 0, 1, 2, ... )

$$[K] = \int_0^1 Y_n^{IV}(x) Y_m(x) dx - V^2 \int_0^1 Y_n''(x) Y_m(x) dx + \int_0^1 K(x) Y_n(x) Y_m(x) dx$$

$$n = m \quad \text{için} \quad n^4 \pi^4 - V^2 n^2 \pi^2 + 4 k_0 (1-\gamma) \left( \frac{-1}{6} - \frac{1}{2n^2 \pi^2} \right) + k_0$$

$$n \neq m \quad \text{için} \quad n+m = 2i \quad \text{ise} \quad 4 k_0 (1-\gamma) \left( \frac{2}{(n-m)^2 \pi^2} - \frac{2}{(n+m)^2 \pi^2} \right)$$

$$n+m = 2i+1 \quad \text{ise} \quad 0$$

değerlerini alır. (  $i = 0, 1, 2, \dots$  )

$$[F] = \int_0^1 f_1(x, t) Y_m(x) dx$$

$m = 2i$  için

$$\frac{\sqrt{2}}{m\pi} \left( k_2^{**}(t) - k_1^{**}(t) \right) - \frac{24\sqrt{2}}{m^3 \pi^3} k_0 (1-\gamma) \left( k_2(t) - k_1(t) \right) + \frac{\sqrt{2}}{m\pi} k_0 \left( k_2(t) - k_1(t) \right)$$

$m = 2i+1$  için

$$-\frac{2\sqrt{2}}{m\pi} \left( 2\sqrt{\beta} V \left[ k_2^*(t) - k_1^*(t) \right] + k_1^{**}(t) \right) - \frac{\sqrt{2}}{m\pi} \left( k_2^{**}(t) - k_1^{**}(t) \right) + \frac{16\sqrt{2}}{m^3 \pi^3} k_0 (1-\gamma) k_1(t)$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{m\pi} k_0 k_1(t) + \frac{8\sqrt{2}}{m^3 \pi^3} k_0 (1-\gamma) \left( k_2(t) - k_1(t) \right) - \frac{\sqrt{2}}{m\pi} k_0 \left( k_2(t) - k_1(t) \right)$$

değerlerini alır. (  $i = 0, 1, 2, \dots$  )

Matris formunu bu bilgilerin ışığında yazıp çözümlere geçebiliriz;

Bu aşamada Galerkin yönteminde tanımladığımız ifadede bir ve iki terimli seri açılımı için çözüm yapacağız. Seri ifadesinden anlaşılacağı gibi çözüm 1'den  $\infty$ ' a kadar değer aralığındadır. İşlemlerde ne kadar çok terim için çözüm bulunursa sistemi o kadar iyi analiz edeceğimiz aşikardır.

İlk terim için serinin çözümüne gelirsek;

Burada seri ifadesinde  $n = 1$  durumu için ortaya çıkan denklemin çözümü yapılacaktır (ayrıca  $m = 1$  olduğu da unutulmamalıdır).

$$[M] \begin{bmatrix} q_1^{**} \end{bmatrix} + [C] \begin{bmatrix} \dot{q}_1^* \end{bmatrix} + [K] \begin{bmatrix} q_1 \end{bmatrix} = [F_1]$$

matris formunun açılımı;

$$\begin{aligned} & q_1^{**} + \left( \pi^4 - V^2 \pi^2 + 4k_0(1-\gamma) \left[ -\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2} \right] + k_0 \right) q_1 \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left( 2\sqrt{\beta} V \left[ \dot{k}_2(t) - \dot{k}_1(t) + \ddot{k}_1(t) + k_1(t) k_0 \right] \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left( \left[ \ddot{k}_2(t) - \ddot{k}_1(t) \right] + k_0 \left[ k_2(t) - k_1(t) \right] \right) \\ &\quad + \frac{8\sqrt{2}}{\pi^3} \left( 2k_1(t) k_0(1-\gamma) + k_0(1-\lambda) \left[ k_2(t) - k_1(t) \right] \right) \end{aligned}$$

eşitliğini getirir. Şimdi bu diferansiyel denklemi çözelim;

Denklemin formu aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$q_1^{**} + A q_1 = F_1$$

$$\begin{aligned}
A &= \left( \pi^4 - V^2 \pi^2 + 4 k_0 (1-\gamma) \left[ -\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2} \right] + k_0 \right) \\
F_1 &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left( 2\sqrt{\beta} V \left[ \dot{k}_2(t) - \dot{k}_1(t) + \ddot{k}_1(t) + k_1(t) k_0 \right] \right) \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left( \left[ \ddot{k}_2(t) - \ddot{k}_1(t) \right] + k_0 \left[ k_2(t) - k_1(t) \right] \right) \\
&\quad + \frac{8\sqrt{2}}{\pi^3} \left( 2 k_1(t) k_0 (1-\gamma) + k_0 (1-\lambda) \left[ k_2(t) - k_1(t) \right] \right)
\end{aligned}$$

Denklemin çözümüne geçmeden önce, serinin bir ve iki terim için yazılmasından sonra özel çözümlerde kullanacağımız  $F_1$  ve  $F_2$  kuvvetlerini işlem kolaylığı olması açısından düzenleyelim;

$$F_1 = \cos \Omega_1 t \cos \Phi_1 - \sin \Omega_1 t \sin \Phi_1 + \cos \Omega_2 t \cos \Phi_2 - \sin \Omega_2 t \sin \Phi_2$$

$$F_1 = \cos(\Omega_1 t + \Phi_1) + \cos(\Omega_2 t + \Phi_2) \quad \text{yazılır. Burada;}$$

$$\tan \Phi_1 = \left( \frac{4\sqrt{\beta} V \Omega_1}{\frac{8 k_0 (1-\gamma)}{\pi^2} - k_0 + \Omega_1^2} \right)$$

$$\tan \Phi_2 = \left( \frac{-4\sqrt{\beta} V \Omega_2}{\frac{8 k_0 (1-\gamma)}{\pi^2} - k_0 + \Omega_2^2} \right) \quad \text{olarak tanımlanır.}$$



$F_2 = a \cos \Omega_1 t + b \cos \Omega_2 t$  yazılır. Burada ise

$$a = \left( \frac{\sqrt{2}}{2\pi} [\Omega_0 \Omega_1^2 - \Omega_0 k_0] + \frac{3\sqrt{2}}{\pi^3} \Omega_0 k_0 (1-\gamma) \right)$$

$$b = \left( \frac{\sqrt{2}}{2\pi} [-\Omega_0 \Omega_2^2 + \Omega_0 k_0] - \frac{3\sqrt{2}}{\pi^3} \Omega_0 k_0 (1-\gamma) \right) \text{ olarak tanımlanır.}$$

$F_1$  ve  $F_2$  kuvvetleri bu şekilde düzenlendikten sonra bir terim için yazdığımız denkleme geri dönelim. Diferansiyel denklemin homojen ve özel çözümleri yapılır ve sonuç olarak ;

$$q_1 = c_1 \cos \sqrt{A} t + c_2 \sin \sqrt{A} t + \frac{1}{A - \Omega_1^2} \cos (\Omega_1 t + \Phi_1) + \frac{1}{A - \Omega_2^2} \cos (\Omega_2 t + \Phi_2)$$

bulunur. Bu denklem ile ilgili yorumları “Sonuçlar” bölümünde yapmak üzere şimdi seriden iki terim alınarak yapılacak çözümde kullanılacak matrisleri yazalım;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{16}{3} \sqrt{\beta V} \\ -\frac{16}{3} \sqrt{\beta V} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \pi^4 - V^2 \pi^2 + 4k_0(1-\gamma) \left( \frac{-1}{6} - \frac{1}{2\pi^2} \right) + k_0 & 0 \\ 0 & 16\pi^4 - 4V^2 \pi^2 + 4k_0(1-\gamma) \left( \frac{-1}{6} - \frac{1}{8\pi^2} \right) + k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left( 2\sqrt{\beta V} \left[ \dot{k}_2(t) - \dot{k}_1(t) \right] + \ddot{k}_1(t) + k_1(t) k_0 \right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \left( \left[ \ddot{k}_2(t) - \ddot{k}_1(t) \right] + \left[ \dot{k}_2(t) - \dot{k}_1(t) \right] k_0 \right) \\ + \frac{8\sqrt{2}}{\pi^3} (2k_0(1-\gamma)k_1(t) + k_0(1-\gamma)[k_2(t) - k_1(t)]) \\ \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left[ \ddot{k}_2(t) - \ddot{k}_1(t) \right] - \frac{3\sqrt{2}}{\pi^3} k_0(1-\gamma) [k_2(t) - k_1(t)] \\ + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} k_0 [k_2(t) - k_1(t)] \end{bmatrix}$$

eşitliği bulunur (ifade n=1, m=1 m=2 ve n=2, m=1 m=2 için bulunmuştur). Bu matris ifadesinden karşımıza iki denklem çıkar;

1. denklemler

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_1(t) + \left( \pi^4 - V^2 \pi^2 + 4k_0(1-\gamma) \left[ -\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2} \right] + k_0 \right) q_1(t) \\
&= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left( 2\sqrt{\beta V} \left[ \dot{k}_2(t) - \dot{k}_1(t) \right] + \ddot{k}_1(t) + k_0 k_1(t) \right) \\
&- \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left( \left[ \ddot{k}_2(t) - \ddot{k}_1(t) \right] + k_0 [k_2(t) - k_1(t)] \right) \\
&+ \frac{8\sqrt{2}}{\pi^3} \left( 2k_0(1-\gamma) k_1(t) + k_0(1-\gamma) [k_2(t) - k_1(t)] \right)
\end{aligned}$$

2. denklemler

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_2(t) - \left( \frac{16}{3} \sqrt{\beta V} \right) \dot{q}_1(t) + \left( 16\pi^4 - 4V^2 \pi^2 + 4k_0(1-\gamma) \left[ -\frac{1}{6} - \frac{1}{8\pi^2} \right] + k_0 \right) q_2(t) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left[ \ddot{k}_2(t) - \ddot{k}_1(t) \right] - \frac{3\sqrt{2}}{\pi^3} k_0(1-\gamma) [k_2(t) - k_1(t)] \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{2\pi} k_0 [k_2(t) - k_1(t)]
\end{aligned}$$

Elde edilen bu iki denklemleri ortak olarak çözebiliriz;

Öncelikle işlem kolaylığı açısından 1. ve 2. denklemlerdeki katsayıları adlandıralım;

$$A = \left( \pi^4 - V^2 \pi^2 + 4k_0(1-\gamma) \left[ -\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2} \right] + k_0 \right) \text{ olduğunu daha önce belirtmiştik.}$$

$$F_1 = \cos(\Omega_1 t + \Phi_1) + \cos(\Omega_2 t + \Phi_2)$$

$$F_2 = a \cos \Omega_1 t + b \cos \Omega_2 t \quad \text{bu iki kuvveti de daha önce tanımlamıştık.}$$

$$B = \left( \frac{16}{3} \sqrt{\beta V} \right)$$

$$C = - \left( \frac{16}{3} \sqrt{\beta V} \right)$$

$$G = \left( 16\pi^4 - 4V^2 \pi^2 + 4k_0(1-\gamma) \left[ -\frac{1}{6} - \frac{1}{8\pi^2} \right] + k_0 \right) \text{ olmak üzere;}$$

$$** \quad \overset{*}{q}_1 + B \overset{*}{q}_2 + A \overset{*}{q}_1 = F_1$$

$$** \quad \overset{*}{q}_2 + C \overset{*}{q}_1 + G \overset{*}{q}_2 = F_2$$

Lineer denklem sisteminin “operatör metodu” ile çözümünden şu sonuçlar alınır;

$$m = A + G - C B$$

$$n = A G$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
q_1(t) = & c_1 \exp\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-2m+2\sqrt{m^2-4n}} \right\} + c_2 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{-2m+2\sqrt{m^2-4n}} \right\} \\
& + c_3 \exp\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-2m-2\sqrt{m^2-4n}} \right\} + c_4 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{-2m-2\sqrt{m^2-4n}} \right\} \\
& - \left( \frac{\cos \Phi_1 \Omega_1^2 + \cos \Phi_1 G}{\Omega_1^4 - \Omega_1^2 m} \right) (\cos \Omega_1 t) - \left( \frac{\cos \Phi_2 \Omega_2^2 + \cos \Phi_2 G}{\Omega_2^4 - \Omega_2^2 m} \right) (\cos \Omega_2 t) \\
& + \left( \frac{\sin \Phi_1 \Omega_1^2 - \sin \Phi_1 G + aB\Omega_1}{\Omega_1^4 - \Omega_1^2 m} \right) (\sin \Omega_1 t) \\
& + \left( \frac{\sin \Phi_2 \Omega_2^2 - \sin \Phi_2 G + aB\Omega_2}{\Omega_2^4 - \Omega_2^2 m} \right) (\sin \Omega_2 t) \\
q_2(t) = & c_5 \exp\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-2m+2\sqrt{m^2-4n}} \right\} + c_6 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{-2m+2\sqrt{m^2-4n}} \right\} \\
& + c_7 \exp\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-2m-2\sqrt{m^2-4n}} \right\} + c_8 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{-2m-2\sqrt{m^2-4n}} \right\} \\
& - \left( \frac{\cos \Phi_1 \Omega_1^2 + aA + C \sin \Phi_1 \Omega_1}{\Omega_1^4 - \Omega_1^2 m} \right) (\cos \Omega_1 t) \\
& - \left( \frac{b\Omega_2^2 + bA + C \sin \Phi_2 \Omega_2}{\Omega_2^4 - \Omega_2^2 m} \right) (\cos \Omega_2 t) \\
& + \left( \frac{C \cos \Phi_1 \Omega_1}{\Omega_1^4 - \Omega_1^2 m} \right) (\sin \Omega_1 t) + \left( \frac{C \cos \Phi_2 \Omega_2}{\Omega_2^4 - \Omega_2^2 m} \right) (\sin \Omega_2 t)
\end{aligned}$$

bulunan bu iki sonuç için yorumlar “Sonuçlar” bölümünde yapılacaktır.

---

## BÖLÜM ALTI

## SONUÇLAR

---

Öncelikle analitik çözümde karşımıza çıkan sonuçların değerlendirmesini yapacak olursak, bir terim için çözülen Galerkin yönteminde “ $q_1(t)$ ” eşitliğinde mesnetlerdeki hareketin frekansının sadece özel çözümü etkilediği açıkça görülmektedir.

$$q_1 = c_1 \cos \sqrt{A} t + c_2 \sin \sqrt{A} t + \frac{1}{A - \Omega_1^2} \cos (\Omega_1 t + \Phi_1) + \frac{1}{A - \Omega_2^2} \cos (\Omega_2 t + \Phi_2)$$

Homojen çözümü etkilememektedir. Ayrıca özel çözümde sistemi rezonansa götüren  $\Omega_1$  ve  $\Omega_2$  değerinin sistem doğal frekansına eşit değer olduğu görülmektedir. Paydaların sıfıra gitmesi rasyonel ifadeleri sonsuza götürür. Bu demektir ki sistem sonsuz genlikte hareket eder. Yani sistem stabilitesini kaybeder.

Seri içinde iki terim açılımında karşımıza çıkan denklemleri hatırlayacak olursak;

$$\begin{aligned}
q_1(t) = & c_1 \exp\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-2m+2\sqrt{m^2-4n}} \right\} + c_2 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{-2m+2\sqrt{m^2-4n}} \right\} \\
& + c_3 \exp\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-2m-2\sqrt{m^2-4n}} \right\} + c_4 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{-2m-2\sqrt{m^2-4n}} \right\} \\
& - \left( \frac{\cos \Phi_1 \Omega_1^2 + \cos \Phi_1 G}{\Omega_1^4 - \Omega_1^2 m} \right) (\cos \Omega_1 t) - \left( \frac{\cos \Phi_2 \Omega_2^2 + \cos \Phi_2 G}{\Omega_2^4 - \Omega_2^2 m} \right) (\cos \Omega_2 t) \\
& + \left( \frac{\sin \Phi_1 \Omega_1^2 - \sin \Phi_1 G + aB\Omega_1}{\Omega_1^4 - \Omega_1^2 m} \right) (\sin \Omega_1 t) \\
& + \left( \frac{\sin \Phi_2 \Omega_2^2 - \sin \Phi_2 G + aB\Omega_2}{\Omega_2^4 - \Omega_2^2 m} \right) (\sin \Omega_2 t)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
q_2(t) = & c_5 \exp\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-2m+2\sqrt{m^2-4n}} \right\} + c_6 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{-2m+2\sqrt{m^2-4n}} \right\} \\
& + c_7 \exp\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-2m-2\sqrt{m^2-4n}} \right\} + c_8 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{-2m-2\sqrt{m^2-4n}} \right\} \\
& - \left( \frac{\cos \Phi_1 \Omega_1^2 + aA + C \sin \Phi_1 \Omega_1}{\Omega_1^4 - \Omega_1^2 m} \right) (\cos \Omega_1 t) \\
& - \left( \frac{b\Omega_2^2 + bA + C \sin \Phi_2 \Omega_2}{\Omega_2^4 - \Omega_2^2 m} \right) (\cos \Omega_2 t) \\
& + \left( \frac{C \cos \Phi_1 \Omega_1}{\Omega_1^4 - \Omega_1^2 m} \right) (\sin \Omega_1 t) + \left( \frac{C \cos \Phi_2 \Omega_2}{\Omega_2^4 - \Omega_2^2 m} \right) (\sin \Omega_2 t)
\end{aligned}$$

Bu iki denklemde görülen özel çözümlerde  $m = \Omega_1^2$  ve  $m = \Omega_2^2$  durumlarında sistem rezonansa gider. Yani hareketli mesnetler “ $\sqrt{A+G-CB}$ ” değerinde salınım yaparlarsa sistemde rezonans durumu olur.

Bir ve iki terimli seri açılımı yapılmış ve ilk iki mod değeri bulunmuştur.

Şekil 6. 1., Şekil 6. 2. ve Şekil 6. 3. de değişik  $k_0$  ve  $\gamma$  değerlerinde akışkan boyutsuz hızıyla sistem rezonans frekansının değişimi görülmektedir.

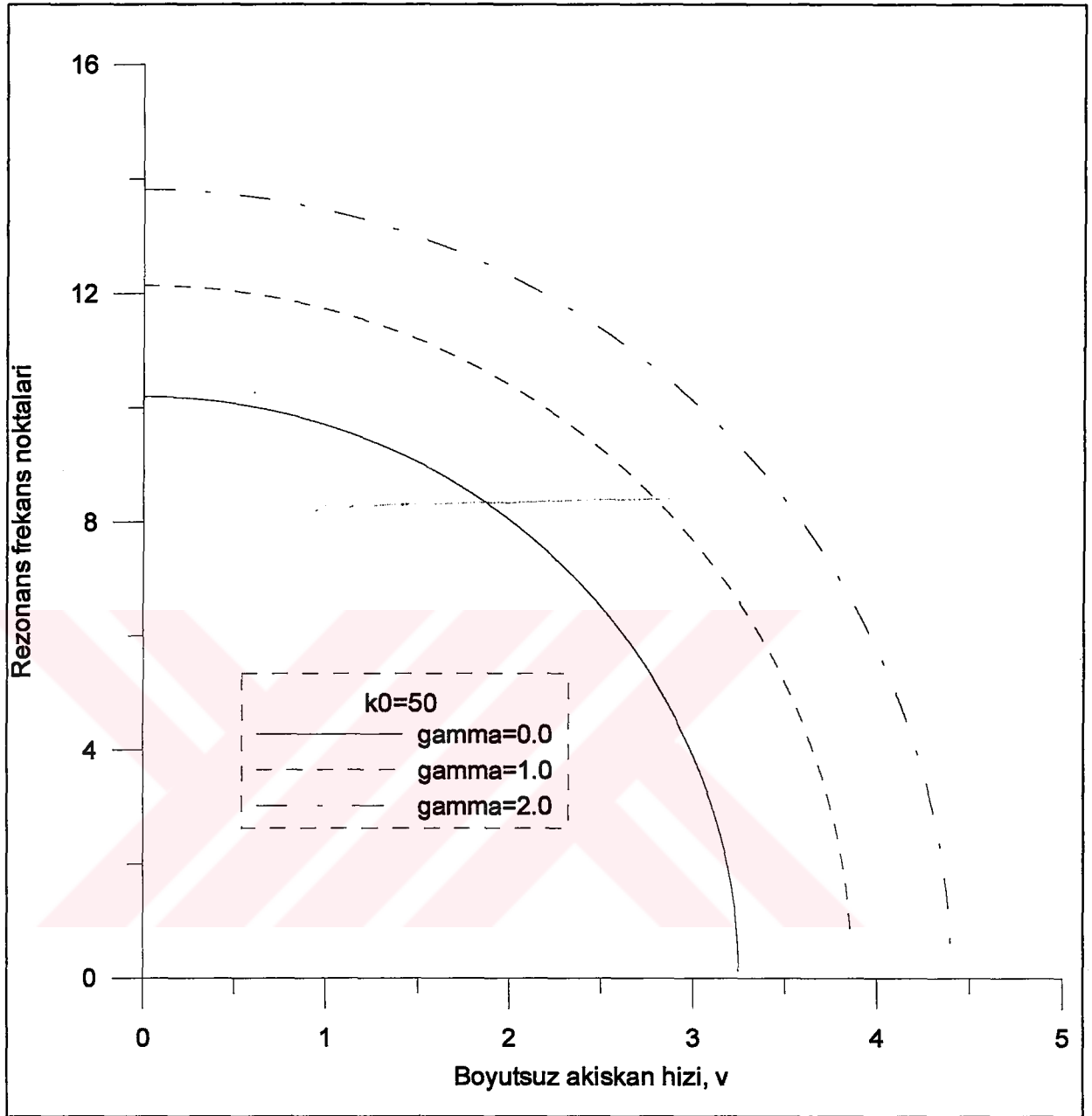
Şekil 6. 3. de eğrilerin boyutsuz hız eksenini tam kesmediği görülmektedir. Teorik olarak düşününce kesmesi beklenirdi. Ancak burada eğrilerdeki ani düşme itarasyon aralığından daha küçük boyutta olduğundan net olarak görülememektedir.

Şekil 6. 4., Şekil 6. 5. ve Şekil 6. 6. da ise öncelikle  $k_0$  ve  $\beta$  sabit değerleri için  $\gamma$  değerlerinde değişim olurken akışkan boyutsuz hızıyla sistem rezonans frekansının ilişkisi görülmektedir.

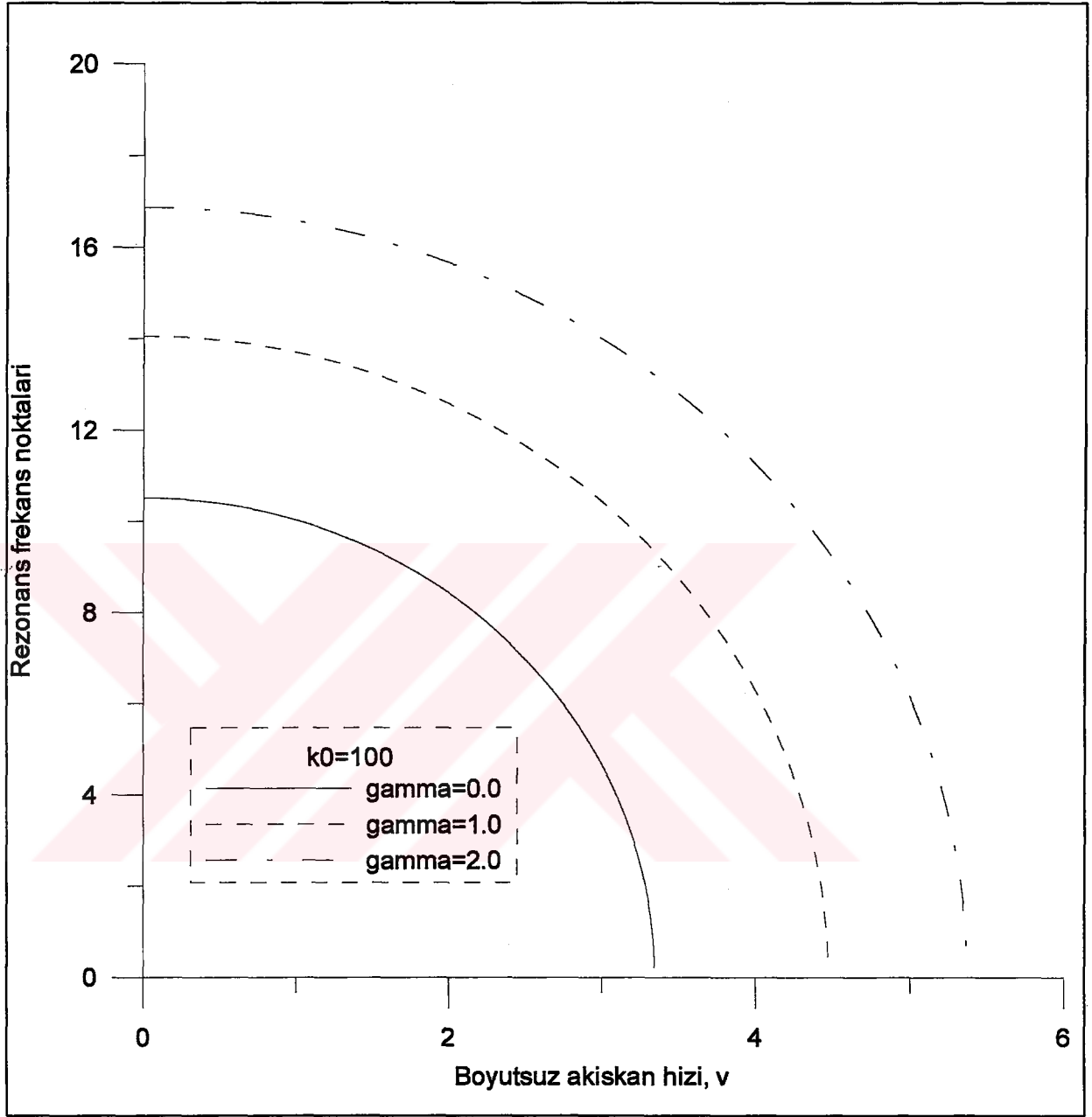
Burada belirtilmesi gereken bir başka nokta da  $\gamma = 1$  olması durumudur. Bu durumda ;

$K(x) = k_0 \{ 4(1-\gamma)(x^2 - x) + 1 \}$  denklemi  $K(x) = k_0$  durumunu alır. Bu demektir ki elastik zemin katsayısı sabittir (x değerine bağlı değildir). Yani hareket denkleminizdeki elastik yatak katsayısı sabit bir değere dönüşmektedir.

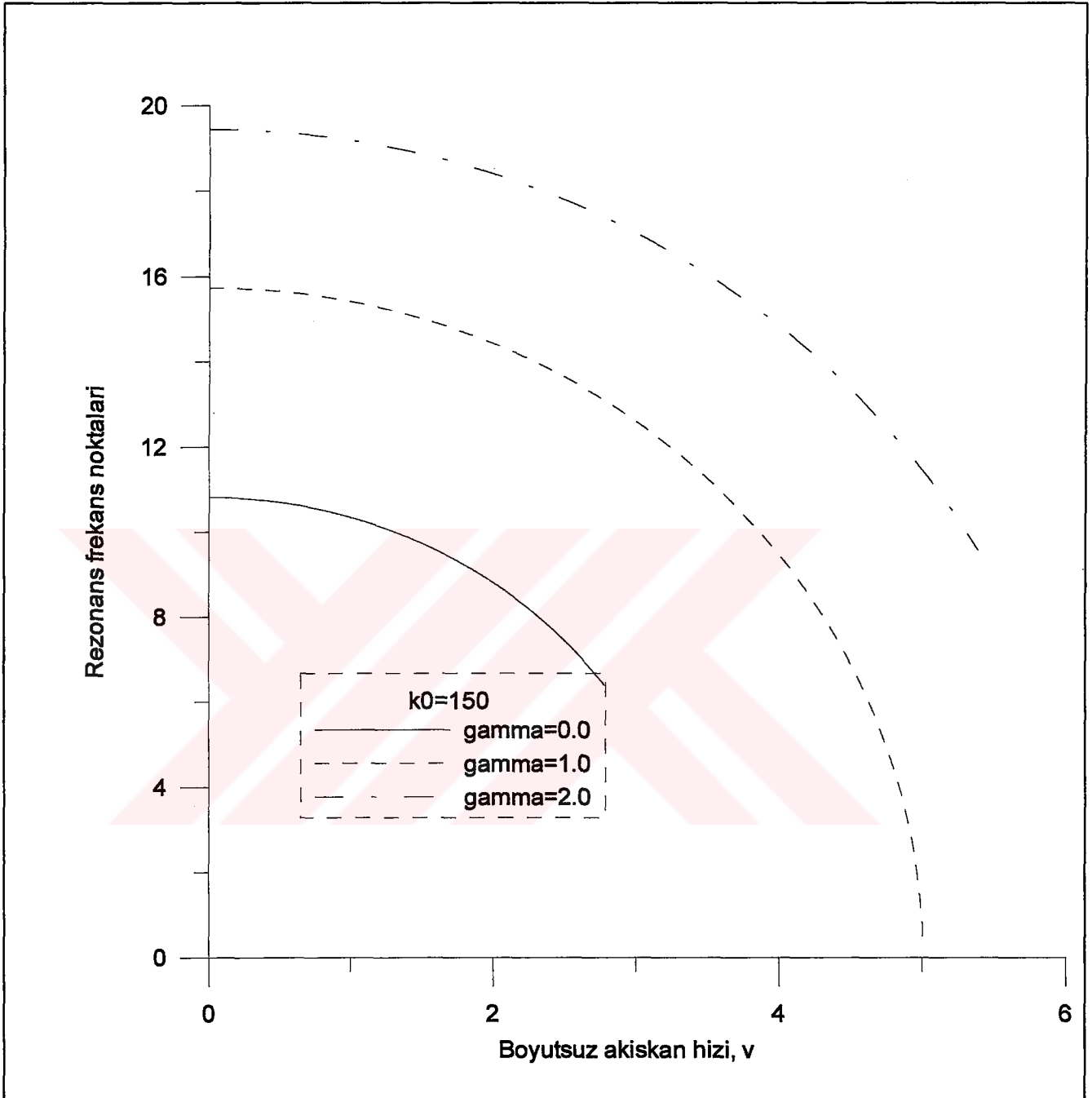




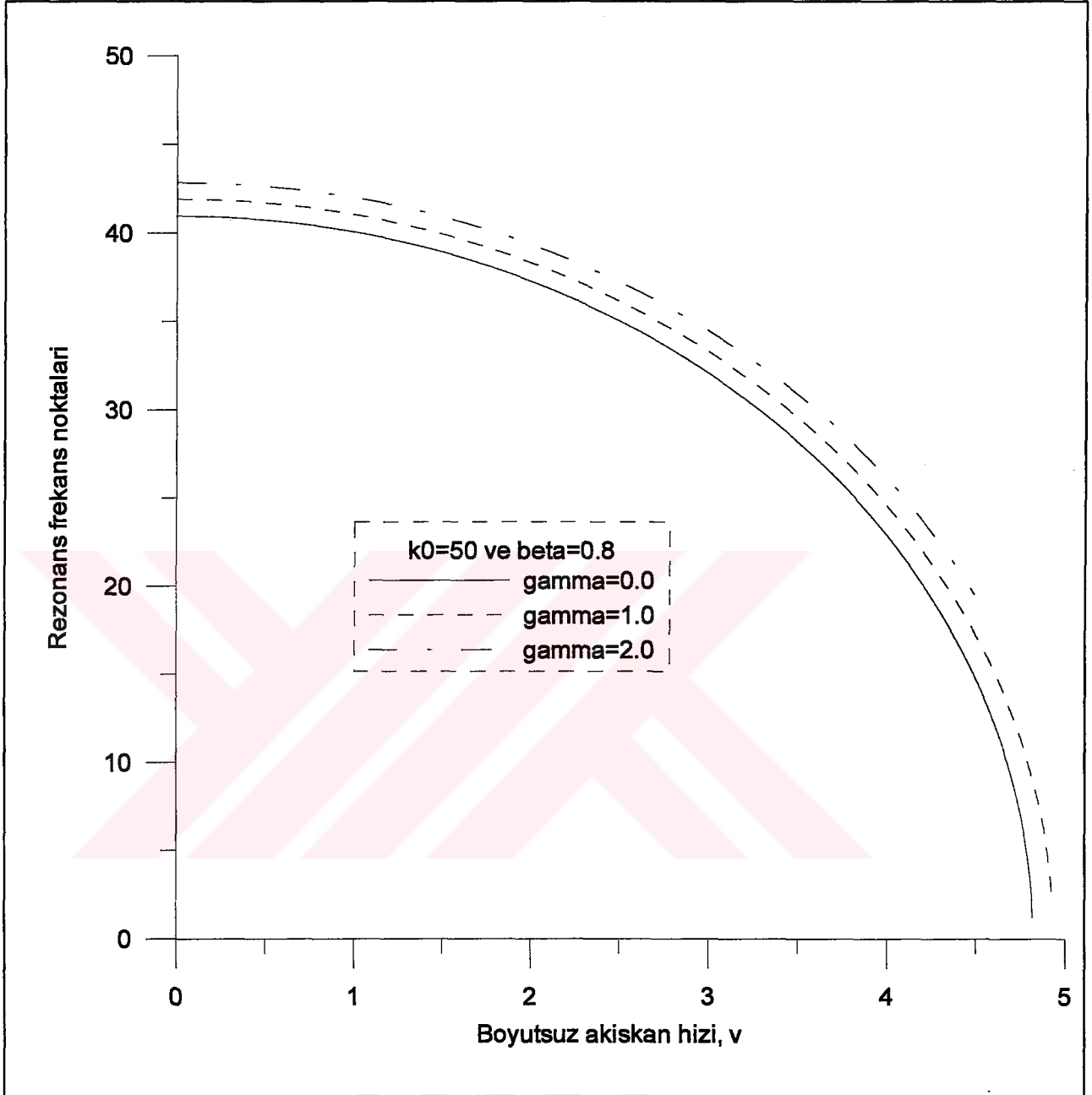
Şekil 6. 1. zemin parametreleri  $k_0 = 50$  ve  $\gamma = 0.0$   $\gamma = 1.0$   $\gamma = 2.0$  durumu



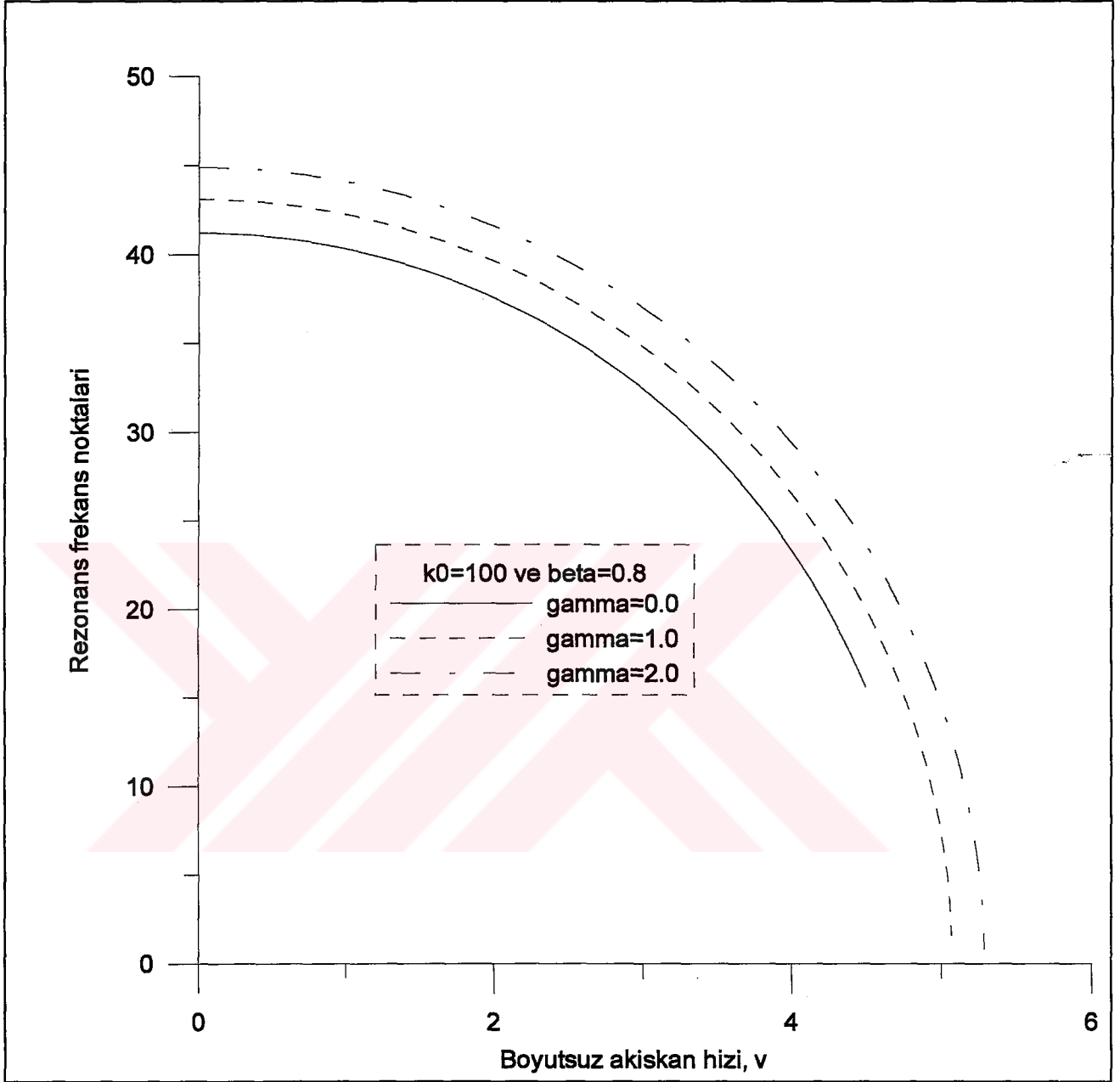
Şekil 6. 2. zemin parametreleri  $k_0 = 100$  ve  $\gamma = 0.0$   $\gamma = 1.0$   $\gamma = 2.0$  durumu



Şekil 6. 3. zemin parametreleri  $k_0 = 150$  ve  $\gamma = 0.0$   $\gamma = 1.0$   $\gamma = 2.0$  durumu

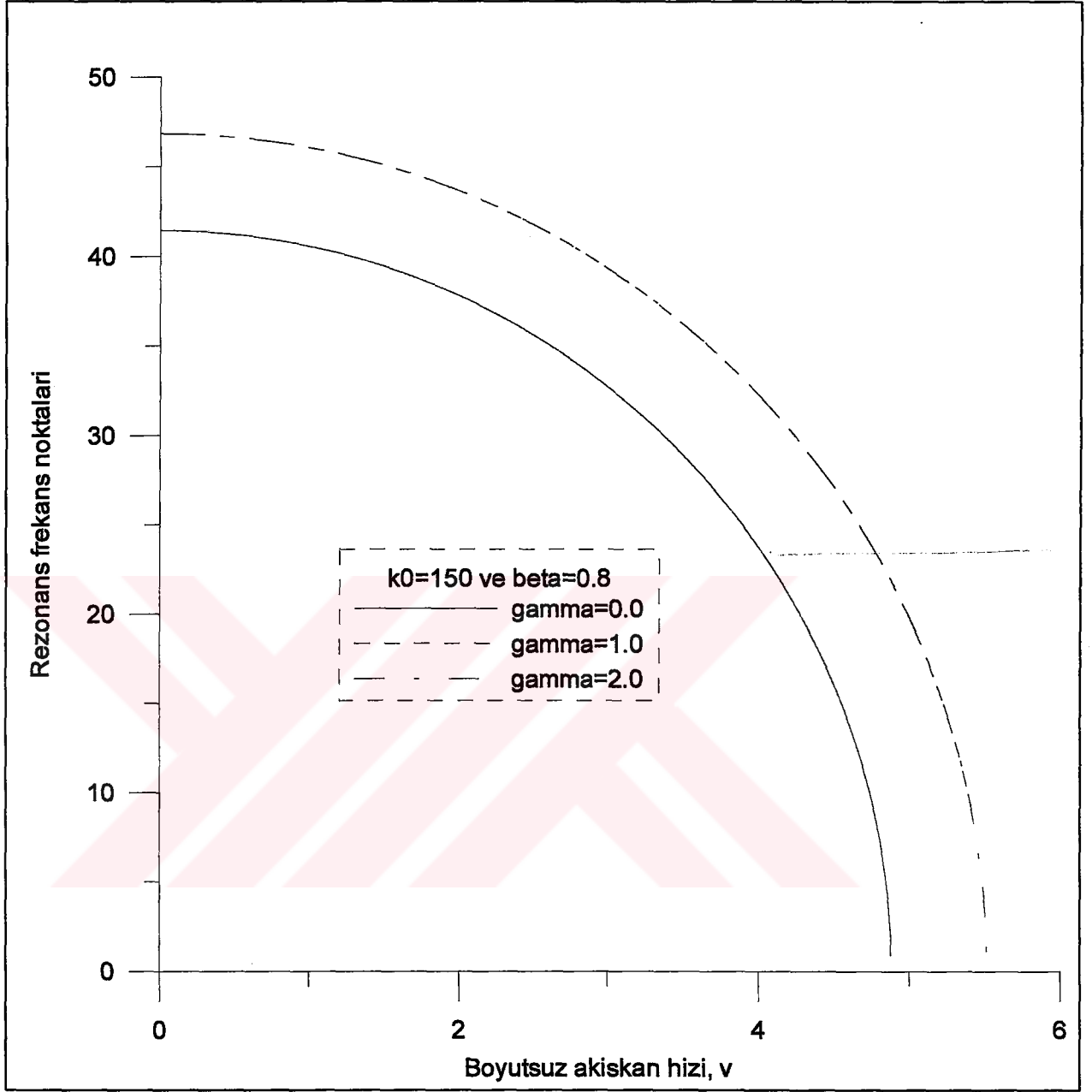


Şekil 6. 4. zemin parametreleri  $k_0 = 50$  ve  $\gamma = 0.0$   $\gamma = 1.0$   $\gamma = 2.0$  ile doluluk oranı  $\beta = 0.8$  durumu



Şekil 6. 5. zemin parametreleri  $k_0 = 100$  ve  $\gamma = 0.0$   $\gamma = 1.0$   $\gamma = 2.0$  ile doluluk

oranı  $\beta = 0.8$  durumu



Şekil 6. 6. zemin parametreleri  $k_0 = 150$  ve  $\gamma = 0.0$   $\gamma = 1.0$   $\gamma = 2.0$  ile doluluk

oranı  $\beta = 0.8$  durumu

## 6. 2. Değerlendirme

Sonuç olarak pratikte özellikle deniz boru hatlarında mesnetlerin hareketli mesnet olması durumunun sistemin dinamiği üzerinde önemli etkileri olduğu görülmektedir. Bu alışmada Galerkin yönteminde bir terim ve iki terimli seri açılımı yapılarak çözümler elde edilmiştir. Bu çalışmanın devamı olarak. Galerkin metodunda daha yüksek terimlerin alınması ve stabilite analizi yapılması da önerilir.

Bu çalışmanın pratikteki önemi büyüktür. Deniz deşarj boru hatları maliyeti büyük olan yatırımlardır. Ayrıca inşası ve montajı (uygulanması) oldukça zor çalışmaları gerektirir. Yapım aşamasında veya yapıldıktan sonra oluşacak etkiler önemlidir. Çalışmamızda incelediğimiz mesnet hareketi bu etkilerle oluşabilir. Mesnetlenme bölgesinde zamanla oluşacak bir boşluk, içinde akış olan sistemin mesnetlerinin hareketlenmesine sebep olur. Bu durum bizim çalışmamızda geçen şartları ve sonuçları getirir.

---

## REFERANSLAR

---

- Aliyev, G. G. (1998)– Matematiğin fizik ve mühendisliğe uygulamaları. Niğde : Niğde Üniversitesi Matematik Bölümü yayını.
- Aydın, M. & Kuryel, B. & Gündüz, G. & Oturaç, G. (1995). Diferansiyel denklemler ve uygulamaları. İzmir : E. Ü. Mühendislik Fakültesi yayını.
- Chen, L & Zhang, N. & Zu, J. W. (2002). Bifurcation and chaos of an axially moving viscoelastic string. Mechanics Research Communications, 29, 81-90
- Chen, L & Cheng, C. (1999). Dynamical behavior of non-linear viscoelastic columns based on 2- order Galerkin truncation. Mechanics Research Communications, 27, 413-419
- Chucheepsakul, S. & Monprapussorn, T. & Huang, T. (2003). Large strain formulations of extensible flexible marine pipes transporting fluid. Journal of Fluids and Structures, 17, 185-124
- Clough, R. W. (1993). Dynamics of structures. New York : McGraw – Hill, Inc
- Djondrojev, P. & Vassilev, V. & Dzhupanov, V. (2001). Dynamic stability of fluid conveying cantilevered pipes on elastic foundations. Journal of Sound and Vibration, 247, 537-546
- İnan, M. (1996). Cisimlerin mukavemeti. İstanbul : İTÜ Vakfı yayınları.
- Koo, G. H. & Park, Y. S. (1998). Vibration reduction by using periodic supports in a piping system. Journal of Sound and Vibration, 210, 53-68



- Lees, A. W. (1999). A perturbation approach to analyze the vibration of structures conveying fluid, Journal of Sound and Vibration, 222, 621-634
- Öz, H. R. & Boyacı, H. (2000). Transverse vibrations of tensioned pipes conveying fluid with time dependent velocity. Journal of Sound and Vibration,
- Paidoussis, M. P. & Li, G. X.. (1993). Pipes conveying fluid : A model dynamical problem. Journal of Fluids and Structures, 7, 137-204
- Pakdemirli, M. & Boyacı H. (2001). Effect of non-ideal boundary conditions on the vibrations of continuous systems. Journal of Sound and Vibrations, 249, 815-823
- Pakdemirli, M. & Boyacı, H. (2003). Vibrations of simply supported beam with non-ideal support at an intermediate point. Mathematical & Computational Applications, 8, 159-164
- Pakdemirli, M. & Öz, H. R. (1999). Vibrations of an axially moving beam with time –dependent velocity. Journal of Sound and Vibrations, 227, 239-257
- Pakdemirli, M. & Batan, H. (1993). Dynamic stability of a constantly accelerating strip. Journal of Sound and Vibration, 168, 371-378
- Pakdemirli, M. & Ulsoy, A. G. & Ceranoğlu, A. (1994). Transverse vibration of an axially accelerating string. Journal of Sound and Vibration 169, 179-196
- Ravindra, B. & Zhu, V. D. (1998). Low – dimensional chaotic response of axially accelerating continuum in the supercritical regime. Archive of Applied Mechanics, 68, 195-205

Semercigil, S. E. & Turan, Ö. F. & Lu, S. (1997). Employing fluid flow in a cantilever pipe for vibration control, Journal of Sound and Vibration 205, 103-111

Wang, X. & Bloom, F. (1999). Dynamics of submerged and inclined concentric pipe system with internal and external flows, Journal of Fluids and Structures,13, 443-460

