

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİN ÜZERİNE OTURAN
KİRİŞLERİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİ

Çağlayan HIZAL

Haziran, 2012

İZMİR

ELASTİK ZEMİN ÜZERİNE OTURAN KİRİŞLERİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİ

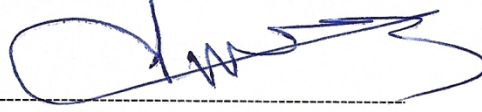
**Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
İnşaat Mühendisliği Bölümü, Yapı Anabilim Dalı**

Çağlayan HIZAL

**Haziran, 2012
İZMİR**

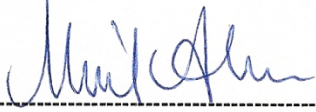
YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

ÇAĞLAYAN HIZAL, tarafından **PROF. DR. HİKMET HÜSEYİN ÇATAL** yönetiminde hazırlanan “**ELASTİK ZEMİN ÜZERİNE OTURAN KİRİŞLERİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİ**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve içeriği bakımından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



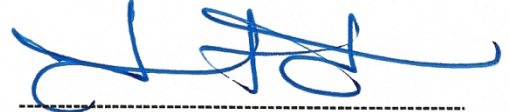
Prof Dr. Hikmet Hüseyin ÇATAL

Yönetici



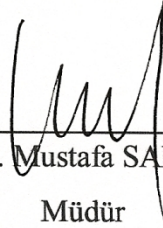
Yrd. Doç. Dr. Nihal ALVER

Jüri Üyesi



Yrd. Doç. Dr. Yusuf TESİLE

Jüri Üyesi



Prof. Dr. Mustafa SABUNCU

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca, benim için büyük emek gösteren, iyi bir inşaat mühendisi ve bilim adamı olma yolunda desteğini ve tavsiyelerini eksik etmeyen, üstün bilgi ve birikimlerini cömertçe paylaşan, karşılaŐtıęım sorunları çözmemde sabırla yardımcı olan ve kazandığım her türlü bilgi ve tecrübeye büyük pay sahibi olan çok değerli hocam ve tez danışmanım sayın Prof. Dr. Hikmet Hüseyin ÇATAL'a sonsuz teşekkürlerimi ve Őukranlarımı sunarım.

Yüksek lisans tez çalışmamı sürdürdüğüm süre içerisinde, geçmiş tecrübelerini benimle paylaşan, yardımını ve desteğini esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç Dr. Yusuf YEŞİLCE'ye teşekkürlerimi sunarım.

Tüm eğitim hayatım boyunca, maddi ve manevi olarak her türlü imkanı sunan, iyi bir insan ve bilim adamı olmam için hiçbir desteğini esirgemeyen, tüm yaşamım boyunca büyük özveride bulunarak bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan sevgili anne ve babama sonsuz teşekkürlerimi, derin Őukranlarımı ve sevgilerimi sunarım.

Çağlayan HIZAL

ELASTİK ZEMİN ÜZERİNE OTURAN KİRİŞLERİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİ

ÖZ

Yayıllı kütleli sistemler olarak modellenen yapı elemanlarının dinamik davranışı, bir çok araştırmacının ilgisini kazanmıştır. Yapı elemanın davranışı, problemin özel tanımına en uygun kiriş teorisinin kullanılmasıyla birlikte daha iyi temsil edilebilmektedir. Uzun ve narin kirişler için, yalnızca eğilme deformasyonunun dikkate alındığı Euler Kiriş Teorisi'nin kullanılması uygun olsa da, bu teori kesme deformasyonun yüksek olduğu kirişlerde yeterince gerçekçi olmamaktadır. Bu nedenle, kirişte meydana gelen kesme deformasyonunun da dikkate alındığı Timoshenko Kiriş Teorisi, kirişin yapısal davranışını daha iyi temsil edebilmektedir.

Bu çalışma kapsamında elastik zemine oturan ve doğrusal elastik malzeme davranışı gösteren, sabit aksenal yüke maruz Timoshenko kirişinin zorlanmış titreşimi incelenmiştir. Elastik zemin davranışı Winkler ve iki parametrelili zemin modelleri kullanılmak suretiyle iki değişik şekilde temsil edilmektedir.

Kirişin dinamik davranışı, serbest ve zorlanmış titreşim olmak üzere iki aşamada incelenmiştir. Zorlanmış titreşim kısmında, titreşime ait hareket denkleminin çözümü dinamik dış yük fonksiyonunun tanımına göre değişmektedir. Dış yük fonksiyonun belirli bir fonksiyon olması durumunda hareket denkleminin genel çözümü mümkün olabilmektedir. Yük fonksiyonun deprem ivmesi gibi rastgele değişen bir fonksiyon olması durumunda ise hareket denkleminin çözümü, sayısal çözüm yöntemlerinden birinin kullanılmasıyla mümkün olmaktadır. Çalışmada her iki durum için de çözüm elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Elastik zemine oturan kirişler, zorlanmış titreşim, Winkler modeli, iki parametrelili elastik zemin, yayıllı kütleli sistemler, Newmark yöntemi.

FORCED VIBRATION OF THE BEAMS ON ELASTIC SOIL

ABSTRACT

The dynamic response of the structural members modeled as distributed mass systems have gained the interest of many researchers. The behaviour of the structural members can be represented better with using the beam theory most appropriate to the special case of the problem. Though using the Euler Beam Theory which takes into account only the bending deformation is more appropriate for long and slender beams, this theory is not practical enough for shorter beams that have high shear deformation. For this reason, Timoshenko Beam Theory which takes the shear deformation of the beam into account represents better structural behaviour.

In this study, the forced vibration of a Timoshenko beam on elastic soil which has linear elastic material behavior and subjected to a constant axial compressive load have been analysed. The behavior of the elastic soil has been represented in two different ways by using the Winkler and two parameter elastic soil models.

Dynamic behavior of the beam has been investigated in two stages, including free and forced vibration. In forced vibration stage, the solution of the equation of motion of the vibration depends on the definition of the external dynamic load. The general solution of the equation of motion can be possible in case the external load is a specific function. In case of the the external load is a random variable function such as the earthquake acceleration, the solution of the equation of motion can be made by using the numerical evaluation methods for small time intervals. The solution is obtained for both cases in this study.

Keywords: Beams on elastic foundation, forced vibration, Winkler model, two parameter elastic soil, distributed mass systems, Newmark method.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v

BÖLÜM BİR-GİRİŞ.....1

1.1 Amaç Ve Kapsam.....	2
1.2 Daha Önce Yapılan Çalışmalar.....	3
1.3 Çalışma Kapsamında Kullanılan Zemin Modelleri.....	6
1.3.1 Winkler Zemin Modeli.....	6
1.3.2 İki Parametrelili Zemin Modeli.....	12
1.3.2.1 Pasternak Zemin Modeli.....	13
1.3.2.2 Vlasov Zemin Modeli.....	14
1.4 Kullanılan Hesap Modelleri Ve Yapılan Kabuller.....	17
1.4.1 Winkler Zeminine Oturan Kirişe Ait Hesap Modeli.....	17
1.4.1 İki Parametrelili Zemine Oturan Kirişe Ait Hesap Modeli.....	18

BÖLÜM İKİ- ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİMİ20

2.1 Winkler Zeminine Oturan Kirişlerin Serbest Titreşimi.....	20
2.1.1 Serbest Titreşime Ait Hareket Denkleminin Elde Edilmesi.....	20
2.1.2 Serbest Titreşim Hareket Denkleminin Değişkenlerine Ayrılması.....	25
2.1.3 Serbest Titreşim Hareket Denkleminin Boyutsuzlaştırılması.....	26
2.1.4 Serbest Titreşim Hareket Denkleminin Çözümü.....	27
2.1.4.1 <i>Durum 1: $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Olması.....</i>	29
2.1.4.2 <i>Durum 2: $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Olması</i>	29

2.1.4.3 <i>Durum 3: $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Olması</i>	29
2.1.4.4 <i>Durum 4: $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Olması</i>	30
2.1.4.5 <i>Durum 5: $\sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i} < 0$ Olması</i>	30
2.2 İki Parametrelili Elastik Zemine Oturan Kirişlerin Serbest Titreşimi.....	31
2.2.1 Serbest Titreşime Ait Hareket Denkleminin Elde Edilmesi.....	31
2.2.2 Serbest Titreşim Hareket Denkleminin Değişkenlerine Ayrılması....	34
2.2.3 Serbest Titreşim Hareket Denkleminin Boyutsuzlaştırılması.....	35
2.2.4 Serbest Titreşim Hareket Denkleminin Çözümü.....	36
2.2.4.1 <i>Durum 1: $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Olması</i>	38
2.2.4.2 <i>Durum 2: $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Olması</i>	38
2.2.4.3 <i>Durum 3: $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Olması</i>	38
2.2.4.4 <i>Durum 4: $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Olması</i>	38
2.2.4.5 <i>Durum 5: $\sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i} < 0$ Olması</i>	39

BÖLÜM ÜÇ- ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERE AİT İÇ TESİR FONKSİYONLARININ ELDE EDİLMESİ.....40

3.1 İç Tesir Fonksiyonlarının Değişkenlerine Ayrılması.....	40
3.2 Winkler Zeminine Oturan Kirişlerin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	41
3.2.1 $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	43
3.2.2 $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	44
3.2.3 $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	45

3.2.4 $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	46
3.2.5 $\sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i} < 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	47
3.3 İki Parametrelili Elastik Zemine Oturan Kirişlerin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	49
3.3.1 $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	50
3.3.2 $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	51
3.3.3 $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	52
3.3.4 $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	53
3.3.5 $\sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i} < 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	54

**BÖLÜM DÖRT - ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERİN
ZORLANMIŞ TİTREŞİMİNE AİT HAREKET
DENKLEMİNİN ELDE EDİLMESİ.....56**

4.1 Winkler Zeminine Oturan Kirişlerin Zorlanmış Titreşimine Ait Hareket Denkleminin Elde Edilmesi.....	56
4.2 İki Parametrelili Elastik Zemine Oturan Kirişlerin Zorlanmış Titreşimine Ait Hareket Denkleminin Elde Edilmesi.....	59
4.3 Zorlanmış Titreşim Hareket Denkleminin Ayrıklaştırılması.....	58

BÖLÜM BEŞ - ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİNE AİT HAREKET DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ.....	67
5.1 Dış Yükün Belirli Bir Fonksiyon Olması Durumunda	
Hareket Denklemine Çözümü.....	67
5.1.1 Değişik Dış Yük Fonksiyonları İçin Hareket Denkleminin Çözümü.....	71
5.1 Dış Yükün Keyfi Değişen Bir Fonksiyon Olması Durumunda	
Hareket Denklemine Çözümü.....	78
5.2.1 Newmark Yöntemi İle Hareket Denklemine Çözümü.....	80
BÖLÜM ALTI - SAYISAL UYGULAMALAR.....	85
6.1 Sayısal Uygulama 1.....	86
6.1.1 Serbest Titreşim Analizi.....	88
6.1.2 Zorlanmış Titreşim Analizi.....	89
6.2 Sayısal Uygulama 2.....	107
6.2.1 Serbest Titreşim Analizi.....	109
6.2.2 Zorlanmış Titreşim Analizi.....	115
6.3 Sayısal Uygulama 3.....	139
6.3.1 Serbest Titreşim Analizi.....	141
6.3.2 Zorlanmış Titreşim Analizi.....	143
BÖLÜM YEDİ – SONUÇLAR.....	166
KAYNAKLAR.....	170
EKLER.....	174

BÖLÜM BİR

GİRİŞ

Elastik zemine oturan kirişlerin titreşim hareketinin incelenmesi, bazı yapı elemanlarının dinamik davranışının modellenmesi açısından büyük önem arz etmektedir. Doğrusal elastik davranış gösterdiği varsayılan bu tür yapı elemanlarının belli aralıklarla toplanarak ayırık kütleli sistemler olarak çözülmesi neticesinde elde edilen sonuçlar, her ne kadar toplanmış kütle sayısı arttırıldığında sürekli parametrelili hesap modeli kullanılarak elde edilen sonuçlara yaklaşırsa da yeterince gerçekçi olmamaktadır.

Yapı elemanının, uzunluğu boyunca sıralanan sonsuz sayıdaki kütlelerden meydana gelen sürekli sistemler olarak modellenmesi daha gerçekçi bir çözümü mümkün kılmaktadır. Sürekli parametrelili sistemlerin dinamik hareketi iki şekilde incelenebilmektedir. Bunlardan ilki sistemi bir bütün halinde düşünüp, dış yüklerden ve bu dış yüklerin neden olduğu kesit tesirlerinden kaynaklanan dış ve iç enerjilerin dengesinin kurulmasıyla sisteme ait bir hareket denkleminin elde edilmesidir. İkinci yöntem ise sistemi sonsuz küçük parçalara ayırarak, her bir parça için elde edilen denge denklemlerinin kiriş boyunca genelleştirilmesiyle, genel bir hareket denkleminin elde edilmesidir. Her iki yöntemde de iç tesirler ve şekil değiştirmeler arasındaki ilişki, dinamik davranışa ait hareket denkleminin elde edilmesi açısından oldukça önemli olmaktadır.

Dinamik davranışı incelenen yapı elemanının elastik zemin üzerine oturması durumunda ise zeminin davranışının nasıl modellendiği de sistemin çözümünde büyük rol oynamaktadır.

Zemin davranışının modellenmesinde değişik yaklaşımlar mevcuttur. Bu yaklaşımlardan biri zemin davranışının birbirinden bağımsız elastik yaylarla temsil edildiği Winkler zemin modelidir. Winkler zemin modeli, elastik zemine oturan kiriş problemlerinin çözümünde oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır.

Elastik zemin davranışının modellenmesinde kullanılan yaklaşımlardan biri de zeminin iki parametrelili olarak modellenmesidir. İki parametrelili zemin yaklaşımı, zeminin davranışını Winkler modeline benzer olarak elastik yaylarla temsil etmektedir. Ancak bu yaylar Winkler modelinden farklı olarak, birbirinden bağımsız olarak çalışmamaktadır. Elastik yayların birbirleriyle olan etkileşiminin, zeminin üzerinde oluşturulan bir kayma tabakasıyla tanımlandığı Pasternak ve Vlasov zemin modelleri, en çok kullanılan iki parametrelili zemin modellerindedir.

1.1 Amaç Ve Kapsam

Bu çalışmada, elastik zemin üzerine oturan ve zorlanmış titreşim etkisindeki kirişin davranışının, değişik elastik zemin modelleri kullanılarak araştırılması ve zemin yatak katsayısının kiriş davranışına olan etkisinin irdelenmesi amaçlanmıştır.

Elastik zemine oturan, zorlanmış titreşim etkisi altındaki kirişin davranışı, farklı mesnet koşulları ve yükleme durumları için, serbest ve zorlanmış titreşim analizi yapılarak iki aşamada incelenmiş ve elastik zemin davranışı, Winkler ve iki parametrelili zemin modelleriyle temsil edilmiştir. İki parametrelili zemine oturan kiriş problemleri, ikinci parametrenin elastik yayların üzerinde yer alan bir kayma tabakası ile modellendiği Pasternak ve Vlasov zemin modelleri esas alınarak incelenmiştir.

Çalışma kapsamında, elastik zemine oturan kirişlerin dinamik davranışı, ilk olarak Winkler zeminine oturan ve açıklık ortasından dinamik dış yüke maruz bir kirişin her iki ucu serbest, her iki ucu basit mesnetli, her iki ucu basit mesnetli ve dönmeye karşı yarı rijit bağlantılı olması durumunda, değişik zemin yatak katsayıları için incelenmiştir. İkinci olarak, farklı dış yüklere maruz her iki ucu serbest bir kirişin dinamik davranışı, Winkler ve iki parametrelili zemin modelleri için ayrı ayrı incelenmiş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Son olarak, deprem ivmesi altında, bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest ve bir ucu ankastre, diğer ucu kayıcı ankastre mesnetli olan, Winkler zeminine gömülü kazıklar için dinamik analiz gerçekleştirilmiştir.

1.2 Daha Önce Yapılan Çalışmalar

Elastik zemine oturan kirişlerin statik veya dinamik davranışı, bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Hetenyi, elastik zemine oturan kiriş problemini, Winkler modelini kullanarak çözmüştür(Hetenyi, 1946). Bu çalışma kapsamında, yalnızca eğilme deformasyonuna maruz bir kirişin, statik bir yük etkisi altında, elastik Winkler zemini ile olan etkileşimi iki boyutlu olarak incelenmiştir.

Çatal ve Alku, elastik zemine oturan ve sabit eksenel yüke maruz bir kirişin statik analizini, ikinci mertebeden rijitlik matrisini elde ederek gerçekleştirmiştir(Çatal ve Alku, 1996).

Çatal ve Çatal, elastik zemine kısmi gömülü bir kazığın burkulma analizini, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi yardımıyla gerçekleştirmiştir(Çatal ve Çatal, 2006).

Winkler modeli, elastik zemine oturan kiriş problemlerinde en yaygın kullanılan yaklaşım olsa da, bu modelin elastik zemin davranışını ne ölçüde temsil ettiği bir çok araştırmacı tarafından sorgulanmıştır. Bu sorgulamanın doğal bir sonucu olarak da iki parametrelili zemin modelleri ortaya çıkmıştır.

Pasternak, elastik zemin davranışını, Winkler yaklaşımına temel oluşturan kiriş boyunca yayılı elastik yaylar ve bu yaylar arasındaki etkileşimi temsil eden bir kayma tabakası ile birlikte modellemiştir(Pasternak, 1954).

Vlasov ve Leont'ev, elastik zemine oturan kiriş ve plak problemlerini, farklı bir iki parametrelili zemin yaklaşımı kullanarak çözmüştür(Vlasov ve Leont'ev, 1966). Bu çalışmada, elastik Winkler yaylarını ve bu yaylar arasındaki etkileşimi sağlayan kayma tabakasını, elastik zemin tabakasının kalınlığına bağlı olarak elde edilen yeni bir parametreye bağlı olarak tanımlamıştır.

Morfidis ve Avramidis, iki parametrelili elastik zemine oturan, yarı rijit bağlantılı Timoshenko ve Euler kirişlerinin statik çözümünü gerçekleştirmiştir. Bu çalışmada, elastik zemine oturan kirişin çözümü, analitik formülasyondan elde edilen rijitlik matrisi yardımıyla gerçekleştirilmiştir(Morfidis ve Avramidis, 2002).

Sürekli sistemlerin dinamik çözümü konusunda yapılan çalışmalar, elastik zemine oturan kirişlerin dinamik çözümünün elde edilmesinde büyük önem arz etmektedir. Sürekli parametrelili kirişlerin dinamik davranışı bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Timoshenko tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada, yalnızca eğilme deformasyonu etkisindeki düzgün kesitli kirişlerin, düşey doğrultudaki titreşimleri incelenmiştir. (Timoshenko, 1922).

Herrmann tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada, Timoshenko kirişinin zorlanmış titreşimine ait hareket denklemi ve bu hareket denkleminin çözümü elde edilmiştir(Herrman, 1953).

Huang tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada, dönme eylemsizliği ve kesme deformasyonun, sabit kesitli kirişlerin serbest titreşim açısallık frekans değerlerine olan etkisi incelenmiştir(Huang, 1961).

Bir diğer çalışmada ise Dadfarnia, Jalili ve Esmailzadeh, dönme eylemsizliği etkisindeki bir Timoshenko kirişinin zorlanmış titreşimini, Galerkin yaklaşımını kullanarak incelemiştir(Dadfarnia, Jalili ve Esmailzadeh, 2005).

Bu araştırmacılar tarafından yapılan çalışmaların birçoğu, elastik zemin zemine oturan kirişlerin titreşim probleminin çözümüne temel oluşturmaktadır. Birçok araştırmacı, bu çalışmalardan faydalanarak, elastik zemine oturan kirişlerin dinamik hareketini incelemiştir.

Doyle ve Pavlovic tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada, elastik Winkler zeminine oturan ve yalnızca eğilme deformasyonu etkisindeki bir kirişin serbest titreşim analizi yapılmıştır(Doyle ve Pavlovic, 1982).

Valsangkar ve Pradhanang, elastik zemine yaslanan bir kazığın serbest titreşim analizini, değişik mesnet koşulları için gerçekleştirmiştir(Valsangkar ve Pradhanang, 1987).

Çatal, elastik zemine kısmi gömülü, eğilme ve kesme deformasyonuna maruz bir kazığın, aksenal kuvvet etkisi altındaki serbest titreşimini incelemiştir(Çatal, 2002).

Yeşilce, değişken yatak katsayılı elastik Winkler zeminine kısmi gömülü kazıkların, serbest titreşim analizini gerçekleştirmiştir(Yeşilce, 2004).

Çatal, bir diğer çalışmasında; elastik zemine kısmi gömülü, yarı rijit bağlantılı bir kazığın eğilme momenti, kesme kuvveti ve aksenal kuvvet etkisindeki serbest titreşimini incelemiştir(Çatal, 2006).

Yeşilce ve Çatal, iki tabakalı elastik Winkler zeminine gömülü kazıkların serbest titreşim analizini, eğilme momenti, kesme kuvveti ve aksenal kuvvet etkisinin yanında dönme eylemsizliğini de dikkate alarak gerçekleştirmiştir (Yeşilce ve Çatal, 2007).

Arbeloda-Monsalve, Zapata-Medina ve Aristizabal-Ochoa tarafından yapılan bir çalışmada, iki parametrelili elastik zemin üzerine oturan bir Timoshenko kirişinin dinamik analizi, sisteme ait dinamik rijitlik matrisi elde edilerek gerçekleştirilmiştir (Arbeloda-Monsalve, Zapata-Medina ve Aristizabal-Ochoa, 2007).

Morfidis tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada, üç parametrelili elastik zemine oturan bir Timoshenko kirişinin dinamik analizi yapılmıştır(Morfidis, 2010).

Çatal, zorlanmış titreşime maruz kalan Euler-Bernoulli kirişinin titreşim analizini, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi yardımıyla gerçekleştirmiştir(Çatal, 2012).

1.3 Çalışma Kapsamında Kullanılan Zemin Modelleri

1.3.1 Winkler Zemin Modeli

Winkler zemin modeli, elastik zemine oturan kiriş problemlerinde en sık kullanılan zemin modellerinden biridir. Winkler modelinde, elastik zemin tabakası kiriş boyunca sıralanan birbirinden bağımsız yaylarla temsil edilmektedir. Elastik yayların üzerine gelen yük miktarı kadar ve yalnızca tek bir boyutta sıkıştığı hipotezine dayanan bu yöntemde; zemin üzerindeki herhangi bir noktada meydana gelen gerilme ile zemin sıkışması arasındaki bağıntı, zemin yatak katsayısı adı verilen sabit bir katsayı ile sağlanmaktadır(Önalp ve Sert, 2006).

Bu durumda, zemin yatak katsayısı ile yayın sıkışma miktarı arasındaki ilişki aşağıdaki denklemlerle elde edilir(Önalp ve Sert, 2006).

$$k_s = \frac{q}{\delta} \quad (1.1)$$

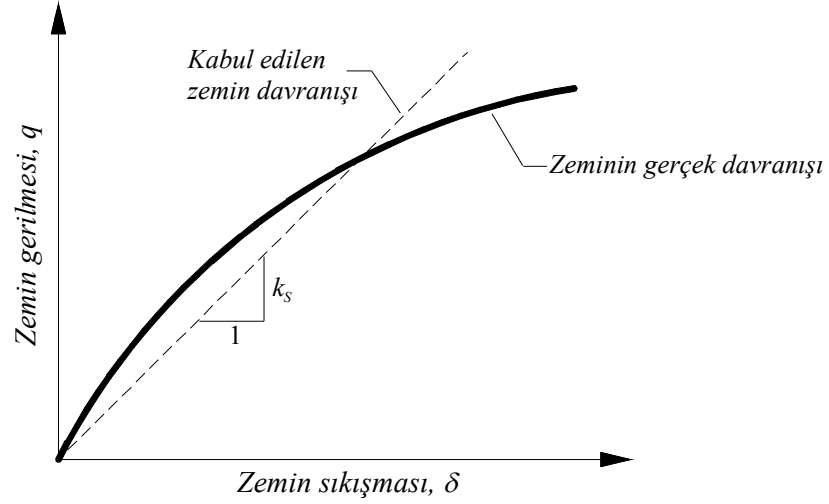
Burada,

q ; zemin üzerindeki herhangi bir noktada meydana gelen gerilmeyi,

δ ; gerilmenin meydana geldiği noktadaki sıkışma miktarını göstermektedir.

Zemin yatak katsayısı yaklaşımı, zeminin gerçek gerilme-birim şekil değiştirme davranışını idealleştirerek zemin yatak katsayısı ve sıkışma miktarı arasında doğrusal bir bağlantı kurar(Bowles, 1996).

Şekil 1.1’de, yatak katsayısı yaklaşımı ile zeminin gerçek davranışı arasındaki ilişki gösterilmektedir(Önalp ve Sert, 2006).



Şekil 1.1 Zeminin gerçek davranışı ile yatak katsayısı yaklaşımı arasındaki ilişki

Yatak katsayısının elde edilmesine ilişkin bir çok yaklaşım mevcuttur. Bu yaklaşımların biri Terzaghi (1955) tarafından, plaka yükleme deneyi sonucu elde edilen denklemlerdir. Bu denklemler, kare kesitli temeller için, temelin üzerine oturduğu zemin türüne göre elde edilir(Bowles, 1996).

Elastik zemin yatak katsayısı, temelin killi zemine oturması durumunda;

$$k_s = k_1 \frac{B_1}{B} \quad (1.2)$$

denklemiyle, kumlu zemine oturması durumunda ise

$$k_s = k_1 \left(\frac{B + B_1}{2B} \right)^2 \quad (1.3)$$

denklemiyle elde edilir(Bowles, 1996).

Burada,

k_s ; incelenen zemine ait yatak katsayısı değerini,

B_1 ; plaka yükleme deneyinde kullanılan, kare kesitli plakanın boyutunu,

B ; zeminin üzerine oturan, kare kesitli temelin boyutunu,

k_1 ; plaka yükleme deneyi sonucu elde edilen yatak kat sayısı değerini göstermektedir (Terzaghi, 1955).

Sıkı kil veya orta sıkı kum zemine oturan dikdörtgen kesitli temelerde, yatak kat sayısının hesabı için denklem (1.4) önerilir(Bowles, 1996).

$$k_s = k_1 \left(\frac{\bar{m} + 0,5}{1,5\bar{m}} \right) \quad (1.4)$$

Burada, \bar{m} ; temelin uzun kenarının kısa kenarına oranıdır.

$$\bar{m} = \frac{h}{B} \quad (1.5)$$

Vesic (1961), tarafından ise aşağıdaki denklem önerilmiştir(Bowles, 1996).

$$C_s = 0,65 \frac{E_s}{1-\nu_s} \left(\frac{E_s B^4}{E_f I_f} \right)^{1/12} \quad (1.6)$$

Burada,

B ; elastik zemine oturan kirişin genişliğini

$E_f I_f$; elastik zemine oturan kirişin eğilme rijitliğini,

E_s ; zeminin elastisite modülünü,

ν_s ; zeminin poisson oranını,

C_s ; elastik zemine ait yay katsayısını göstermektedir.

Zemin yatak katsayısı, k_s ile elastik zemin yay katsayısı, C_s arasındaki bağıntı aşağıdaki denklem ile hesaplanabilir(Bowles, 1996).

$$k_s = \frac{C_s}{B} \quad (1.7)$$

Vesic (1961) tarafından önerilen denklem, uzun kirişler için aşağıdaki gibi yazılabilir(Önalp ve Sert, 2006).

$$C_s = \frac{E_s}{1 - \nu_s} \quad (1.8)$$

Bowles (1996) tarafından değişik zemin türleri için önerilen ν_s ve E_s değerleri aşağıdaki Tablo 1.1 ve 1.2'de sunulmuştur.

Tablo 1.1 Bazı zemin türleri için önerilen ν_s değerleri

ZEMİN TÜRÜ	ν_s
Kil(doygun)	0,4-0,5
Kil(doygun olmayan)	0,1-0,3
Kumlu kil	0,2-0,3
Kum	0,15-0,40
Silt	0,3-0,35

Tablo 1.2 Bazı zemin türleri için önerilen E_s değerleri

ZEMİN TÜRÜ		$E_s(t/m^2)$
KİL	Çok Yumuşak	200-1500
	Yumuşak	500-2500
	Orta Katı	1500-5000
	Katı	5000-10000
	Kumlu	2500-25000
KUM	Gevşek	1000-2500
	Sıkı	5000-8100
	Siltli	500-2000
KUM VE ÇAKIL	Gevşek	5000-15000
	Sıkı	10000-20000

Das (1997) tarafından granüler zeminler için önerilen E_s ve ν_s değerleri, Tablo 1.3'de sunulmuştur.

Tablo 1.3 Granüler zeminler için önerilen E_s ve ν_s değerleri

ZEMİN TÜRÜ	$E_s(t/m^2)$	ν_s
Gevşek Kum	1000-2400	0,20-0,40
Orta Sıkı Kum	1700-2800	0,25-0,40
Sıkı Kum	3500-5500	0,30-0,45
Siltli Kum	1000-1700	0,20-0,40
Kum Ve Çakıl	6900-17000	0,15-0,35

Bowles (1996) tarafından, değişik zemin türleri için önerilen yatak katsayıları Tablo 1.4’de sunulmuştur.

Tablo 1.4 Değişik zemin türleri için önerilen düşey yatak katsayıları

ZEMİN TÜRÜ		YATAK KATSAYISI $k_s(t/m^3)$
KUM	Gevşek	480-1600
	Orta Sıkı	960-8000
	Sıkı	6400-12800
	Orta Sıkı Killi Kum	3400-8000
	Orta Sıkı Siltli kum	2400-4800
KİL	Taşıma gücü $\leq 20 t/m^2$	1200-2400
	$20 < \text{Taşıma gücü} \leq 80 t/m^2$	2400-4800
	Taşıma gücü $> 80 t/m^2$	>4800

Terzaghi (1955), elastik zemine yaslanan kazıklarda, zemin yay kat sayısı C_s ’nin, kazığın yaslandığı zeminin deformasyon özelliğine bağlı olarak değiştğini ifade etmektedir. Bu yaklaşıma göre; yay katsayısı, killi zeminlerde kazık uzunluğu boyunca sabit kalmakta, kumlu zeminlerde ise derinlikle beraber doğrusal olarak artmaktadır.

Terzaghi (1955), kum zeminlerde, yatay yatak katsayısının hesabı için aşağıdaki formülü önermiştir.

$$k_h = n_h \frac{z}{B} \quad (1.9)$$

Burada, z ; yatak katsayısı hesaplanacak olan noktanın derinliğini, B ; elastik zemine yaslanan kazığın genişliğini, n_h ise yatay yatak katsayısı sabitini göstermektedir.

Denklem (1.9)’da verilen n_h katsayısının, zeminin sıklığına bağlı olarak aldığı değerler Tablo-1.5’de sunulmuştur(Terzaghi, 1955).

Tablo 1.5 n_h katsayısının aldığı değerler (t/m^3)

KUMUN RÖLATİF SIKILIĞI	GEVŞEK	ORTA SIKI	SIKI
Kuru veya nemli kum	240	710	1800
Suya doymuş kum	150	450	1100

Kil zeminlerde ise, yatay yatak katsayısının hesabı için aşağıdaki denklem kullanılabilir(Terzaghi, 1955).

$$k_h = \frac{k_1}{1,5B} \quad (1.10)$$

Kil zeminler için kullanılacak k_1 katsayısı değerleri, Tablo 1.6'da sunulmuştur (Kayış, 2006).

Tablo 1.6 k_1 katsayısının, kil kıvamına göre aldığı değerler

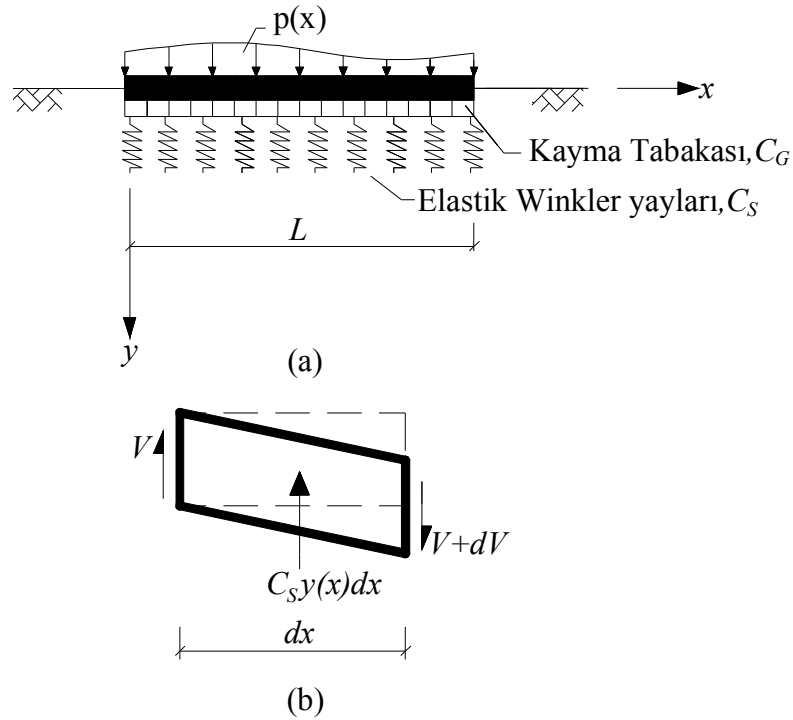
KİL KIVAMI	$k_1(t/m^3)$
Yumuşak	0-1500
Katı	2500
Çok katı	5000
Sert	10000

1.3.2 İki Parametrelili Zemin Modeli

İki parametrelili zemin modeli Winkler modelinden farklı olarak, elastik zemin davranışını temsil eden ve kiriş boyunca sıralanan elastik yayların birbirinden bağımsız olarak çalışmadığı yaklaşımına dayanmaktadır. İki parametrelili zemin modeline göre elastik yaylar, yalnızca üzerlerine gelen yük etkisinde değil, komşu yaylarda meydana gelen deformasyon nedeniyle de sıkışma yapabilmektedir. Bu durumda zemini temsil eden elastik yayları birbiriyle ilişkilendiren ikinci bir zemin parametresi söz konusudur.

1.3.2.1 Pasternak Zemin Modeli

İkinci parametrenin tanımı ve belirlenmesi konusunda bir çok yaklaşım bulunmaktadır. Bu yaklaşımlardan biri, Pasternak (1954) tarafından ortaya konulan ve ikinci parametrenin, elastik yaylar arasındaki etkileşimi sağlayan bir kayma tabakası ile tanımlandığı Pasternak zemin modelidir.



Şekil 1.2 Pasternak zemin modeli

a-) Pasternak zeminine oturan kiriş

b-) Kayma tabakasından alınan dx genişliğindeki diferansiyel parçaya ait serbest cisim diyagramı

Şekil 1.2.a'da, Pasternak zeminine oturan kiriş, 1.2.b'de ise kirişin oturduğu zeminden alınan, dx genişliğindeki diferansiyel elemana ait serbest cisim diyagramı gösterilmektedir. Zeminin dx genişliğindeki diferansiyel parçasında meydana gelen toplam tepki kuvveti, şekil 1.2.b'deki düşey kuvvetlerin dengesi yazılarak aşağıdaki gibi elde edilir (Morifidis, 2010).

$$p_z(x)dx = C_S y(x)dx - dV \quad (1.11)$$

Kayma tabakasında meydana gelen kesme kuvveti ise denklem (1.12)'deki gibi yazılır(Morifidis, 2010).

$$V = C_G \frac{dy}{dx} \quad (1.12)$$

Denklem (1.12), denklem (1.11)'de yerine konulursa, zemin tepki fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$p_z(x) = C_S y(x) - C_G \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (1.13)$$

Burada;

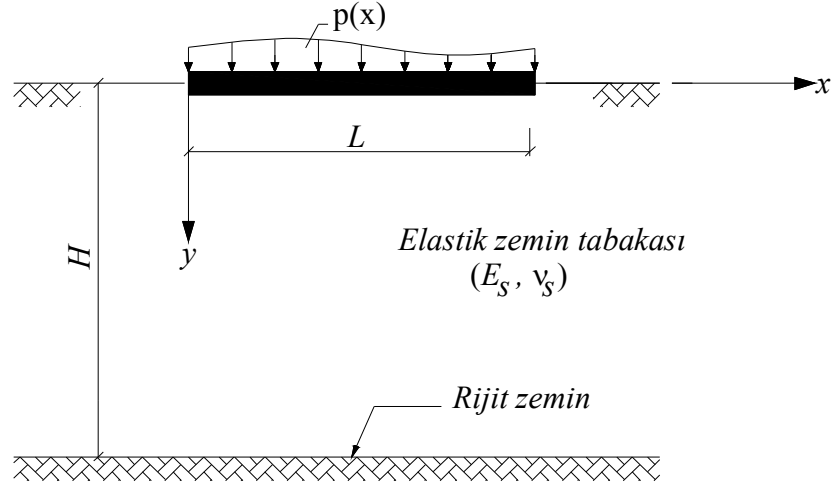
C_S ; elastik yay katsayısını

C_G ; zemine ait kayma parametresini göstermektedir.

1.3.2.2 Vlasov Zemin Modeli

İki parametrelili zemin modellerinden biri de, Vlasov ve Leont'ev (1966) tarafından geliştirilen ve Pasternak zeminine benzer olarak yaylar arasındaki etkileşimin bir kayma tabakası ile tanımlandığı Vlasov zemin modelidir. Vlasov modelinde, elastik zeminin tepkisi, Pasternak modeline benzer olarak denklem (1.13)'de verilen şekilde yazılabilir.

Şekil 1.3'de gösterilen kirişin oturduğu zemine ait elastik yay kat sayısı C_S ve kayma parametresi C_G denklem (1.14) ve (1.5)'deki gibi hesaplanır(Vlasov ve Leont'ev, 1966).



Şekil 1.3 Vlasov zeminine oturan kiriş

$$C_S = \frac{E_0 b}{(1 - \nu_0^2)} \varphi_1 \quad (1.14)$$

$$C_G = \frac{E_0 b}{6(1 + \nu_0)} \varphi_2 \quad (1.15)$$

Burada, b; elastik zemine oturan kirişin genişliğini göstermektedir. E_0 ve ν_0 ise elastik zemine ait sabitler olup denklem (1.17)'deki gibi hesaplanır(Vlasov ve Leont'ev, 1966).

$$E_o = \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \quad (1.16)$$

$$\nu_o = \frac{\nu_s}{1 - \nu_s}$$

Burada,

E_s ; zeminin elastisite modülünü,

ν_s ; zeminin poisson oranını göstermektedir.

Denklem (1.14) ve (1.15)'de verilen φ_1 ve φ_2 fonksiyonları, Vlasov ve Leont'ev (1966) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \frac{\gamma H}{l} \frac{\sinh\left(\frac{\gamma H}{l}\right) \cosh\left(\frac{\gamma H}{l}\right) + \frac{\gamma H}{l}}{\sinh^2\left(\frac{\gamma H}{l}\right)}$$

$$\varphi_2 = \frac{3}{2} \frac{l}{\gamma H} \frac{\sinh\left(\frac{\gamma H}{l}\right) \cosh\left(\frac{\gamma H}{l}\right) - \frac{\gamma H}{l}}{\sinh^2\left(\frac{\gamma H}{l}\right)}$$
(1.17)

Burada, H; elastik zemin tabakasının kalınlığını göstermektedir. γ katsayısı ise elastik zemindeki düşey deplasman dağılımını karakterize eden bir parametredir (Vallaban ve Das, 1991).

Zhaohua ve Cook (1983), γ 'nın zemin özelliğine bağlı olmasına rağmen deneysel olarak belirlenememiş bir katsayı olduğunu ve uygulamada $\gamma=1$ olarak alınabileceğini belirtmektedir.

Denklem (1.17)'de verilen l parametresi ise aşağıdaki gibi yazılır (Vlasov ve Leont'ev, 1966).

$$l = \sqrt[3]{\frac{2EI(1-\nu_0^2)}{(1-\nu^2)E_0b}}$$
(1.18)

Burada,

EI ; elastik zemine oturan kirişin eğilme rijitliğini,

ν ; elastik zemine oturan kirişin poisson oranını göstermektedir.

Elastik zemin tabakasının yarı sonsuz olarak alınması durumunda ise zemin parametreleri aşağıdaki gibi hesaplanır (Vlasov ve Leont'ev, 1966).

$$(H \rightarrow \infty)$$

$$C_S = \frac{E_0 b}{2(1-\nu_0^2)} \frac{\gamma}{l} \quad (1.19)$$

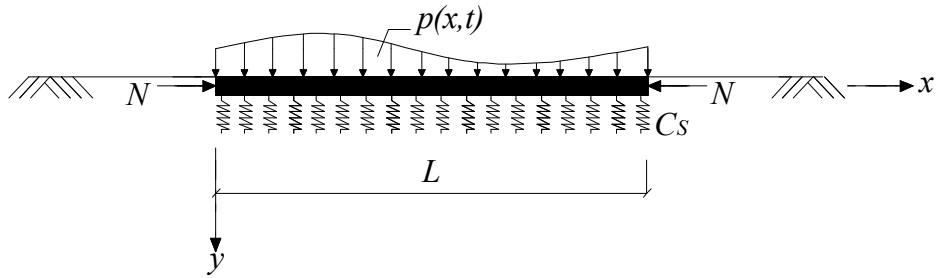
$$C_G = \frac{E_0 b}{4(1+\nu_0)} \frac{l}{\gamma}$$

1.4 Kullanılan Hesap Modelleri Ve Yapılan Kabuller

Bu çalışma kapsamında, elastik zemine oturan ve zorlanmış titreşim etkisindeki kirişe ait hesap modeli, Winkler ve iki parametrelili zemin modelleri dikkate alınarak iki değişik şekilde elde edilmiştir.

1.4.1 Winkler Zeminine Oturan Kirişe Ait Hesap Modeli

Winkler zeminine oturan, dinamik dış yüke maruz Timoshenko kirişine ait hesap modeli Şekil 1.4'de gösterilmiştir.



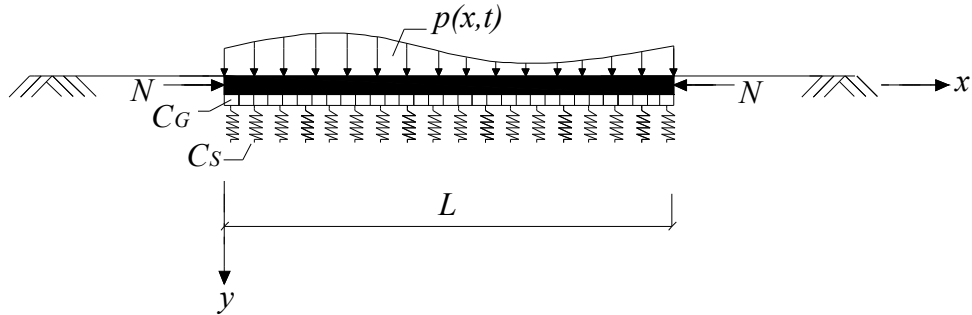
Şekil 1.4 Winkler zeminine oturan kirişe ait hesap modeli

Winkler zeminine oturan kirişe ait hesap modelinin oluşturulmasında aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

- 1-) Kirişin yapıldığı malzeme doğrusal elastik davranış göstermektedir.
- 2-) Kirişin kesiti sabit, kütlesi uzunluğu boyunca düzgün yayılıdır.
- 3-) Kirişe etkiyen aksenal basınç kuvveti, kiriş uzunluğu boyunca sabittir.
- 4-) Kirişin titreşim analizinde sönüm etkisi ihmal edilmiştir.
- 5-) Elastik zemin yay katsayısı C_s , kiriş boyunca sabittir.

1.4.2 İki Parametrelili Zemine Oturan Kirişe Ait Hesap Modeli

İki parametrelili elastik zemine oturan, dinamik dış yüke maruz Timoshenko kirişine ait hesap modeli Şekil 1.5’de gösterilmiştir.



Şekil 1.5 İki Parametrelili zemine oturan kirişe ait hesap modeli

İki parametrelili elastik zemine oturan kirişe ait hesap modelinin oluşturulmasında aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

- 1-) Kirişin yapıldığı malzeme doğrusal elastik davranış göstermektedir.
- 2-) Kirişin kesiti sabit, kütlesi uzunluğu boyunca düzgün yayılıdır.
- 3-) Kirişe etkiyen aksenal basınç kuvveti, kiriş uzunluğu boyunca sabittir.

- 4-) Kirişin titreşim analizinde sönüm etkisi ihmal edilmiştir.
- 5-) Elastik zemin parametreleri C_S ve C_G kiriş boyunca sabittir.

BÖLÜM İKİ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİMİ

2.1 Winkler Zeminine Oturan Kirişlerin Serbest Titreşimi

2.1.1 Serbest Titreşime Ait Hareket Denkleminin Elde Edilmesi

Elastik yay katsayısı C_S olan Winkler zeminine oturan kirişte; $M(x,t)$ eğilme momentini, $T(x,t)$ kesme kuvvetini, N aksenal basınç yükünü göstermek üzere, eğilmeden kaynaklanan deformasyonu tanımlayan kesit dönmesi fonksiyonu $\theta(x,t)$, kayma gerilmelerinden kaynaklanan deformasyon açısı fonksiyonu ise $\gamma(x,t)$ ile gösterilir ise eğilme momenti ve kesit dönmesi arasındaki ilişki aşağıdaki gibi yazılabilir(Timoshenko ve Gere, 1961).

$$M(x,t) = -EI \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \quad (2.1)$$

Burada E kiriş malzemesinin elastisite modülünü, I ise kiriş kesitinin atalet momentini göstermek üzere EI , kirişin eğilme rijitliğini göstermektedir.

Kayma deformasyon açısı ile kesme kuvveti arasındaki ilişki ise kiriş kesitinde meydana gelen maksimum kayma gerilmesi τ_{maks} kullanılarak denklem (2.2)'deki gibi yazılabilir(Timoshenko ve Gere, 1961).

$$\gamma(x,t) = \frac{\tau_{maks}}{G} = \frac{T(x,t)}{\kappa AG} \quad (2.2)$$

Burada κ , kesitteki maksimum kayma gerilmesini veren değişkeni, A kirişin kesit alanını ve G de malzemenin kayma modülünü göstermek üzere AG , kirişin kayma rijitliğini göstermektedir.

Bu durumda kesme kuvveti fonksiyonu denklem (2.3)'deki gibi elde edilebilir.

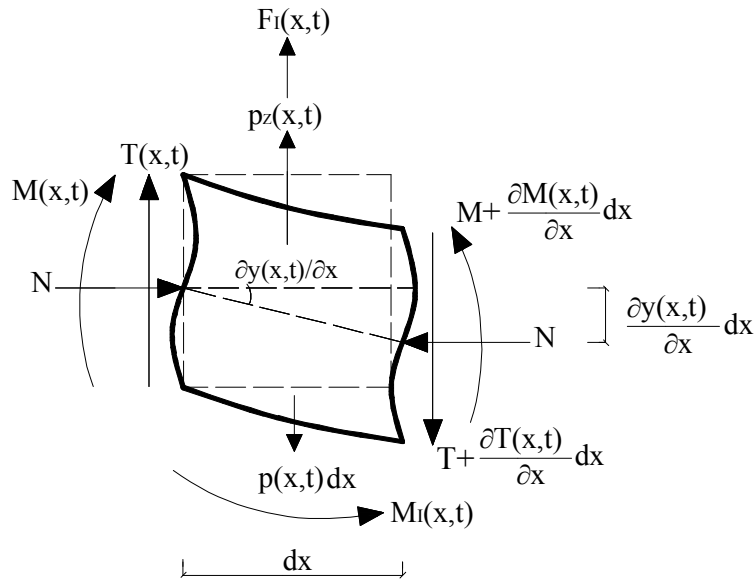
$$T(x,t) = \gamma(x,t)\kappa AG \quad (2.3)$$

Kesitte oluşan toplam deformasyon açısı ise kayma ve eğilme deformasyonlarının toplamı olup aşağıdaki gibi yazılır (Timoshenko ve Gere, 1961).

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \theta(x,t) + \gamma(x,t) \quad (2.4)$$

Denklem (2.4) kullanılarak $y(x,t)$, kirişin düşey doğrultudaki deplasmanını göstermek üzere, elastik eğri fonksiyonunun konuma göre ikinci türevi, eğilme momenti ve kesme kuvvetinin değişimine bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılır (Çatal, 2006).

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{M(x,t)}{EI} + \frac{1}{\kappa AG} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad (2.5)$$



Şekil 2.1 Winkler zeminine oturan kirişten çıkarılan diferansiyel parça

Elastik Winkler zeminine oturan kirişin elastik eğrisinden elde edilen ve Şekil 2.1’de verilen dx genişliğindeki sonsuz küçük diferansiyel elemana ait serbest cisim diyagramı kullanılarak genel bir elastik eğri denklemi elde edilebilir.

Diferansiyel elemana etkiyen eylemsizlik kuvveti ve dönme eylemsizliği sırasıyla denklem (2.6) ve (2.7)’deki gibi yazılır(Chopra, 2005).

$$F_I(x,t) = m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (2.6)$$

$$M_I(x,t) = mr^2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (2.7)$$

Burada m kirişin uzunluğu boyunca yayılı olan kütle, r ise kiriş kesitinin eylemsizlik yarıçapını göstermektedir.

Kiriş kesitinin eylemsizlik yarıçapı r , kesit atalet momenti ve alanına bağlı olarak aşağıdaki formülle hesaplanabilir(İnan, 2001).

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2.8)$$

Elastik Winkler zemininin dx genişliğindeki diferansiyel elemanda oluşturduğu tepki kuvveti ise aşağıdaki gibi yazılır.

$$p_z(x,t) = C_s y(x,t) dx \quad (2.9)$$

Bu durumda, Şekil 2.1 ‘deki düşey kuvvetlere ait denge denklemi denklem (2.10)’daki gibi, moment denge denklemi ise denklem (2.11)’deki gibi yazılır.

$$m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + C_s y(x,t) - \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = p(x,t) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + mr^2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} - N \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - T(x,t) = 0 \quad (2.11)$$

Serbest titreşim durumu için $p(x,t) = 0$ alınır, denklem (2.10), denklem (2.12)'deki gibi yazılır.

$$m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + C_s y(x,t) - \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

Elastik eğri denklemi, deplasman fonksiyonunun konuma göre dördüncü türevi alınarak eğilme momenti ve kesme kuvvetine bağlı olarak elde edilebilir. Eğilme momenti ve kesme kuvveti fonksiyonlarının yerine ise denklem (2.11) ve (2.12)'deki değerleri yazılırsa, serbest titreşim hareket denklemi yalnızca düşey deplasmana bağlı olarak elde edilir (Çatal, 2006).

Elastik eğri fonksiyonunun konuma göre dördüncü dereceden türevi alınır;

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = -\frac{1}{EI} \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\kappa AG} \frac{\partial^3 T(x,t)}{\partial x^3} \quad (2.13)$$

denklemini elde edilir.

Denklem (2.11)'in konuma göre bir kez türevi alınıp denklem (2.12)'de yerine yazılırsa

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = mr^2 \frac{\partial^3 \theta(x,t)}{\partial t^2 \partial x} - N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - C_s y(x,t) \quad (2.14)$$

denklemini elde edilir.

Denklem (2.12)'nin konuma göre iki kez türevi alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{\partial^3 T(x,t)}{\partial x^3} = m \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + C_s \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

Denklem (2.14) ve (2.15) denklem (2.13)'de yerine yazılırsa serbest titreşim hareket denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{EI} \left[m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + C_s y(x,t) - mr^2 \frac{\partial^3 \theta(x,t)}{\partial t^2 \partial x} + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \\ + \frac{1}{\kappa AG} \left[m \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + C_s \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Denklem (2.16)'da $\theta(x,t)$ ifadesi yerine, $\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - \frac{T(x,t)}{\kappa AG} \right]$ ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{EI} \left[m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + C_s y(x,t) + N \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right. \\ \left. - mr^2 \left(\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{1}{\kappa AG} \frac{\partial^3 T(x,t)}{\partial t^2 \partial x} \right) \right] - \frac{1}{\kappa AG} \left[m \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} + C_s \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

denklemi elde edilir. Burada da kesme kuvvet fonksiyonu $T(x,t)$ yerine, denklem (2.12)'deki değeri yazılırsa, elastik eğri fonksiyonu denklem (2.18)'deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{EI} \left[m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + C_s y(x,t) - mr^2 \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} + N \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] \\ - \frac{1}{\kappa AG} \left[m \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} + C_s \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] \\ + \frac{mr^2}{EI \kappa AG} \left[m \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^4} + C_s \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.1.2 Serbest Titreşim Hareket Denkleminin Değişkenlerine Ayrılması

Elastik eğri fonksiyonu $y(x,t)$ 'ye bağlı olarak elde edilen serbest titreşim hareket denklemi, $y(x,t)$ fonksiyonunun hem konuma hem de zamana bağlı bir fonksiyon olması sebebiyle kısmi bir diferansiyel denklem olmaktadır. Elastik eğri fonksiyonu $y(x,t)$, değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak konuma ve zamana bağlı iki farklı fonksiyon cinsinden yazılabilir. Böylece kısmi bir diferansiyel denklem olan serbest titreşim hareket denklemi, konuma ve zamana bağlı olan fonksiyonlardan herhangi birinin bilinmesi durumunda yalnızca tek bir değişkene bağlı adi bir diferansiyel denklem olarak elde edilir.

Serbest titreşime ait deplasman fonksiyonu değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x)\mu_i(t) \quad (2.19)$$

Burada $Y_i(x)$ fonksiyonu konuma bağlı bir fonksiyon olup i 'inci titreşim moduna ait elastik eğri şekil fonksiyonunu, $\mu_i(t)$ ise zamana bağlı bir fonksiyon olup i 'inci moda ait normal koordinat fonksiyonunu göstermektedir.

Serbest titreşim durumu için i 'inci titreşim moduna ait normal koordinat fonksiyonu $\mu_i(t) = \sin(\omega_i t + \varphi)$ olarak alınır, deplasman fonksiyonu denklem (2.20)'deki gibi yazılır.

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x)\sin(\omega_i t + \varphi) \quad (2.20)$$

Burada ω_i , i 'nci moda ait doğal açısız frekans değerini, t zaman değişkenini, φ ise faz açısını göstermek üzere, denklem (2.20), denklem (2.18)'de yerine yazılırsa, i 'nci moda ait serbest titreşim elastik eğri denklemi, denklem (2.21)'deki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
Y_i^{iv}(x) + \left[\frac{m\omega_i^2 - C_S}{\kappa AG} + \frac{(m\omega_i^2 r^2 + N)}{EI} \right] Y_i^u(x) \\
+ \left[\frac{mr^2}{EI\kappa AG} (m\omega_i^4 - C_S\omega_i^2) - \frac{(m\omega_i^2 - C_S)}{EI} \right] Y(x) = 0
\end{aligned} \tag{2.21}$$

2.1.3 Serbest Titreşim Hareket Denkleminin Boyutsuzlaştırılması

Serbest titreşim durumu için elde edilen hareket denklemi, konuma bağlı bir fonksiyon olup, kiriş uzunluğu boyunca tanımlanmaktadır. Bu durumda elastik eğri fonksiyonunun tanımlı olduğu aralık $0 \leq x \leq L$ olmaktadır. Bu nedenle farklı uzunluktaki kirişlere ait elastik eğri fonksiyonun tanımlı olduğu aralık da birbirinden farklı olmaktadır. Bu farklılığı önlemek amacıyla kirişin elastik eğrisinin tanım aralığı, çubuk uzunluğuna bölünürse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$0 \leq \frac{x}{L} \leq 1 \tag{2.22}$$

Bu durumda $y(x,t)$ fonksiyonu, $x/L = \xi$ için $y(\xi,t)$ fonksiyonuna dönüşür ve ξ 'ye bağlı olarak değer alır. Bu dönüşümün sonucunda, $y(x,t)$ fonksiyonunun değeri ile $y(\xi,t)$ fonksiyonunun değeri birbirine eşit olmaktadır. Bu nedenle bu fonksiyonların türevlerinin veya tanım aralıkları boyunca integrallerinin de birbirine eşit olmasını sağlamak için $y(\xi,t)$ fonksiyonunun türev ve integrali aşağıdaki gibi alınmalıdır.

$$y(x,t) = y(\xi,t) \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial^n y(x,t)}{\partial x^n} = \frac{1}{L^n} \frac{\partial^n y(\xi,t)}{\partial \xi^n} \tag{2.24}$$

$$\int_0^L y(x,t)dx = L \int_0^1 y(\xi,t)d\xi \quad , \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \quad (2.25)$$

Bu durumda denklem (2.21)'de $\xi = x/L$ dönüşümü yapılırsa, boyutsuz ξ parametresine bağlı serbest titreşim elastik eğri denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^4} Y_i^{iv}(\xi) + \frac{1}{L^2} \left[\frac{m\omega_i^2 - C_s}{\kappa AG} + \frac{(m\omega_i^2 r^2 + N)}{EI} \right] Y_i''(\xi) \\ + \left[\frac{mr^2}{EI\kappa AG} (m\omega_i^4 - C_s\omega_i^2) - \frac{(m\omega_i^2 - C_s)}{EI} \right] Y(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Denklem (2.26)'daki tüm terimler L^4 ile çarpılacak olursa, serbest titreşime ait hareket denklemi, denklem (2.27)'deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} Y_i^{iv}(\xi) + L^2 \left[\frac{m\omega_i^2 - C_s}{\kappa AG} + \frac{(m\omega_i^2 r^2 + N)}{EI(x)} \right] Y_i''(\xi) \\ + L^4 \left[\frac{mr^2}{EI\kappa AG} (m\omega_i^4 - C_s\omega_i^2) - \frac{(m\omega_i^2 - C_s)}{EI(x)} \right] Y(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.1.4 Serbest Titreşim Hareket Denkleminin Çözümü

Denklem (2.27)'de, denklem (2.28) ve (2.29)'da verilen kısaltmalar yapılacak olursa, serbest titreşim hareket denklemi, denklem (2.30)'daki gibi yazılır.

$$L^2 \left[\frac{m\omega_i^2 - C_s}{\kappa AG} + \frac{(m\omega_i^2 r^2 + N)}{EI} \right] = \alpha_i \quad (2.28)$$

$$L^4 \left[\frac{mr^2}{EI\kappa AG} (m\omega_i^4 - C_s\omega_i^2) - \frac{(m\omega_i^2 - C_s)}{EI(x)} \right] = \beta_i \quad (2.29)$$

$$Y_i^{iv}(\xi) + \alpha_i Y_i''(\xi) + \beta_i Y_i(\xi) = 0 \quad (2.30)$$

Denklem (2.30), $Y_i(\xi) = e^{-D\xi}$ için yeniden düzenlenirse, diferansiyel denklem aşağıdaki gibi yazılır.

$$D^4 + \alpha_i D^2 + \beta_i = 0 \quad (2.31)$$

Bu durumda diferansiyel denklemin kökleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D_{1,2}^2 = \frac{-\alpha_i - \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2} \quad (2.32)$$

$$D_{3,4}^2 = \frac{-\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}$$

Diferansiyel denklemin çözümü, $D_{1,2}^2$ ve $D_{3,4}^2$ 'nin alacağı değerlere göre, beş farklı durum için aşağıdaki gibi elde edilebilir.

- Durum 1: $D_{1,2}^2 < 0$ ve $D_{3,4}^2 > 0$
- Durum 2: $D_{1,2}^2 < 0$ ve $D_{3,4}^2 < 0$
- Durum 3: $D_{1,2}^2 > 0$ ve $D_{3,4}^2 > 0$
- Durum 4: $D_{1,2}^2 > 0$ ve $D_{3,4}^2 < 0$
- Durum 5: $\sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i} < 0$

2.1.4.1 Durum 1: $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Olması

$$D_{1,2} = \sqrt{\frac{-\alpha^4 - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}} = \pm i\lambda_1$$

$$D_{3,4} = \sqrt{\frac{\alpha^4 + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}} = \pm \lambda_2$$
(2.33)

$$Y(\xi) = C_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 \sin \lambda_1 \xi + C_3 \cosh \lambda_2 \xi + C_4 \sinh \lambda_2 \xi$$
(2.34)

2.1.4.2 Durum 2: $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Olması

$$D_{1,2} = \sqrt{\frac{-\alpha_i^4 - \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}} = \pm i\lambda_1$$

$$D_{3,4} = \sqrt{\frac{\alpha_i^4 + \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}} = \pm i\lambda_2$$
(2.35)

$$Y_i(\xi) = C_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 \sin \lambda_1 \xi + C_3 \cos \lambda_2 \xi + C_4 \sin \lambda_2 \xi$$
(2.36)

2.1.4.3 Durum 3: $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Olması

$$D_{1,2} = \sqrt{\frac{-\alpha_i^4 - \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}} = \pm \lambda_1$$

$$D_{3,4} = \sqrt{\frac{\alpha_i^4 + \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}} = \pm \lambda_2$$
(2.37)

$$Y_i(\xi) = C_1 \cosh \lambda_1 \xi + C_2 \sinh \lambda_1 \xi + C_3 \cosh \lambda_2 \xi + C_4 \sinh \lambda_2 \xi$$
(2.38)

2.1.4.4 Durum 4: $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Olması

$$D_{1,2} = \sqrt{\frac{-\alpha_i^4 - \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}} = \pm\lambda_1 \quad (2.39)$$

$$D_{3,4} = \sqrt{\frac{\alpha_i^4 + \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}} = \pm i\lambda_2$$

$$Y_i(\xi) = C_1 \cosh \lambda_1 \xi + C_2 \sinh \lambda_1 \xi + C_3 \cos \lambda_2 \xi + C_4 \sin \lambda_2 \xi \quad (2.40)$$

2.1.4.5 Durum 5: $\sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i} < 0$ Olması

Bu durumda diferansiyel denklemin kökleri aşağıdaki gibi elde edilir (Yeşilce, 2004).

$$D_{1,2}^2 = \frac{-\alpha_i^4 - \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2} = a - bi \quad (2.41)$$

$$D_{3,4}^2 = \frac{-\alpha_i^4 + \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2} = a + bi$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{|\alpha_i^2 - 4\beta_i|}}{-\alpha_i^2} \Rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{\sqrt{|\alpha_i^2 - 4\beta_i|}}{-\alpha_i^2} \right) \quad (2.42)$$

$$r = \sqrt[4]{\beta} \Rightarrow \Delta_1 = \sin \frac{\theta}{2}, \quad \Delta_2 = \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.43)$$

$$\lambda_1 = r\Delta_1, \quad \lambda_2 = r\Delta_2 \quad (2.44)$$

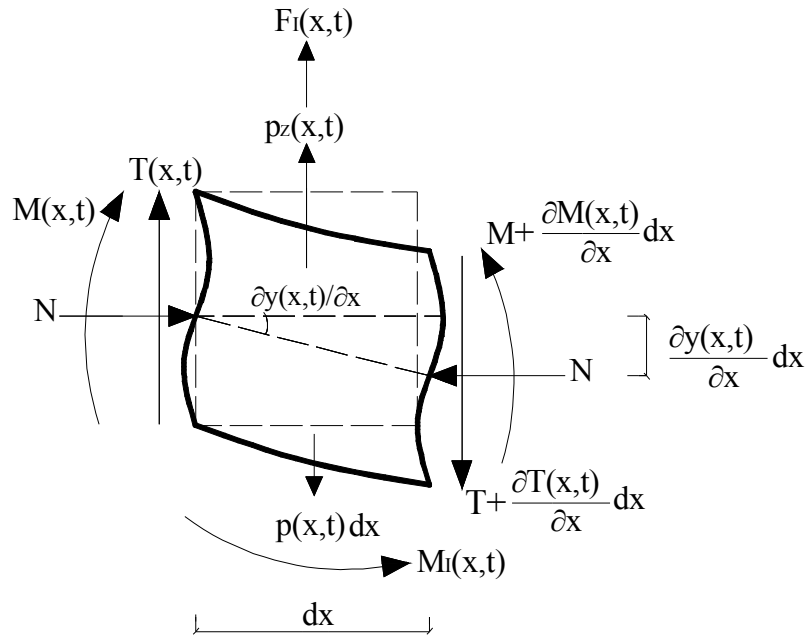
$$Y_i(\xi) = C_1 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + C_2 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi \\ + C_3 \cosh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi + C_4 \sinh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi \quad (2.45)$$

2.2 İki Parametrelili Elastik Zemin Üzerine Oturan Kirişlerin Serbest Titreşimi

2.2.1 Serbest Titreşime Ait Hareket Denkleminin Elde Edilmesi

Elastik yay katsayısı C_S , kayma parametresi C_G olan iki parametrelili elastik zeminine oturan kirişte; $M(x,t)$ eğilme momentini, $T(x,t)$ kesme kuvvetini, N ise aksenal basınç kuvvetini göstermek üzere, eğilmeden kaynaklanan deformasyonu tanımlayan kesit dönmesi fonksiyonu $\theta(x,t)$, kayma gerilmelerinden kaynaklanan deformasyon açısı fonksiyonu ise $\gamma(x,t)$ olmaktadır.

Bu durumda eğilme momenti ve kesme kuvveti fonksiyonları denklem (2.1) ve (2.3)'de, kesitte meydana gelen toplam deformasyon açısını gösteren fonksiyon ise denklem (2.4)'de verilen şekilde yazılabilir.



Şekil 2.2 İki parametrelili elastik zemine oturan kirişten çıkarılan diferansiyel parça

Şekil 2.2’de, iki parametrelili elastik zemine oturan kirişten alınan diferansiyel elemana ait serbest cisim diyagramı gösterilmektedir. Şekil 2.2’de gösterilen dx genişliğindeki sonsuz küçük diferansiyel elemana ait serbest cisim diyagramı kullanılarak genel bir elastik eğri denklemi elde edilebilir.

İki parametrelili elastik zemininin dx genişliğindeki diferansiyel elemanda oluşturduğu tepki kuvveti, denklem (2.46)’daki gibi yazılır.

$$p_z(x,t) = \left[C_s y(x,t) - C_G \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] dx \quad (2.46)$$

Bu durumda Şekil 2.2’deki düşey kuvvetlere ait denge denklemi denklem (2.47)’deki gibi yazılır.

$$m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + C_s y(x,t) - C_G \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = p(x,t) \quad (2.47)$$

Moment denge denklemi ise denklem (2.48)’deki gibi yazılır.

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + mr^2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} - N \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - T(x,t) = 0 \quad (2.48)$$

Serbest titreşim durumu için $p(x,t) = 0$ alınırsa denklem (2.47), denklem (2.49)’daki gibi yazılır.

$$m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + C_s y(x,t) - C_G \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (2.49)$$

İki parametrelili zemine oturan kirişe ait elastik eğri fonksiyonunun, konuma göre dördüncü dereceden türevinin alınması durumunda, denklem (2.13)’de verilen ifade elde edilir.

Denklem (2.48)'in konuma göre bir kez türevi alınıp denklem (2.49)'da yerine yazılırsa;

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = mr^2 \frac{\partial^3 \theta(x,t)}{\partial t^2 \partial x} - N \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - C_S y(x,t) + C_G \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.50)$$

denklemini elde edilir.

Denklem (2.49)'un konuma göre iki kez türevi alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{\partial^3 T(x,t)}{\partial x^3} = m \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + C_S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - C_G \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} \quad (2.51)$$

Denklem (2.50) ve (2.51), denklem (2.13)'de yerine yazılırsa serbest titreşim hareket denklemi, denklem (2.52)'deki gibi yazılır.

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{EI} \left[-mr^2 \frac{\partial^3 \theta(x,t)}{\partial t^2 \partial x} + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + C_S y(x,t) - C_G \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{\kappa AG} \left[m \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + C_S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - C_G \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} \right] = 0 \quad (2.52)$$

Denklem (2.52)'de $\theta(x,t)$ ifadesi yerine $\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - \frac{T(x,t)}{\kappa AG} \right]$ yazılırsa, denklem (2.53)'de verilen ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{EI} \left[m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + C_S y(x,t) - C_G \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right. \\
& \quad \left. - mr^2 \left(\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{1}{\kappa AG} \frac{\partial^3 T(x,t)}{\partial t^2 \partial x} \right) + N \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] \\
& \quad - \frac{1}{\kappa AG} \left[m \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} + C_S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - C_G \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Burada, kesme kuvvet fonksiyonu $T(x,t)$ yerine denklem (2.49)'daki değeri yazılırsa elastik eğri fonksiyonu, denklem (2.54)'deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{EI} \left[m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + C_S y(x,t) - C_G \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - mr^2 \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} \right. \\
& \quad \left. + N \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{\kappa AG} \left[m \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} + C_S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - C_G \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} \right] \\
& \quad + \frac{mr^2}{EI \kappa AG} \left[m \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^4} + C_S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - C_G \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.54}$$

2.2.2 Serbest Titreşim Hareket Denkleminin Değişkenlerine Ayrılması

İki parametrelili elastik zemine oturan kirişe ait deplasman fonksiyonu, değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak, denklem (2.19)'da verilen şekilde yazılabilir. Serbest titreşim durumu için i 'inci titreşim moduna ait normal koordinat fonksiyonun $\mu_i(t) = \sin(\omega_i t + \varphi)$ olarak alınması durumunda, iki parametrelili zemine oturan kirişe ait deplasman fonksiyonu denklem (2.20)'de verilen şekilde yazılır.

Denklem (2.20), denklem (2.54)'de yerine yazılırsa, i 'nci moda ait serbest titreşim elastik eğri denklemi, denklem (2.55)'deki gibi yazılır.

$$\left[1 + \frac{C_G}{\kappa AG}\right] Y_i^{iv}(x) + \left[\frac{m\omega_i^2 - C_s}{\kappa AG} + \frac{(m\omega_i^2 r^2 + N - C_G)}{EI} + \frac{m\omega_i^2 r^2 C_G}{EI\kappa AG} \right] Y_i''(x) + \left[\frac{mr^2}{EI\kappa AG} (m\omega_i^4 - C_s \omega_i^2) - \frac{(m\omega_i^2 - C_s)}{EI} \right] Y(x) = 0 \quad (2.55)$$

Denklem (2.55)'deki tüm terimler $\left(1 + \frac{C_G}{\kappa AG}\right)$ 'ye bölünecek olursa, diferansiyel denklem aşağıdaki gibi yazılır.

$$Y_i^{iv}(x) + \left[\frac{\kappa AG}{\kappa AG + C_G} \right] \left[\frac{m\omega_i^2 - C_s}{\kappa AG} + \frac{(m\omega_i^2 r^2 + N - C_G)}{EI} + \frac{m\omega_i^2 r^2 C_G}{EI\kappa AG} \right] Y_i''(x) + \left[\frac{\kappa AG}{\kappa AG + C_G} \right] \left[\frac{mr^2}{EI\kappa AG} (m\omega_i^4 - C_s \omega_i^2) - \frac{(m\omega_i^2 - C_s)}{EI} \right] Y(x) = 0 \quad (2.56)$$

2.2.3 Serbest Titreşim Hareket Denkleminin Boyutsuzlaştırılması

İki parametrelili elastik zemine oturan kirişe ait elastik eğri fonksiyonu, $\xi = x/L$ için, boyutsuz ξ parametresine bağlı olarak, denklem (2.23), (2.24) ve (2.25)'de verilen şekilde yazılabilir.

Bu durumda, denklem (2.56)'da $\xi = x/L$ dönüşümü yapılırsa, ξ parametresine bağlı serbest titreşim elastik eğri denklemi, denklem (2.57)'deki gibi yazılır.

$$\frac{1}{L^4} Y_i^{iv}(\xi) + \frac{1}{L^2} \left[\frac{\kappa AG}{\kappa AG + C_G} \right] \left[\frac{m\omega_i^2 - C_s}{\kappa AG} + \frac{(m\omega_i^2 r^2 + N - C_G)}{EI} + \frac{m\omega_i^2 r^2 C_G}{EI\kappa AG} \right] Y_i''(\xi) + \left[\frac{\kappa AG}{\kappa AG + C_G} \right] \left[\frac{mr^2}{EI\kappa AG} (m\omega_i^4 - C_s \omega_i^2) - \frac{(m\omega_i^2 - C_s)}{EI} \right] Y(\xi) = 0 \quad (2.57)$$

Denklem (2.57)'deki tüm terimler L^4 ile çarpılacak olursa serbest titreşime ait boyutsuz hareket denklemi, denklem (2.58)'deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
Y_i^{iv}(\xi) + L^2 \left[\frac{\kappa AG}{\kappa AG - C_G} \right] \left[\frac{m\omega_i^2 - C_s}{\kappa AG} + \frac{(m\omega_i^2 r^2 + N - C_G)}{EI} \right. \\
\left. + \frac{m\omega_i^2 r^2 C_G}{EI\kappa AG} \right] Y_i''(\xi) + L^4 \left[\frac{\kappa AG}{\kappa AG + C_G} \right] \left[\frac{mr^2}{EI\kappa AG} (m\omega_i^4 - C_s\omega_i^2) \right. \\
\left. - \frac{(m\omega_i^2 - C_s)}{EI} \right] Y(\xi) = 0
\end{aligned} \quad (2.58)$$

2.2.4 Serbest Titreşim Hareket Denkleminin Çözümü

Denklem (2.58)'de, denklem (2.59) ve (2.60)'da verilen kısaltmalar yapılacak olursa, serbest titreşime ait hareket denklemi, denklem (2.61)'deki gibi yazılır.

$$L^2 \left[\frac{\kappa AG}{\kappa AG - C_G} \right] \left[\frac{m\omega_i^2 - C_s}{\kappa AG} + \frac{(m\omega_i^2 r^2 + N - C_G)}{EI} + \frac{m\omega_i^2 r^2 C_G}{EI\kappa AG} \right] = \alpha_i \quad (2.59)$$

$$L^4 \left[\frac{\kappa AG}{\kappa AG + C_G} \right] \left[\frac{mr^2}{EI\kappa AG} (m\omega_i^4 - C_s\omega_i^2) - \frac{(m\omega_i^2 - C_s)}{EI} \right] = \beta_i \quad (2.60)$$

$$Y_i^{iv}(\xi) + \alpha_i Y_i''(\xi) + \beta_i Y_i(\xi) = 0 \quad (2.61)$$

Denklem (2.61), $Y_i(\xi) = e^{-D\xi}$ için yeniden düzenlenirse diferansiyel denklem aşağıdaki gibi yazılır.

$$D^4 + \alpha_i D^2 + \beta_i = 0 \quad (2.62)$$

Bu durumda diferansiyel denklemin kökleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D_{1,2} = \frac{-\alpha_i - \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}$$

$$D_{3,4} = \frac{-\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}$$
(2.63)

Diferansiyel denklemin çözümü $D_{1,2}$ ve $D_{3,4}$ 'nin alacağı değerlere göre beş farklı durum için aşağıdaki gibi elde edilebilir.

- Durum 1: $D_{1,2} < 0$ ve $D_{3,4} > 0$ olması.
- Durum 2: $D_{1,2} < 0$ ve $D_{3,4} < 0$ olması.
- Durum 3: $D_{1,2} > 0$ ve $D_{3,4} > 0$ olması.
- Durum 4: $D_{1,2} > 0$ ve $D_{3,4} < 0$ olması.
- Durum 5: $\sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i} < 0$ olması.

2.2.4.1 Durum 1: $D_{1,2} < 0$ Ve $D_{3,4} > 0$ Olması

$$D_{1,2} = \sqrt{\frac{-\alpha^4 - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}} = \pm i\lambda_1$$

$$D_{3,4} = \sqrt{\frac{-\alpha^4 + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}} = \pm \lambda_2$$
(2.64)

$$Y(\xi) = C_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 \sin \lambda_1 \xi + C_3 \cosh \lambda_2 \xi + C_4 \sinh \lambda_2 \xi$$
(2.65)

2.2.4.2 Durum 2: $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Olması

$$D_{1,2} = \sqrt{\frac{-\alpha_i^4 - \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}} = \pm i\lambda_1$$

$$D_{3,4} = \sqrt{\frac{-\alpha_i^4 + \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}} = \pm i\lambda_2$$
(2.66)

$$Y_i(\xi) = C_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 \sin \lambda_1 \xi + C_3 \cos \lambda_2 \xi + C_4 \sin \lambda_2 \xi$$
(2.67)

2.2.5.3 Durum 3: $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Olması

$$D_{1,2} = \sqrt{\frac{-\alpha_i^4 - \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}} = \pm \lambda_1$$

$$D_{3,4} = \sqrt{\frac{-\alpha_i^4 + \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}} = \pm \lambda_2$$
(2.68)

$$Y_i(\xi) = C_1 \cosh \lambda_1 \xi + C_2 \sinh \lambda_1 \xi + C_3 \cosh \lambda_2 \xi + C_4 \sinh \lambda_2 \xi$$
(2.69)

2.2.4.4 Durum 4: $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Olması

$$D_{1,2} = \sqrt{\frac{-\alpha_i^4 - \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}} = \pm \lambda_1$$

$$D_{3,4} = \sqrt{\frac{-\alpha_i^4 + \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}} = \pm i\lambda_2$$
(2.70)

$$Y_i(\xi) = C_1 \cosh \lambda_1 \xi + C_2 \sinh \lambda_1 \xi + C_3 \cos \lambda_2 \xi + C_4 \sin \lambda_2 \xi$$
(2.71)

2.2.4.5 Durum 5: $\sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i} < 0$ Olması

Bu durumda, diferansiyel denklemin kökleri aşağıdaki gibi elde edilir (Yeşilce, 2004).

$$D_{1,2}^2 = \frac{-\alpha_i^4 - \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2} = a - bi \quad (2.72)$$

$$D_{3,4}^2 = \frac{-\alpha_i^4 + \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2} = a + bi$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{|\alpha_i^2 - 4\beta_i|}}{-\alpha_i^2} \Rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{\sqrt{|\alpha_i^2 - 4\beta_i|}}{-\alpha_i^2} \right) \quad (2.73)$$

$$r = \sqrt[4]{\beta} \Rightarrow \Delta_1 = \sin \frac{\theta}{2}, \quad \Delta_2 = \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.74)$$

$$\lambda_1 = r\Delta_1, \quad \lambda_2 = r\Delta_2$$

$$Y_i(\xi) = C_1 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + C_2 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi \\ + C_3 \cosh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi + C_4 \sinh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi \quad (2.75)$$

BÖLÜM ÜÇ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERE AİT İÇ TESİR FONKSİYONLARININ ELDE EDİLMESİ

3.1 İç Tesir Fonksiyonlarının Değişkenlerine Ayrılması

Elastik zeminine oturan ve dinamik dış yüke maruz bir kirişe ait deplasman fonksiyonu $y(x,t)$, konum değişkeni x ve zaman değişkeni t 'ye bağlı olan kısmi bir fonksiyon olarak tanımlanmış ve hem Winkler zeminine oturan kiriş için hem de iki parameteli elastik zemine oturan kiriş için, değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak, denklem (2.19)'daki gibi yazılmıştı. Kesit dönmesi, eğilme momenti, kesme kuvveti ve kayma açısı fonksiyonları, değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak, hem Winkler zeminine oturan kirişler için hem de iki parametrelili elastik zemine oturan kirişler için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i(x) \mu_i(t) \quad (3.1)$$

$$M(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{M}_i(x) \mu_i(t) \quad (3.2)$$

$$T(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{T}_i(x) \mu_i(t) \quad (3.3)$$

$$\gamma(x,t) = \frac{T(x,t)}{\kappa AG} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{T}_i(x)}{\kappa AG} \mu_i(t) \quad (3.4)$$

Burada $\Theta_i(x)$, i 'nci moda ait kesit dönmesi şekil fonksiyonu, $\bar{M}_i(x)$; i 'nci moda ait eğilme momenti şekil fonksiyonunu, $\bar{T}_i(x)$ ise i 'nci moda ait kesme kuvveti şekil fonksiyonunu göstermektedir.

$Y_i(x), \Theta_i(x), \bar{M}_i(x)$ ve $\bar{T}_i(x)$ fonksiyonlarında $\xi = x/L$ dönüşümü yapılırsa, boyutsuz ξ parametresine bağlı deplasman, kesit dönmesi ve iç tesir fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılır.

$$y(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(\xi) \mu_i(t) \quad (3.5)$$

$$\theta(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i(\xi) \mu_i(t) \quad (3.6)$$

$$M(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{M}_i(\xi) \mu_i(t) \quad (3.7)$$

$$T(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{T}_i(\xi) \mu_i(t) \quad (3.8)$$

$$\gamma(\xi, t) = \frac{T(\xi, t)}{\kappa AG} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{T}_i(\xi)}{\kappa AG} \mu_i(t) \quad (3.9)$$

$Y_i(\xi), \Theta_i(\xi), \bar{M}_i(\xi)$ ve $\bar{T}_i(\xi)$ fonksiyonlarının serbest titreşim analiziyle elde edilmesi mümkündür. Normal koordinat fonksiyonu $\mu_i(t)$ 'nin ise ancak zorlanmış titreşim analiziyle elde etmek mümkün olur. Bu durumda $y(x, t)$, $\theta(x, t)$, $M(x, t)$, $T(x, t)$ ve $\gamma(x, t)$ fonksiyonları da ancak ve ancak zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilebilir.

3.2 Winkler Zeminine Oturan Kirişlerin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

Elastik Winkler zeminine oturan kirişlerin boyutsuz ξ değişkenine bağlı i 'inci mod deplasman şekil fonksiyonu $Y_i(\xi)$, serbest titreşim durumu için yazılan diferansiyel denklemin çözülmesiyle elde edilmişti. $\Theta_i(\xi)$, $\bar{M}_i(\xi)$ ve $\bar{T}_i(\xi)$

fonksiyonları ise denklem (3.10), (3.11), (3.12) ve (3.13) kullanılarak, beş farklı durum için elde edilen $Y_i(\xi)$ fonksiyonuna bağlı olarak elde edilebilir.

$$m \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} + C_s y(\xi, t) - \frac{1}{L} \frac{\partial T(\xi, t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{L} \frac{\partial M(\xi, t)}{\partial \xi} + m r^2 \frac{\partial^2 \theta(\xi, t)}{\partial t^2} - N \frac{1}{L} \frac{\partial y(\xi, t)}{\partial \xi} - T(\xi, t) = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial \xi^2} = -\frac{M(\xi, t)}{EI} + \frac{1}{L} \frac{1}{\kappa AG} \frac{\partial T(\xi, t)}{\partial \xi} \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{L} \frac{\partial y(\xi, t)}{\partial \xi} = \theta(\xi, t) + \frac{T(\xi, t)}{\kappa AG} \quad (3.13)$$

Serbest titreşim durumu için $\mu_i(t) = \sin(\omega_i t + \varphi)$ olarak alınırsa denklem (3.10), (3.11), (3.12) ve (3.13) aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[-m \omega_i^2 Y_i(\xi) + C_s Y_i(\xi) - \frac{1}{L} \bar{T}_i'(\xi) \right] = 0 \quad (3.14)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[-m \omega_i^2 r^2 \Theta_i(\xi) + \frac{1}{L} \bar{M}_i'(\xi) - \frac{1}{L} N Y_i'(\xi) - \bar{T}_i(\xi) \right] = 0 \quad (3.15)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{Y_i''(\xi)}{L^2} + \frac{\bar{M}_i(\xi)}{EI} - \frac{1}{L} \frac{\bar{T}_i'(\xi)}{\kappa AG} \right] = 0 \quad (3.16)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{Y_i'(\xi)}{L} - \Theta_i(\xi) - \frac{\bar{T}_i(\xi)}{\kappa AG} \right] = 0 \quad (3.17)$$

Böylece i 'inci moda ait, boyutsuz ξ parametresine bağlı iç tesir şekil fonksiyonları $\bar{M}_i(\xi)$, $\bar{T}_i(\xi)$ ve kesit dönmesi şekil fonksiyonu $\Theta_i(\xi)$, i 'nci moda ait deplasman şekil fonksiyonu $Y_i(\xi)$ 'ye bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\bar{M}_i(\xi) = EI \left[\left(\frac{C_s - m\omega_i^2}{\kappa AG} \right) Y_i(\xi) - \frac{Y_i''(\xi)}{L^2} \right] \quad (3.18)$$

$$\bar{T}_i(\xi) = \left\{ \frac{M_i'(\xi) - \left[(m\omega_i^2 r^2 + N) Y_i'(\xi) \right]}{\left[-\frac{m\omega_i^2 r^2}{\kappa AG} + 1 \right] L} \right\} \quad (3.19)$$

$$\Theta_i(\xi) = \frac{Y_i'(\xi)}{L} - \frac{\bar{T}_i(\xi)}{\kappa AG} \quad (3.20)$$

3.2.1 $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

$D_{1,2}^2 < 0$ ve $D_{3,4}^2 > 0$ durumu için, i 'inci moda ait iç tesir şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y_i(\xi) = C_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 \sin \lambda_1 \xi + C_3 \cosh \lambda_2 \xi + C_4 \sinh \lambda_2 \xi \quad (3.21)$$

$$\bar{M}_i(\xi) = C_1 K_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 K_1 \sin \lambda_1 \xi + C_3 K_2 \cosh \lambda_2 \xi + C_4 K_2 \sinh \lambda_2 \xi \quad (3.22)$$

$$\bar{T}_i(\xi) = C_1 K_3 \sin \lambda_1 \xi - C_2 K_3 \cos \lambda_1 \xi + C_3 K_4 \sinh \lambda_2 \xi + C_4 K_4 \cosh \lambda_2 \xi \quad (3.23)$$

$$\Theta_i(\xi) = C_1 K_5 \sin \lambda_1 \xi + C_2 K_6 \cos \lambda_1 \xi + C_3 K_7 \sinh \lambda_2 \xi + C_4 K_7 \cosh \lambda_2 \xi \quad (3.24)$$

Burada;

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) + \frac{EI\lambda_1^2}{L^2}, \quad K_2 = \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) - \frac{EI\lambda_2^2}{L^2} \\
K_3 &= \frac{\lambda_1 \left(-K_1 + (m\omega_i^2 r^2 + N) \right)}{L(-m\omega_i^2 r^2 / \kappa AG + 1)}, \quad K_4 = \frac{\lambda_2 \left(K_2 - (m\omega_i^2 r^2 + N) \right)}{L(-m\omega_i^2 r^2 / \kappa AG + 1)} \\
K_5 &= \left(\frac{-\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right), \quad K_6 = \left(\frac{\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right), \quad K_7 = \left(\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_4}{\kappa AG} \right)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

olarak elde edilir.

3.2.2 $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

$D_{1,2}^2 < 0$ ve $D_{3,4}^2 < 0$ durumu için, i'inci moda ait iç tesir şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y_i(\xi) = C_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 \sin \lambda_1 \xi + C_3 \cos \lambda_2 \xi + C_4 \sin \lambda_2 \xi \tag{3.26}$$

$$\bar{M}_i(\xi) = C_1 K_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 K_1 \sin \lambda_1 \xi + C_3 K_2 \cos \lambda_2 \xi + C_4 K_2 \sin \lambda_2 \xi \tag{3.27}$$

$$\bar{T}_i(\xi) = C_1 K_3 \sin \lambda_1 \xi - C_2 K_3 \cos \lambda_1 \xi + C_3 K_4 \sin \lambda_2 \xi - C_4 K_4 \cos \lambda_2 \xi \tag{3.28}$$

$$\Theta_i(\xi) = C_1 K_5 \sin \lambda_1 \xi - C_2 K_5 \cos \lambda_1 \xi + C_3 K_7 \sin \lambda_2 \xi + C_4 K_8 \cos \lambda_2 \xi \tag{3.29}$$

Burada;

$$K_1 = \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) + \frac{EI\lambda_1^2}{L^2}, \quad K_2 = \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) + \frac{EI\lambda_2^2}{L^2}$$

$$K_3 = \frac{\lambda_1(-K_1 + (m\omega_i^2 r^2 + N))}{L(-m\omega^2 r^2 / \kappa AG + 1)}, \quad K_4 = \frac{\lambda_2(-K_2 + (m\omega_i^2 r^2 + N))}{L(-m\omega^2 r^2 / \kappa AG + 1)} \quad (3.30)$$

$$K_5 = \left(-\frac{\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right), \quad K_6 = \left(\frac{\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right)$$

$$K_7 = \left(-\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_4}{\kappa AG} \right), \quad K_8 = \left(\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_4}{\kappa AG} \right)$$

olarak elde edilir.

3.2.3 $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

$D_{1,2}^2 > 0$ ve $D_{3,4}^2 > 0$ durumu için, i'inci moda ait iç tesir şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y_i(\xi) = C_1 \cosh \lambda_1 \xi + C_2 \sinh \lambda_1 \xi + C_3 \cosh \lambda_2 \xi + C_4 \sinh \lambda_2 \xi \quad (3.31)$$

$$\bar{M}_i(\xi) = C_1 K_1 \cosh \lambda_1 \xi + C_2 K_1 \sinh \lambda_1 \xi + C_3 K_2 \cosh \lambda_2 \xi + C_4 K_2 \sinh \lambda_2 \xi \quad (3.32)$$

$$\bar{T}_i(\xi) = C_1 K_3 \sinh \lambda_1 \xi + C_2 K_3 \cosh \lambda_1 \xi + C_3 K_4 \sinh \lambda_2 \xi + C_4 K_4 \cosh \lambda_2 \xi \quad (3.33)$$

$$\Theta_i(\xi) = C_1 K_5 \sinh \lambda_1 \xi + C_2 K_5 \cosh \lambda_1 \xi + C_3 K_6 \sinh \lambda_2 \xi + C_4 K_6 \cosh \lambda_2 \xi \quad (3.34)$$

Burada;

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) - \frac{EI\lambda_1^2}{L^2}, \quad K_2 = \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) - \frac{EI\lambda_2^2}{L^2} \\
 K_3 &= \frac{\lambda_1 \left(K_1 - (m\omega_i^2 r^2 + N) \right)}{L(-m\omega_i^2 r^2 / \kappa AG + 1)}, \quad K_4 = \frac{\lambda_2 \left(K_2 - (m\omega_i^2 r^2 + N) \right)}{L(-m\omega_i^2 r^2 / \kappa AG + 1)} \\
 K_5 &= \left(\frac{\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right), \quad K_6 = \left(\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_4}{\kappa AG} \right)
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

olarak elde edilir.

3.2.4 $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

$D_{1,2}^2 > 0$ ve $D_{3,4}^2 < 0$ durumu için, i'inci moda ait iç tesir şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y_i(\xi) = C_1 \cosh \lambda_1 \xi + C_2 \sinh \lambda_1 \xi + C_3 \cos \lambda_2 \xi + C_4 \sin \lambda_2 \xi \tag{3.36}$$

$$\bar{M}_i(\xi) = C_1 K_1 \cosh \lambda_1 \xi + C_2 K_1 \sinh \lambda_1 \xi + C_3 K_2 \cos \lambda_2 \xi + C_4 K_2 \sin \lambda_2 \xi \tag{3.37}$$

$$\bar{T}_i(\xi) = C_1 K_3 \sinh \lambda_1 \xi + C_2 K_3 \cosh \lambda_1 \xi + C_3 K_4 \sin \lambda_2 \xi - C_4 K_4 \cosh \lambda_2 \xi \tag{3.38}$$

$$\Theta_i(\xi) = C_1 K_5 \sinh \lambda_1 \xi + C_2 K_5 \cosh \lambda_1 \xi + C_3 K_6 \sin \lambda_2 \xi + C_4 K_7 \cos \lambda_2 \xi \tag{3.39}$$

Burada;

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) - \frac{EI\lambda_1^2}{L^2} , \quad K_2 = \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) + \frac{EI\lambda_2^2}{L^2} \\
K_3 &= \frac{\lambda_1 (K_1 - (m\omega_i^2 r^2 + N))}{L(-m\omega_i^2 r^2 / \kappa AG + 1)} , \quad K_4 = \frac{\lambda_2 (-K_2 + (m\omega_i^2 r^2 + N))}{L(-m\omega_i^2 r^2 / \kappa AG + 1)} \\
K_5 &= \left(\frac{\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right) , \quad K_6 = \left(-\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right) , \quad K_7 = \left(\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_4}{\kappa AG} \right)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

olarak elde edilir.

3.2.5 $\sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i} < 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

$\sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i} < 0$ durumu için, i'inci moda ait iç tesir şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
Y_i(\xi) &= C_1 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + C_2 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi \\
&\quad + C_3 \cosh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi + C_4 \sinh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_i(\xi) &= C_1 [K_1 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + K_2 \sinh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi] \\
&\quad + C_2 [K_1 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + K_2 \cosh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi] \\
&\quad + C_3 [K_1 \cosh \lambda_2 \xi \sin \lambda_2 \xi - K_2 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi] \\
&\quad + C_4 [K_1 \sinh \lambda_2 \xi \sin \lambda_2 \xi - K_2 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi]
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}_i(\xi) = & C_1 [K_3 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + K_4 \cosh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi] \\
& + C_2 [K_3 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + K_4 \sinh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi] \\
& + C_3 [K_3 \sinh \lambda_2 \xi \sin \lambda_2 \xi - K_4 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi] \\
& + C_4 [K_1 \cosh \lambda_2 \xi \sin \lambda_2 \xi - K_4 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_i(\xi) = & C_1 [K_5 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + K_6 \cosh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi] \\
& + C_2 [K_5 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + K_6 \sinh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi] \\
& + C_3 [K_5 \sinh \lambda_2 \xi \sin \lambda_2 \xi - K_6 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi] \\
& + C_4 [K_5 \cosh \lambda_2 \xi \sin \lambda_2 \xi - K_6 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi]
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Burada;

$$\begin{aligned}
K_1 = & EI \left(\frac{(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} + \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{L^2} \right) \\
K_2 = & \frac{2EI\lambda_1\lambda_2}{L^2} \\
K_3 = & \frac{(K_2\lambda_2 + K_1\lambda_1) - \lambda_1(m\omega_i^2 r^2 + N)}{L(-m\omega^2 r^2 / \kappa AG + 1)} \\
K_4 = & \frac{(K_2\lambda_1 - K_1\lambda_2) + \lambda_2(m\omega_i^2 r^2 + N)}{L(-m\omega^2 r^2 / \kappa AG + 1)} \\
K_5 = & \left(\frac{\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right) \\
K_6 = & \left(-\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_4}{\kappa AG} \right)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

olarak elde edilir.

3.3 İki Parametrelili Elastik Zemine Oturan Kirişlerin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

İki parametrelili elastik zemine oturan kirişe ait, boyutsuz ξ parametresine bağlı i 'inci mod deplasman şekil fonksiyonu $Y_i(\xi)$, bölüm 2'de serbest titreşim durumu için yazılan diferansiyel denklemin çözülmesiyle elde edilmişti. $\Theta_i(\xi)$, $\bar{M}_i(\xi)$ ve $\bar{T}_i(\xi)$ fonksiyonları ise denklem (3.46), (3.47), (3.12) ve (3.13) kullanılarak beş farklı durum için elde edilen $Y_i(\xi)$ fonksiyonuna göre elde edilebilir.

$$m \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} + C_S y(\xi, t) - C_G \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{L} \frac{\partial T(\xi, t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.46)$$

$$\frac{1}{L} \frac{\partial M(\xi, t)}{\partial \xi} + m r^2 \frac{\partial^2 \theta(\xi, t)}{\partial t^2} - N \frac{1}{L} \frac{\partial y(\xi, t)}{\partial \xi} - T(\xi, t) = 0 \quad (3.47)$$

Serbest titreşim durumu için $\mu_i(t) = \sin(\omega_i t + \varphi)$ olarak alınırsa denklem (3.46), ve (3.47) aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[-m \omega_i^2 Y_i(\xi) + C_S Y_i(\xi) - \frac{1}{L^2} C_G Y_i''(\xi) - \frac{1}{L} \bar{T}_i'(\xi) \right] = 0 \quad (3.48)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[-m \omega_i^2 r^2 \Theta_i(\xi) + \frac{1}{L} \bar{M}_i'(\xi) - \frac{1}{L} N Y_i'(\xi) - \bar{T}_i(\xi) \right] = 0 \quad (3.49)$$

Böylece i 'inci titreşim moduna ait, boyutsuz ξ parametresine bağlı moment şekil fonksiyonu $\bar{M}_i(\xi)$, i 'nci moda ait deplasman şekil fonksiyonu $Y_i(\xi)$ 'ye bağlı olarak denklem (3.50)'deki gibi elde edilir. Kesme kuvveti ve kesit dönmesine ait şekil fonksiyonları, $\bar{T}_i(\xi)$ ve $\Theta_i(\xi)$ ise denklem (3.19) ve (3.20)'de verilen şekilde elde edilir.

$$\bar{M}_i(\xi) = EI \left[\left(\frac{C_s - m\omega_i^2}{\kappa AG} \right) Y_i(\xi) - \left(\frac{C_G}{\kappa AG} + 1 \right) \frac{Y_i''(\xi)}{L^2} \right] \quad (3.50)$$

3.3.1 $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

$D_{1,2}^2 < 0$ ve $D_{3,4}^2 > 0$ durumu için, i'inci moda ait iç tesir şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y_i(\xi) = C_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 \sin \lambda_1 \xi + C_3 \cosh \lambda_2 \xi + C_4 \sinh \lambda_2 \xi \quad (3.51)$$

$$\bar{M}_i(\xi) = C_1 K_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 K_1 \sin \lambda_1 \xi + C_3 K_2 \cosh \lambda_2 \xi + C_4 K_2 \sinh \lambda_2 \xi \quad (3.52)$$

$$\bar{T}_i(\xi) = C_1 K_3 \sin \lambda_1 \xi - C_2 K_3 \cos \lambda_1 \xi + C_3 K_4 \sinh \lambda_2 \xi + C_4 K_4 \cosh \lambda_2 \xi \quad (3.53)$$

$$\Theta_i(\xi) = C_1 K_5 \sin \lambda_1 \xi + C_2 K_6 \cos \lambda_1 \xi + C_3 K_7 \sinh \lambda_2 \xi + C_4 K_7 \cosh \lambda_2 \xi \quad (3.54)$$

Burada;

$$\begin{aligned} K_1 &= \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) + \left(\frac{C_G}{\kappa AG} + 1 \right) \frac{EI\lambda_1^2}{L^2} \\ K_2 &= \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) - \left(\frac{C_G}{\kappa AG} + 1 \right) \frac{EI\lambda_2^2}{L^2} \\ K_3 &= \frac{\lambda_1(-K_1 + (m\omega_i^2 r^2 + N))}{L(-m\omega_i^2 r^2 / \kappa AG + 1)}, \quad K_4 = \frac{\lambda_2(K_2 - (m\omega_i^2 r^2 + N))}{L(-m\omega_i^2 r^2 / \kappa AG + 1)} \\ K_5 &= \left(\frac{-\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right), \quad K_6 = \left(\frac{\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right), \quad K_7 = \left(\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_4}{\kappa AG} \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

olarak elde edilir.

3.3.2 $D_{1,2}^2 < 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

$D_{1,2}^2 < 0$ ve $D_{3,4}^2 < 0$ durumu için, i'inci moda ait iç tesir şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y_i(\xi) = C_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 \sin \lambda_1 \xi + C_3 \cos \lambda_2 \xi + C_4 \sin \lambda_2 \xi \quad (3.56)$$

$$\bar{M}_i(\xi) = C_1 K_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 K_1 \sin \lambda_1 \xi + C_3 K_2 \cos \lambda_2 \xi + C_4 K_2 \sin \lambda_2 \xi \quad (3.57)$$

$$\bar{T}_i(\xi) = C_1 K_3 \sin \lambda_1 \xi - C_2 K_3 \cos \lambda_1 \xi + C_3 K_4 \sin \lambda_2 \xi - C_4 K_4 \cos \lambda_2 \xi \quad (3.58)$$

$$\Theta_i(\xi) = C_1 K_5 \sin \lambda_1 \xi - C_2 K_5 \cos \lambda_1 \xi + C_3 K_7 \sin \lambda_2 \xi + C_4 K_8 \cos \lambda_2 \xi \quad (3.59)$$

Burada;

$$\begin{aligned} K_1 &= \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) + \left(\frac{C_G}{\kappa AG} + 1 \right) \frac{EI\lambda_1^2}{L^2} \\ K_2 &= \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) + \left(\frac{C_G}{\kappa AG} + 1 \right) \frac{EI\lambda_2^2}{L^2} \\ K_3 &= \frac{\lambda_1 \left(-K_1 + (m\omega_i^2 r^2 + N) \right)}{L(-m\omega^2 r^2 / \kappa AG + 1)}, \quad K_4 = \frac{\lambda_2 \left(-K_2 + (m\omega_i^2 r^2 + N) \right)}{L(-m\omega^2 r^2 / \kappa AG + 1)} \\ K_5 &= \left(-\frac{\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right), \quad K_6 = \left(\frac{\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right) \\ K_7 &= \left(-\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_4}{\kappa AG} \right), \quad K_8 = \left(\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_4}{\kappa AG} \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

olarak elde edilir.

3.3.3 $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 > 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

$D_{1,2}^2 > 0$ ve $D_{3,4}^2 > 0$ durumu için, i'inci moda ait iç tesir şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y_i(\xi) = C_1 \cosh \lambda_1 \xi + C_2 \sinh \lambda_1 \xi + C_3 \cosh \lambda_2 \xi + C_4 \sinh \lambda_2 \xi \quad (3.61)$$

$$\bar{M}_i(\xi) = C_1 K_1 \cosh \lambda_1 \xi + C_2 K_1 \sinh \lambda_1 \xi + C_3 K_2 \cosh \lambda_2 \xi + C_4 K_2 \sinh \lambda_2 \xi \quad (3.62)$$

$$\bar{T}_i(\xi) = C_1 K_3 \sinh \lambda_1 \xi + C_2 K_3 \cosh \lambda_1 \xi + C_3 K_4 \sinh \lambda_2 \xi + C_4 K_4 \cosh \lambda_2 \xi \quad (3.63)$$

$$\Theta_i(\xi) = C_1 K_5 \sinh \lambda_1 \xi + C_2 K_5 \cosh \lambda_1 \xi + C_3 K_6 \sinh \lambda_2 \xi + C_4 K_6 \cosh \lambda_2 \xi \quad (3.64)$$

Burada;

$$\begin{aligned} K_1 &= \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) - \left(\frac{C_G}{\kappa AG} + 1 \right) \frac{EI\lambda_1^2}{L^2} \\ K_2 &= \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) - \left(\frac{C_G}{\kappa AG} + 1 \right) \frac{EI\lambda_2^2}{L^2} \\ K_3 &= \frac{\lambda_1 \left(K_1 - (m\omega_i^2 r^2 + N) \right)}{L(-m\omega^2 r^2 / \kappa AG + 1)} \quad , \quad K_4 = \frac{\lambda_2 \left(K_2 - (m\omega_i^2 r^2 + N) \right)}{L(-m\omega^2 r^2 / \kappa AG + 1)} \\ K_5 &= \left(\frac{\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right) \quad , \quad K_6 = \left(\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_4}{\kappa AG} \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

olarak elde edilir.

3.3.4 $D_{1,2}^2 > 0$ Ve $D_{3,4}^2 < 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

$D_{1,2}^2 > 0$ ve $D_{3,4}^2 < 0$ durumu için, i'inci moda ait iç tesir şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y_i(\xi) = C_1 \cosh \lambda_1 \xi + C_2 \sinh \lambda_1 \xi + C_3 \cos \lambda_2 \xi + C_4 \sin \lambda_2 \xi \quad (3.66)$$

$$\bar{M}_i(\xi) = C_1 K_1 \cosh \lambda_1 \xi + C_2 K_1 \sinh \lambda_1 \xi + C_3 K_2 \cos \lambda_2 \xi + C_4 K_2 \sin \lambda_2 \xi \quad (3.67)$$

$$\bar{T}_i(\xi) = C_1 K_3 \sinh \lambda_1 \xi + C_2 K_3 \cosh \lambda_1 \xi + C_3 K_4 \sin \lambda_2 \xi - C_4 K_4 \cos \lambda_2 \xi \quad (3.68)$$

$$\Theta_i(\xi) = C_1 K_5 \sinh \lambda_1 \xi + C_2 K_5 \cosh \lambda_1 \xi + C_3 K_6 \sin \lambda_2 \xi + C_4 K_7 \cos \lambda_2 \xi \quad (3.69)$$

Burada;

$$K_1 = \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) - \left(\frac{C_G}{\kappa AG} + 1 \right) \frac{EI\lambda_1^2}{L^2}$$

$$K_2 = \left(\frac{EI(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} \right) + \left(\frac{C_G}{\kappa AG} + 1 \right) \frac{EI\lambda_2^2}{L^2}$$

$$K_3 = \frac{\lambda_1 (K_1 - (m\omega_i^2 r^2 + N))}{L(-m\omega^2 r^2 / \kappa AG + 1)}, \quad K_4 = \frac{\lambda_2 (-K_2 + (m\omega_i^2 r^2 + N))}{L(-m\omega^2 r^2 / \kappa AG + 1)} \quad (3.70)$$

$$K_5 = \left(\frac{\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right), \quad K_6 = \left(-\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right), \quad K_7 = \left(\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_4}{\kappa AG} \right)$$

olarak elde edilir.

3.3.5 $\sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i} < 0$ Durumu İçin İç Tesir Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

$\sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i} < 0$ durumu için, i'inci moda ait iç tesir şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y_i(\xi) = C_1 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + C_2 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + C_3 \cosh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi + C_4 \sinh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_i(\xi) = & C_1 [K_1 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + K_2 \sinh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi] \\ & + C_2 [K_1 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + K_2 \cosh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi] \\ & + C_3 [K_1 \cosh \lambda_2 \xi \sin \lambda_2 \xi - K_2 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi] \\ & + C_4 [K_1 \sinh \lambda_2 \xi \sin \lambda_2 \xi - K_2 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi] \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_i(\xi) = & C_1 [K_3 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + K_4 \cosh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi] \\ & + C_2 [K_3 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + K_4 \sinh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi] \\ & + C_3 [K_3 \sinh \lambda_2 \xi \sin \lambda_2 \xi - K_4 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi] \\ & + C_4 [K_1 \cosh \lambda_2 \xi \sin \lambda_2 \xi - K_4 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi] \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \Theta_i(\xi) = & C_1 [K_5 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + K_6 \cosh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi] \\ & + C_2 [K_5 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi + K_6 \sinh \lambda_1 \xi \sin \lambda_2 \xi] \\ & + C_3 [K_5 \sinh \lambda_2 \xi \sin \lambda_2 \xi - K_6 \cosh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi] \\ & + C_4 [K_5 \cosh \lambda_2 \xi \sin \lambda_2 \xi - K_6 \sinh \lambda_1 \xi \cos \lambda_2 \xi] \end{aligned} \quad (3.74)$$

Burada;

$$\begin{aligned}
 K_1 &= EI \left(\frac{(C_s - m\omega_i^2)}{\kappa AG} + \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{L^2} \left(\frac{C_G}{\kappa AG} + 1 \right) \right) \\
 K_2 &= \frac{2EI\lambda_1\lambda_2}{L^2} \left(\frac{C_G}{\kappa AG} + 1 \right) \\
 K_3 &= \frac{(K_2\lambda_2 + K_1\lambda_1) - \lambda_1(m\omega_i^2 r^2 + N)}{L(-m\omega^2 r^2 / \kappa AG + 1)} \\
 K_4 &= \frac{(K_2\lambda_1 - K_1\lambda_2) + \lambda_2(m\omega_i^2 r^2 + N)}{L(-m\omega^2 r^2 / \kappa AG + 1)} \\
 K_5 &= \left(\frac{\lambda_1}{L} - \frac{K_3}{\kappa AG} \right) , \quad K_6 = \left(-\frac{\lambda_2}{L} - \frac{K_4}{\kappa AG} \right)
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

olarak elde edilir.

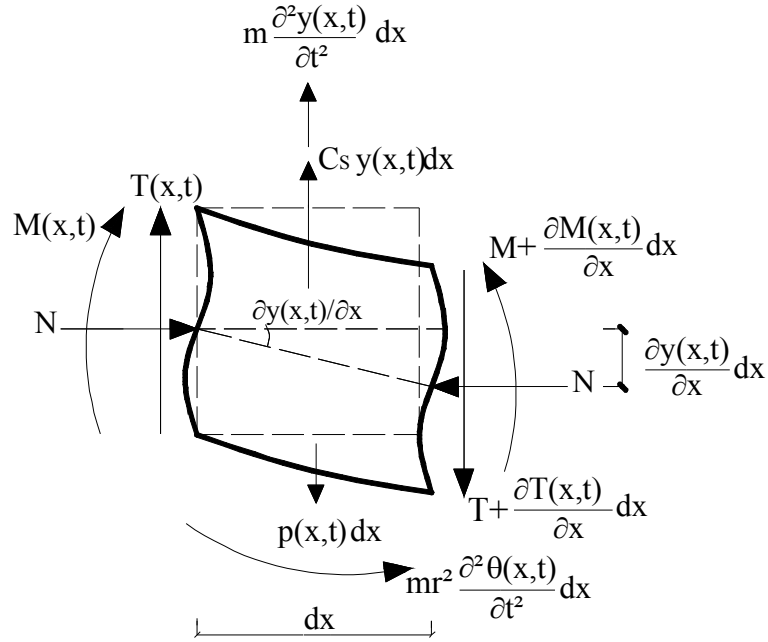
BÖLÜM DÖRT

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİNE AİT HAREKET DENKLEMİNİN ELDE EDİLMESİ

4.1 Winkler Zeminine Oturan Kirişler Ait Zorlanmış Titreşim Hareket Denkleminin Elde Edilmesi

Elastik Winkler zeminine oturan, dinamik dış yük etkisindeki bir kirişin zorlanmış titreşimine ait hareket denklemi, kirişin elastik eğrisinden alınan ve Şekil 4.1’de gösterilen dx genişliğindeki diferansiyel elemanın denge denklemi kullanılarak elde edilebilir.

Şekil 4.1’de verilen, Winkler zeminine oturan kirişten alınan diferansiyel elemana ait kesme kuvveti ve moment denge denklemleri, denklem (2.10) ve (2.11)’de verilen şekilde yazılır.



Şekil 4.1 Winkler zeminine oturan, $p(x,t)$ dış yüküne maruz kirişin elastik eğrisinden alınan dx genişliğindeki diferansiyel parçaya ait serbest cisim diyagramı

Deplasman, kesit dönmesi, eğilme momenti ve kesme kuvveti fonksiyonları, değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak, denklem (2.19), (3.1), (3.2) ve (3.3)'deki gibi yazılmıştı. Bu durumda denklem (2.19), (3.1), (3.2) ve (3.3), denklem (2.10) ve (2.11)'de yerine yazılırsa, aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[mY_i(x) \ddot{\mu}_i(t) + (C_S Y_i(x) - \bar{T}_i'(x)) \mu_i(t) \right] = p(x, t) \quad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[mr^2 \Theta_i(x) \ddot{\mu}_i(t) + (\bar{M}_i'(x) - NY_i'(x) - \bar{T}_i(x)) \mu_i(t) \right] = 0 \quad (4.2)$$

Denklem (4.1) ve (4.2)'de verilen denge denklemlerinde $\xi = x/L$ dönüşümü yapılırsa, boyutsuz ξ parametresine bağlı denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[mY_i(\xi) \ddot{\mu}_i(t) + \left(C_S Y_i(\xi) - \frac{1}{L} \bar{T}_i'(\xi) \right) \mu_i(t) \right] = p(\xi, t) \quad (4.3)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[mr^2 \Theta_i(\xi) \ddot{\mu}_i(t) + \left(\frac{1}{L} \bar{M}_i'(\xi) - \frac{1}{L} NY_i'(\xi) - \bar{T}_i(\xi) \right) \mu_i(t) \right] = 0 \quad (4.4)$$

$Y_i(\xi)$, $\Theta_i(\xi)$, $\bar{M}_i(\xi)$ ve $\bar{T}_i(\xi)$ fonksiyonları serbest titreşim analiziyle, $p(\xi, t) = 0$ için normal koordinat fonksiyonunun $\mu_i(t) = \sin(\omega_i t + \varphi)$ olarak alınmasıyla elde edilir.

Denklem (4.4) kullanılarak $-\ddot{\mu}_i(t)/\mu_i(t)$ oranı elde edilecek olursa, bu oranın yalnızca konuma bağlı fonksiyonlardan oluşması nedeniyle sabit bir değer olduğunu ve her $\mu_i(t)$ fonksiyonu için aynı değeri aldığını görmüş oluruz(Chopra, 2005).

$$\frac{\ddot{\mu}_i(t)}{\mu_i(t)} = \frac{\left(\frac{1}{L} \bar{M}_i'(\xi) - \frac{1}{L} NY_i'(\xi) - \bar{T}_i(\xi) \right)}{mr^2 \Theta_i(\xi)} \quad (4.5)$$

Bu durumda serbest titreşim durumu için aşağıdaki gibi elde edilen $-\ddot{\mu}_i(t)/\mu_i(t)$ oranı da, herhangi bir zorlanmış titreşim fonksiyonu için elde edilen $-\ddot{\mu}_i(t)/\mu_i(t)$ oranıyla aynı değeri almakta olup, bu değer ω_i^2 'ye eşit olur(Chopra, 2005).

Serbest titreşim durumu için $p(\xi, t) = 0$ ve $\mu_i(t) = \sin(\omega_i t + \varphi)$ olarak alınırsa düşey kuvvetler ve toplam moment için yazılan denge denklemleri, denklem (4.6) ve (4.7)'deki gibi elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[mY_i(\xi) \ddot{\mu}_i(t) + \left(C_S Y_i(\xi) - \frac{1}{L} \bar{T}_i'(\xi) \right) \mu_i(t) \right] = 0 \quad (4.6)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[mr^2 \Theta_i(\xi) \ddot{\mu}_i(t) + \left(\frac{1}{L} \bar{M}_i'(\xi) - \frac{1}{L} NY_i'(\xi) - \bar{T}_i(\xi) \right) \mu_i(t) \right] = 0 \quad (4.7)$$

Bu durumda $-\ddot{\mu}_i(t)/\mu_i(t)$ oranı da aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-\frac{\ddot{\mu}_i(t)}{\mu_i(t)} = \frac{\left(C_S Y_i(\xi) - \frac{1}{L} \bar{T}_i'(\xi) \right)}{mY_i(\xi)} = \frac{\left(\frac{1}{L} \bar{M}_i'(\xi) - \frac{1}{L} NY_i'(\xi) - \bar{T}_i(\xi) \right)}{mr^2 \Theta_i(\xi)} = \omega_i^2 \quad (4.8)$$

$$m\omega_i^2 Y_i(\xi) = C_S Y_i(\xi) - \frac{1}{L} \bar{T}_i'(\xi) \quad (4.9)$$

$$m\omega_i^2 r^2 \Theta_i(\xi) = \frac{1}{L} \bar{M}_i'(\xi) - \frac{1}{L} NY_i'(\xi) - \bar{T}_i(\xi) \quad (4.10)$$

Denklem (4.9) ve (4.10)'da verilen eşitlikler, denklem (4.1) ve (4.2)'de verilen zorlanmış titreşime ait denge denklemlerinde yerine konularsa, zorlanmış titreşim hareket denklemleri, i'inci mod normal koordinat fonksiyonu $\mu_i(t)$ 'ye bağlı iki adet ikinci dereceden diferansiyel denklem olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

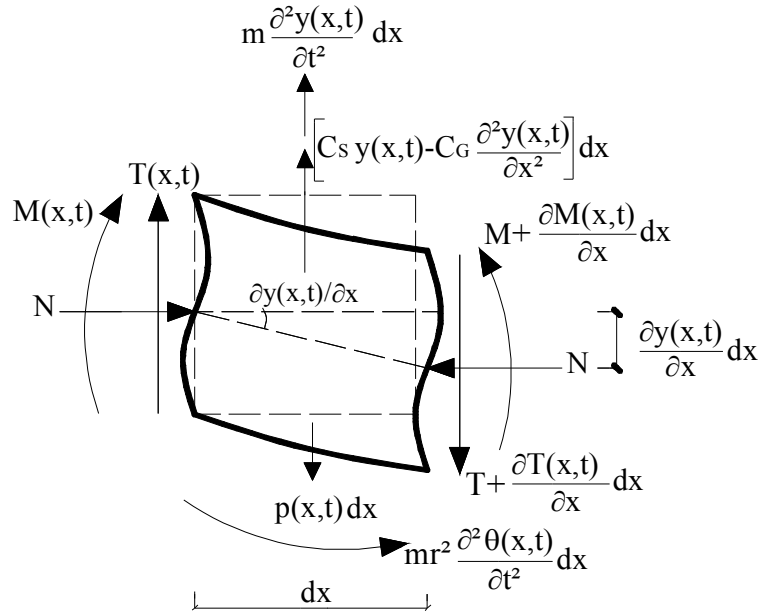
$$\sum_{i=1}^{\infty} m Y_i(\xi) \left[\ddot{\mu}_i(t) + \omega_i^2 \mu_i(t) \right] = p(\xi, t) \quad (4.11)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} m \Theta_i(\xi) \left[\ddot{\mu}_i(t) + \omega_i^2 \mu_i(t) \right] = 0 \quad (4.12)$$

4.2 İki Parametrelili Elastik Zemine Oturan Kirişlerin Zorlanmış Titreşim Hareket Denkleminin Elde Edilmesi

İki parametrelili elastik zemine oturan, elastik yatak katsayısı C_S , kayma parametresi C_G olan, dinamik dış yük etkisindeki bir kirişin zorlanmış titreşimine ait hareket denklemleri, kirişin elastik eğrisinden alınan ve Şekil 4.2'de gösterilen dx genişliğindeki diferansiyel elemanın denge denklemleri kullanılarak elde edilebilir.

Şekil 4.2'de verilen, iki parametrelili elastik zemine oturan kirişten alınan diferansiyel elemana ait kesme kuvveti ve moment denge denklemleri, denklemler (2.47) ve (2.48)'de verilen şekilde yazılır.



Şekil 4.2-İki parametrelili zemine oturan, $p(x,t)$ dış yüküne maruz kirişin elastik eğrisinden alınan dx genişliğindeki diferansiyel parçaya ait serbest cisim diyagramı

Deplasman, kesit dönmesi, eğilme momenti ve kesme kuvveti fonksiyonları, değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak denklem (2.19), (3.1), (3.2) ve (3.3)'deki gibi yazılmıştı. Bu durumda denklem (2.19), (3.1), (3.2) ve (3.3) denklem (2.47) ve (2.48)'de yerine yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[mY_i(x) \ddot{\mu}_i(t) + \left(C_S Y_i(x) - C_G Y_i''(x) - \bar{T}_i'(x) \right) \mu_i(t) \right] = p(x, t) \quad (4.13)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[mr^2 \Theta_i(x) \ddot{\mu}_i(t) + \left(\bar{M}_i'(x) - NY_i'(x) - \bar{T}_i(x) \right) \mu_i(t) \right] = 0 \quad (4.14)$$

Denklem (4.15) ve (4.16)'da $\xi = x/L$ boyutsuzlaştırması yapılırsa, boyutsuz ξ parametresine bağlı denklemleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[mY_i(\xi) \ddot{\mu}_i(t) + \left(C_S Y_i(\xi) - \frac{1}{L^2} C_G Y_i''(\xi) - \frac{1}{L} \bar{T}_i'(\xi) \right) \mu_i(t) \right] = p(\xi, t) \quad (4.15)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[mr^2 \Theta_i(\xi) \ddot{\mu}_i(t) + \left(\frac{1}{L} \bar{M}_i'(\xi) - \frac{1}{L} NY_i'(\xi) - \bar{T}_i(\xi) \right) \mu_i(t) \right] = 0 \quad (4.16)$$

$Y_i(x)$, $\Theta_i(x)$, $\bar{M}_i(x)$ ve $\bar{T}_i(x)$ fonksiyonları, $p(\xi, t) = 0$ için normal koordinat fonksiyonunun $\mu_i(t) = \sin(\omega_i t + \varphi)$ olarak alınmasıyla elde edilir.

Denklem (4.18) kullanılarak $-\ddot{\mu}_i(t)/\mu_i(t)$ oranı elde edilecek olursa, bu oranın yalnızca konuma bağlı fonksiyonlara bağlı olması nedeniyle sabit bir değer olduğu ve her $\mu_i(t)$ fonksiyonu için aynı değeri aldığı görülür(Chopra, 2005).

$$\frac{\ddot{\mu}_i(t)}{\mu_i(t)} = \frac{\left(\frac{1}{L} \bar{M}_i'(\xi) - \frac{1}{L} NY_i'(\xi) - \bar{T}_i(\xi) \right)}{mr^2 \Theta_i(\xi)} \quad (4.17)$$

Bu durumda serbest titreşim için aşağıdaki gibi elde edilen $-\ddot{\mu}_i(t)/\mu_i(t)$ oranı da, herhangi bir zorlanmış titreşim fonksiyonu için elde edilen $-\ddot{\mu}_i(t)/\mu_i(t)$ oranıyla aynı değeri almakta olup bu değer ω_i^2 'ye eşit olur.(Chopra, 2005).

Serbest titreşim durumu için $p(\xi,t)=0$ ve $\mu_i(t)=\sin(\omega_i t + \varphi)$ olarak alınırsa düşey kuvvetler ve toplam moment için yazılan denge denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[mY_i(\xi) \ddot{\mu}_i(t) + \left(C_S Y_i(\xi) - \frac{1}{L^2} C_G Y_i''(\xi) - \frac{1}{L} \bar{T}_i'(\xi) \right) \mu_i(t) \right] = 0 \quad (4.18)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[mr^2 \Theta_i(\xi) \ddot{\mu}_i(t) + \left(\frac{1}{L} \bar{M}_i'(\xi) - \frac{1}{L} NY_i'(\xi) - \bar{T}_i(\xi) \right) \mu_i(t) \right] = 0 \quad (4.19)$$

Bu durumda $-\ddot{\mu}_i(t)/\mu_i(t)$ oranı da aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} -\frac{\ddot{\mu}_i(t)}{\mu_i(t)} &= \frac{\left(C_S Y_i(\xi) - \frac{1}{L^2} C_G Y_i''(\xi) - \frac{1}{L} \bar{T}_i'(\xi) \right)}{mY_i(\xi)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{L} \bar{M}_i'(\xi) - \frac{1}{L} NY_i'(\xi) - \bar{T}_i(\xi) \right)}{mr^2 \Theta_i(\xi)} = \omega_i^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Denklem (4.20)'den aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$m\omega_i^2 Y_i(\xi) = C_S Y_i(\xi) - \frac{1}{L^2} C_G Y_i''(\xi) - \frac{1}{L} \bar{T}_i'(\xi) \quad (4.21)$$

$$m\omega_i^2 r^2 \Theta_i(\xi) = \frac{1}{L} \bar{M}_i'(\xi) - \frac{1}{L} NY_i'(\xi) - \bar{T}_i(\xi) \quad (4.22)$$

Denklem (4.23) ve (4.24)'de verilen eşitlikler, denklem (4.18) ve (4.19)'da verilen zorlanmış titreşime ait denge denklemlerinde yerine konursa, iki parametrelili elastik zemine oturan kirişin zorlanmış titreşimine ait hareket denklemleri, i 'inci mod normal koordinat fonksiyonu $\mu_i(t)$ 'ye bağlı iki adet ikinci dereceden diferansiyel denklem olarak, denklem (4.11) ve (4.12)'de verilen şekilde elde edilir.

4.3 Zorlanmış Titreşim Hareket Denkleminin Ayrıklaştırılması

Zorlanmış titreşime ait hareket denklemleri, kirişin elastik eğrisinden alınan diferansiyel elemanın düşey kuvvet ve moment dengesini içeren denklemlerin yazılmasıyla, hem Winkler zeminine oturan kirişler için hem de iki parametrelili elastik zemine oturan kirişler için, denklem (4.11) ve (4.12)'de verilen şekilde elde edilmiştir.

Denklem (4.11) ve (4.12) boyutsuz konum değişkeni ξ ve zaman değişkeni t 'ye bağlı fonksiyonlardan meydana gelmektedir. Bu fonksiyonlardan boyutsuz ξ değişkenine bağlı olarak yazılan $Y_i(\xi)$ ve $\Theta_i(\xi)$ fonksiyonları serbest titreşim analiziyle elde edilir. Bu durumda modların ortogonalite koşulunu kullanmak suretiyle, her bir mod için ayrı bir zorlanmış titreşim hareket denkleminin elde edilmesi mümkün olur.

Modların ortogonalite koşulu, birçok yöntem kullanılarak elde edilebilir. Clough ve Penzien (2003), ortogonalite koşulunu Betti Karşılıklı Teoremi'ni kullanmak suretiyle elde etmiştir.

Karşılıklı teoreme göre, i ve j birbirinden farklı modlar olmak üzere, i 'inci moddaki eylemsiz kuvveti ve dönme eylemsizliğinin j 'inci modda oluşan deplasman ve kesit dönmesine göre yaptığı iş, j 'inci moddaki eylemsiz kuvveti ve dönme eylemsizliğinin i 'inci modda oluşan deplasman ve kesit dönmesine göre yaptığı işe eşit olmalıdır (Clough ve Penzien, 2003).

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 L[F_{I,i}(\xi,t)y_j(\xi,t) + M_{I,i}(\xi,t)\theta_j(\xi,t)]d\xi \\
& = \int_0^1 L[F_{I,j}(\xi,t)y_i(\xi,t) + M_{I,j}(\xi,t)\theta_i(\xi,t)]d\xi
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Denklem (4.23)'de yer alan, i'nci ve j'inci modlara ait eylemsizlik kuvveti, dönme eylemsizliği, deplasman ve kesit dönmesi ifadeleri, sırasıyla denklem (4.24) ve (4.25)'deki gibi yazılır.

$$F_{I,i}(\xi,t) = mY_i(\xi)\ddot{\mu}_i(t) = m\sum_i^{\infty}\omega_i^2Y_i(\xi)\mu_i(t)$$

$$F_{I,j}(\xi,t) = mY_j(\xi)\ddot{\mu}_j(t) = m\sum_j^{\infty}\omega_j^2Y_j(\xi)\mu_j(t) \tag{4.24}$$

$$M_{I,i}(\xi,t) = mr^2\Theta_i(\xi)\ddot{\mu}_i(t) = m\omega^2r^2\Theta_i(\xi)\mu_i(t)$$

$$y_i(\xi,t) = Y_i(\xi)\mu_i(t)$$

$$y_j(\xi,t) = Y_j(\xi)\mu_j(t)$$

(4.25)

$$\theta_i(\xi,t) = \Theta_i(\xi)\mu_i(t)$$

$$\theta_j(\xi,t) = \Theta_j(\xi)\mu_j(t)$$

Böylece; denklem (4.23), denklem (4.24) ve (4.25) kullanılarak, denklem (4.26)'daki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
L \int_0^1 [mY_i(\xi)Y_j(\xi) + m\Theta_i(\xi)\Theta_j(\xi)] \mu_j(t) \ddot{\mu}_i(t) d\xi \\
= L \int_0^1 [Y_i(\xi)Y_j(\xi) + mr^2\Theta_i(\xi)\Theta_j(\xi)] \mu_i(t) \ddot{\mu}_j(t) d\xi
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Denklem (4.26)'nın her iki tarafı $(\mu_i(t)\mu_j(t))$ 'ye bölünecek olursa, denklem (4.27) elde edilir.

$$\begin{aligned}
L \int_0^1 [mY_i(\xi)Y_j(\xi) + mr^2\Theta_i(\xi)\Theta_j(\xi)] \frac{\ddot{\mu}_i(t)}{\mu_i(t)} d\xi \\
= L \int_0^1 [Y_i(\xi)Y_j(\xi) + mr^2\Theta_i(\xi)\Theta_j(\xi)] \frac{\ddot{\mu}_j(t)}{\mu_j(t)} d\xi
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$-\ddot{\mu}(t)/\mu(t)$ oranı, i'inci ve j'inci mod için, sırasıyla denklem (4.28) ve (4.29)'daki gibi yazılır.

$$\frac{\ddot{\mu}_i(t)}{\mu_i(t)} = \omega_i^2 \tag{4.28}$$

$$\frac{\ddot{\mu}_j(t)}{\mu_j(t)} = \omega_j^2 \tag{4.29}$$

Buna göre denklem (4.28) ve (4.29), denklem (4.27)'de yerine konursa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) [Y_i(\xi)Y_j(\xi) + r^2\Theta_i(\xi)\Theta_j(\xi)] = 0 \tag{4.30}$$

Denklem (4.30)'u sağlayan iki koşul vardır. Bunlar ortogonalite koşulu olarak adlandırılır ve denklem (4.31) ve (4.32)'deki gibi yazılır (Clough ve Penzien, 2003).

$$Y_i(\xi)Y_j(\xi) + r^2\Theta_i(\xi)\Theta_j(\xi) = 0 \quad , \quad \omega_i^2 \neq \omega_j^2 \quad (4.31)$$

$$Y_i(\xi)^2 + r^2\Theta_i(\xi)^2 \neq 0 \quad , \quad \omega_i^2 = \omega_j^2 \quad , \quad i = j \quad (4.32)$$

Modların ortogonalite özelliğinden yararlanmak amacıyla, hem Winkler zeminine oturan kiriş için hem de iki parametrelilik elastik zemine oturan kiriş için, denklem (4.11) ve (4.12)'de verilen hareket denklemlerinin, sırasıyla $Y_j(\xi)$ ve $\Theta_j(\xi)$ ile çarpılıp kiriş boyunca integrallerinin alınması durumunda aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 mL Y_i(\xi) Y_j(\xi) d\xi \left[\ddot{\mu}_i(t) + \omega_i^2 \mu_i(t) \right] = L \int_0^1 Y_j(\xi) p(\xi, t) d\xi \quad (4.33)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 mr^2 L \Theta_i(\xi) \Theta_j(\xi) d\xi \left[\ddot{\mu}_i(t) + \omega_i^2 \mu_i(t) \right] = 0 \quad (4.34)$$

Denklem (4.33) ve (4.34) toplanacak olursa hareket denklemi aşağıdaki hali alır.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} mL \int_0^1 \left(Y_i(\xi) Y_j(\xi) + r^2 \Theta_i(\xi) \Theta_j(\xi) \right) d\xi \left[\ddot{\mu}_i(t) + \omega_i^2 \mu_i(t) \right] \\ = L \int_0^1 Y_j(\xi) p(\xi, t) d\xi \end{aligned} \quad (4.35)$$

Denklem (4.31) ve (4.32)'de verilen ortogonalite koşulları denklem (4.35)'de uygulanırsa, j'inci moda ait zorlanmış titreşim hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$mL \int_0^1 \left(Y_j^2(\xi) + r^2 \Theta_j^2(\xi) \right) d\xi \left[\ddot{\mu}_j(t) + \omega_j^2 \mu_j(t) \right] = L \int_0^1 Y_j(\xi) p(\xi, t) d\xi \quad (4.36)$$

Denklem (4.36) aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$M_j = mL \int_0^1 (Y_j^2(\xi) + r^2 \Theta_j^2(\xi)) d\xi \quad (4.37)$$

$$P_j(t) = L \int_0^1 Y_j(\xi) p(\xi, t) d\xi$$

$$M_j \ddot{\mu}_j(t) + \omega_j^2 M_j \mu_j(t) = P_j(t) \quad (4.38)$$

Burada; M_j , j'inci moda ait genelleştirilmiş küleyi, $P_j(t)$ ise j'inci moda ait genelleştirilmiş yük fonksiyonunu göstermektedir(Hermann, 1953).

Denklem (4.38)'in her iki tarafı M_j 'ye bölünecek olursa, j'inci moda ait zorlanmış hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\ddot{\mu}_j(t) + \omega_j^2 \mu_j(t) = \frac{P_j(t)}{M_j} \quad (4.39)$$

BÖLÜM BEŞ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİNE AİT HAREKET DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Zorlanmış titreşime ait hareket denkleminin çözümü yük fonksiyonuna göre değişebilmektedir. Dış yük fonksiyonun belirli bir fonksiyon olması durumunda hareket denkleminin genel bir çözümü elde edilebilmekte, deprem ivmesi gibi herhangi bir fonksiyonla ifade edilemeyen bir halde olması durumunda ise, belirli bir fonksiyon olarak çözülemeyeceği için, diferansiyel denklemin küçük zaman aralıklarında çözülmesine olanak sağlayan sayısal çözüm yöntemlerinden birinin kullanılması zorunluluk haline gelmektedir.

5.1 Dış Yükün Belirli Bir Fonksiyon Olması Durumunda Zorlanmış Titreşim Hareket Denkleminin Çözümü

Zorlanmış titreşime ait hareket denklemi, j 'inci mod için, denklem (4.39)'daki gibi elde edilmiştir. Elde edilen diferansiyel denklemin homojen çözümü için $\mu_{j,h}(t) = e^{-Dt}$ fonksiyonu seçilip denklem (5.1)'de yerine konursa homojen çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mu_{j,h}''(t) + \omega_j^2 \mu_{j,h}(t) = 0 \quad (5.1)$$

$$D^2 + \omega_j^2 = 0 \quad (5.2)$$

$$D = \pm i\omega_j$$

$$\mu_{j,h}(t) = A_1 \cos(\omega_j t) + A_2 \sin(\omega_j t) \quad (5.3)$$

Kısmi çözüm fonksiyonu olarak ise denklem (5.4)'deki gibi bir fonksiyon seçilebilir (Boyce ve DiPrima, 2001).

$$\mu_{j,p}(t) = V_1(t) \cos(\omega_j t) + V_2(t) \sin(\omega_j t) \quad (5.4)$$

Seçilen kısmi çözüm fonksiyonun, denklem (5.1)'de verilen diferansiyel denklemi sağlaması gerekmektedir.

Bu durumda kısmi çözüm fonksiyonunun zamana göre birinci türevi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_{j,p}(t) = & -V_1(t)\omega_j \sin(\omega_j t) + V_2(t)\omega_j \cos(\omega_j t) \\ & + \dot{V}_1(t) \cos(\omega_j t) + \dot{V}_2(t) \sin(\omega_j t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Çözümü basitleştirmek adına, seçilen kısmi çözüm fonksiyonunun aşağıdaki denklemi sağladığı kabul edilir. Bu kabul sonucunda elde edilen $V_1(t)$ ve $V_2(t)$ katsayı fonksiyonları da aynı denklemi sağlamalıdır (Boyce ve DiPrima, 2001).

$$\dot{V}_1(t) \cos(\omega_j t) + \dot{V}_2(t) \sin(\omega_j t) = 0 \quad (5.6)$$

Bu durumda denklem (5.5) aşağıdaki gibi yazılır.

$$\dot{\mu}_{j,p}(t) = -V_1(t)\omega_j \sin(\omega_j t) + V_2(t)\omega_j \cos(\omega_j t) \quad (5.7)$$

Kısmi çözüm fonksiyonunun ikinci türevi ise denklem (5.8)'deki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \ddot{\mu}_{j,p}(t) = & -V_1(t)\omega_j^2 \cos(\omega_j t) - V_2(t)\omega_j^2 \cos(\omega_j t) \\ & + \dot{V}_1(t)\omega_j \sin(\omega_j t) + \dot{V}_2(t)\omega_j \cos(\omega_j t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Denklem (5.7) ve (5.8), denklem (4.39)'da yerine konursa, denklem (5.9)'da verilen ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
& -V_1(t)\omega_j^2 \cos(\omega_j t) - V_2(t)\omega_j^2 \cos(\omega_j t) + \dot{V}_1(t)\omega_j \sin(\omega_j t) \\
& + \dot{V}_2(t)\omega_j \cos(\omega_j t) + \omega_j^2 V_1(t) \cos(\omega_j t) + V_2(t)\omega_j^2 \sin(\omega_j t) = \frac{P_j(t)}{M_j}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Denklem (5.9), gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra aşağıdaki gibi yazılır.

$$\dot{V}_1(t)\omega_j \sin(\omega_j t) + \dot{V}_2(t)\omega_j \cos(\omega_j t) = \frac{P_j(t)}{M_j} \tag{5.10}$$

Böylece, denklem (5.6) ve (5.10)'daki gibi iki bilinmeyenli iki adet denklem elde edilir. Denklem (5.6) ve (5.10), doğrusal bağımlı bir denklem takımı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega_j t) & \sin(\omega_j t) \\ -\omega_j \sin(\omega_j t) & \omega_j \cos(\omega_j t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V}_1(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_j(t)/M_j \end{Bmatrix} \tag{5.11}$$

Bu durumda, $\dot{V}_1(t)$ ve $\dot{V}_2(t)$ fonksiyonları, aşağıdaki gibi elde edilir (Boyce ve Diprima, 2001).

$$\dot{V}_1(t) = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & \sin(\omega_j t) \\ \frac{P_j(t)}{M_j} & \omega_j \cos(\omega_j t) \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \cos(\omega_j t) & \sin(\omega_j t) \\ -\omega_j \sin(\omega_j t) & \omega_j \cos(\omega_j t) \end{bmatrix}} = -\frac{P_j(t) \sin(\omega_j t)}{M_j \omega_j} \tag{5.12}$$

$$\dot{V}_2(t) = \frac{\det \begin{bmatrix} \cos(\omega_j t) & 0 \\ -\omega_j \sin(\omega_j t) & \frac{P_j(t)}{M_j} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \cos(\omega_j t) & \sin(\omega_j t) \\ -\omega_j \sin(\omega_j t) & \omega_j \cos(\omega_j t) \end{bmatrix}} = \frac{P_j(t) \cos(\omega_j t)}{M_j \omega_j} \quad (5.13)$$

$V_1(t)$ ve $V_2(t)$ katsayı fonksiyonları da aşağıdaki gibi elde edilir.

$$V_1(t) = -\int_0^t \frac{P_j(\tau) \sin(\omega_j \tau)}{M_j \omega_j} d\tau \quad (5.14)$$

$$V_2(t) = \int_0^t \frac{P_j(\tau) \cos(\omega_j \tau)}{M_j \omega_j} d\tau \quad (5.15)$$

Böylece kısmi çözüm fonksiyonu, $\mu_{j,p}(t)$ aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mu_{j,p}(t) = -\int_0^t \frac{P_j(\tau) \sin(\omega_j \tau) \cos(\omega_j t)}{M_j \omega_j} d\tau + \int_0^t \frac{P_j(\tau) \cos(\omega_j \tau) \sin(\omega_j t)}{M_j \omega_j} d\tau \quad (5.16)$$

$$\mu_{j,p}(t) = \frac{1}{M_j \omega_j} \int_0^t P_j(\tau) \sin(\omega_j t - \omega_j \tau) d\tau \quad (5.17)$$

Bu durumda zorlanmış titreşime ait hareket denkleminin çözümü, homojen ve kısmi çözüm fonksiyonlarının toplamı olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mu_j(t) = A_1 \cos(\omega_j t) + A_2 \sin(\omega_j t) + \frac{1}{M_j \omega_j} \int_0^t P_j(\tau) \sin(\omega_j t - \omega_j \tau) d\tau \quad (5.18)$$

Buradaki A_1 ve A_2 katsayıları; $\mu_{j,0}$ başlangıç deplasmanını, $\dot{\mu}_{j,0}$ ise başlangıç hızını göstermek üzere aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mu_j(t=0) = A_1 \cos(0) + A_2 \sin(0) = \mu_{j,0} \quad (5.19)$$

$$\dot{\mu}_j(t=0) = A_1 \omega_j \sin(0) + A_2 \omega_j \cos(0) = \dot{\mu}_{j,0} \quad (5.20)$$

$$A_1 = \mu_0 \quad (5.21)$$

$$A_2 = \frac{\dot{\mu}_{j,0}}{\omega_j}$$

Denklem (5.21), denklem (5.18)'de yerine koyulursa, j'inci moda ait zorlanmış titreşim hareket denkleminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mu_j(t) = \mu_{j,0} \cos(\omega_j t) + \frac{\dot{\mu}_{j,0}}{\omega_j} \sin(\omega_j t) + \frac{1}{M_j \omega_j} \int_0^t P_j(\tau) \sin(\omega_j t - \omega_j \tau) d\tau \quad (5.22)$$

5.1.1 Değişik Yük Fonksiyonları İçin Hareket Denkleminin Çözümü

Konuma ve zamana bağlı kısmi bir fonksiyon olan $p(x,t)$ fonksiyonu, değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$p(x,t) = \bar{p}(x)q(t) \quad (5.23)$$

Burada $\bar{p}(x)$ fonksiyonu, yük şeklini gösteren konuma bağlı bir fonksiyondur. $q(t)$ fonksiyonu ise yük genliğini gösteren zamana bağlı bir fonksiyon olarak yazılır.

Dış yük fonksiyonu, $\xi = x/L$ dönüşümünün yapılması durumunda, boyutsuz ξ parametresine bağlı olarak denklem (5.24)'deki gibi yazılır.

$$p(\xi,t) = \bar{p}(\xi)q(t) \quad (5.24)$$

Bu durumda, j'inci moda ait genelleştirmiş dış yük fonksiyonu da denklem (5.25)'deki gibi yazılır.

$$P_j(t) = \left[L \int_0^1 Y(\xi) \bar{p}(\xi) d\xi \right] q(t) \quad (5.25)$$

Yük şekil fonksiyonu $\bar{p}(\xi)$, yükün kiriş üzerindeki dağılımını gösteren bir fonksiyon olup, $p(\xi, t)$ 'nin yayılı bir yük olması durumunda sabit, lineer, parabolik veya sinüsoidal bir fonksiyon olarak yazılabilir.

Dış yük fonksiyonu $p(\xi, t)$ 'nin tekil bir yük olması durumunda ise $\bar{p}(\xi)$ fonksiyonu Dirac Delta fonksiyonu ile aşağıdaki gibi gösterilebilir (Dadfarnia, Jalili ve Esmailzadeh, 2005).

$$\bar{p}(\xi) = \delta(\xi - a/L) \quad , \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (5.26)$$

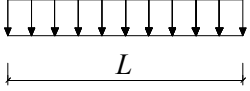
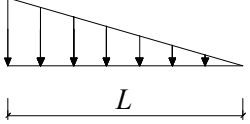
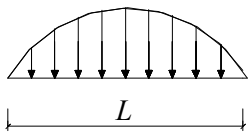
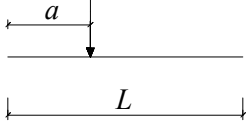
Burada; a , yükün uygulandığı noktayı, L ise kiriş uzunluğunu göstermektedir.

Bu durumda; j'inci moda ait genelleştirilmiş yük fonksiyonu $P_j(t)$, denklem (5.27)'deki gibi yazılır.

$$P_j(t) = L \int_0^1 Y_j(\xi) \delta(\xi - a/L) d\xi q(t) = Y_j(\xi = a/L) q(t) \quad (5.27)$$

Bazı yük şekilleri için elde edilen $\bar{p}(\xi)$ ve $P_j(t)$ fonksiyonları, Tablo 5.1'de gösterilmiştir (Dadfarnia, Jalili ve Esmailzadeh, 2005).

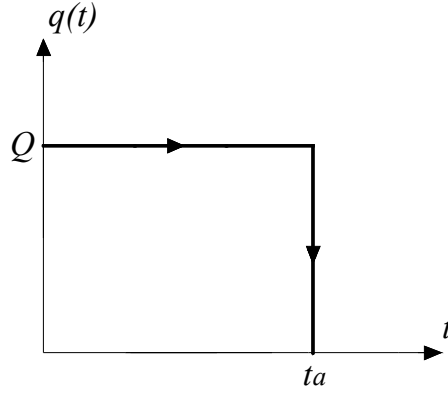
Tablo 5.1 Değişik yük şekilleri için elde edilen $\bar{p}(\xi)$ ve $P_j(t)$ fonksiyonları

<p><u>Düzgün yayılı yük</u></p> 	$\bar{p}(\xi)=1$	$P_j(t)=\int_0^1 Y_j(\xi)q(t)d\xi$
<p><u>Üçgen yayılı yük</u></p> 	$\bar{p}(\xi)=(1-\xi)$	$P_j(t)=\int_0^1 Y_j(\xi)(1-\xi)q(t)d\xi$
<p><u>Sinüsoidal yayılı yük</u></p> 	$\bar{p}(\xi)=\sin(\xi\pi)$	$P_j(t)=\int_0^1 Y_j(\xi)\sin(\xi\pi)q(t)d\xi$
<p><u>Tekil yük</u></p> 	$\bar{p}(\xi)=\delta(\xi-a/L)$	$P_j(t)=Y_j(\xi=a/L)q(t)$

Genelleştirilmiş yük fonksiyonu $P_j(t)$ 'nin, $q(t)$ 'ye bağlı bir fonksiyon olması nedeniyle zorlanmış titreşime ait diferansiyel denklemin çözümü de $q(t)$ 'ye bağlı olarak elde edilebilmektedir.

Bu durumda zorlanmış titreşim hareket denkleminin çözümü, bazı $q(t)$ fonksiyonları için aşağıdaki gibi elde edilir.

$q(t)$ fonksiyonunun şekildeki gibi dikdörtgen bir ani yük fonksiyonu olması durumunda hareket denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olur.



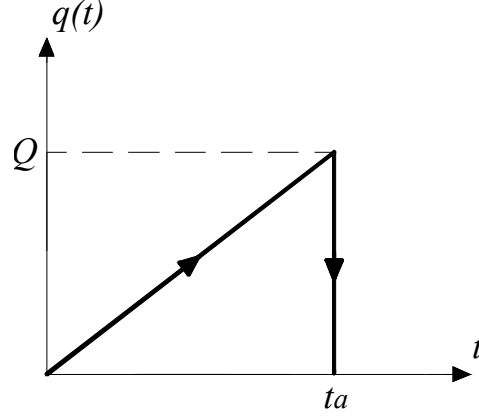
Şekil 5.1 Dikdörtgen ani yük fonksiyonu

$$\begin{aligned} q(t) &= Q \quad , \quad t \leq t_a \\ q(t) &= 0 \quad , \quad t > t_a \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \mu_j(t) &= \mu_{j,0} \cos(\omega_j t) + \frac{\dot{\mu}_{j,0}}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \\ &+ \frac{QL}{M_j \omega_j^2} \left[\int_0^1 Y(\xi) \bar{p}(\xi) d\xi \right] [1 - \cos(\omega_j t)] \quad , \quad t \leq t_a \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\mu_j(t) = \mu(t_a) \cos(\omega_j(t-t_a)) + \frac{\dot{\mu}(t_a)}{\omega_j} \sin(\omega_j(t-t_a)) \quad , \quad t > t_a \quad (5.30)$$

$q(t)$ fonksiyonunun şekildeki gibi üçgen bir ani yük fonksiyonu olması durumunda hareket denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.2 Üçgen ani yük fonksiyonu

$$q(t) = Q \frac{t}{t_a} \quad , \quad t \leq t_a$$

$$q(t) = 0 \quad , \quad t > t_a$$

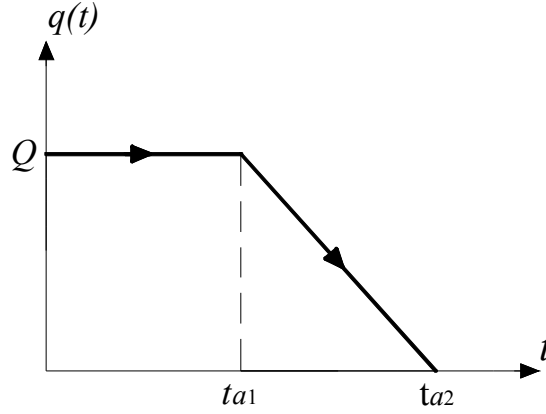
(5.31)

$$\mu_j(t) = \mu_{j,0} \cos(\omega_j t) + \frac{\dot{\mu}_{j,0}}{\omega_j} \sin(\omega_j t)$$

$$+ \frac{QL}{M_j \omega_j^2 t_a} \left[\int_0^1 Y(\xi) \bar{p}(\xi) d\xi \right] \left[t - \frac{1}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] \quad , \quad t \leq t_a$$

$$\mu_j(t) = \mu_j(t_a) \cos(\omega_j(t-t_a)) + \frac{\dot{\mu}_j(t_a)}{\omega_j} \sin(\omega_j(t-t_a)) \quad , \quad t > t_a \quad (5.32)$$

$q(t)$ fonksiyonunun şekildeki gibi trapez bir ani yük fonksiyonu olması durumunda hareket denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.3 Trapez ani yük fonksiyonu

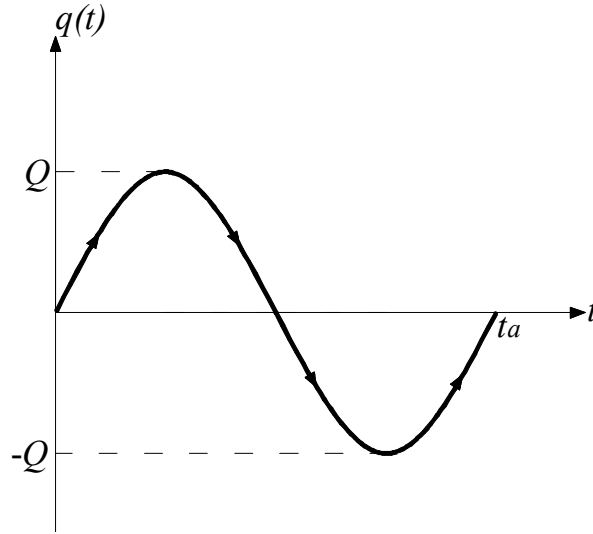
$$\begin{aligned}
 q(t) &= Q \quad , \quad t \leq t_{a1} \\
 q(t) &= Q \frac{t}{t_{a1} - t_{a2}} \quad , \quad t_{a1} < t \leq t_{a2} \\
 q(t) &= 0 \quad , \quad t > t_{a2}
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_j(t) &= \mu_{j,0} \cos(\omega_j t) + \frac{\dot{\mu}_{j,0}}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \\
 &+ \frac{QL}{M_j \omega_j^2} \left[\int_0^1 Y(\xi) \bar{p}(\xi) d\xi \right] [1 - \cos(\omega_j t)] \quad , \quad t \leq t_{a1}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_j(t) &= \mu_j(t_{a1}) \cos(\omega_j(t - t_{a1})) + \frac{\dot{\mu}_j(t_{a1})}{\omega_j} \sin(\omega_j(t - t_{a1})) \\
 &+ \frac{QL}{M_j \omega_j^2 (t_{a2} - t_{a1})} \left[\int_0^1 Y(\xi) \bar{p}(\xi) d\xi \right] \left[(t - t_{a1}) - \frac{1}{\omega_j} \sin(\omega_j(t - t_{a1})) \right] \\
 & \quad \quad \quad t_{a1} < t \leq t_{a2}
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\mu_j(t) = \mu(t_{a2}) \cos(\omega_j(t-t_{a2})) + \frac{\dot{\mu}(t_{a2})}{\omega_j} \sin(\omega_j(t-t_{a2})) \quad , \quad t > t_{a2} \quad (5.36)$$

$q(t)$ fonksiyonunun, şekildeki gibi sinüsoidal bir ani yük fonksiyonu olması durumunda hareket denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.4 Sinüsoidal ani yük fonksiyonu

$$q(t) = Q \sin(\varpi t) \quad , \quad \varpi = \frac{2\pi}{t_a} \quad , \quad t \leq t_a \quad (5.37)$$

$$q(t) = 0 \quad , \quad t > t_a$$

$$\mu_j(t) = \mu_{j,0} \cos(\omega_j t) + \frac{\dot{\mu}_{j,0}}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \quad (5.38)$$

$$+ \frac{QL \left[\int_0^1 Y(\xi) \bar{p}(\xi) d\xi \right]}{M_j \omega_j (\varpi^2 - \omega_j^2)} [\sin(\omega_j t) \varpi - \sin(\varpi t) \omega_j] \quad , \quad t \leq t_a$$

$$\mu_j(t) = \mu(t_a) \cos(\omega_j(t-t_a)) + \frac{\dot{\mu}(t_a)}{\omega_j} \sin(\omega_j(t-t_a)) \quad , \quad t > t_a \quad (5.39)$$

5.2 Dış Yükün Keyfi Değişen Bir Fonksiyon Olması Durumunda Zorlanmış Titreşim Hareket Denkleminin Çözümü

Dış yükün, deprem ivmesi gibi belirli bir fonksiyon olarak yazılamayan, yani zamana bağlı, ancak rastgele değişen bir fonksiyon olması durumunda, hareket denkleminin analitik çözümünün elde edilmesi mümkün olmamaktadır. Bu nedenle hareket denkleminin çözümü, dış yükün çok küçük zaman aralıklarına bölünmesiyle ve her bir zaman aralığı için ayrı ayrı çözülmesiyle elde edilebilmektedir.

Boyutsuz ξ parametresine bağlı olan dış yük fonksiyonu $p(\xi, t)$, deprem hareketi için etkin yer ivmesi fonksiyonuna bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$p(\xi, t) = -m \ddot{\mu}_g(t) \quad (5.40)$$

Burada, m ; kirişin uzunluğu boyunca yayılı olan kütle, $\ddot{\mu}_g(t)$ ise etkin yer ivmesi fonksiyonunu göstermektedir.

Bu durumda j 'inci mod için elde edilen genelleştirilmiş yük fonksiyonu da aşağıdaki gibi yazılır.

$$P_j(t) = -mL \int_0^1 Y_j(\xi) d\xi \ddot{\mu}_g(t) \quad (5.41)$$

Denklem (5.41), j 'inci moda ait zorlanmış titreşim hareket denkleminde yerine konursa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\ddot{\mu}_j(t) + \omega_j^2 \mu_j(t) = -\frac{L_j}{M_j} \ddot{\mu}_g(t) \quad (5.42)$$

Burada;

$$L_j = mL \int_0^1 Y_j(\xi) d\xi \quad (5.43)$$

olarak yazılır. Denklem (5.42)'deki L_j / M_j oranı ise modal katılım oranı olarak adlandırılıp, Γ_j ile gösterilmektedir.(Chopra, 2005)

Bu durumda denklem (5.42) aşağıdaki gibi yazılır.

$$\ddot{\mu}_j(t) + \omega_j^2 \mu_j(t) = -\Gamma_j \ddot{\mu}_g(t) \quad (5.44)$$

Zorlanmış titreşime ait hareket denklem, n adet titreşim modunun dikkate alınması durumunda aşağıdaki gibi matris formda yazılabilir.

$$\begin{aligned} \ddot{\mu}_1(t) + \omega_1^2 \mu_1(t) &= -\Gamma_1 \ddot{\mu}_g(t) \\ \ddot{\mu}_2(t) + \omega_2^2 \mu_2(t) &= -\Gamma_2 \ddot{\mu}_g(t) \\ \ddot{\mu}_3(t) + \omega_3^2 \mu_3(t) &= -\Gamma_3 \ddot{\mu}_g(t) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \ddot{\mu}_n(t) + \omega_n^2 \mu_n(t) &= -\Gamma_n \ddot{\mu}_g(t) \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \times \begin{Bmatrix} \ddot{\mu}_1(t) \\ \ddot{\mu}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{\mu}_n(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}_{n \times n} \times \begin{Bmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_n(t) \end{Bmatrix}_{n \times 1} \\
& \hspace{20em} = -\ddot{\mu}_g(t) \times \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_n \end{Bmatrix}_{n \times 1}
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Denklem (5.45)'in çözümü, analitik olarak mümkün olmadığı için, sayısal çözüm yöntemlerinden biri olan “Newmark Yöntemi” kullanılarak elde edilebilir.

5.2.1 Newmark Yöntemi ile Hareket Denklemine Çözümü

Sayısal çözüm yöntemlerinden biri olan “Newmark Yöntemi” ; dinamik dış yük fonksiyonunun Δt zaman aralıklarına bölünmesiyle elde edilen hareket denkleminin çözümünü esas almaktadır.

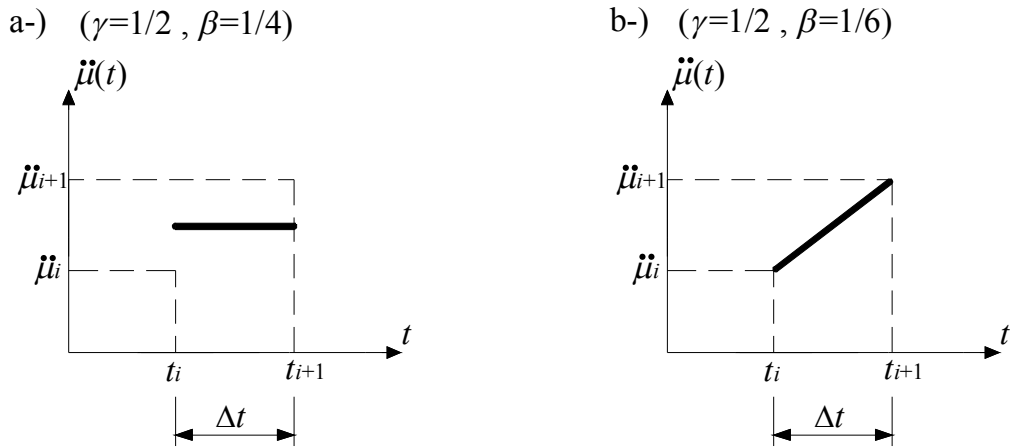
Parçalara ayrılmış dış yük fonksiyonunun etkisindeki tek serbestlik dereceli bir sistemin, tepki deplasmanı $\mu(t)$ ve tepki hızı $\dot{\mu}(t)$, her Δt aralığı için, denklem (5.47) ve (5.48)'deki gibi yazılır(Clough ve Penzien, 2003).

$$\mu_{i+1}(t) = \mu_i(t) + \Delta t \dot{\mu}_i(t) \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{\mu}_i(t) + \beta \Delta t^2 \ddot{\mu}_{i+1}(t) \tag{5.47}$$

$$\dot{\mu}_{i+1}(t) = \dot{\mu}_i(t) + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mu}_i(t) + \gamma \Delta t \ddot{\mu}_{i+1}(t) \tag{5.48}$$

Chopra (2005), denklem (5.46) ve (5.47)'de verilen γ ve β parametrelerini; ivmenin her bir zaman aralığındaki değişimini ve sistemin genel stabilitesini belirleyen katsayılar olarak tanımlamaktadır.

Buna göre; γ ve β katsayılarının, ivmenin değişimine göre aldığı değerler Şekil 5.5'de gösterilmiştir(Chopra, 2005).



Şekil 5.5 γ ve β katsayılarının $\ddot{\mu}(t)$ 'nin, Δt aralığındaki değişimine göre aldığı değerler
a-) Sabit ortalama ivme durumu b-) Doğrusal artan ivme durumu

Newmark Yöntemi'nin çok serbestlik dereceli sistemlere uygulanabilmesi için, zorlanmış titreşime ait ayrık hareket denklemlerinin elde edilmesi gerekmektedir. Bu durumda n adet kütlede meydana gelen çok serbestlik dereceli bir sistemde, n adet ayrık hareket denklemi elde edilir. Elde edilen ayrık hareket denklemlerinin her biri tek serbestlik dereceli bir sistem olarak çözülebilir.

Serbestlik derecesi n olan, çok serbestlik dereceli bir sistemin hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[M]_{n \times n} \left\{ \ddot{\mu}(t) \right\}_{n \times 1} + [C]_{n \times n} \left\{ \dot{\mu}(t) \right\}_{n \times 1} + [K]_{n \times n} \left\{ \mu(t) \right\}_{n \times 1} = p(t) \{ I \}_{n \times 1} \quad (5.49)$$

Burada;

$[K]_{n \times n}$, genelleştirilmiş rijitlik matrisini,

$[M]_{n \times n}$, genelleştirilmiş kütle matrisini,

$[C]_{n \times n}$ ise genelleştirilmiş sönüm matrisini göstermektedir.

Newmark yöntemine göre n adet serberstlik derecesine sahip bir sistemin normal koordinat fonksiyonu $\mu(t)$, $\dot{\mu}_0$ ve μ_0 başlangıç hız ve deplasmanını göstermek üzere aşağıdaki formülasyonla elde edilir. edilir(Chopra, 2005).

$$[a] = \left[\frac{1}{\beta \Delta t} [M] + \frac{\gamma}{\beta} [C] \right]$$

$$[b] = \left[\frac{1}{2\beta} [M] + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) [C] \right]$$

$$[\tilde{k}] = [K] + \frac{1}{\beta \Delta t^2} [M] + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} [C]$$

$$\{\ddot{\mu}_0\} = [M]^{-1} \left[\{p_0\} - [c] \{\dot{\mu}_0\} - [K] \{\mu_0\} \right]$$

$$\{\Delta \tilde{p}_i\} = \{\Delta p_i\} + [a] \{\dot{\mu}_i\} + [b] \{\ddot{\mu}_i\}$$

$$\{\Delta \mu_i\} = [\tilde{k}]^{-1} \{\Delta \tilde{p}_i\}$$

$$\{\mu_{i+1}\} = \{\mu_i\} + \{\Delta \mu_i\}$$

$$\{\dot{\mu}_{i+1}\} = \{\dot{\mu}_i\} + \{\Delta \dot{\mu}_i\}$$

$$\{\ddot{\mu}_{i+1}\} = \{\ddot{\mu}_i\} + \{\Delta \ddot{\mu}_i\}$$

(5.50)

Burada;

$\{p(t)\}_{n \times 1}$, dış yük vektörünü,

$\{\Delta \tilde{p}_i\}_{n \times 1}$, efektif yük vektörünü,

$\left[\tilde{k} \right]_{n \times n}$ ise efektif rijitlik matrisini göstermektedir

Denklem (5.46)'da, elastik zemine oturan kiriş için verilen hareket denklemini Newmark Yöntemi'ne uyarlamak için, denklem (5.49) ve (5.50)'de verilen $[M]_{n \times n}$ matrisi yerine denklem (5.51)'de verilen matris yazılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (5.51)$$

$[K]_{n \times n}$ matrisi yerine ise aşağıdaki matris yazılır.

$$\begin{bmatrix} \omega_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (5.52)$$

Sistemde sönüm dikkate alınmadığı için, $[C]_{n \times n}$ matrisi yerine, denklem (5.53)'deki matris yazılır.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (5.53)$$

Dış yük vektörü, $\{p(t)\}_{n \times 1}$ 'nin yerine ise denklem (5.54)'de verilen vektör yazılır.

$$-\ddot{\mu}_g(t) \times \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_n \end{Bmatrix}_{n \times 1} \quad (5.54)$$

BÖLÜM ALTI

SAYISAL UYGULAMALAR

Elastik zemine oturan kirişlerin zorlanmış titreşim analizine ilişkin sayısal uygulamalar, üç şekilde gerçekleştirilmiştir.

İlk uygulamada, elastik Winkler zeminine oturan ve açıklık ortasından tekil dinamik yüke maruz kalan bir temel kirişinde meydana gelen iç tesirler, değişik mesnet koşulları ve elastik zemini temsil eden yay katsayıları için elde edilmiştir.

İkinci uygulamada, elastik zemine oturan her iki ucu serbest bir kirişin, farklı şekillerde uygulanan tekil dinamik yükler etkisindeki davranışı, elastik zeminin Winkler ve Vlasov modellerine uygun olarak temsil edilmesiyle birlikte, her iki zemin modeli için ayrı ayrı incelenmiş ve sonuçlar kıyaslanmıştır.

Son uygulamada ise elastik Winkler zeminine gömülü; bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest ve bir ucu ankastre, diğer ucu kayıcı ankastre mesnetli kazıkların deprem ivmesi altındaki davranışı incelenmiştir.

Sayısal uygulamalarda gerçekleştirilen serbest titreşim analizlerinde, serbest titreşime ait açısal frekans değerini veren bilgisayar programı hazırlanmıştır. Bu programa ait akış diyagramı Ek-2’de sunulmuştur.

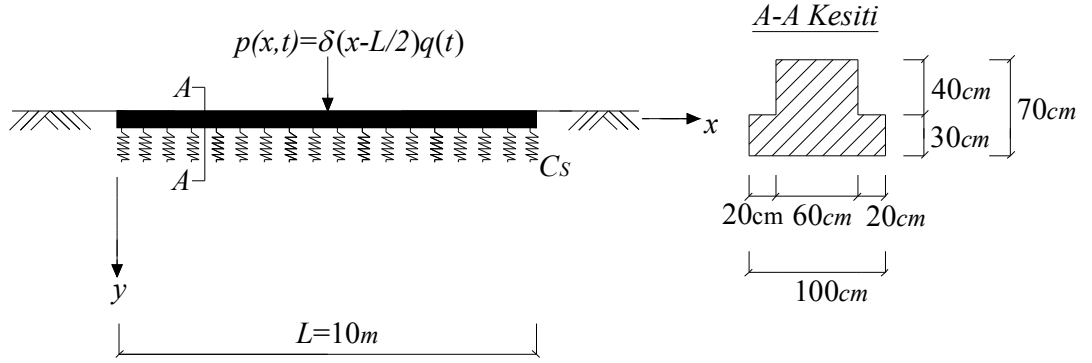
Zorlanmış titreşim analizleri için, dış yük fonksiyonunun durumuna bağlı olarak iki adet bilgisayar programı hazırlanmıştır. Dış yükün yayılı veya tekil olması durumu için hazırlanan bilgisayar programına ait akış diyagramı Ek-3’de, deprem ivmesi altında çözüm elde etmek için hazırlanan bilgisayar programına ait akış diyagramı ise Ek-4’de sunulmuştur. Ek-2, 3 ve 4’de sunulan bilgisayar programları, Matlab 7.8 programlama dili kullanılarak hazırlanmıştır.

6.1 Sayısal Ugulama 1

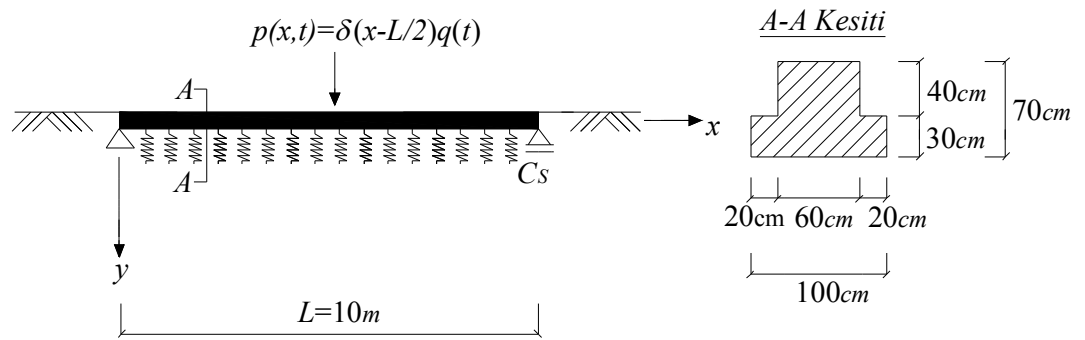
Şekil 6.1’de verilen; çeşitli mesnet koşullarına sahip, Winkler zeminine oturan betonarme temel kirişi, açıklık ortasından tekil bir dinamik yüke maruz kalmaktadır. Temel kirişi, model 1’de verilen şekilde her iki ucu serbest, model 2’de verilen şekilde her iki ucu basit mesnetli ve model 3’de verilen şekilde her iki ucu basit mesnetli ve rijitliği; $C_{\theta} = 25000tm/rad$ olan dönme tipi bir yayla bağlı olarak üç değişik şekilde modellenmiştir. Dinamik yükün temel kirişinde neden olduğu iç tesirler; model 1 için, elastik zemin yay katsayısının $C_s=500, 1000$ ve $2000 t/m^2$, model 2 ve 3 için ise; $C_s=0, 500, 1000$ ve $2000 t/m^2$ değerlerini alması durumuna göre elde edilmiştir.

Temel kirişinin kesit alanı; $A = 0,54m^2$, atalet momenti; $I = 2,17833 \times 10^{-2} m^4$, kirişin, uzunluğu boyunca yayılı olan kütlesi; $m = 0,138ts^2 / m$, kiriş malzemesinin elastisite modülü; $E = 2,8 \times 10^6 t / m^2$, kayma modülü; $G = 1,1167 \times 10^6 t / m^2$, kiriş kesitinde maksimum kayma gerilmesini veren katsayı; $\kappa = 0,5186$ ve dinamik dış yük fonksiyonu; $p(x,t) = [\delta(x - L/2)50\sin(10t)] ton$ ’dur.

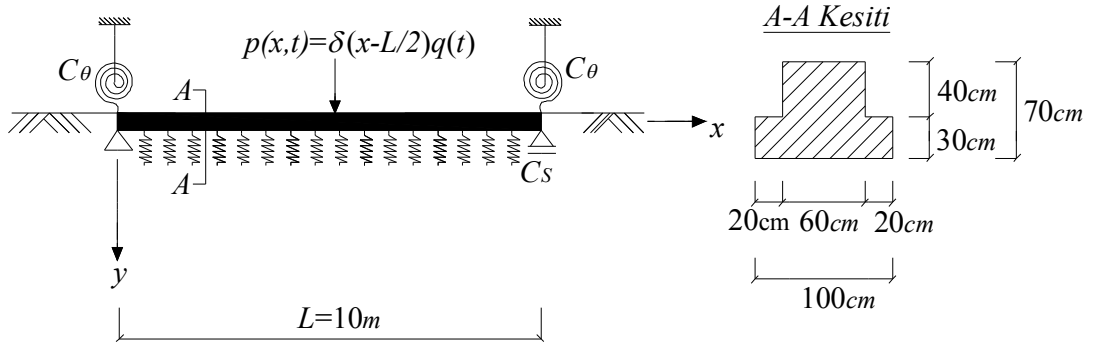
a-) MODEL 1



b-) MODEL 2



c-) MODEL 3



Şekil 6.1 a-) Model 1: Her iki ucu serbest temel kirişi

b-) Model 2: Her iki ucu basit mesnetli temel kirişi

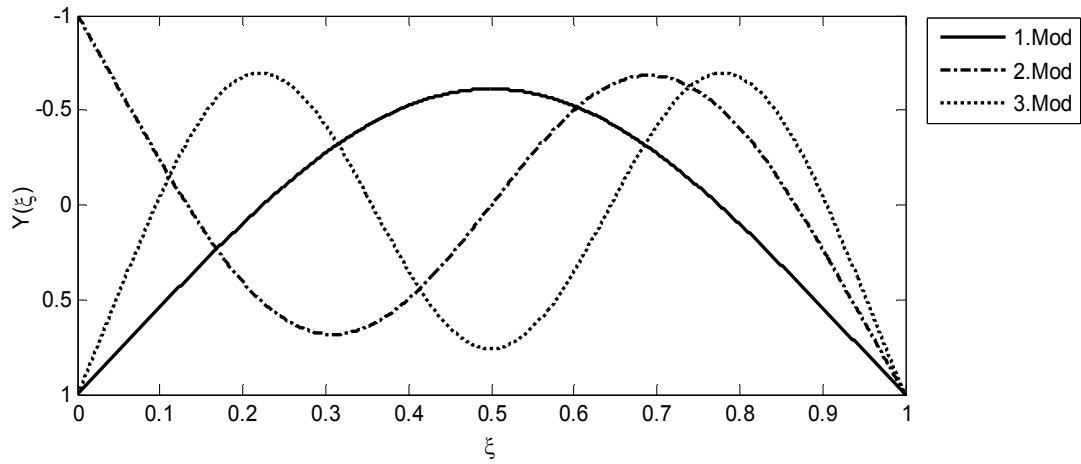
c-) Model 3: Her iki ucu basit mesnetli ve dönme tipi yayla bağlı temel kirişi

6.1.1 Serbest Titreşim Analizi

Model 1, 2 ve 3 için, Ek-2 ve Ek-3'de akış diyagramları sunulan bilgisayar programları yardımıyla elde edilen açısal frekans değerleri Tablo 6.1, 6.2 ve 6.3'de, mod şekilleri ise Şekil 6.2, 6.3 ve 6.4'de sunulmuştur.

Tablo 6.1 Model-1 için elde edilen, ilk onbeş moda ait doğal açısal frekans değerleri

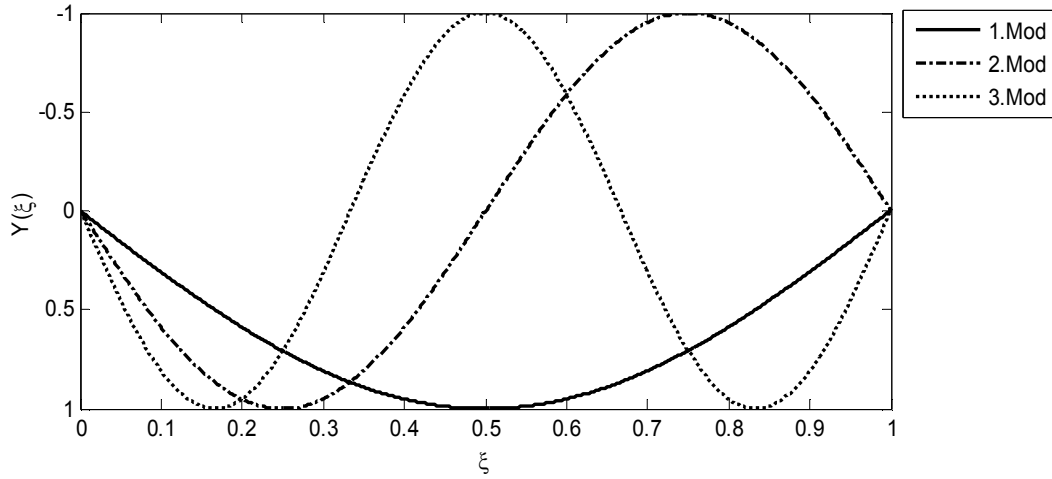
Mod Sayısı	Doğal Açısal Frekans Değerleri ω (rad / sn)		
	$C_S=500 \text{ t/m}^2$	$C_S=1000 \text{ t/m}^2$	$C_S=2000 \text{ t/m}^2$
1	157,402	168,3186	188,2625
2	390,5151	394,9597	403,7018
3	720,4438	722,8205	727,5515
4	1117,572	1119,084	1122,101
5	1560,844	1562,915	1564,056
6	2034,545	2035,363	2036,995
7	2527,565	2528,219	2529,528
8	3032,206	3032,751	3033,84
9	3543,196	3543,662	3544,593
10	4056,883	4057,29	4058,102
11	4570,653	4571,013	4571,734
12	5082,468	5082,792	5083,439
13	5590,45	5590,743	5591,329
14	6092,318	6092,608	6093,141
15	6584,529	6584,789	6585,252



Şekil 6.2 Model 1'in ilk üç moduna ait normalleştirilmiş deplasman şekilleri

Tablo 6.2 Model-2 için elde edilen, ilk onbeş moda ait doğal açısal frekans değerleri

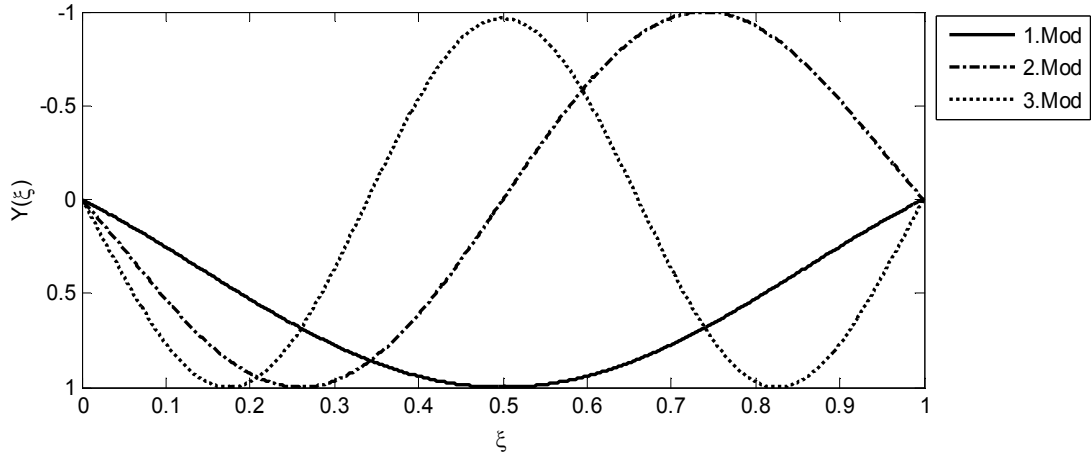
Mod Sayısı	Doğal Açısal Frekans Değerleri $\omega(rad / sn)$			
	$C_S=0$	$C_S=500 t/m^2$	$C_S=1000 t/m^2$	$C_S=2000 t/m^2$
1	64,8891	88,4295	106,9078	136,5850
2	251,4664	258,4755	265,2995	278,4460
3	539,4245	542,6868	545,903	552,3595
4	904,3288	906,2552	908,1794	912,0136
5	1323,937	1325,242	1326,547	1329,1505
6	1780,76	1781,725	1782,689	1784,6153
7	2262,092	2262,845	2263,606	2265,1186
8	2759,093	2759,713	2760,332	2761,5711
9	3265,744	3266,268	3266,792	3267,8389
10	3778,007	3778,461	3778,915	3779,8214
11	4293,199	4293,599	4293,999	4294,7982
12	4809,551	4809,909	4810,267	4810,9828
13	5325,919	5326,248	5326,568	5327,2159
14	5841,577	5841,873	5842,169	5842,7615
15	6356,075	6356,349	6356,622	6357,1676



Şekil 6.3 Model 2'nin ilk üç moduna ait normalleştirilmiş deplasman şekilleri

Tablo 6.3 Model-3 için elde edilen, ilk onbeş moda ait doğal açısal frekans değerleri

Mod Sayısı	Doğal Açısal Frekans Değerleri $\omega(\text{rad} / \text{sn})$			
	$C_S=0$	$C_S=500 \text{ t/m}^2$	$C_S=1000 \text{ t/m}^2$	$C_S=2000 \text{ t/m}^2$
1	95,0446	112,4424	127,4872	153,2074
2	285,9434	292,1294	298,1866	309,9467
3	572,4545	575,8343	578,8945	584,9674
4	934,2455	936,1136	937,9784	941,6963
5	1349,84	1351,122	1352,403	1354,961
6	1802,779	1803,734	1804,688	1806,594
7	2280,665	2281,398	2282,15	2283,652
8	2774,67	2775,878	2776,905	2777,138
9	3279,817	3279,339	3279,805	3280,905
10	3788,989	3789,442	3789,894	3790,799
11	4302,44	4302,839	4303,224	4304,037
12	4817,341	4817,698	4818,056	4818,77
13	5332,49	5332,814	5333,138	5333,785
14	5847,111	5847,407	5847,703	5848,295
15	6360,706	6360,979	6361,252	6361,798



Şekil 6.4 Model 3'ün ilk üç moduna ait normalleştirilmiş deplasman şekilleri

6.1.2 Zorlanmış Titreşim Analizi

Tekil dinamik yük etkisi altındaki temel kirişinin zorlanmış titreşimine ait ayrık hareket denklemi, her üç model için de aşağıdaki gibi elde edilir.

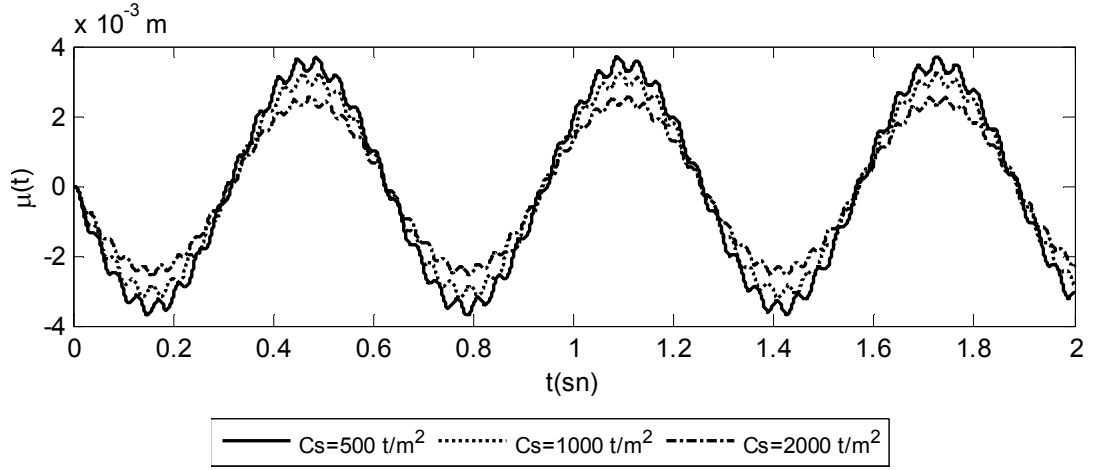
$$P_j(t) = L \int_0^1 Y_j(\xi) p(\xi, t) d\xi \quad (6.1)$$

$$= L \int_0^1 50 \sin(10t) \delta(\xi - 0,5) d\xi = 50Y(\xi = 0,5) \sin(10t)$$

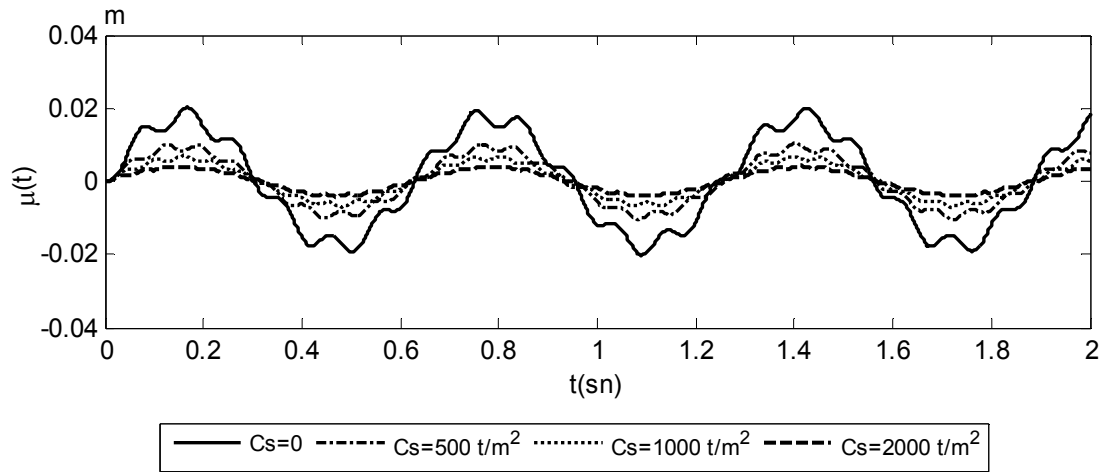
$$\mu_j(t) = \frac{50Y_j(\xi = 0,5)}{M_j \omega_j} \left[\frac{10 \sin(\omega_j t) - \sin(10t) \omega_j}{(10^2 - \omega_j^2)} \right] \quad (6.2)$$

Denklem (6.2)'de, çift modların katkısı, mod şekilleri nedeniyle her üç model için de sıfır olur.

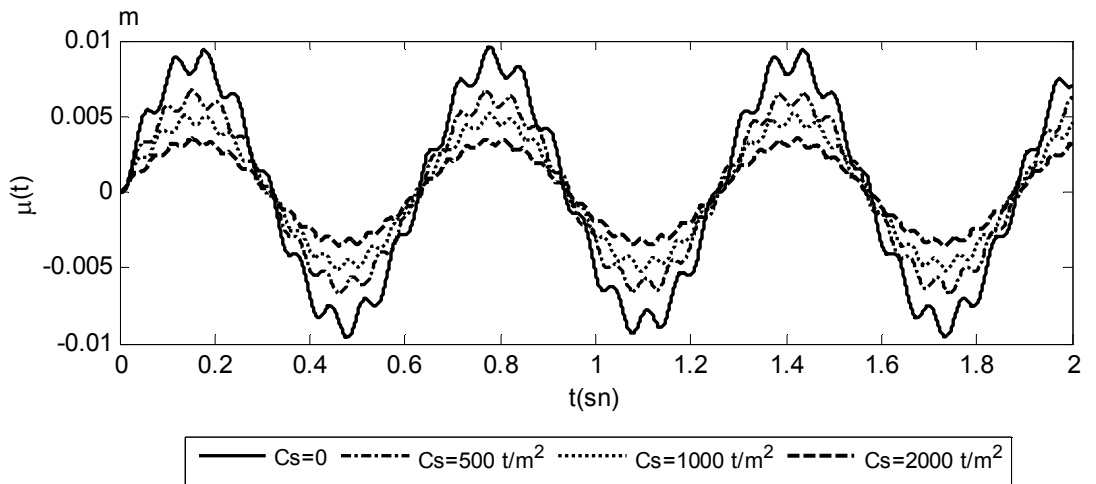
Model 1,2 ve 3'ün, akış diyagramı Ek-3'de verilen bilgisayar programı yardımıyla elde edilen, ilk on beş moduna ait normal koordinatlarının zamana göre değişimi Şekil 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.12 ve 6.13'de sunulmuştur.



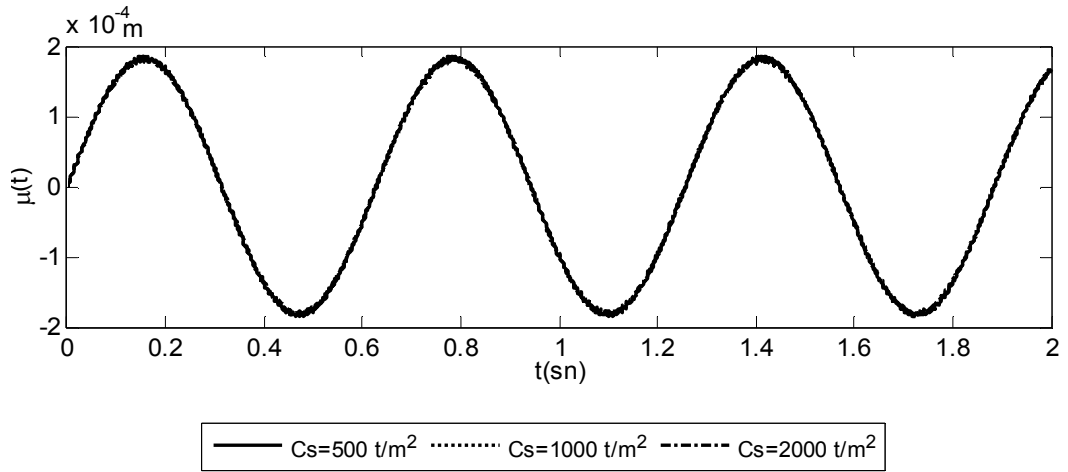
Şekil 6.5 Model 1'in 1. titreşim moduna ait normal koordinatlar



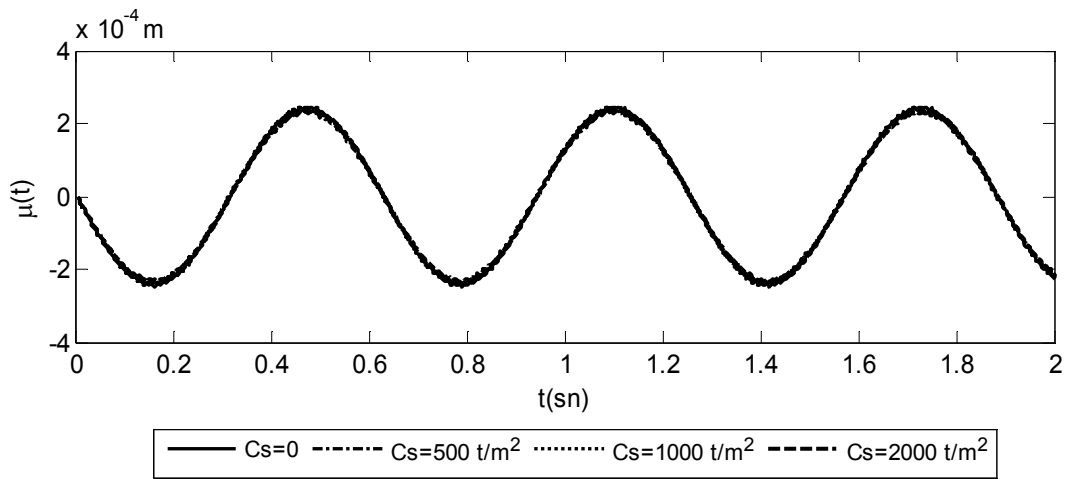
Şekil 6.6 Model 2'nin 1. titreşim moduna ait normal koordinatlar



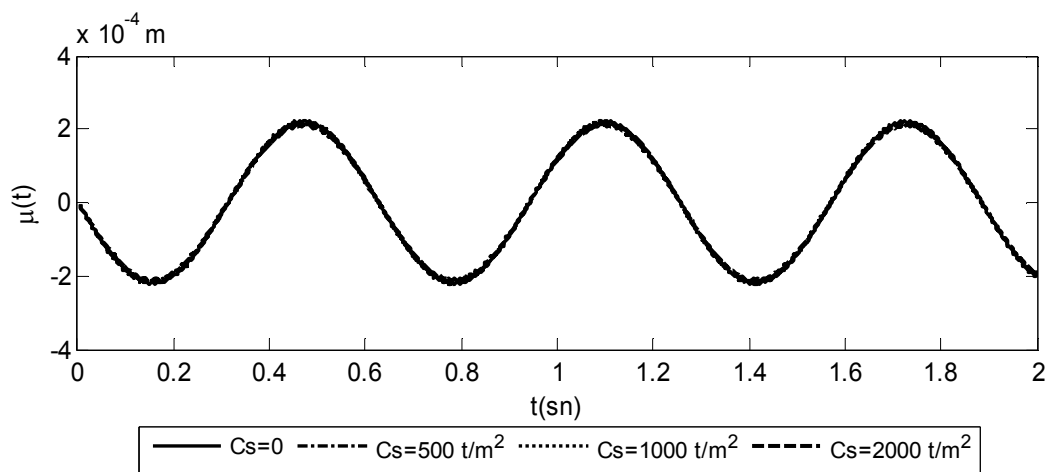
Şekil 6.7 Model 3'ün 1. titreşim moduna ait normal koordinatlar



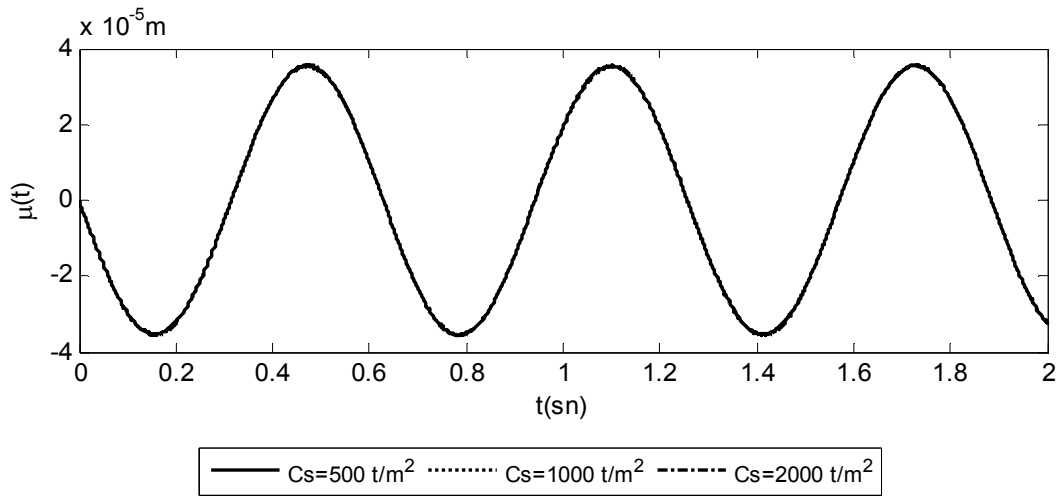
Şekil 6.8 Model 1'in 3. titreşim moduna ait normal koordinatlar



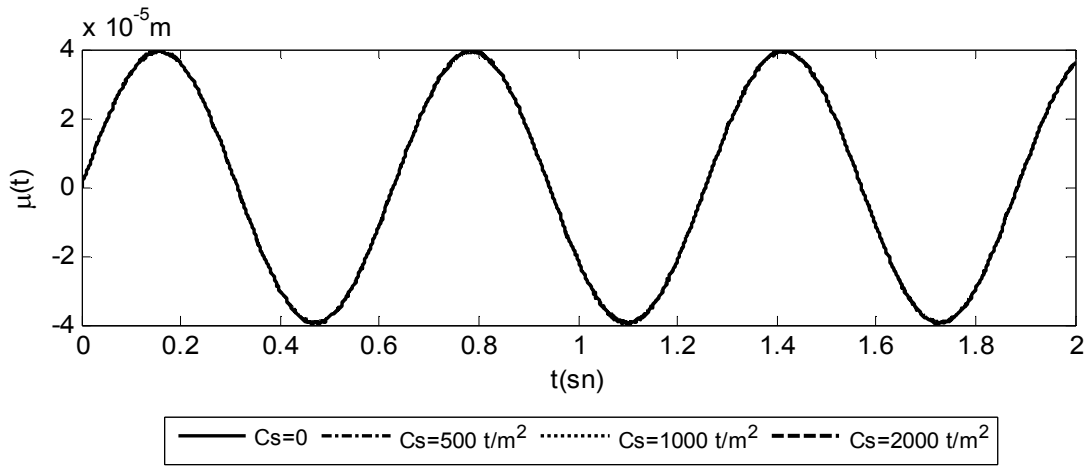
Şekil 6.9 Model 2'nin 3. titreşim moduna ait normal koordinatlar



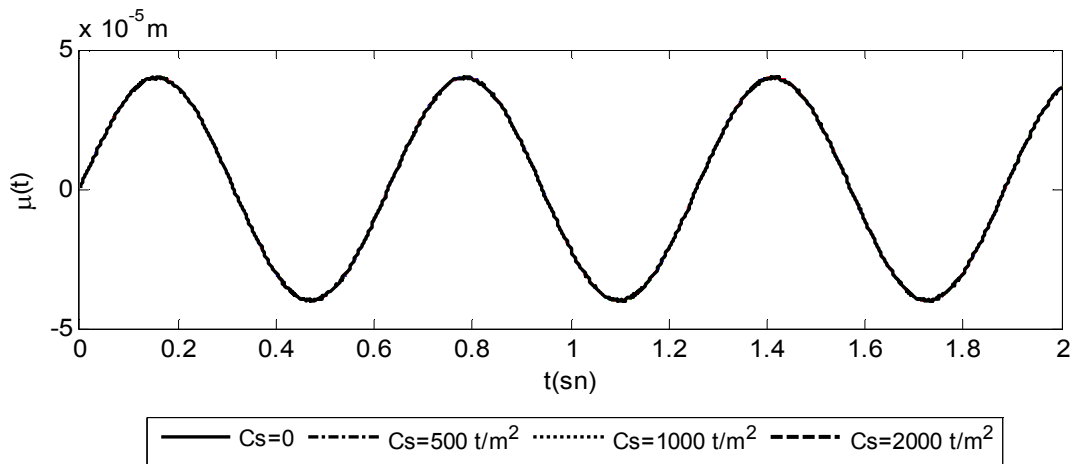
Şekil 6.10 Model 3'ün 3. titreşim moduna ait normal koordinatlar



Şekil 6.11 Model 1'in 5. titreşim moduna ait normal koordinatlar



Şekil 6.12 Model 2'nin 5. titreşim moduna ait normal koordinatlar



Şekil 6.13 Model 3'ün 5. titreşim moduna ait normal koordinatlar

Model 1,2 ve 3'ün, denklem (6.2) kullanılarak elde edilen, ilk on beş moduna ait normal koordinatlarının maksimum değerleri aşağıdaki Tablo 6.4, 6.5 ve 6.6'da sunulmuştur.

Tablo 6.4 Model-1 için elde edilen maksimum normal koordinat değerleri

Mod Sayısı	Maksimum Normal Koordinat Değerleri $\mu_{maks} (\times 10^3 m)$		
	$C_S=500 t/m^2$	$C_S=1000 t/m^2$	$C_S=2000 t/m^2$
1	3,7165	3,2351	2,5658
2	0	0	0
3	-0,1856	0,1843	-0,1820
4	0	0	0
5	0,0358	-0,0355	-0,0357
6	0	0	0
7	0,0127	0,0127	-0,0126
8	0	0	0
9	0,0060	-0,0060	-0,0060
10	0	0	0
11	0,0034	-0,0034	-0,0034
12	0	0	0
13	-0,0023	-0,0023	-0,0023
14	0	0	0
15	0,0016	0,0016	-0,0016

Tablo 6.5 Model-2 için elde edilen maksimum normal koordinat değerleri

Mod Sayısı	Maksimum Normal Koordinat Değerleri $\mu_{maks} (\times 10^3 m)$			
	$C_S=0$	$C_S=500 t/m^2$	$C_S=1000 t/m^2$	$C_S=2000 t/m^2$
1	20,1517	10,3624	6,9617	4,1744
2	0	0	0	0
3	0,2472	0,2443	0,2413	0,2356
4	0	0	0	0
5	0,0398	0,0397	0,0396	0,0394
6	0	0	0	0
7	0,0134	0,0134	0,0134	0,0134
8	0	0	0	0
9	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064
10	0	0	0	0
11	0,0037	0,0037	0,0037	0,0037
12	0	0	0	0
13	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024
14	0	0	0	0
15	0,0017	0,0017	0,0017	0,0017

Tablo 6.6 Model-3 için elde edilen maksimum normal koordinat değerleri

Mod Sayısı	Maksimum Normal Koordinat Değerleri $\mu_{maks} (\times 10^3 m)$			
	$C_S=0$	$C_S=500 t/m^2$	$C_S=1000 t/m^2$	$C_S=2000 t/m^2$
1	9,5901	6,7474	5,1890	3,5425
2	0	0	0	0
3	0,2241	0,2215	0,2191	0,2145
4	0	0	0	0
5	0,0405	0,0404	0,0403	0,0402
6	0	0	0	0
7	0,0142	0,0142	0,0142	0,0141
8	0	0	0	0
9	0,0068	0,0069	0,0069	0,0068
10	0	0	0	0
11	0,0040	0,0040	0,0040	0,0040
12	0	0	0	0
13	0,0026	0,0026	0,0026	0,0026
14	0	0	0	0
15	0,0018	0,0018	0,0018	0,0018

Model 1,2 ve 3'ün, denklem (6.2) yardımıyla, 1.moduna ait normal koordinat fonksiyonunun maksimum değere ulaştığı $t=t_d$ anında elde edilen, ilk on beş moduna ait normal koordinat değerleri Tablo 6.7, 6.8 ve 6.9'da sunulmuştur.

Tablo 6.7 Model-1 için, $t=t_d$ anında elde edilen normal koordinat değerleri

Mod Sayısı	$\mu(t = t_d)$ ($\times 10^3 m$)		
	$C_S=500 t/m^2$	$C_S=1000 t/m^2$	$C_S=2000 t/m^2$
1	3,7162	3,2351	2,5658
2	0	0	0
3	-0,1816	-0,1796	-0,1794
4	0	0	0
5	0,0354	0,0352	0,0356
6	0	0	0
7	-0,0127	-0,0126	-0,0126
8	0	0	0
9	0,0060	0,0060	0,0060
10	0	0	0
11	-0,0034	-0,0034	-0,0034
12	0	0	0
13	0,0022	0,0022	0,0022
14	0	0	0
15	-0,0016	-0,0016	-0,0016

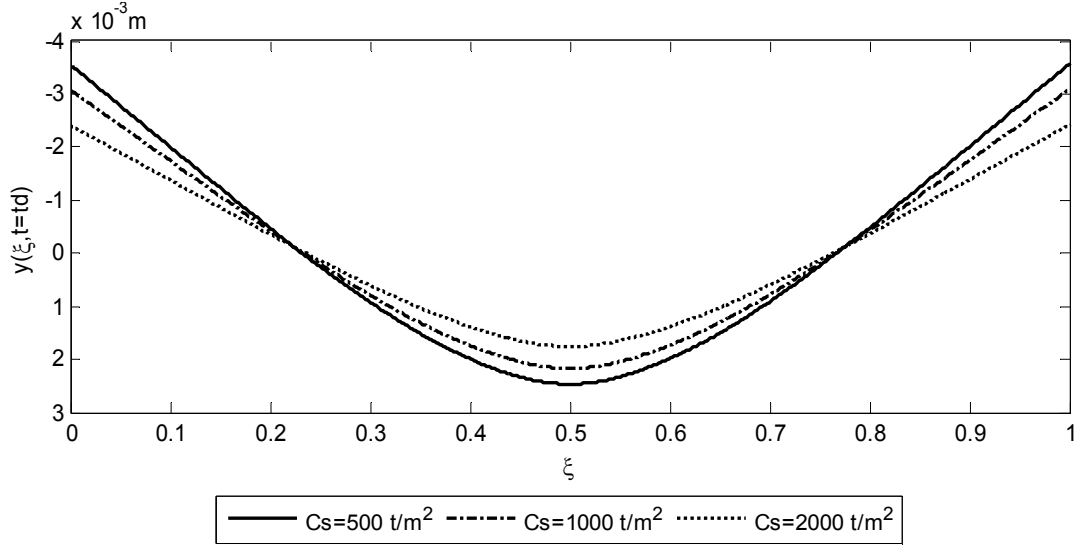
Tablo 6.8 Model-2 için, $t=t_d$ anında elde edilen normal koordinat değerleri

Mod Sayısı	$\mu(t = td)$ ($\times 10^3 m$)			
	$C_S=0$	$C_S=500 t/m^2$	$C_S=1000 t/m^2$	$C_S=2000 t/m^2$
1	20,1517	10,3624	6,9617	4,1744
2	0	0	0	0
3	-0,2392	-0,2343	-0,2372	-0,2289
4	0	0	0	0
5	0,0390	0,0390	0,0393	0,0389
6	0	0	0	0
7	-0,0133	-0,0134	-0,0134	-0,0133
8	0	0	0	0
9	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064
10	0	0	0	0
11	-0,0037	-0,0037	-0,0037	-0,0037
12	0	0	0	0
13	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024
14	0	0	0	0
15	-0,0017	-0,0017	-0,0017	-0,0017

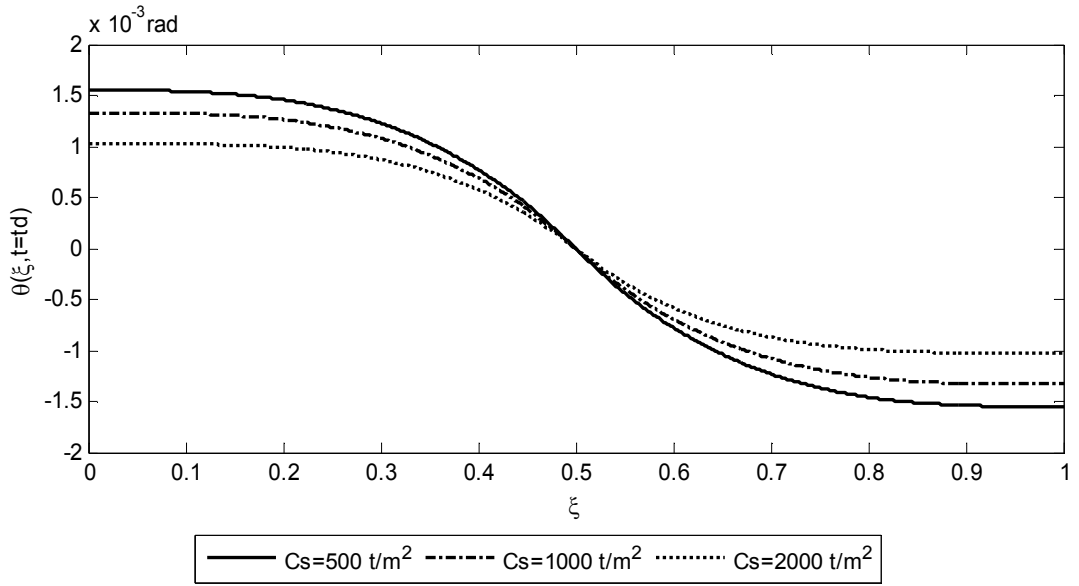
Tablo 6.9 Model-3 için, $t=t_d$ anında elde edilen normal koordinat değerleri

Mod Sayısı	$\mu(t = t_d)$ ($\times 10^3 m$)			
	$C_S=0$	$C_S=500 t/m^2$	$C_S=1000 t/m^2$	$C_S=2000 t/m^2$
1	9,5901	6,7474	5,1890	3,5425
2	0	0	0	0
3	-0,2223	-0,2151	-0,2165	-0,2078
4	0	0	0	0
5	0,0399	0,0399	0,0400	0,0396
6	0	0	0	0
7	-0,0140	-0,0141	-0,0141	-0,0141
8	0	0	0	0
9	0,0068	0,0068	0,0068	0,0068
10	0	0	0	0
11	-0,0040	-0,0040	-0,0040	-0,0040
12	0	0	0	0
13	0,0026	0,0026	0,0026	0,0026
14	0	0	0	0
15	-0,0018	-0,0018	-0,0018	-0,0018

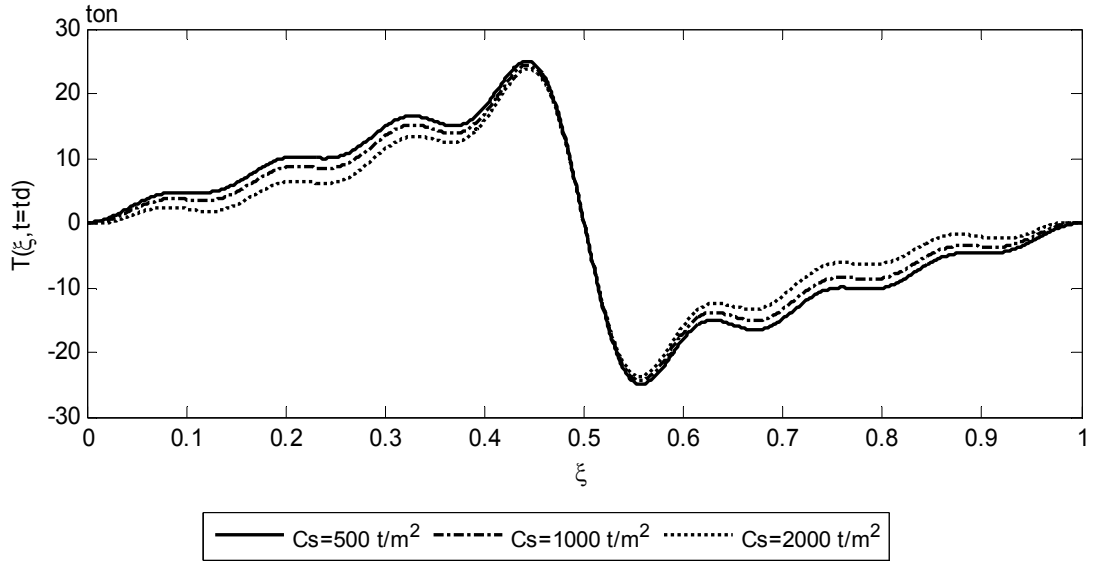
Model 1'in, akış diyagramı Ek-3'de sunulan bilgisayar programı yardımıyla, $t=t_d$ anında elde edilen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, Şekil 6.14, 6.15, 6.16 ve 6.17'de sunulmuştur.



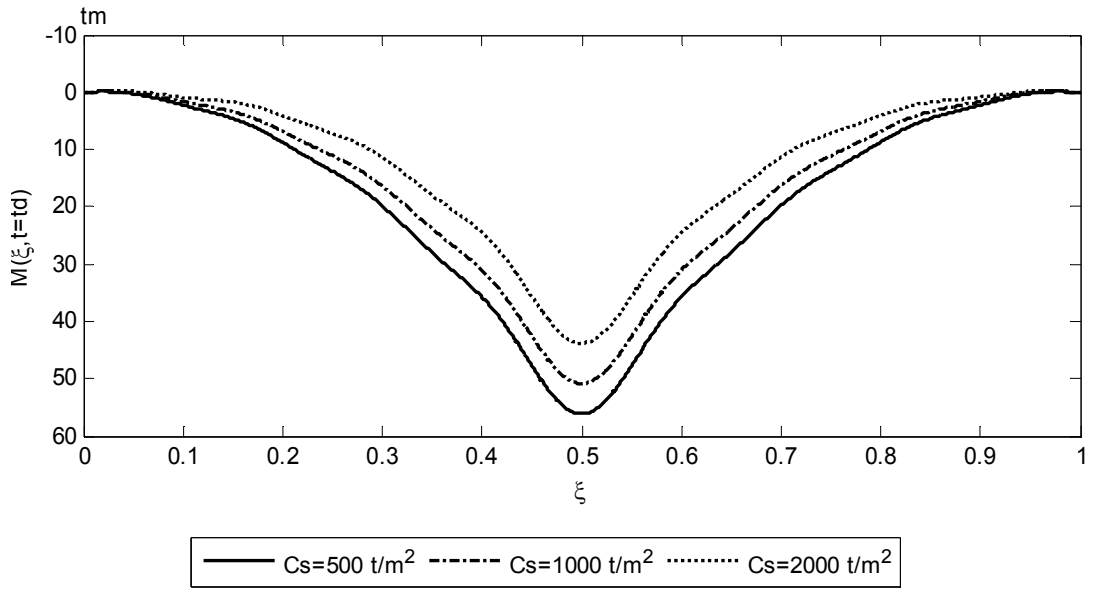
Şekil 6.14- Model 1'e ait deplasman diyagramı



Şekil 6.15- Model 1'e ait kesit dönmesi diyagramı

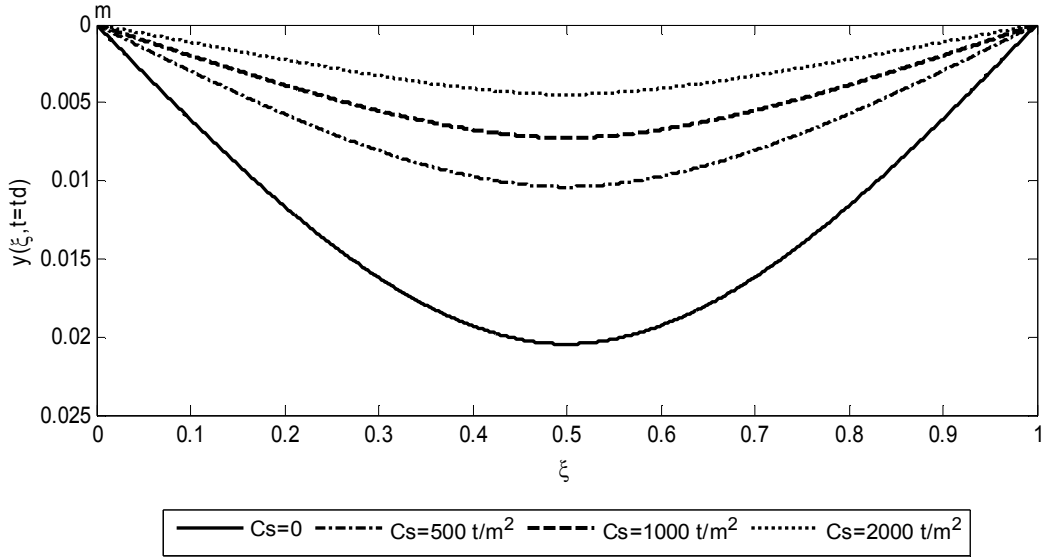


Şekil 6.16- Model 1'e ait kesme kuvveti diyagramı

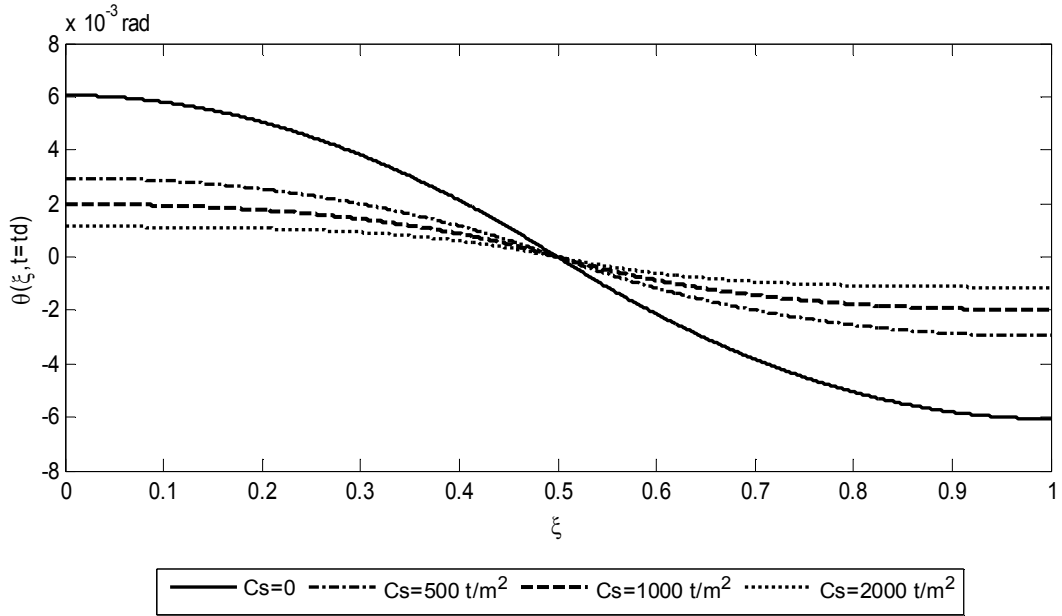


Şekil 6.17- Model 1'e ait eğilme momenti diyagramı

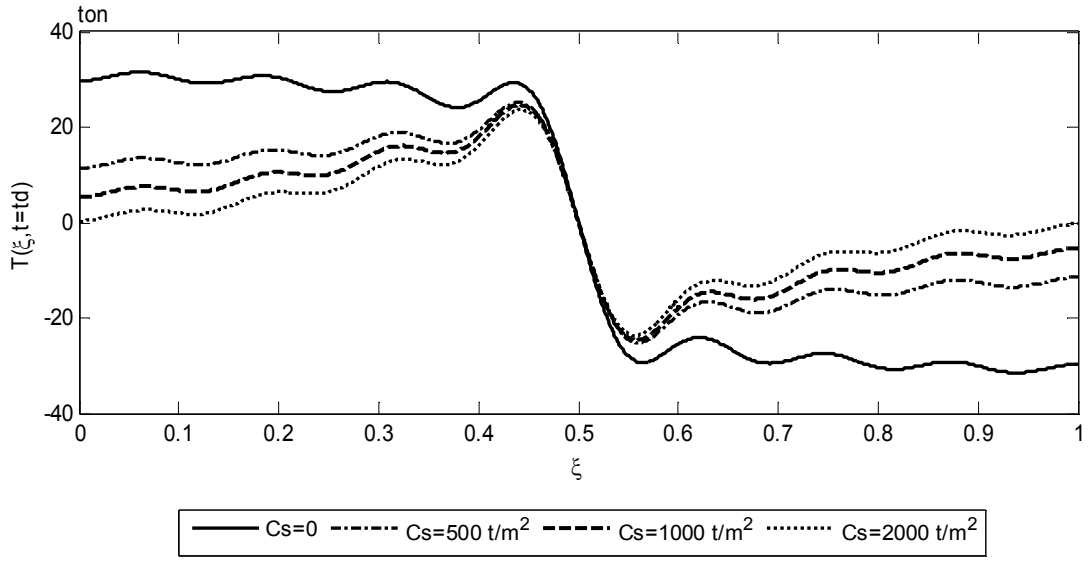
Model 2'nin, akış diyagramı Ek-3'de sunulan bilgisayar programı yardımıyla, $t=t_d$ anında elde edilen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, Şekil 6.18, 6.19, 6.20 ve 6.21'de sunulmuştur.



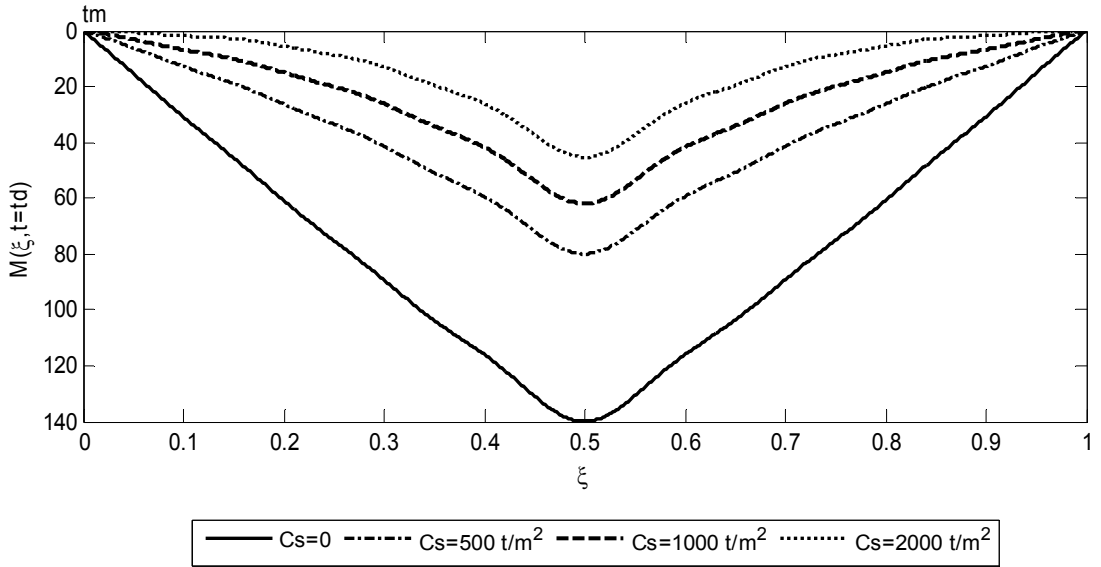
Şekil 6.18- Model 2'ye ait deplasman diyagramı



Şekil 6.19- Model 2'ye ait kesit dönmesi diyagramı

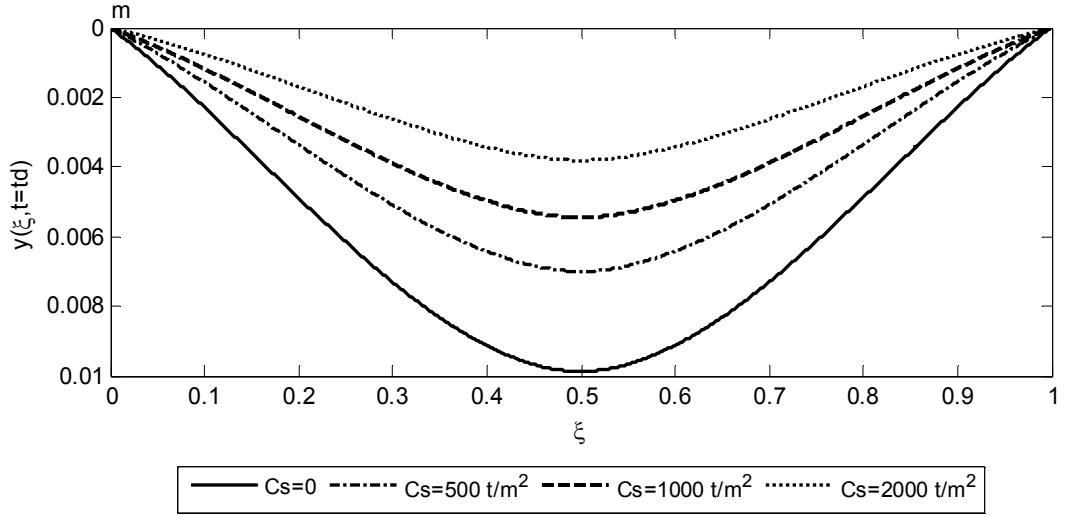


Şekil 6.20- Model 2'ye ait kesme kuvveti diyagramı

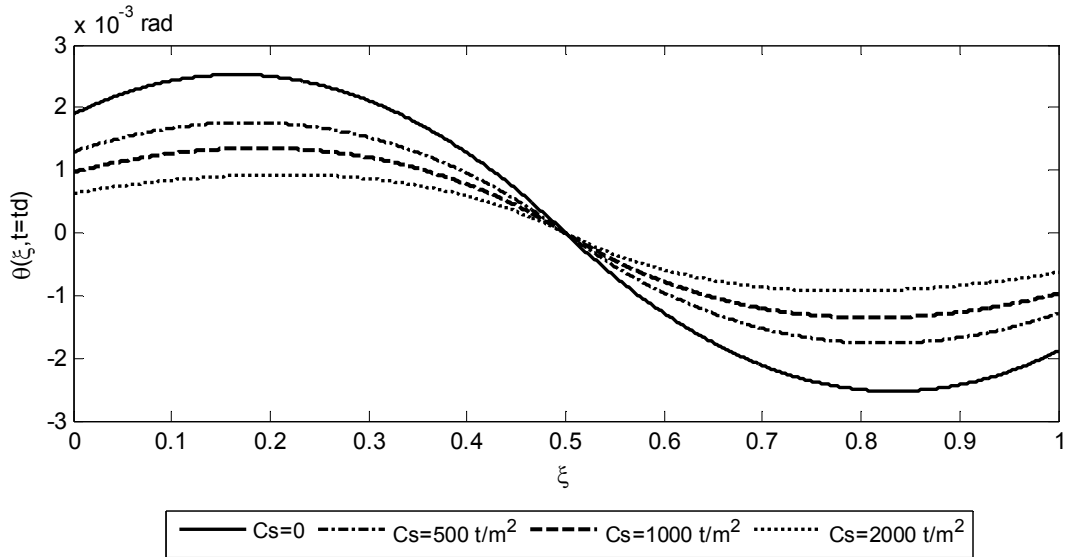


Şekil 6.21- Model 2'ye ait eğilme momenti diyagramı

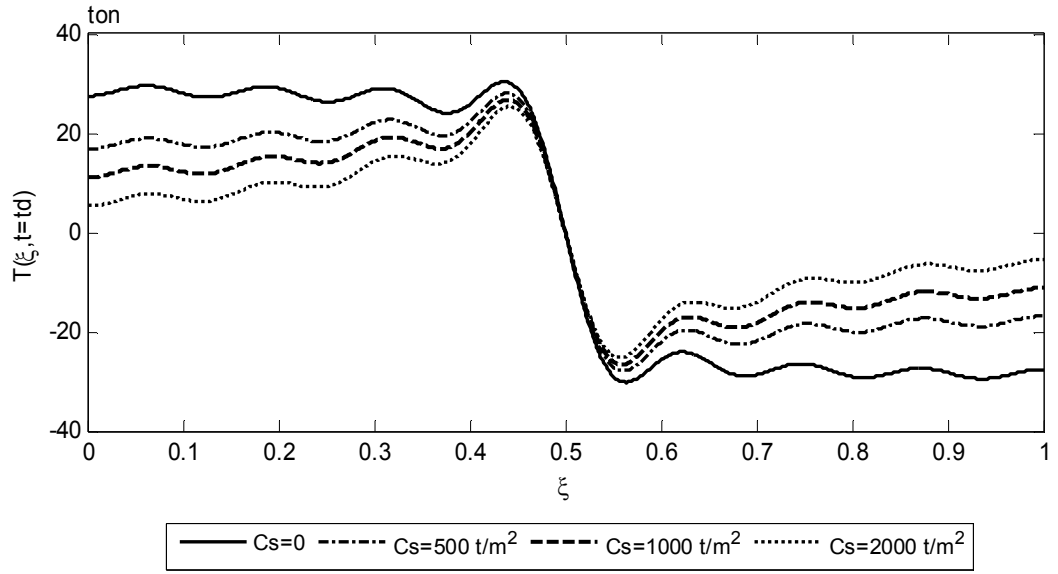
Model 3'ün, akış diyagramı Ek-3'de sunulan bilgisayar programı yardımıyla, $t=t_d$ anında elde edilen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, Şekil 6.22, 6.23, 6.24 ve 6.25'de sunulmuştur.



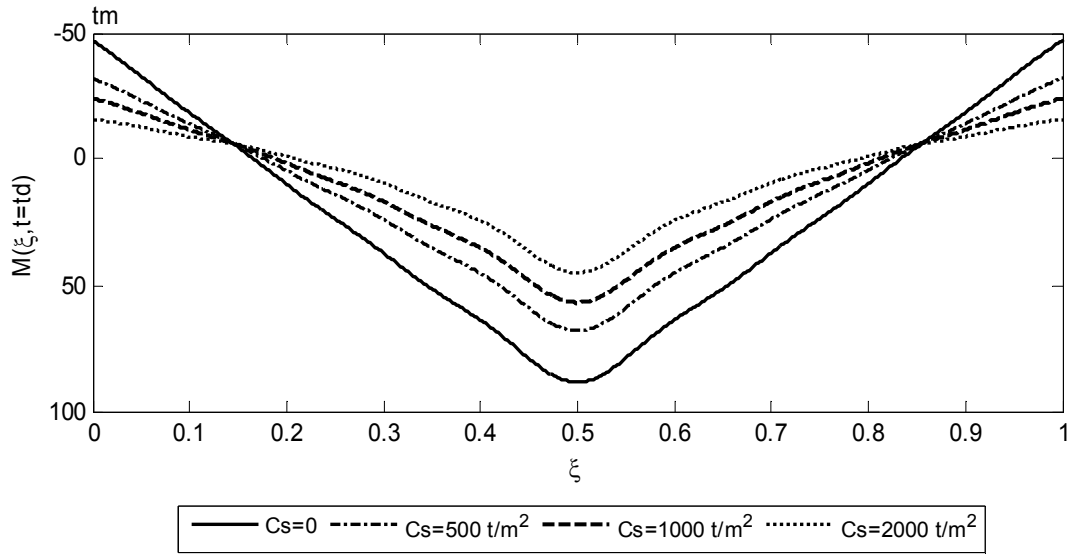
Şekil 6.22- Model 3'e ait deplasman diyagramı



Şekil 6.23- Model 3'e ait kesit dönmesi diyagramı



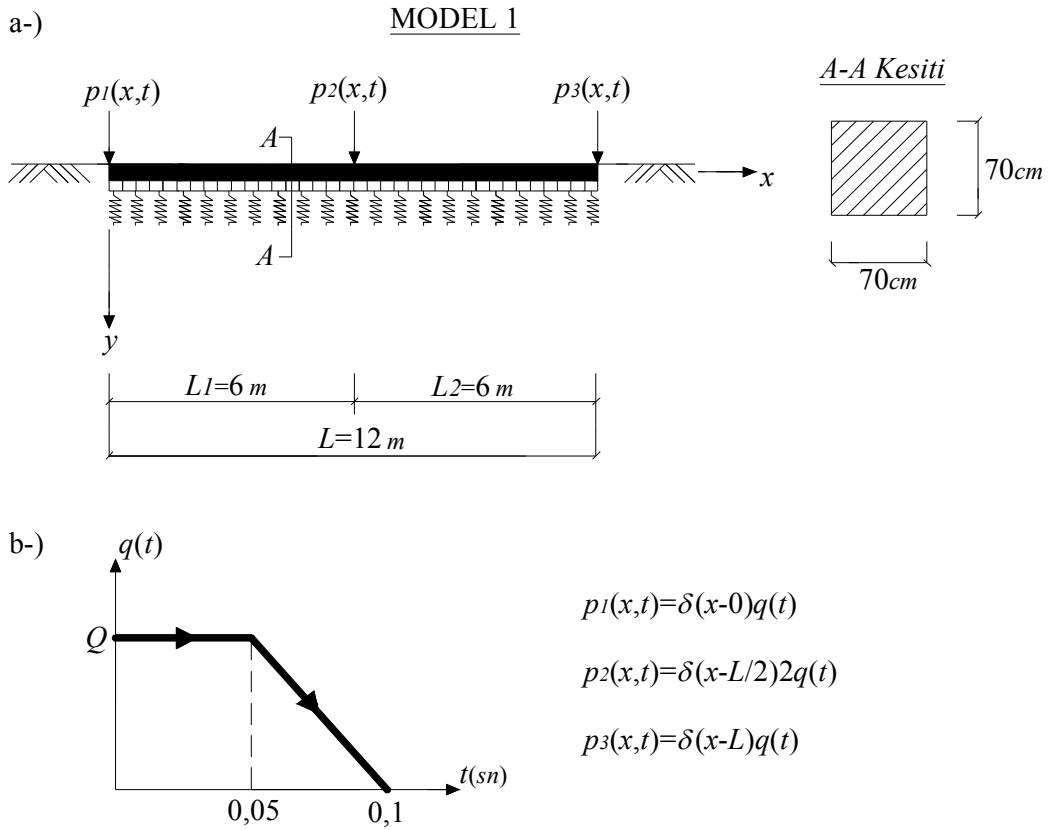
Şekil 6.24 Model 3'e ait kesme kuvveti diyagramı



Şekil 6.25 Model 3'e ait eğilme momenti diyagramı

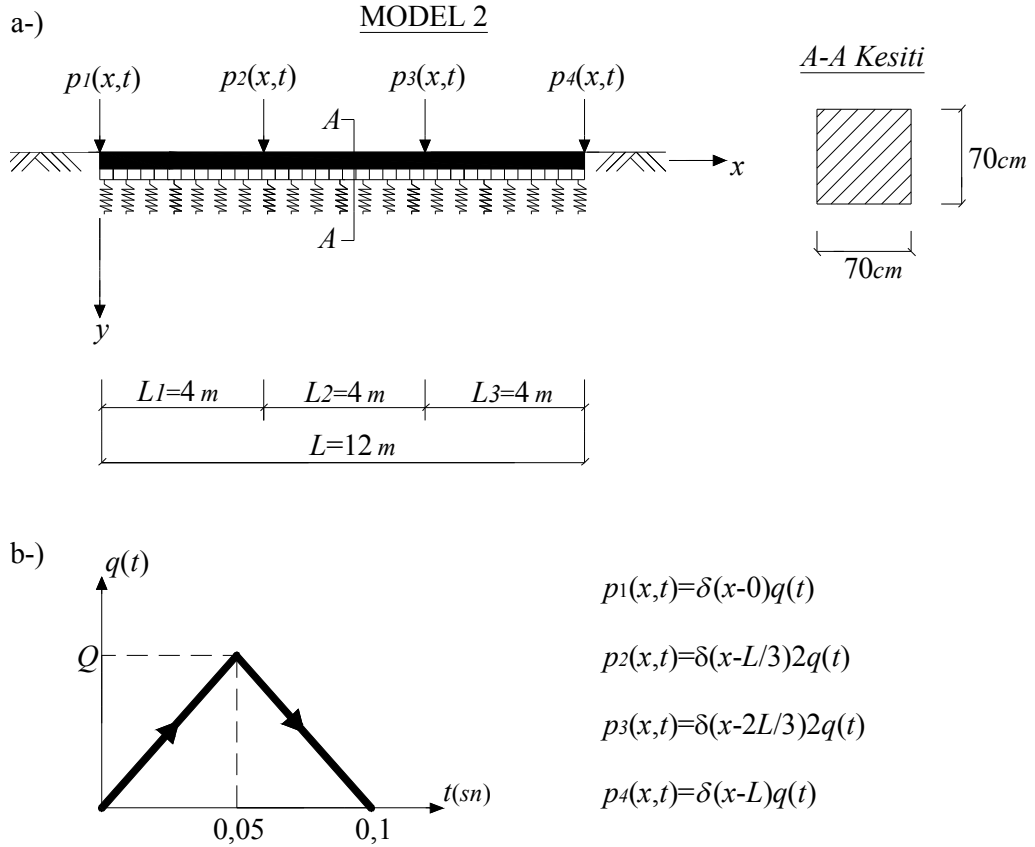
6.2 Sayısal Ugulama 2

Elastik Vlasov zeminine oturan her iki ucu serbest betonarme bir temel kirişi, Şekil 6.26 ve 6.27’de gösterilen şekilde iki farklı dinamik yüklemeye maruz kalmaktadır. Temel kirişinin dinamik davranışı, her iki yükleme durumu için, elastik zemin parametreleri Tablo 6.10’da verilen ve Z1, Z2, Z3 olarak adlandırılan üç farklı zemin türüne göre, Vlasov ve Winkler zemin modelleri kullanılarak elde edilmiştir.



Şekil 6.26 a-) Model 1: Elastik zemine oturan, üç noktadan dinamik yüke maruz temel kirişi

b-) Dinamik yük fonksiyonunun zamana göre değişimi



Şekil 6.27 a-) Model 2: Elastik zemine oturan, dört noktadan dinamik yüke maruz temel kirişi
b-) Dinamik yük fonksiyonunun zamana göre değişimi

Temel kirişinin kesit alanı; $A = 0,49m^2$, atalet momenti, $I_x = 2,0008 \times 10^{-2} m^4$, uzunluğu boyunca yayılı olan kütlesi; $m = 0,125ts^2 / m$, kiriş malzemesinin elastisite modülü; $E = 2,8 \times 10^6 t / m^2$, kayma modülü; $G = 1,1167 \times 10^6 t / m^2$, kiriş kesitinde maksimum kayma gerilmesini veren şekil faktörü; $\kappa = 0,6667$, dinamik dış yük fonksiyonunun genliği; $Q = 25ton$ olarak alınmıştır.

Z1, Z2 ve Z3 zeminlerinin elastisite modülü ve poisson oranlarına göre, denklem (1.19) kullanılarak hesaplanan C_S ve C_G değerleri aşağıdaki Tablo 6.10'da sunulmuştur.

Tablo 6.10 Z1, Z2 ve Z3 zeminleri için elde edilen C_S ve C_G katsayıları

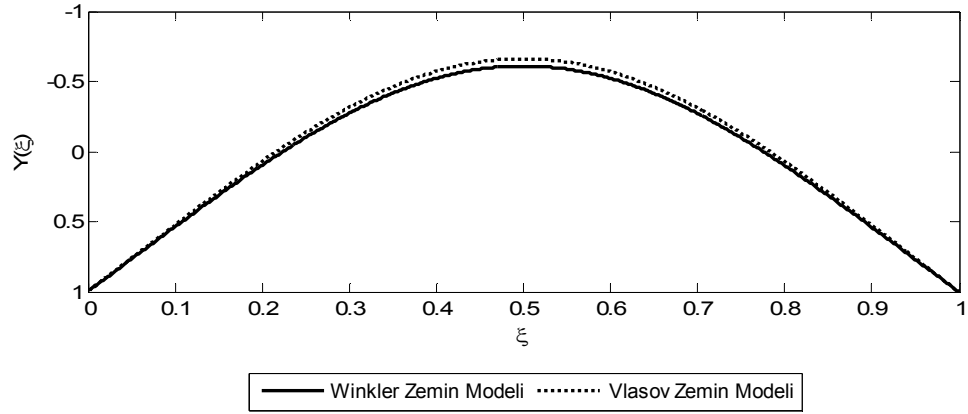
Zemin Adı	Zemin türü	Elastisite Modülü (t/m^2)	Poisson Oram	C_S (t/m^2)	C_G (ton)
Z1	Çok Yumuşak Kil	1500	0,40	301,6506	659,2777
Z2	Sıkı Kum	5000	0,45	3216,20	1245
Z3	Kumlu Kil	10000	0,25	1747	3365,70

6.2.1 Serbest Titreşim Analizi

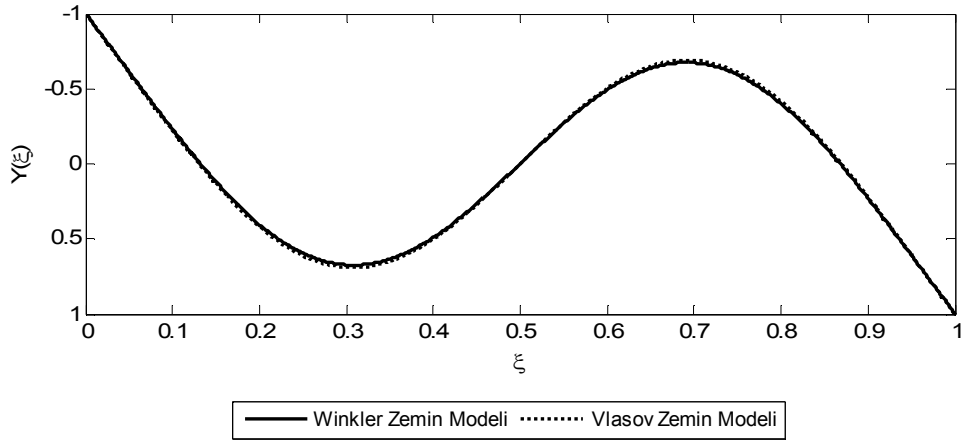
Model 1 için; Z1, Z2 ve Z3 zeminlerinin, Vlasov ve Winkler zeminlerine uygun olarak modellenmesi durumunda, akış diyagramı Ek-2 ve Ek-3’de verilen bilgisayar programları yardımıyla elde edilen serbest titreşim açılal frekans değerleri Tablo 6.11’de, normalleştirilmiş mod şekilleri ise Şekil 6.28, 6.29 ve 6.30’da sunulmuştur.

Tablo 6.11 Temel kirişinin, Z1 zemini için elde edilen doğal açılal frekans değerleri

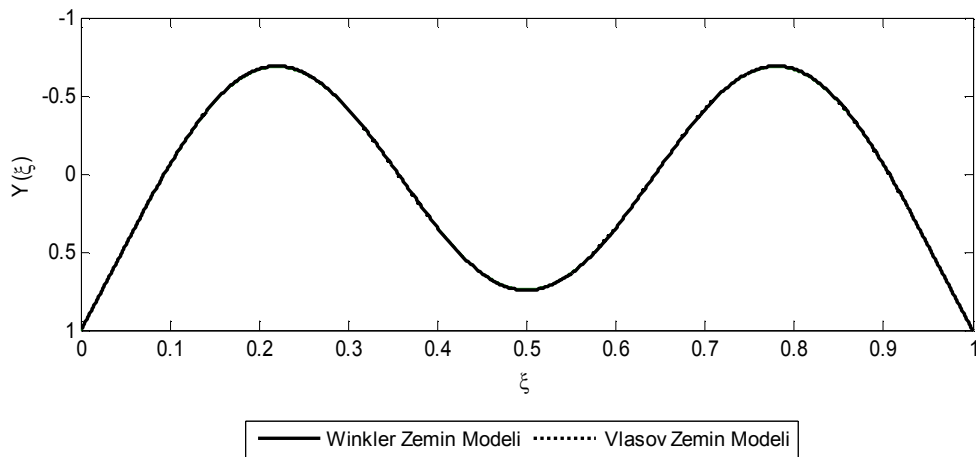
Mod Sayısı	Doğal Açılal Frekans Değerleri $\omega(rad / sn)$	
	Winkler Zemin Modeli	Vlasov Zemin Modeli
1	113,6867	115,5174
2	280,5884	283,1389
3	526,5113	529,0556
4	834,0165	836,3323
5	1189,8623	1191,8239
6	1582,7494	1584,2778
7	2003,4817	2004,5227
8	2444,8048	2445,3223
9	2901,1086	2901,0808
10	3368,0977	3367,5170
11	3842,4861	3841,3609
12	4321,7476	4320,1052
13	4803,9104	4801,8019
14	5287,3861	5284,8991
15	5770,8258	5768,0997



Şekil 6.28 Temel kirişinin, Z1 zemini için elde edilen 1.mod normalleştirilmiş deplasman şekilleri



Şekil 6.29 Temel kirişinin, Z1 zemini için elde edilen 2.mod normalleştirilmiş deplasman şekilleri

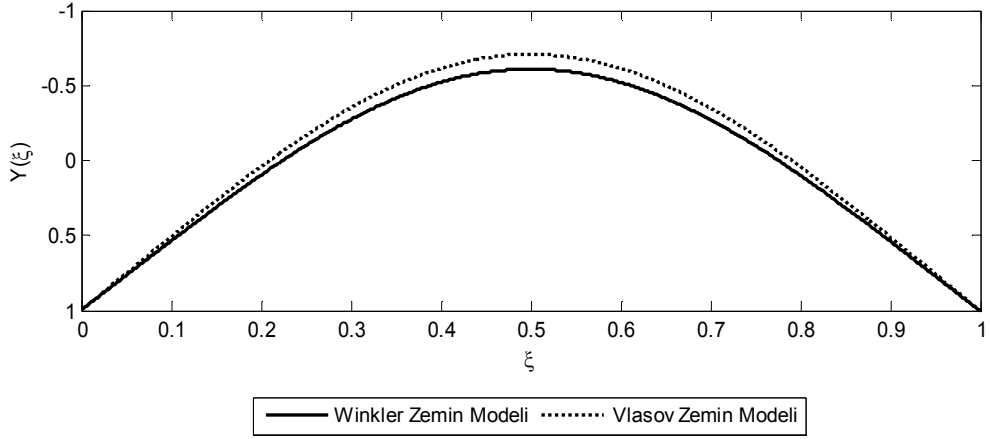


Şekil 6.30 Temel kirişinin, Z1 zemini için elde edilen 3.mod normalleştirilmiş deplasman şekilleri

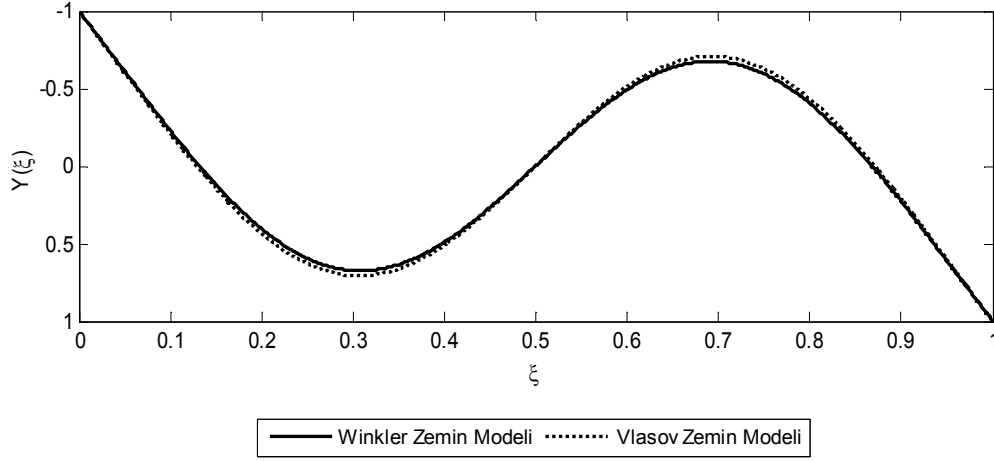
Model 2 için; Z1, Z2 ve Z3 zeminlerinin, Vlasov ve Winkler zeminlerine uygun olarak modellenmesi durumunda, akış diyagramı Ek-2 ve Ek-3’de verilen bilgisayar programları yardımıyla elde edilen serbest titreşim açısal frekans değerleri Tablo 6.12’de, normalleştirilmiş mod şekilleri ise Şekil 6.31, 6.32 ve 6.33’de sunulmuştur.

Tablo 6.12 Temel kirişinin, Z2 zemini için elde edilen doğal açısal frekans değerleri

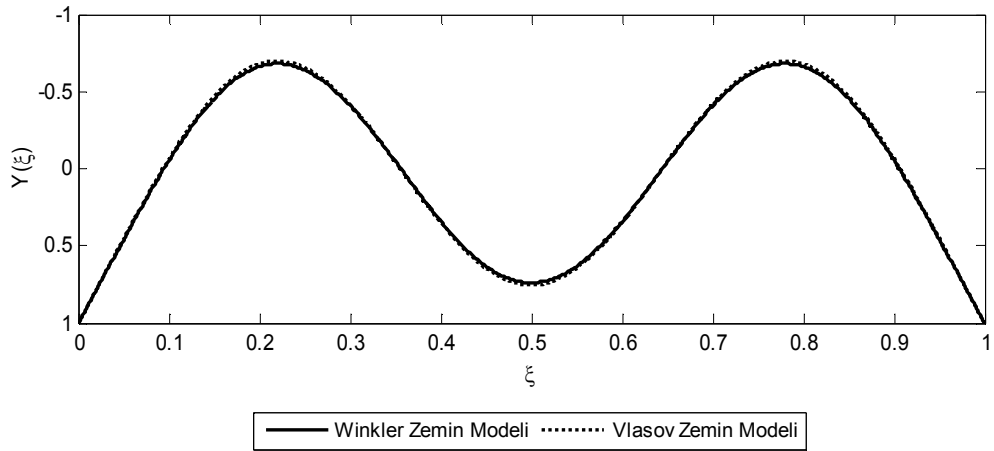
Mod Sayısı	Doğal Açısal Frekans Değerleri $\omega(rad / sn)$	
	Winkler Zemin Modeli	Vlasov Zemin Modeli
1	189,5575	191,6255
2	318,4513	322,6873
3	547,3084	551,9247
4	847,0994	851,4016
5	1198,9435	1202,6193
6	1589,5096	1592,3834
7	2008,7784	2010,7386
8	2449,1173	2450,0917
9	2904,7265	2904,6722
10	3371,2037	3370,1051
11	3845,2032	3843,0749
12	4324,1605	4321,0518
13	4806,0786	4802,0853
14	5289,3545	5284,6368
15	5772,6271	5767,4424



Şekil 6.31 Temel kirişinin, Z_2 zemini için elde edilen 1.mod normalleştirilmiş deplasman şekilleri



Şekil 6.32 Temel kirişinin, Z_2 zemini için elde edilen 2.mod normalleştirilmiş deplasman şekilleri

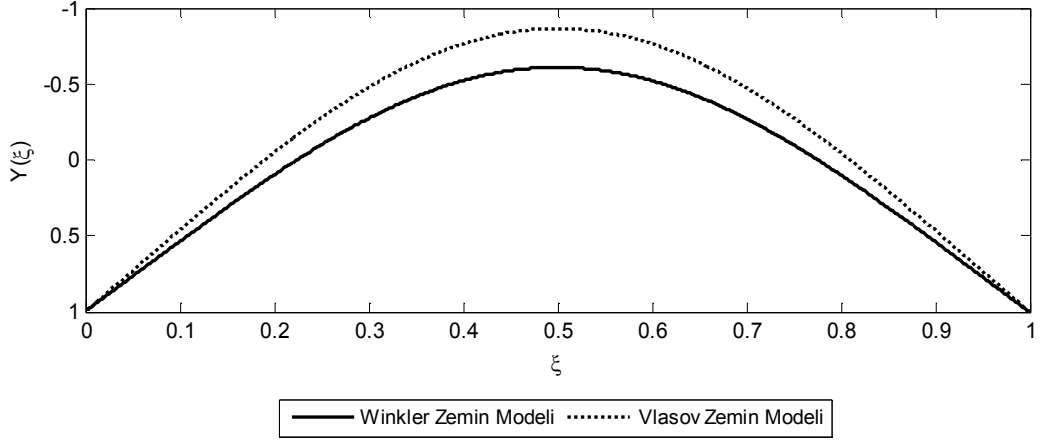


Şekil 6.33 Temel kirişinin, Z_2 zemini için elde edilen 3.mod normalleştirilmiş deplasman şekilleri

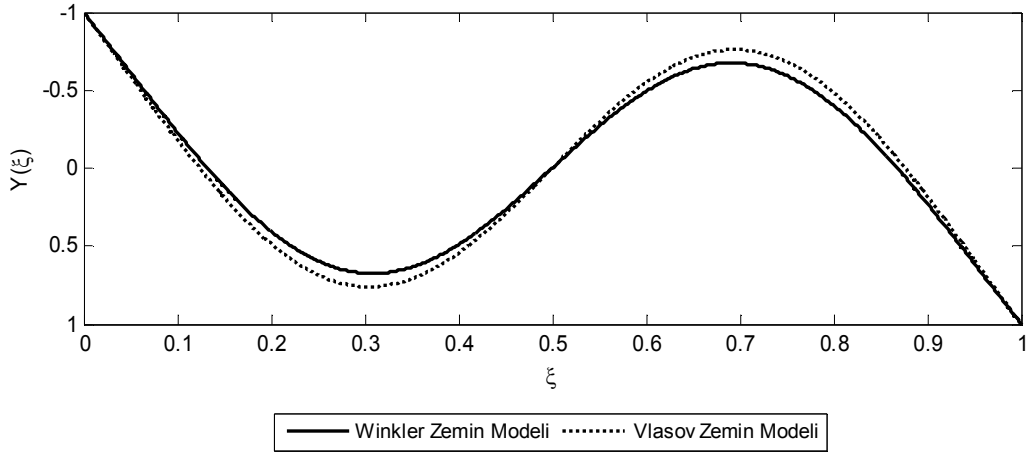
Model 3 için; Z1, Z2 ve Z3 zeminlerinin, Vlasov ve Winkler zeminlerine uygun olarak modellenmesi durumunda, akış diyagramı Ek-2 ve Ek-3’de verilen bilgisayar programları yardımıyla elde edilen serbest titreşim açısal frekans değerleri Tablo 6.13’de, normalleştirilmiş mod şekilleri ise Şekil 6.34, 6.35 ve 6.36’da sunulmuştur.

Tablo 6.13 Temel kirişinin, Z3 zemini için elde edilen doğal açısal frekans değerleri

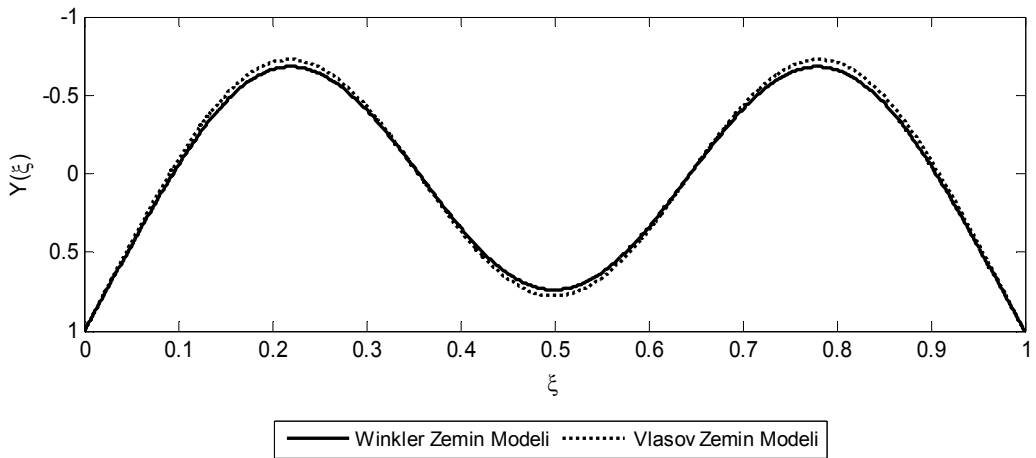
Mod Sayısı	Doğal Açısal Frekans Değerleri ω (rad / sn)	
	Winkler Zemin Modeli	Vlasov Zemin Modeli
1	155,9946	162,6707
2	299,9631	311,9397
3	536,9255	549,5429
4	840,5301	852,1946
5	1194,3744	1204,3183
6	1586,1055	1593,8746
7	2006,1103	2011,4074
8	2446,9444	2449,5744
9	2902,9034	2902,7462
10	3369,6384	3366,6501
11	3843,8336	3838,0440
12	4322,9445	4314,4713
13	4804,9858	4794,0724
14	5288,3625	5275,4025
15	5771,7187	5757,3478



Şekil 6.34 Temel kirişinin, Z3 zemini için elde edilen 1.mod normalleştirilmiş deplasman şekilleri



Şekil 6.35 Temel kirişinin, Z3 zemini için elde edilen 2.mod normalleştirilmiş deplasman şekilleri



Şekil 6.36 Z3 zemini için elde edilen normalleştirilmiş 3.mod normalleştirilmiş deplasman şekilleri

6.2.2 Zorlanmış Titreşim Analizi

Model 1’de verilen temel kirişinin zorlanmış titreşimine ait hareket denkleminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_j(t) = \left(L \int_0^1 \delta(\xi - 0) d\xi + 2L \int_0^1 \delta(\xi - 0,5) d\xi + L \int_0^1 \delta(\xi - 1) d\xi \right) q(t) \quad (6.3)$$

$$= (Y_j(\xi = 0) + 2Y_j(\xi = 0,5) + Y_j(\xi = 1)) q(t)$$

$$\mu_j(t) = \frac{Q(Y_j(0) + 2Y_j(0,5) + Y_j(1))}{M_j \omega_j^2} [1 - \cos(\omega_j t)] \quad 0 < t \leq 0,05 \quad (6.4)$$

$$\mu_j(t) = \mu_j(0,05) \cos(\omega_j t) + \frac{\dot{\mu}_j(0,05)}{\omega_j} \sin(\omega_j t) + \frac{Q(Y_j(0) + 2Y_j(0,5) + Y_j(1))}{M_j \omega_j^2} \left\{ 1 - \cos(\omega_j \bar{t}) - \frac{1}{0,05} \left[t - \frac{1}{\omega_j} \sin(\omega_j \bar{t}) \right] \right\} \quad (6.5)$$

$$0,05 < t \leq 0,1$$

$$\mu_j(t) = \mu_j(0,1) \cos(\omega_j \bar{t}) + \frac{\dot{\mu}_j(0,1)}{\omega_j} \sin(\omega_j \bar{t}) \quad 0,1 < t \quad (6.6)$$

$$\bar{t} = t - 0,05 \quad (6.7)$$

$$\bar{t} = t - 0,1$$

Denklem (6.4), (6.5) ve (6.6)’da, mod şekilleri nedeniyle, çift modların katkısı sıfır olur.

Model 2'de verilen temel kirişinin zorlanmış titreşimine ait hareket denkleminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_j(t) = \left(L \int_0^1 \delta(\xi - 0) d\xi + 2L \int_0^1 \delta(\xi - 1/3) d\xi + 2L \int_0^1 \delta(\xi - 2/3) d\xi + L \int_0^1 \delta(\xi - 1) d\xi \right) q(t) \quad (6.8)$$

$$= (Y_j(\xi = 0) + 2Y_j(\xi = 1/3) + 2Y_j(\xi = 2/3) + Y_j(\xi = 1)) q(t)$$

$$\mu_j(t) = \frac{Q(Y_j(0) + 2Y_j(1/3) + 2Y_j(2/3) + Y_j(1))}{0,05M_j\omega_j^2} \left[t - \frac{1}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] \quad (6.9)$$

$0 < t \leq 0,05$

$$\mu_j(t) = \mu_j(0,05) \cos(\omega_j t) + \frac{\dot{\mu}_j(0,05)}{\omega_j} \sin(\omega_j t) + \frac{Q(Y_j(0) + 2Y_j(1/3) + 2Y_j(2/3) + Y_j(1))}{M_j\omega_j^2} \left\{ 1 - \cos(\omega_j \bar{t}) - \frac{1}{0,05} \left[t - \frac{1}{\omega_j} \sin(\omega_j \bar{t}) \right] \right\} \quad (6.10)$$

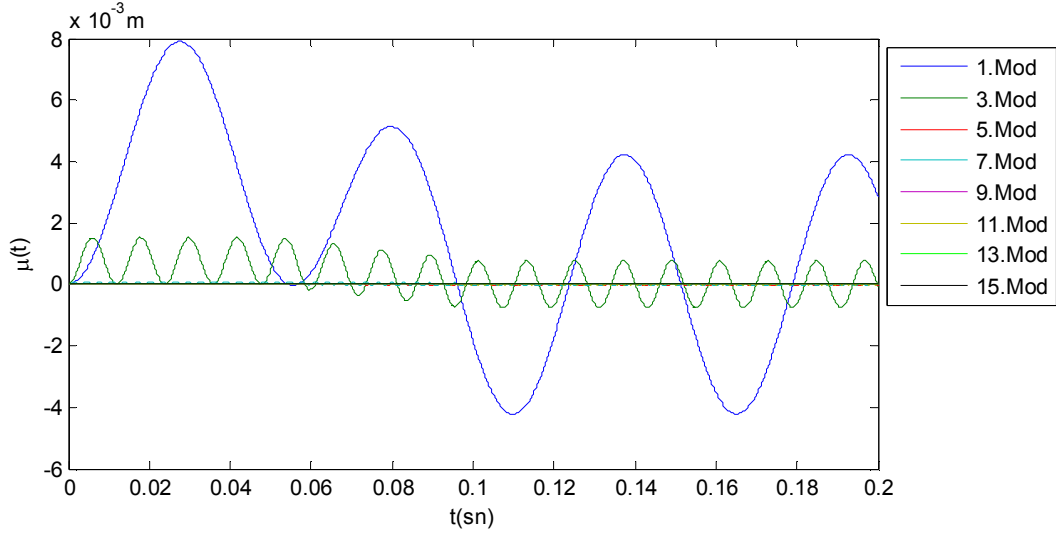
$0,05 < t \leq 0,1$

$$\mu_j(t) = \mu_j(0,1) \cos(\omega_j \bar{t}) + \frac{\dot{\mu}_j(0,1)}{\omega_j} \sin(\omega_j \bar{t}) \quad (6.11)$$

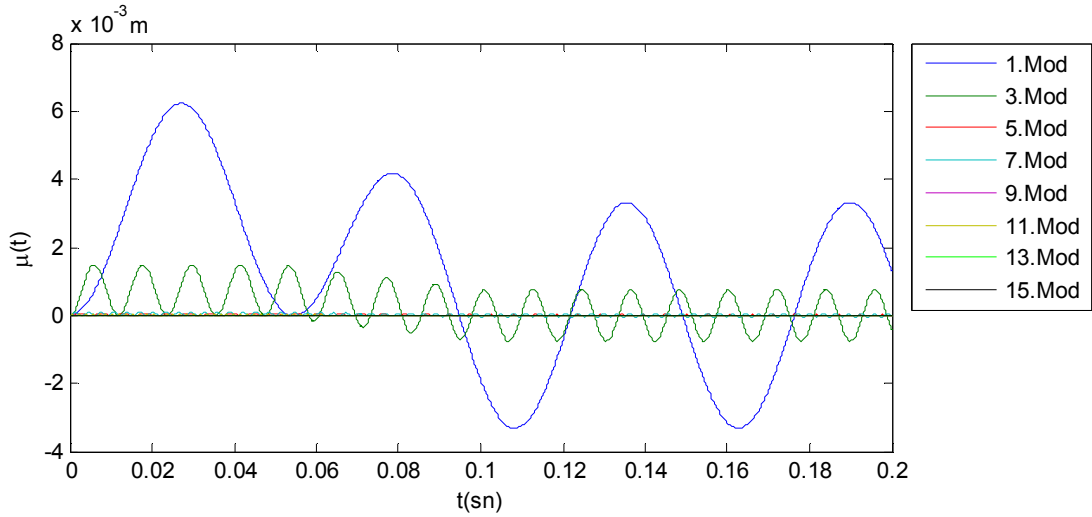
$0,1 < t$

Denklem (6.9), (6.10) ve (6.11)'de, mod şekilleri nedeniyle, çift modların katkısı sıfır olur.

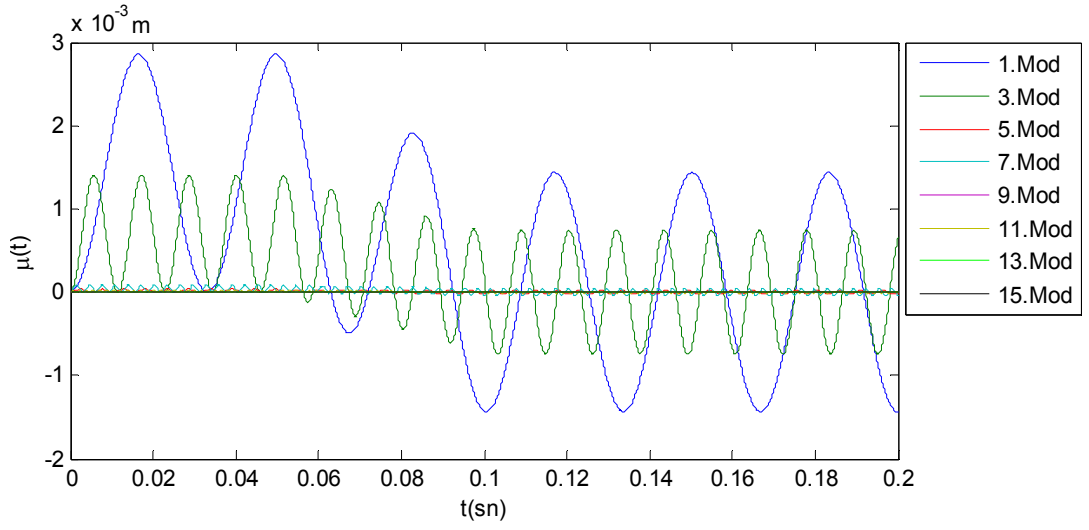
Model 1'in, akış diyagramı Ek-3'de verilen bilgisayar programı yardımıyla elde edilen, ilk on beş titreşim moduna ait normal koordinatlarının zamana göre değişimi, Şekil 6.37, 6.38, 6.39, 6.40, 6.41 ve 6.42'de sunulmuştur.



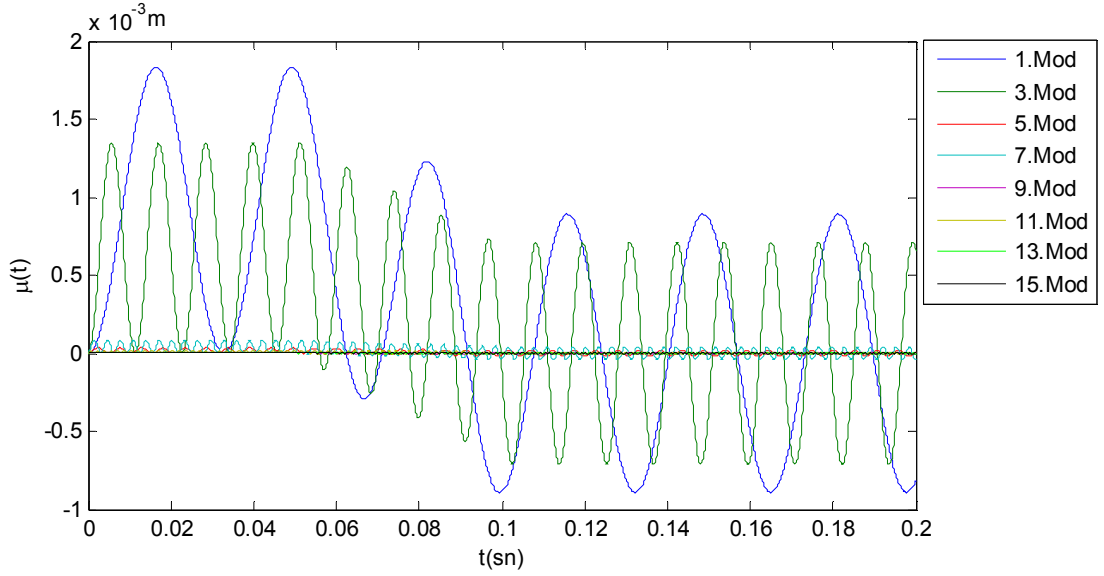
Şekil 6.37 Model 1 için, Z1'in Winkler zemini olarak modellenmesiyle elde edilen normal koordinatlar



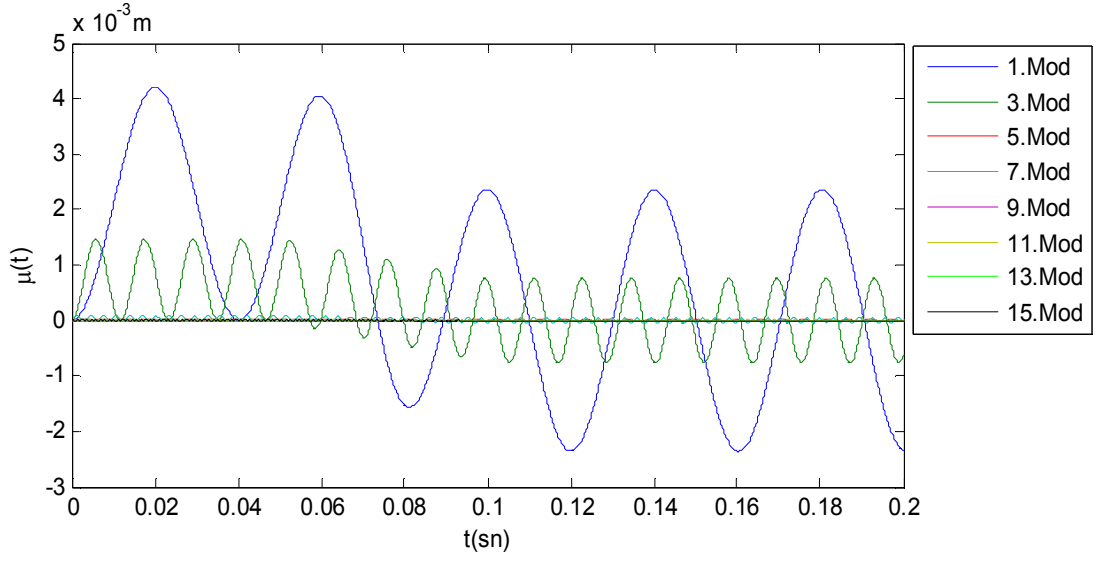
Şekil 6.38 Model 1 için, Z1'in Vlasov zemini olarak modellenmesiyle elde edilen normal koordinatlar



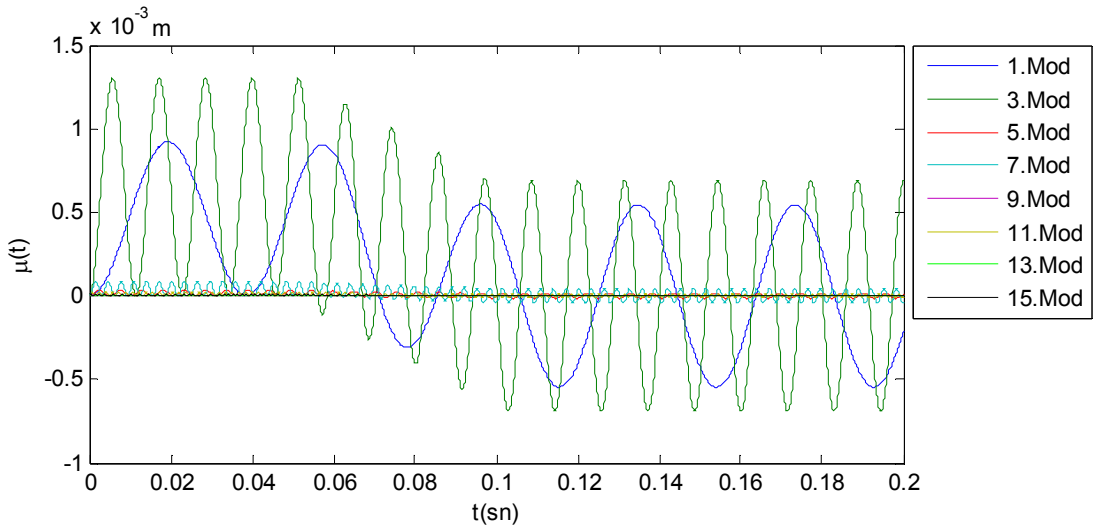
Şekil 6.39 Model 1 için, Z2'nin Winkler zemini olarak modellenmesiyle elde edilen normal koordinatlar



Şekil 6.40 Model 1 için, Z2'nin Vlasov zemini olarak modellenmesiyle elde edilen normal koordinatlar

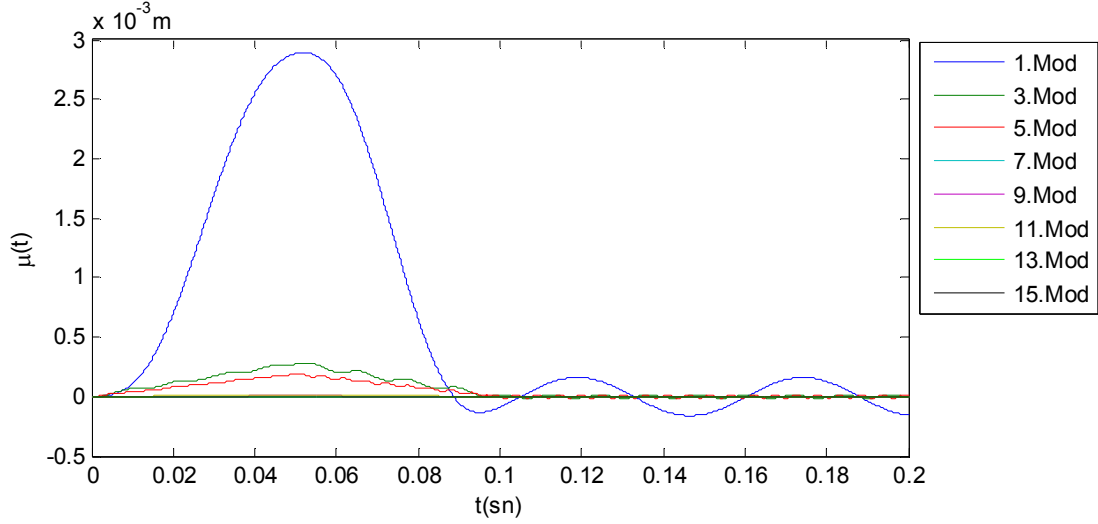


Şekil 6.41 Model 1 için, Z3'ün Winkler zemini olarak modellenmesiyle elde edilen normal koordinatlar

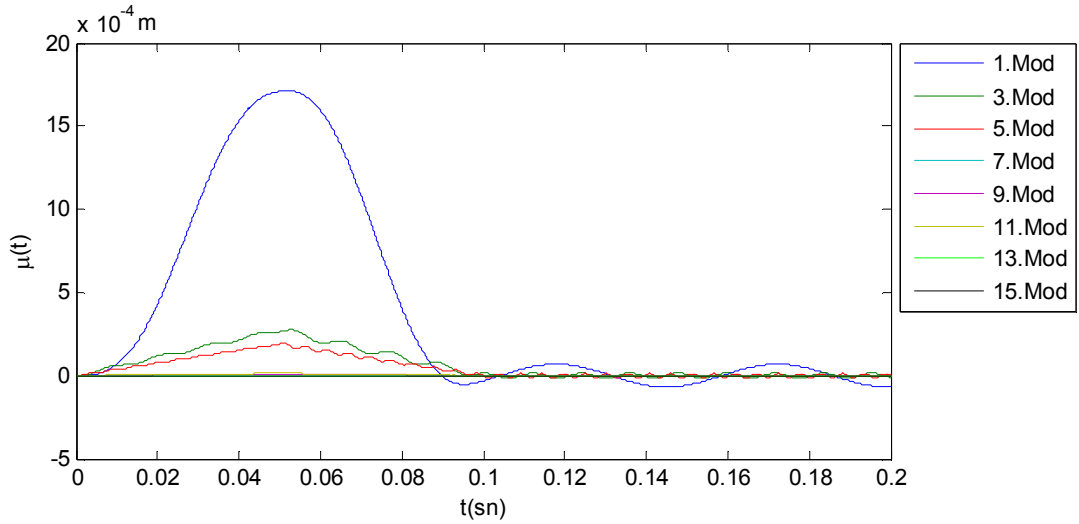


Şekil 6.42 Model 1 için, Z3'ün Vlasov zemini olarak modellenmesiyle elde edilen normal koordinatlar

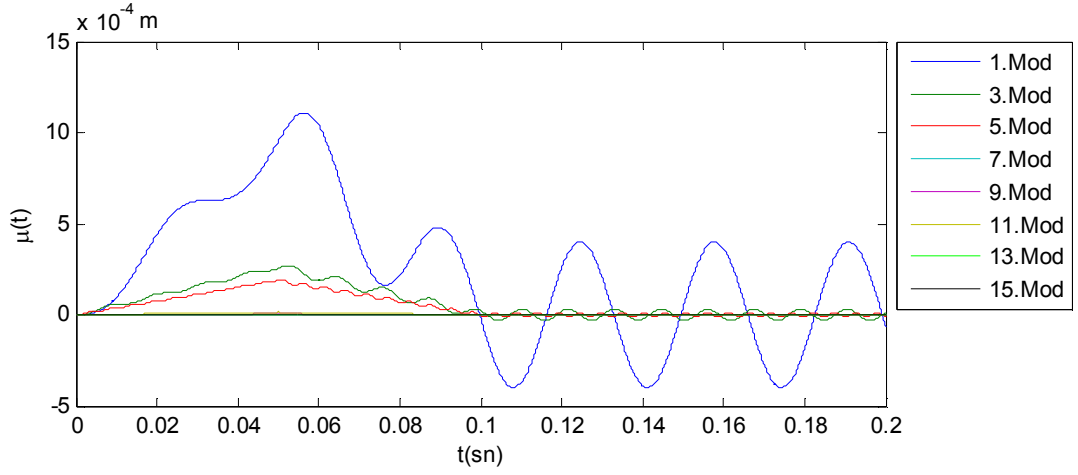
Model 2'nin, akış diyagramı Ek-3'de verilen bilgisayar programı yardımıyla elde edilen, ilk on beş titreşim moduna ait normal koordinatlarının zamana göre değişimi, Şekil 6.43, 6.44, 6.45, 6.46, 6.47 ve 6.48'de sunulmuştur.



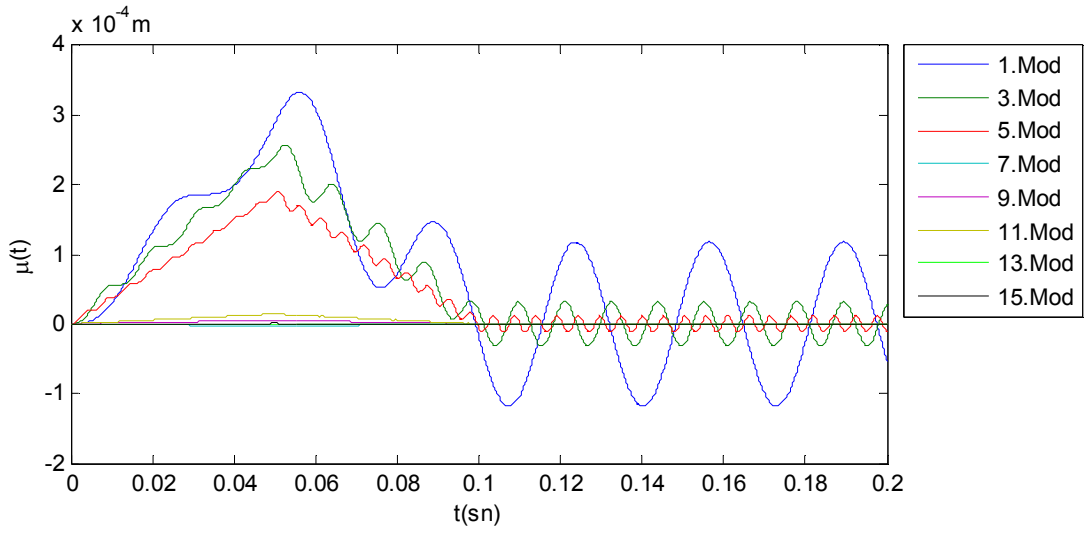
Şekil 6.43 Model 2 için, Z1'in Winkler zemini olarak modellenmesiyle elde edilen normal koordinatlar



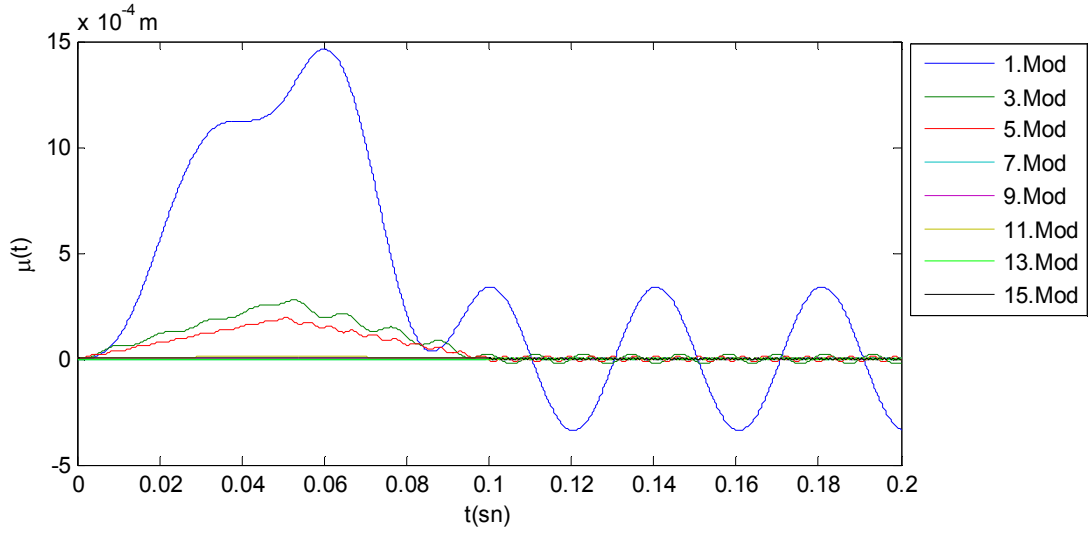
Şekil 6.44 Model 2 için, Z1'in Vlasov zemini olarak modellenmesiyle elde edilen normal koordinatlar



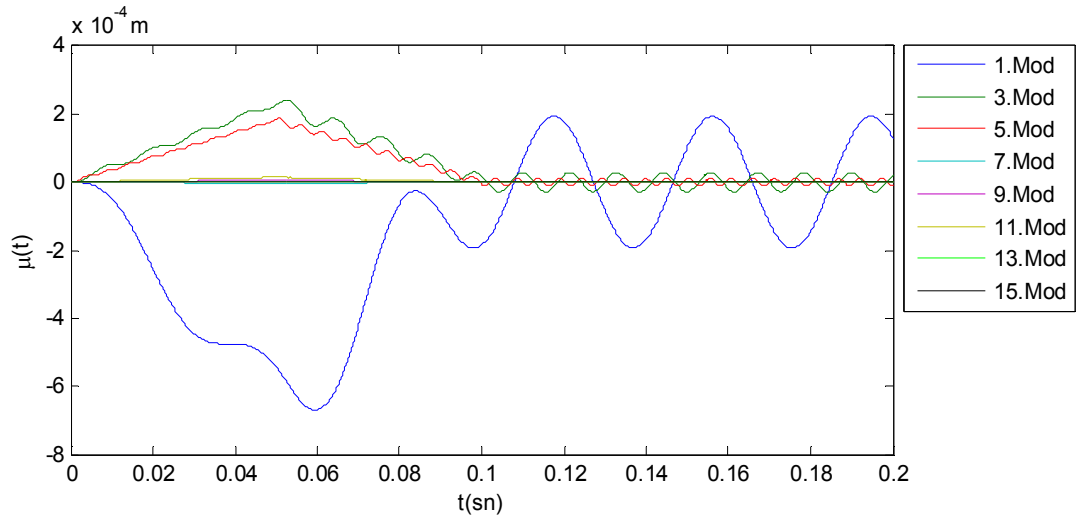
Şekil 6.45 Model 2 için, Z2'nin Winkler zemini olarak modellenmesiyle elde edilen normal koordinatlar



Şekil 6.46 Model 2 için, Z2'nin Vlasov zemini olarak modellenmesiyle elde edilen normal koordinatlar



Şekil 6.47 Model 2 için, Z3'ün Winkler zemini olarak modellenmesiyle elde edilen normal koordinatlar



Şekil 6.48 Model 2 için, Z3'ün Vlasov zemini olarak modellenmesiyle elde edilen normal koordinatlar

Model 1'in, denklem (6.4), (6.5) ve (6.6) kullanılarak elde edilen, ilk on beş moduna ait normal koordinatlarının maksimum değerleri aşağıdaki Tablo 6.14'de sunulmuştur.

Tablo 6.14 Model-1 için elde edilen maksimum normal koordinat değerleri

Mod Sayısı	Maksimum Normal Koordinat Değerleri $\mu_{maks} (\times 10^3 m)$					
	Z1		Z2		Z3	
	Winkler	Vlasov	Winkler	Vlasov	Winkler	Vlasov
1	7,8895	6,2255	2,8543	1,8310	4,2043	0,9206
2	0	0	0	0	0	0
3	1,5189	1,4844	1,4052	1,3474	1,4601	1,3029
4	0	0	0	0	0	0
5	0,0361	0,0353	0,0355	0,0340	0,0358	0,0319
6	0	0	0	0	0	0
7	0,0869	0,0867	0,0864	0,0860	0,0866	0,0855
8	0	0	0	0	0	0
9	0,0031	0,0031	0,0031	0,0031	0,0031	0,0032
10	0	0	0	0	0	0
11	0,0197	0,0198	0,0196	0,0198	0,0196	0,0202
12	0	0	0	0	0	0
13	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0004
14	0	0	0	0	0	0
15	0,0075	0,0076	0,0075	0,0076	0,0075	0,0079

Model 2'nin, denklem (6.9), (6.10) ve (6.11) kullanılarak elde edilen, ilk on beş moduna ait normal koordinatlarının maksimum değerleri aşağıdaki Tablo 6.15'de sunulmuştur.

Tablo 6.15 Model-2 için elde edilen maksimum normal koordinat değerleri

Mod Sayısı	Maksimum Normal Koordinat Değerleri $\mu_{maks} (\times 10^3 m)$					
	Z1		Z2		Z3	
	Winkler	Vlasov	Winkler	Vlasov	Winkler	Vlasov
1	2,8914	1,7129	1,1082	0,3327	1,4622	-0,6693
2	0	0	0	0	0	0
3	0,2828	0,2750	0,2714	0,2571	0,2772	0,2403
4	0	0	0	0	0	0
5	0,1958	0,1944	0,1932	0,1904	0,1946	0,1871
6	0	0	0	0	0	0
7	-0,0029	-0,0029	-0,0029	-0,0029	-0,0029	-0,0030
8	0	0	0	0	0	0
9	0,0054	0,0055	0,0054	0,0054	0,0054	0,0055
10	0	0	0	0	0	0
11	0,0143	0,0144	0,0143	0,0144	0,0143	0,0147
12	0	0	0	0	0	0
13	-0,0010	-0,0009	-0,0010	-0,0009	-0,0010	-0,0009
14	0	0	0	0	0	0
15	0,0008	0,0009	0,0008	0,0009	0,0008	0,0009

Model 1'in, denklem (6.4), (6.5) ve (6.6) yardımıyla, 1.moduna ait normal koordinat fonksiyonunun maksimum değere ulaştığı $t=t_d$ anında elde edilen normal koordinat değerleri, Tablo 6.16'da sunulmuştur.

Tablo 6.16 Model-1 için, $t=t_d$ anında elde edilen normal koordinat değerleri

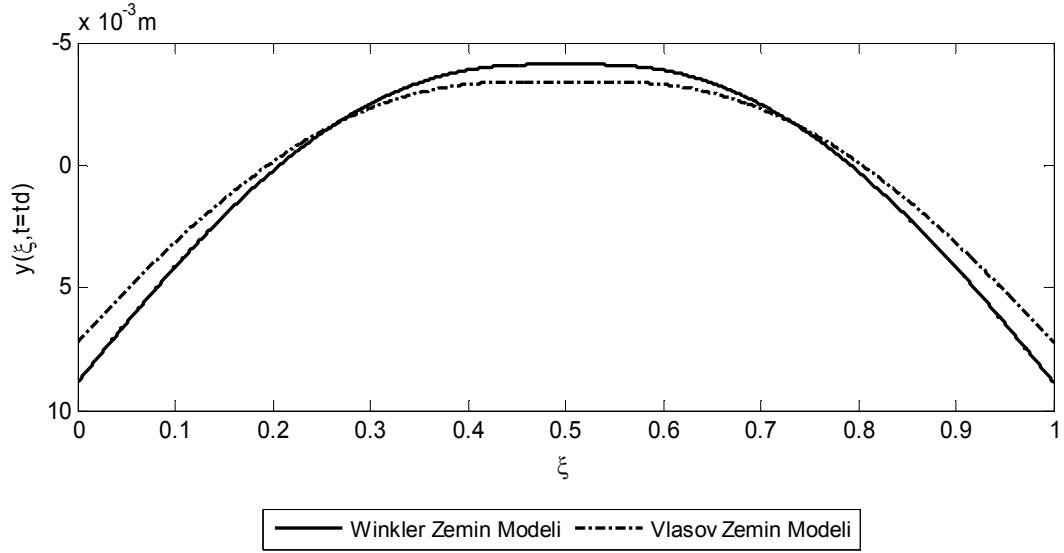
Mod Sayısı	$\mu(t = td)$ ($\times 10^3 m$)					
	Z1		Z2		Z3	
	Winkler	Vlasov	Winkler	Vlasov	Winkler	Vlasov
1	7,8895	6,2255	2,8543	1,8310	4,2043	0,8911
2	0	0	0	0	0	0
3	0,8589	0,8898	1,3769	1,3330	0,8390	1,3029
4	0	0	0	0	0	0
5	0,0059	0,0064	0,0109	0,0114	0,0083	0,0187
6	0	0	0	0	0	0
7	0,0709	0,0697	0,0661	0,0670	0,0845	0,0850
8	0	0	0	0	0	0
9	0,0031	0,0031	0,0018	0,0018	0,0023	0,0003
10	0	0	0	0	0	0
11	0,0186	0,0189	0,0080	0,0077	0,0160	0,0196
12	0	0	0	0	0	0
13	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0003	0,0000
14	0	0	0	0	0	0
15	0,0009	0,0011	0,0058	0,0056	0,0073	0,0059

Model 2'nin, denklem (6.9), (6.10) ve (6.11) yardımıyla, 1.moduna ait normal koordinat fonksiyonunun maksimum değere ulaştığı $t=t_d$ anında elde edilen normal koordinat değerleri, Tablo 6.17'de sunulmuştur.

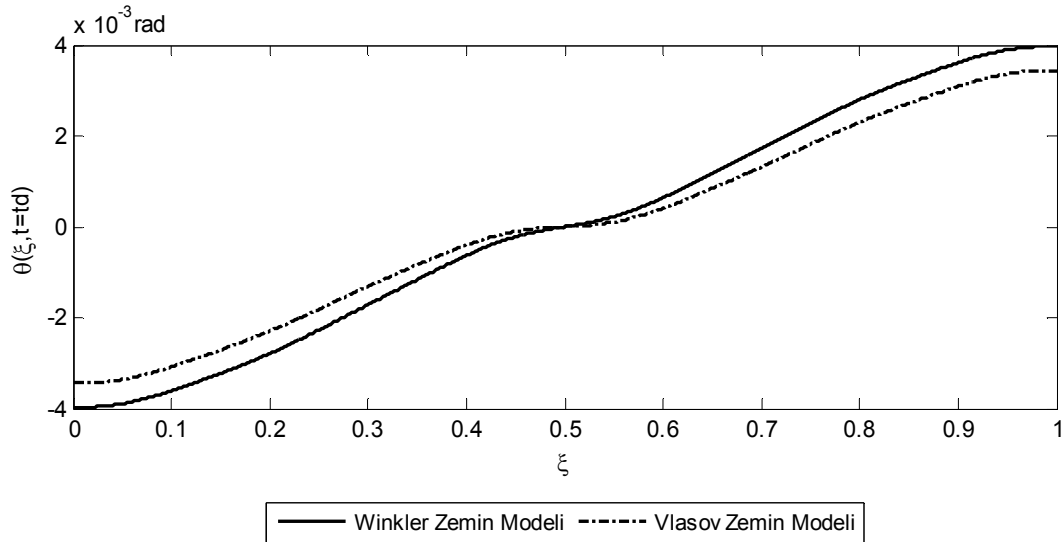
Tablo 6.17 Model-2 için, $t=t_d$ anında elde edilen normal koordinat değerleri

Mod Sayısı	$\mu(t = t_d)$ ($\times 10^3 m$)					
	Z1		Z2		Z3	
	Winkler	Vlasov	Winkler	Vlasov	Winkler	Vlasov
1	2,8914	1,7129	1,1082	0,3327	1,4622	-0,6693
2	0	0	0	0	0	0
3	0,2814	0,2726	0,2261	0,2141	0,1939	0,1641
4	0	0	0	0	0	0
5	0,1892	0,1898	0,1733	0,1710	0,1461	0,1406
6	0	0	0	0	0	0
7	-0,0027	-0,0028	-0,0025	-0,0026	-0,0023	-0,0025
8	0	0	0	0	0	0
9	0,0052	0,0052	0,0047	0,0047	0,0043	0,0045
10	0	0	0	0	0	0
11	0,0138	0,0139	0,0123	0,0123	0,0115	0,0116
12	0	0	0	0	0	0
13	-0,0009	-0,0009	-0,0008	-0,0008	-0,0008	-0,0007
14	0	0	0	0	0	0
15	0,0008	0,0008	0,0007	0,0008	0,0007	0,0007

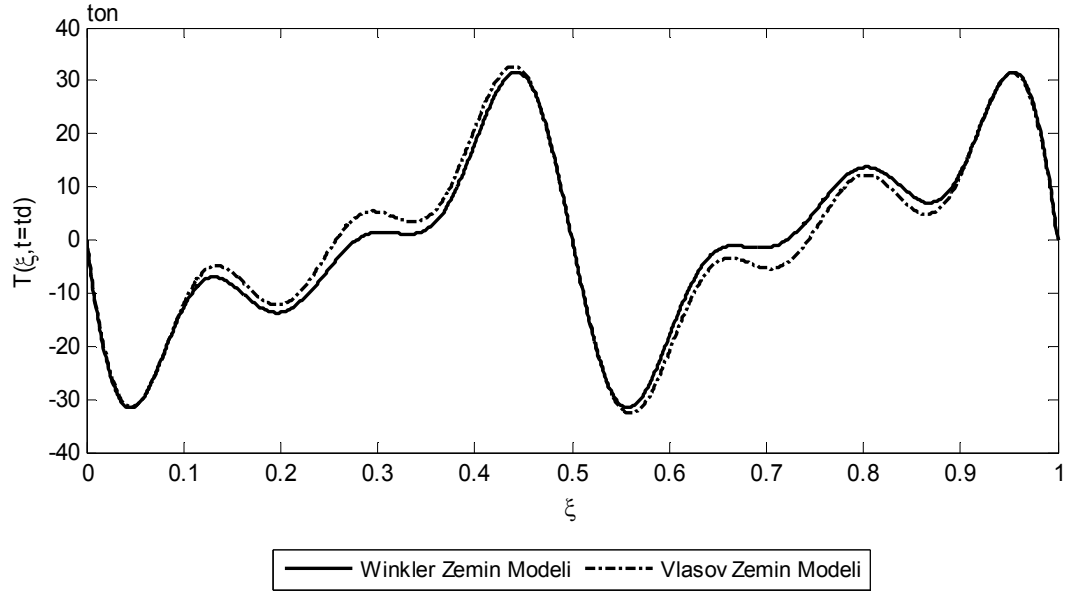
Model 1'in, akış diyagramı Ek-3'de verilen bilgisayar programı kullanılarak, 1. Moduna ait normal koordinat fonksiyonunun maksimum değere ulaştığı $t=t_d$ anında elde edilen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, Şekil 6.49, 6.50, 6.51, 6.52, 6.53, 6.54, 6.55, 6.56, 6.57, 6.58, 6.59 ve 6.60'da sunulmuştur.



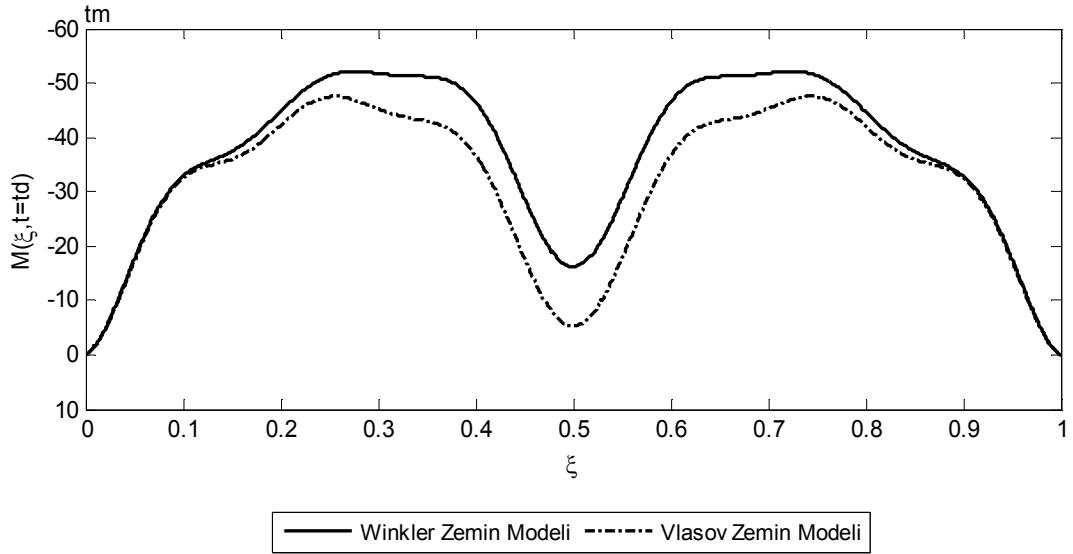
Şekil 6.49 Model 1'in, Z1 zemini için edilen deplasman diyagramı



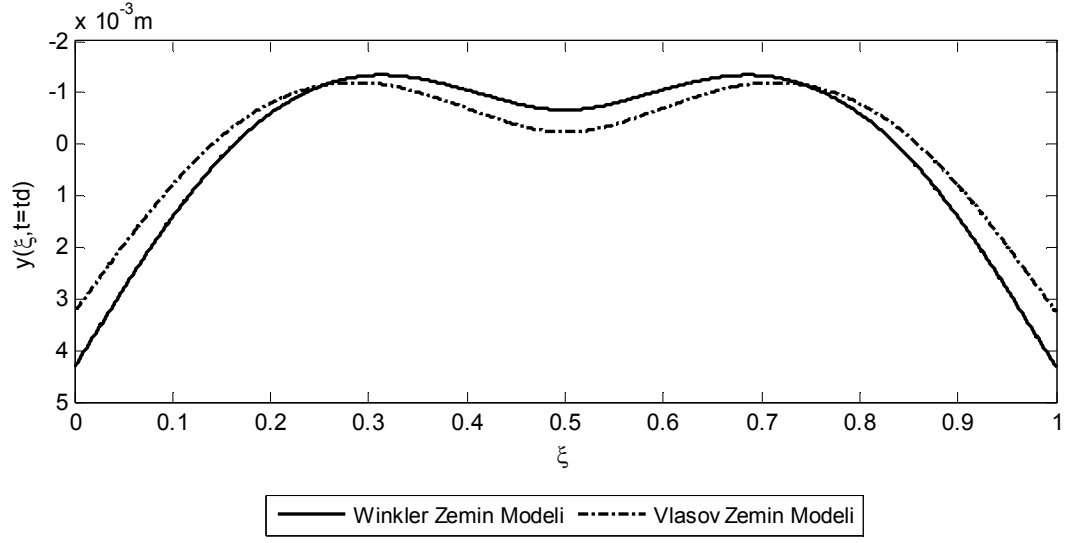
Şekil 6.50 Model 1'in, Z1 zemini için edilen kesit dönmesi diyagramı



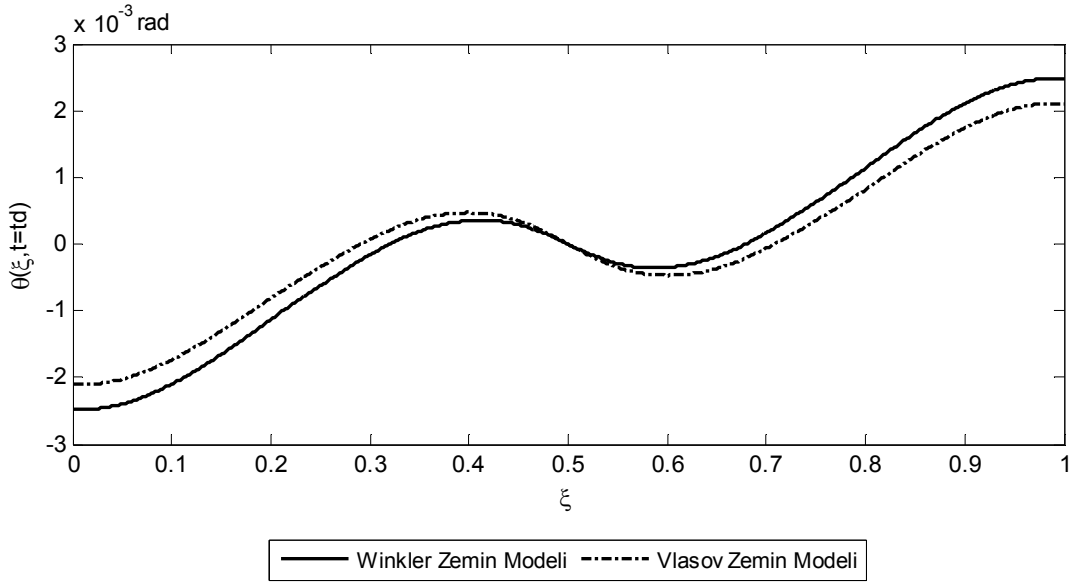
Şekil 6.51 Model 1'in, Z1 zemini için edilen kesme kuvveti diyagramı



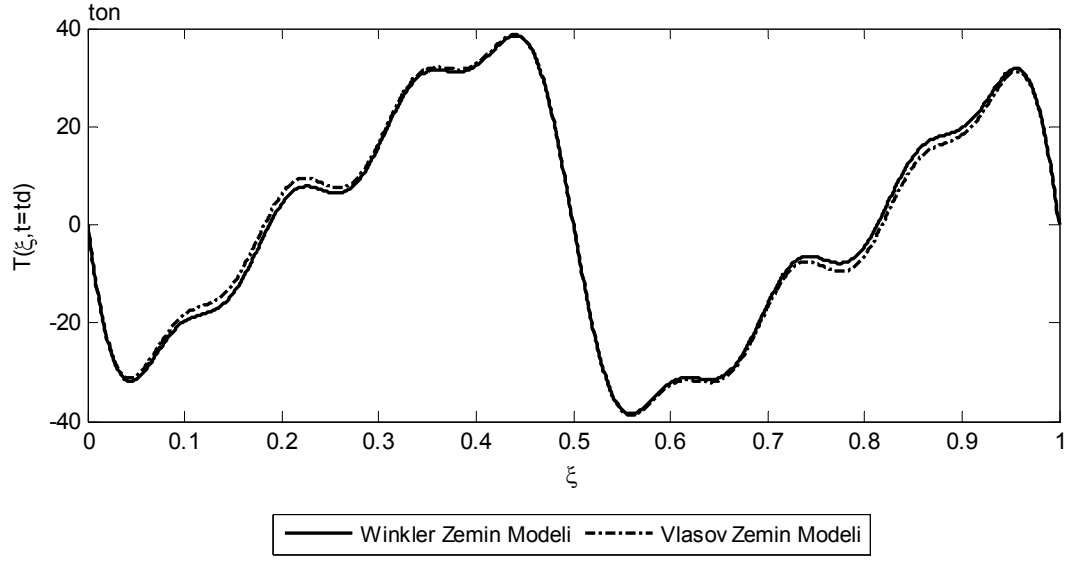
Şekil 6.52 Model 1'in, Z1 zemini için edilen moment diyagramı



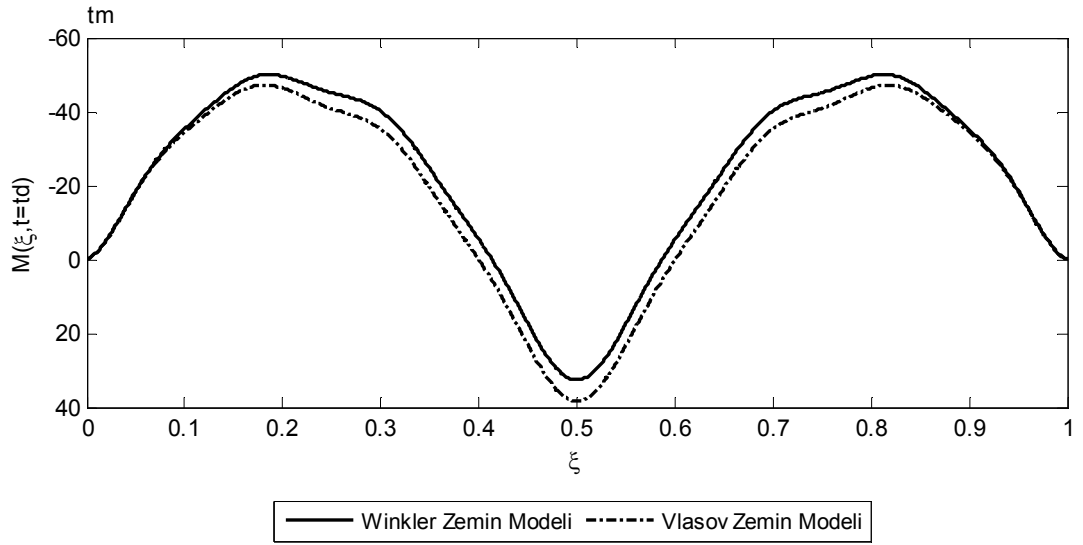
Şekil 6.53 Model 1'in, Z2 zemini için edilen deplasman diyagramı



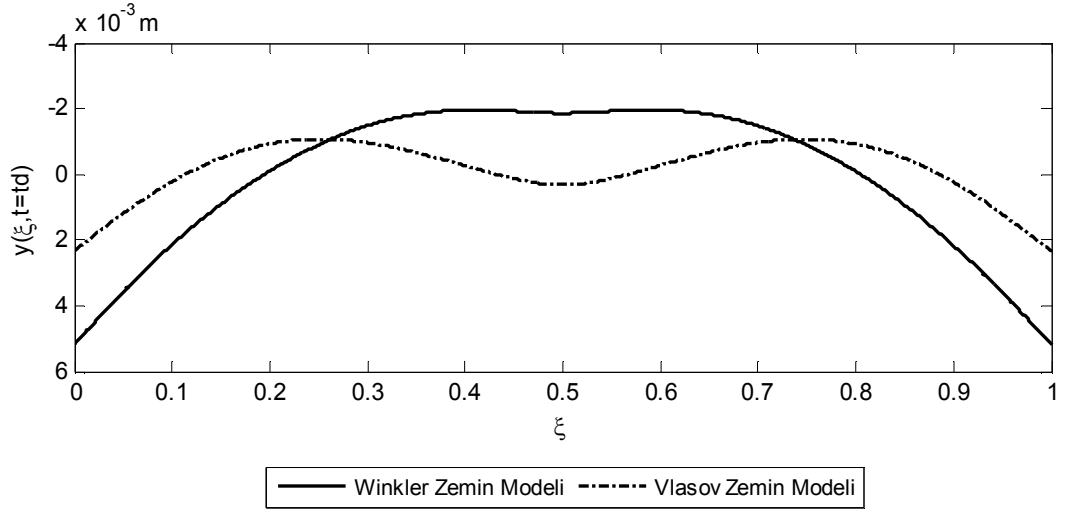
Şekil 6.54 Model 1'in, Z2 zemini için edilen kesit dönmesi diyagramı



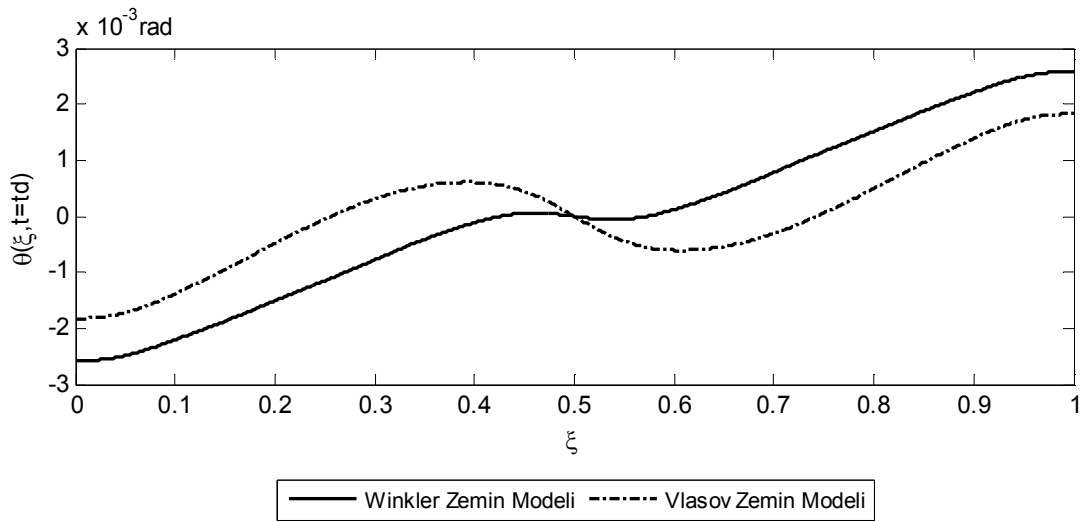
Şekil 6.55 Model 1'in, Z2 zemini için edilen kesme kuvveti diyagramı



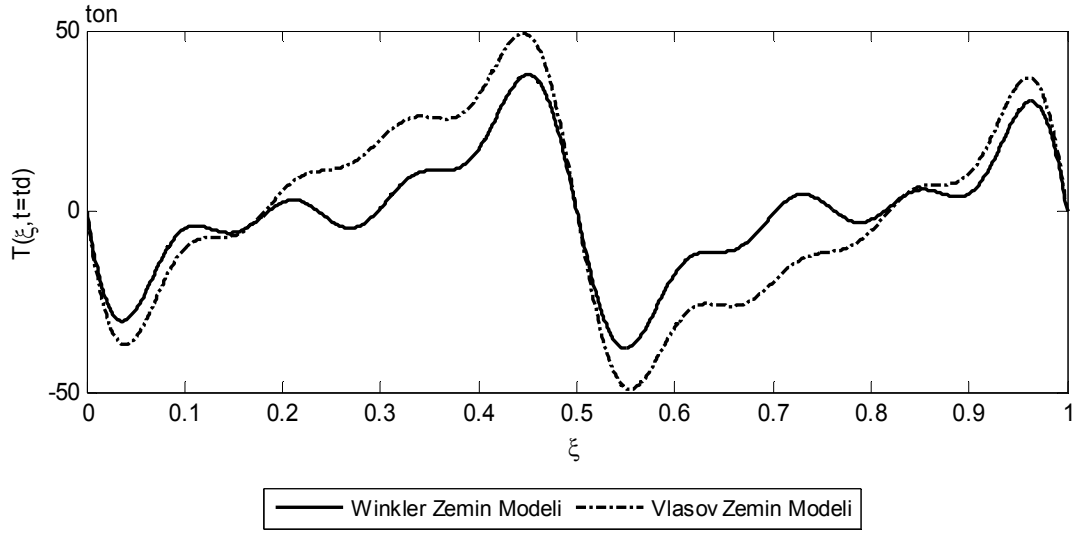
Şekil 6.56 Model 1'in, Z2 zemini için edilen moment diyagramı



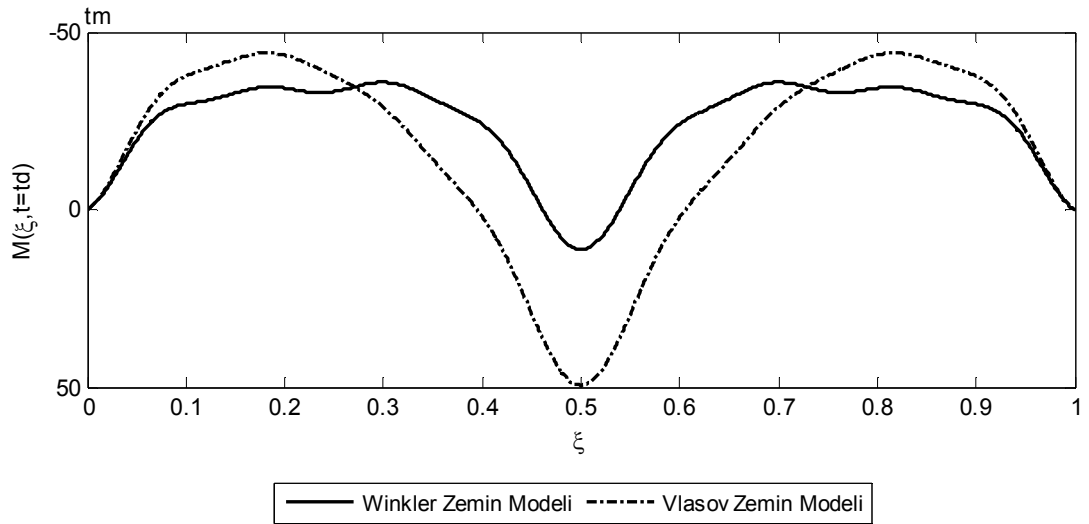
Şekil 6.57 Model 1'in, Z3 zemini için edilen deplasman diyagramı



Şekil 6.58 Model 1'in, Z3 zemini için edilen kesit dönmesi diyagramı

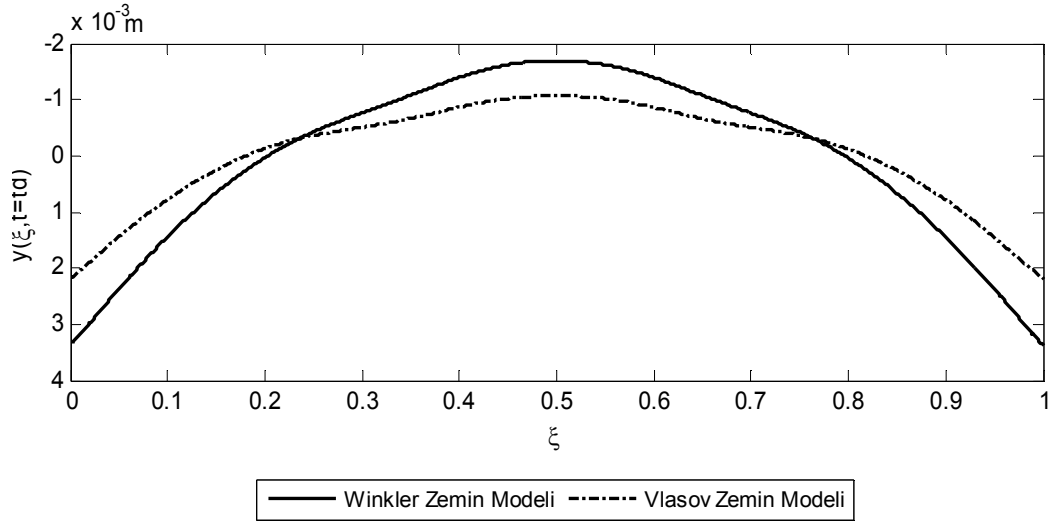


Şekil 6.59 Model 1'in, Z3 zemini için elde edilen kesme kuvveti diyagramı

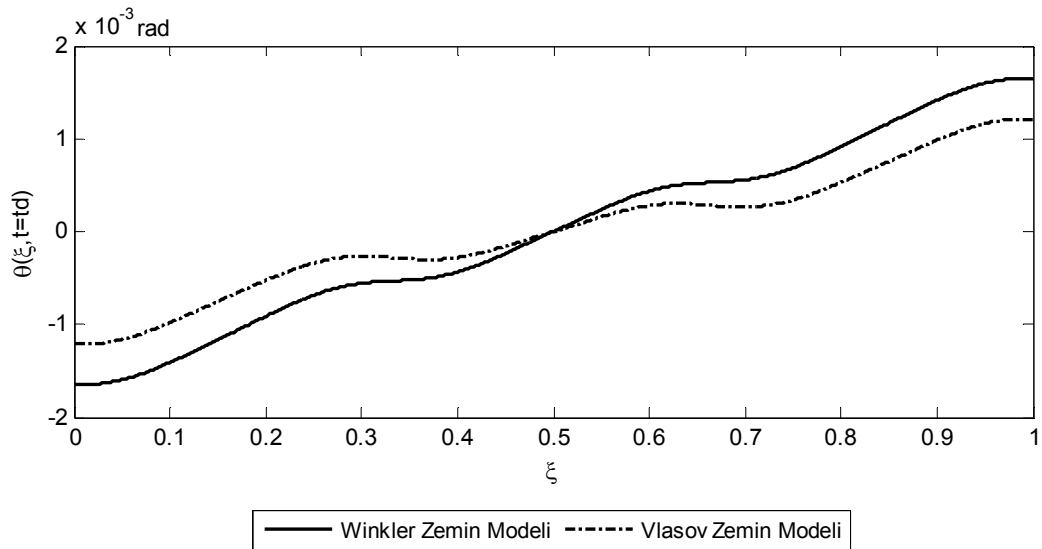


Şekil 6.60 Model 1'in, Z3 zemini için elde edilen eğilme momenti diyagramı

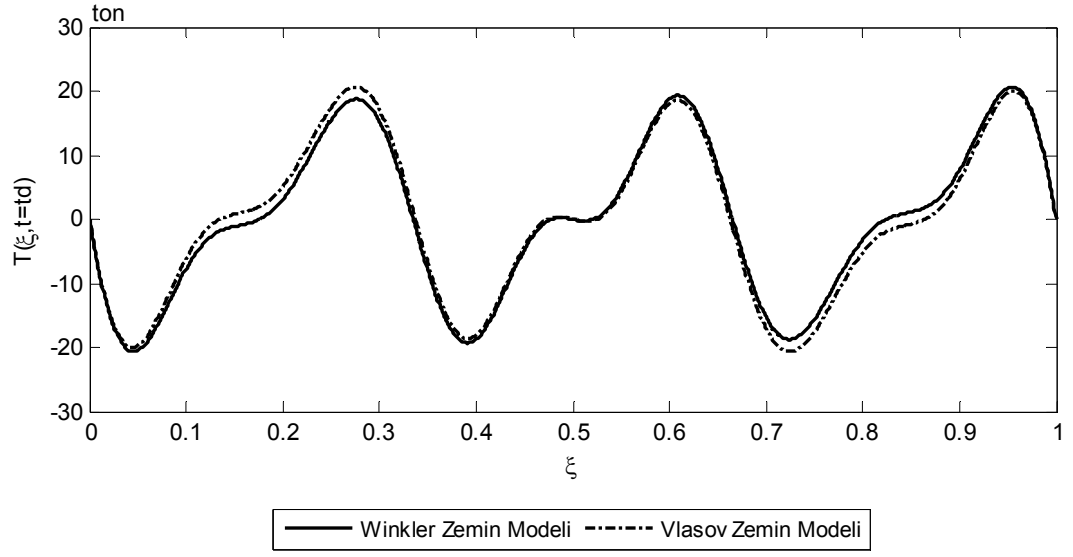
Model 2'nin, akış diyagramı Ek-3'de verilen bilgisayar programı kullanılarak, 2. Moduna ait normal koordinat fonksiyonunun maksimum değere ulaştığı $t=t_d$ anında elde edilen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, şekil 6.61, 6.62, 6.63, 6.64, 6.65, 6.66, 6.67, 6.68, 6.69, 6.70, 6.71 ve 6.72'de sunulmuştur.



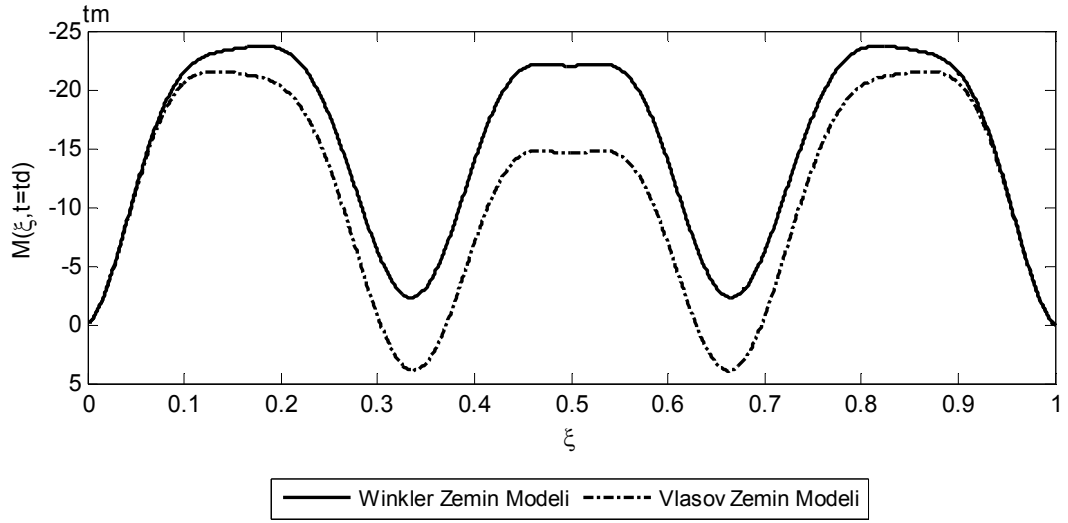
Şekil 6.61 Model 2'nin, Z1 zemini için elde edilen deplasman diyagramı



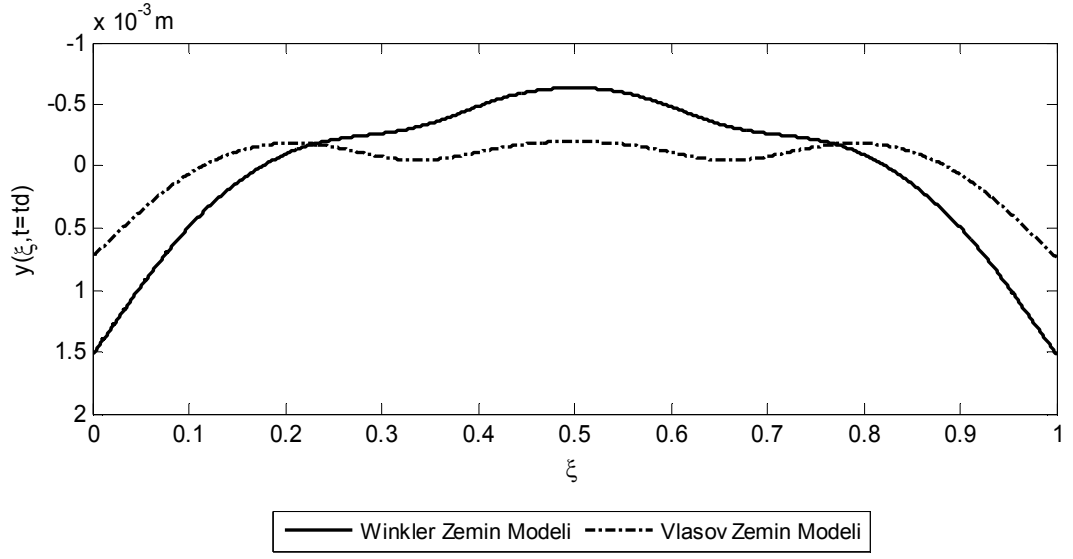
Şekil 6.62 Model 2'nin, Z1 zemini için elde edilen kesit dönmesi diyagramı



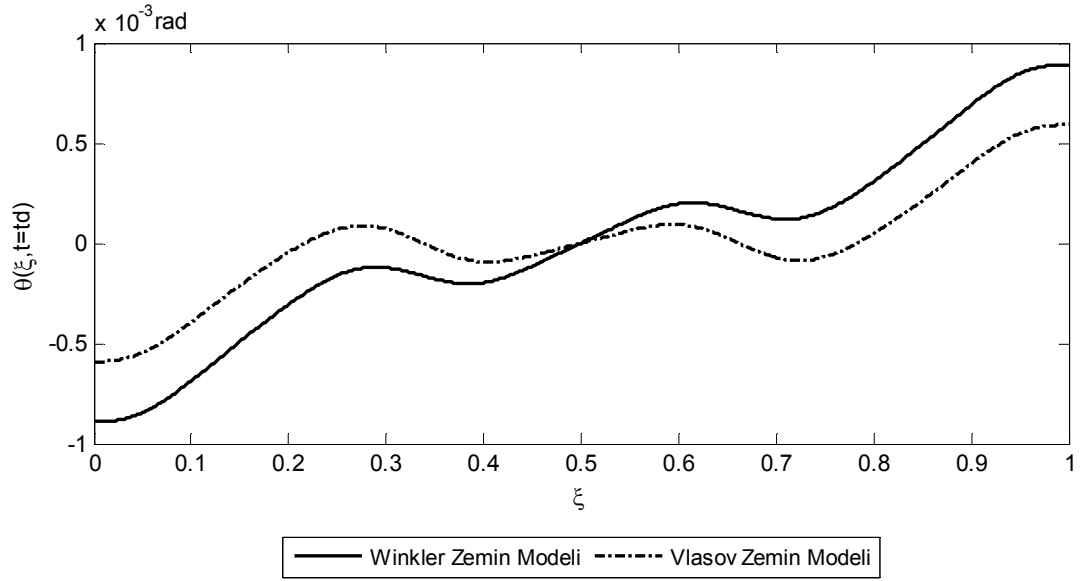
Şekil 6.63 Model 2'nin, Z1 zemini için elde edilen kesme kuvveti diyagramı



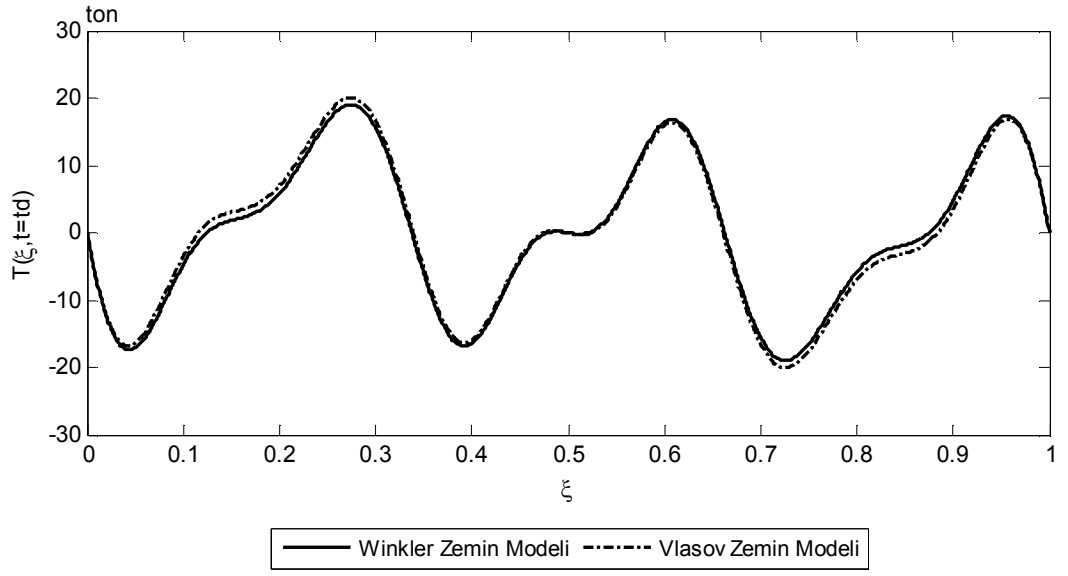
Şekil 6.64 Model 2'nin, Z1 zemini için elde edilen eğilme momenti diyagramı



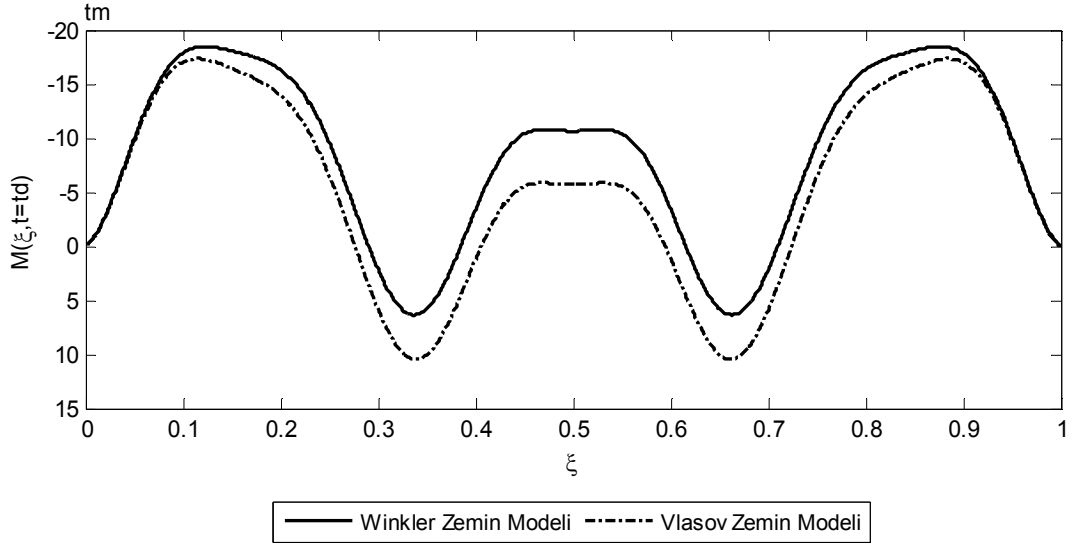
Şekil 6.65 Model 2'nin, Z2 zemini için elde edilen deplasman diyagramı



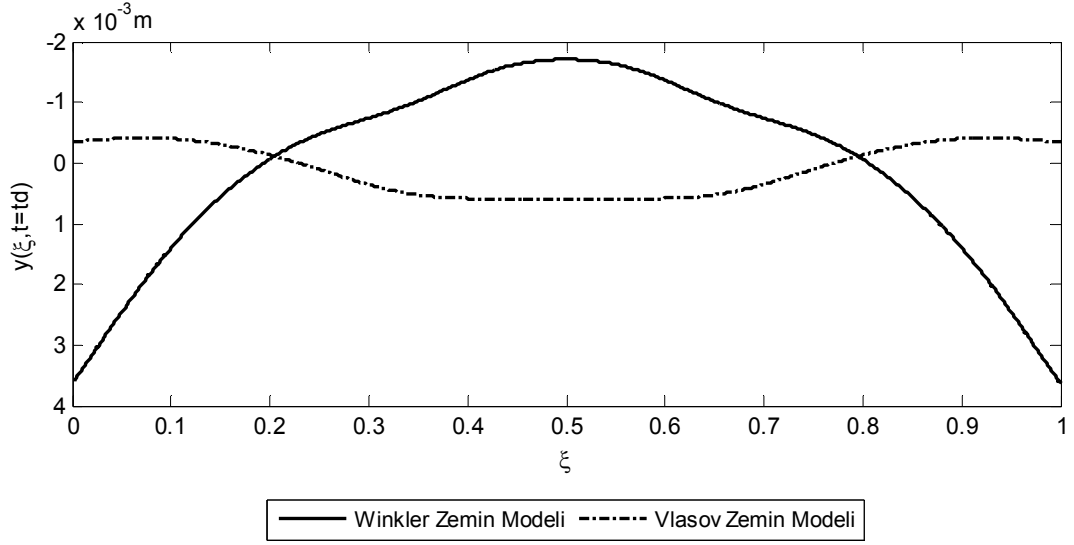
Şekil 6.66 Model 2'nin, Z2 zemini için elde edilen kesit dönmesi diyagramı



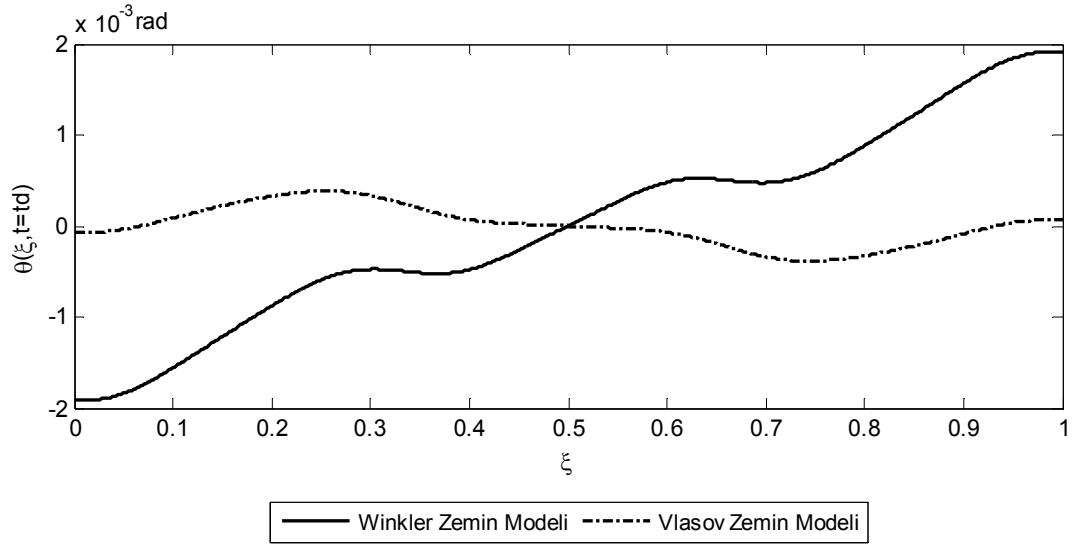
Şekil 6.67 Model 2'nin, Z2 zemini için elde edilen kesme kuvveti diyagramı



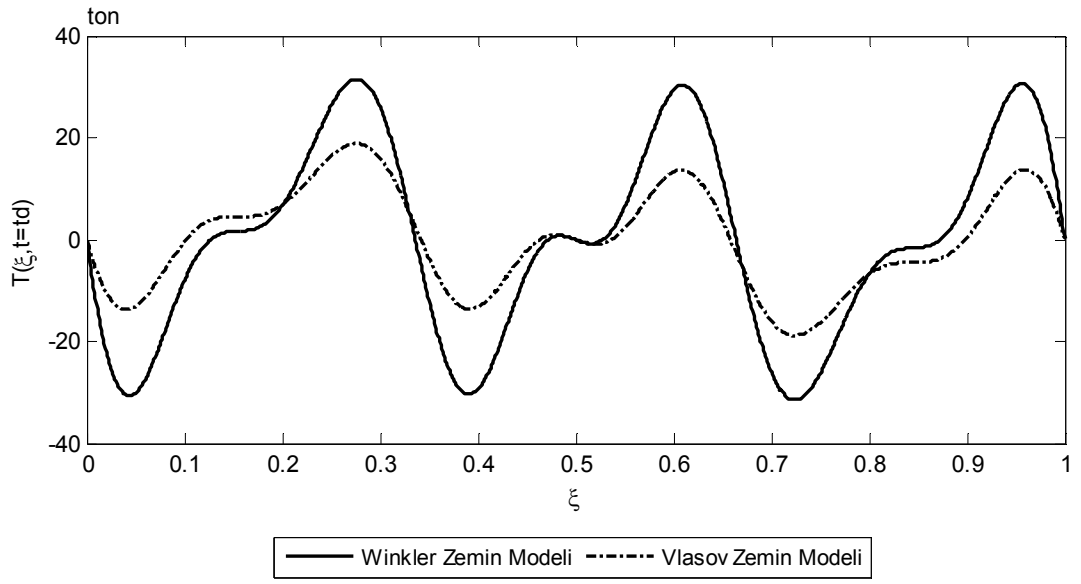
Şekil 6.68 Model 2'nin, Z2 zemini için elde edilen eğilme momenti diyagramı



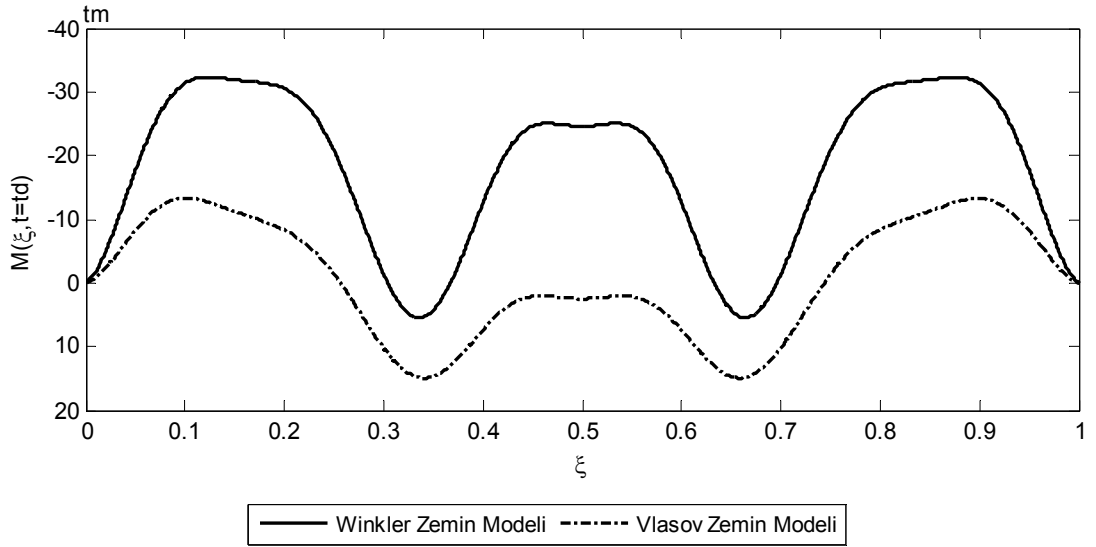
Şekil 6.69 Model 2'nin, Z3 zemini için elde edilen deplasman diyagramı



Şekil 6.70 Model 2'nin, Z3 zemini için elde edilen kesit dönmesi diyagramı



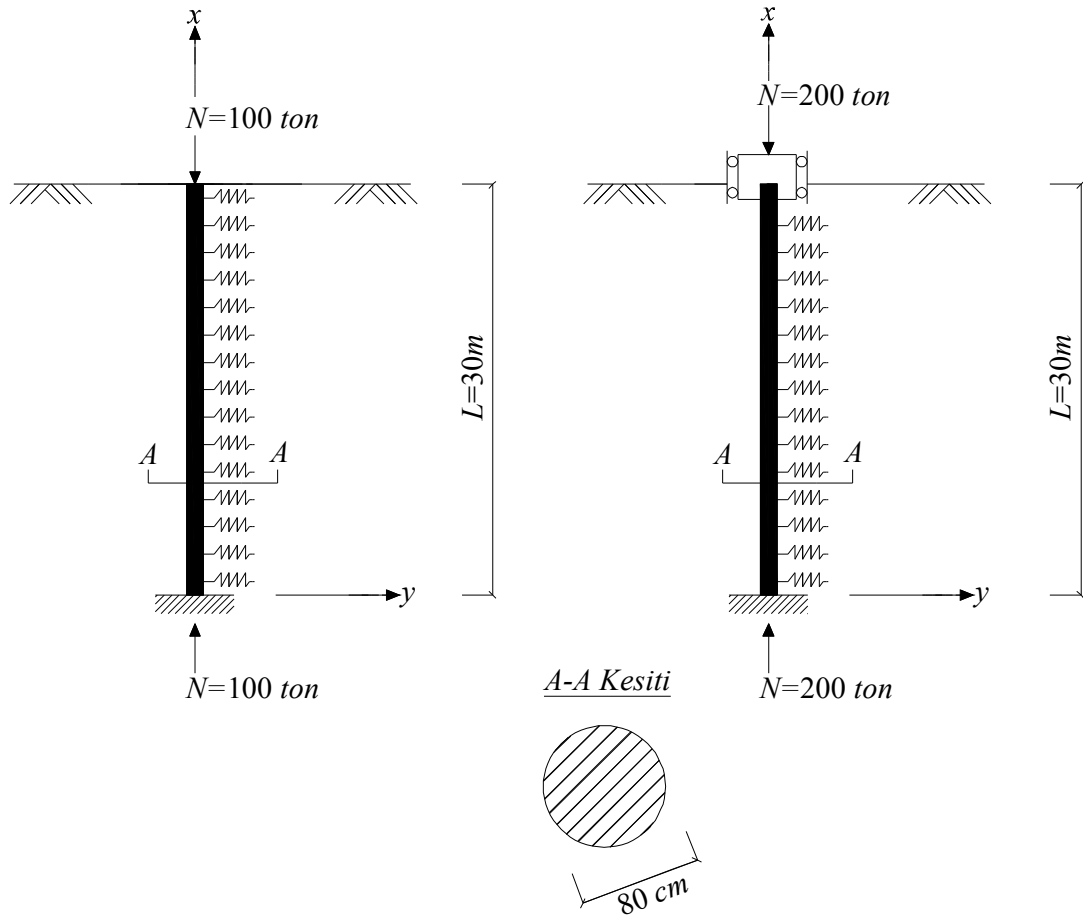
Şekil 6.71 Model 2'nin, Z3 zemini için elde edilen kesme kuvveti diyagramı



Şekil 6.72 Model 2'nin, Z3 zemini için elde edilen eğilme momenti diyagramı

6.3 Sayısal Ugulama 3

Şekil 6.73’de gösterilen, yay katsayısı $C_S=200 \text{ t/m}^2$ olan elastik Winkler zeminine gömülü betonarme kazık; bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest ve bir ucu ankastre, diğer ucu kayıcı ankastre mesnetli olmak üzere iki değişik şekilde modellenmiştir. Betonarme kazığın, deprem ivmesi etkisindeki davranışı; bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest kazık için Elcentro (1940) depremine ait yer ivmesi, bir ucu ankastre ve diğer ucu kayıcı ankastre mesnetli kazık için ise Kocaeli (1999) depremine ait yer ivmesi kullanılarak elde edilmiştir.

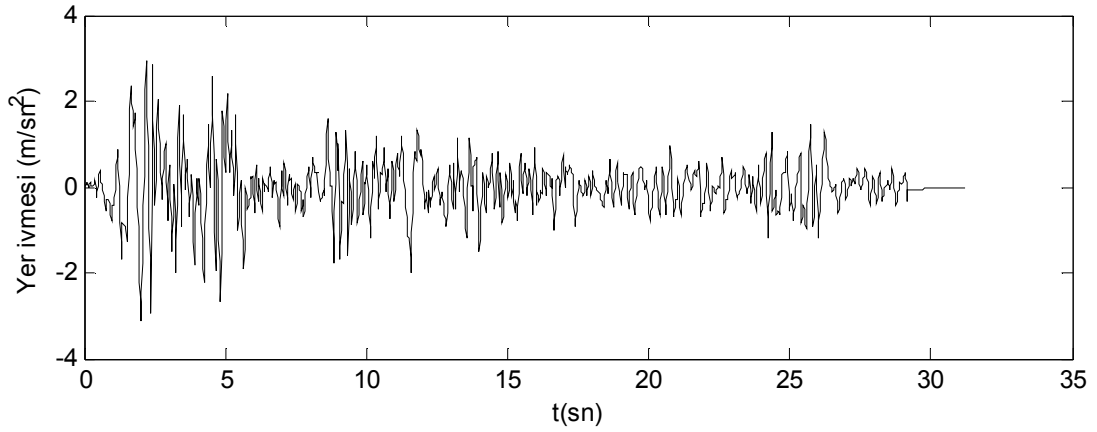


Şekil 6.73 a-) Model 1: Elastik zemine gömülü; bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest betonarme kazık

b-) Model 2: Elastik zemine gömülü, bir ucu ankastre, diğer ucu kayıcı ankastre mesnetli betonarme kazık

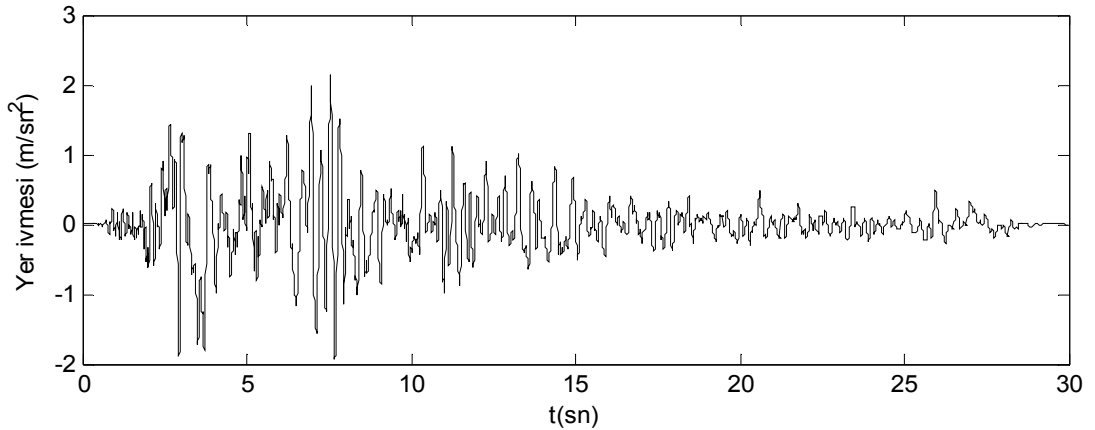
Betonarme kazığın uzunluğu boyunca yayılı olan kütlesi; $m = 0,128ts^2 / m$, kesit alanı; $A = 0,5027m^2$, atalet momenti; $I = 2,01062 \times 10^{-2}m^4$, kazık malzemesinin elastisite modülü; $E = 2,8 \times 10^6 t / m^2$, kayma modülü; $G = 1,1167 \times 10^6 t / m^2$ olarak alınmış, kazık kesitinde maksimum kayma gerilmesini veren şekil faktörü; $\kappa = 0,75$ olarak hesaplanmıştır.

Model 1 için kullanılacak olan, 18 Mayıs 1940 Elcentro depremine ait yer ivmesinin zamana bağlı değişimi, Şekil 6.74’de sunulmuştur(Chopra, 2005).



Şekil 6.74 Model 1 için kullanılacak olan Elcentro(1940) depremine ait ivme-zaman grafiği

Model 2 için kullanılacak olan, 17 Ağustos 1999 Kocaeli depremine ait yer ivmesinin zamana bağlı değişimi, Şekil 6.75’de sunulmuştur(Pasific Earthquake Engineering[PEER], Strong motion database).



Şekil 6.75 Model 2 için kullanılacak olan Kocaeli(1999) depremine ait ivme-zaman grafiği

6.3.1 Serbest Titreşim Analizi

Model 1 ve 2 için, akış diyagramı Ek-2’de verilen bilgisayar programı yardımıyla elde edilen, ilk dokuz moda ait doğal açısal frekans değerleri ve modal katılım oranları, Tablo 6.18 ve 6.19’da sunulmuştur.

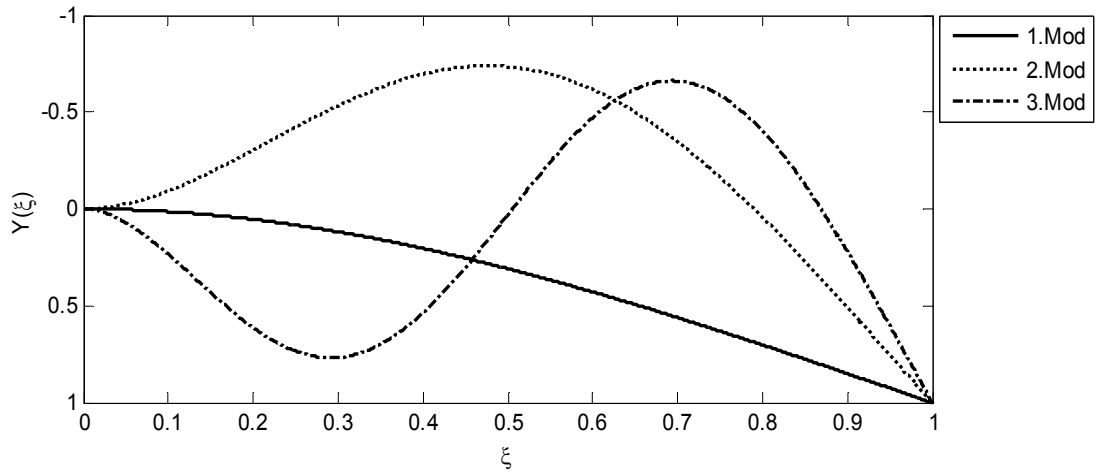
Tablo 6.18 Model 1’in ilk dokuz moduna ait doğal açısal frekans ve modal katılım oranı değerleri

MOD SAYISI	ω_j (rad / sn)	L_j (ts ² / m)	M_j (ts ² / m)	Γ_j
1	39,5554	1,4308	0,8994	1,5908
2	42,3584	-0,8888	0,9941	-0,8940
3	59,4025	0,4997	0,9805	0,5097
4	95,7264	-0,3563	0,9838	-0,3622
5	148,8120	0,2783	0,9986	0,2787
6	216,4668	-0,2292	1,0039	-0,2284
7	297,0372	0,1957	1,0182	0,1922
8	389,5301	-0,1714	1,0347	-0,1657
9	493,0244	0,1530	1,0533	0,1453

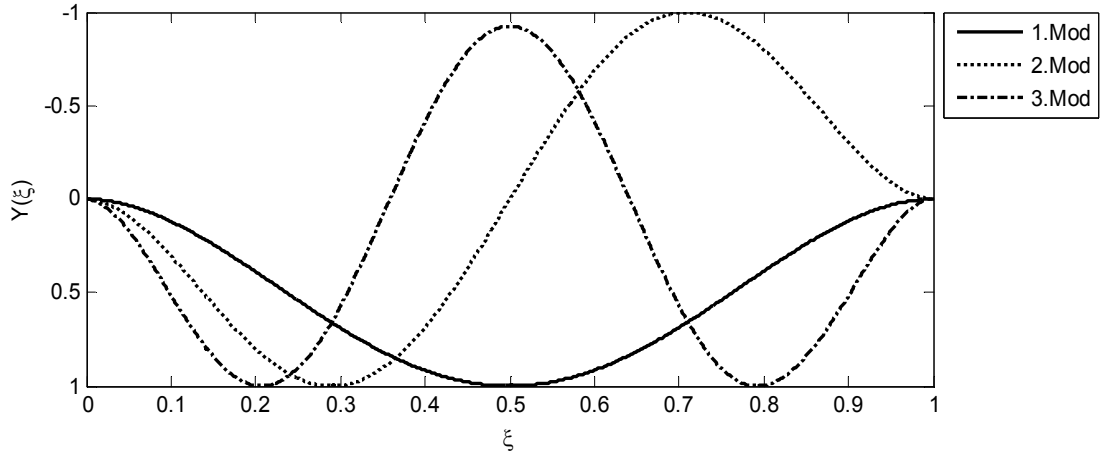
Tablo 6.19 Model 2'nin ilk dokuz moduna ait doğal açısal frekans ve modal katılım oranı değerleri

MOD SAYISI	ω_j (rad / sn)	L_j (ts ² / m)	M_j (ts ² / m)	Γ_j
1	42,5463	2,0053	1,5194	1,3198
2	59,2497	0	1,6911	0
3	95,3352	0,9322	1,6852	0,5532
4	148,2065	0	1,6999	0
5	215,4458	0,5958	1,6939	0,3517
6	295,5784	0	1,6979	0
7	387,5284	0,4398	1,7016	0,2585
8	490,3680	0	1,7051	0
9	603,2359	0,3498	1,7080	0,2048

Model 1 ve 2'nin, ilk üç moduna ait normalize edilmiş deplasman şekil fonksiyonları Şekil 6.76 ve 6.77'de sunulmuştur.



Şekil 6.76 Model 1'in ilk üç moduna ait normalize edilmiş deplasman şekilleri



Şekil 6.77 Model 2'nin ilk üç moduna ait normalize edilmiş deplasman şekilleri

6.3.2 Zorlanmış Titreşim Analizi

Model 1'in, Elcentro (1940) depremine ait yer ivmesi etkisi altında, "Newmark Yöntemi" kullanılarak, akış diyagramı Ek-4'de verilen bilgisayar programı yardımıyla elde edilen maksimum modal ivme, hız ve deplasman değerleri Tablo 6.20'de sunulmuştur.

Tablo 6.20 Model 1'in, Elcentro (1940) depreminden elde edilen maksimum modal değerleri

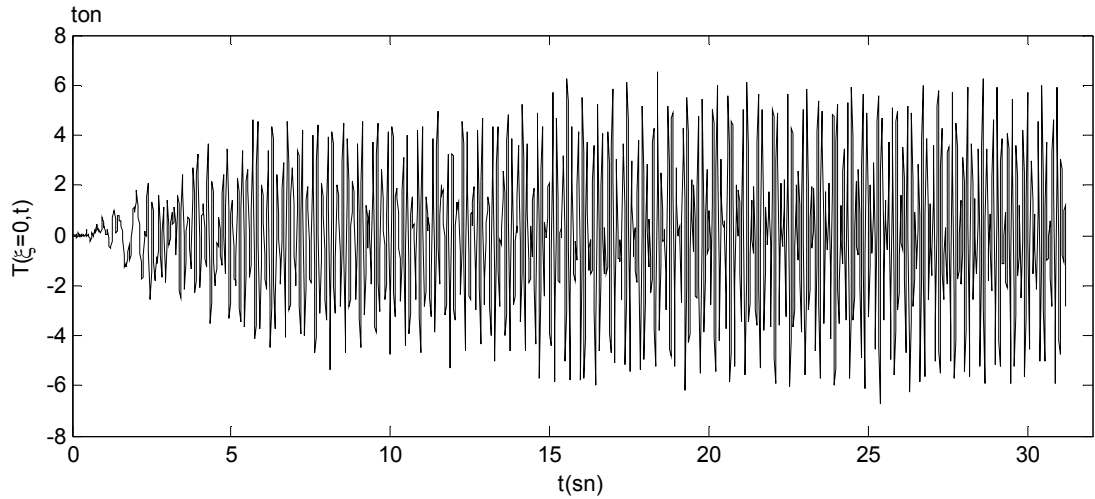
MOD SAYISI	$\ddot{\mu}_{maks}$ (cm^2 / sn)	$\dot{\mu}_{maks}$ (cm / sn)	μ_{maks} (cm)
1	4947,11473	125,38613	-3,18507
2	-2821,86285	-67,17635	-1,59837
3	-1361,94660	-22,82614	0,39080
4	-130,79887	1,44698	-0,01819
5	-152,41258	1,06454	-0,00800
6	-82,70608	-0,38492	-0,00242
7	45,16034	0,15337	-0,00090
8	23,66258	-0,06300	-0,00048
9	-16,10804	-0,03789	-0,00022

Model 1'in, değişik ξ değerleri için, akış diyagramı Ek-4'de verilen bilgisayar programı yardımıyla elde edilen maksimum deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti değerleri, Tablo 6.21'de sunulmuştur.

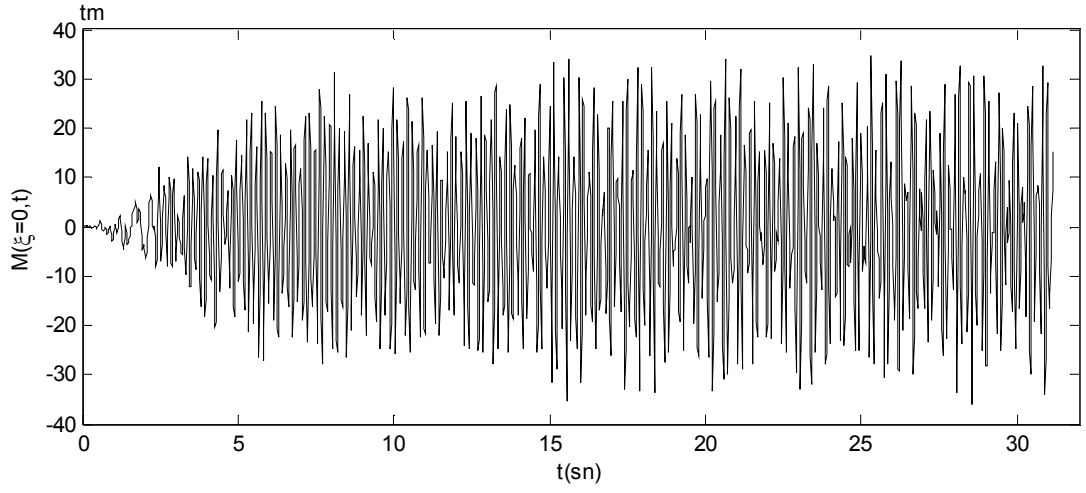
Tablo 6.21 Model-1 için, ξ parametrelerine bağlı olarak elde edilen maksimum iç tesirler

ξ	y_{maks} (m)	θ_{maks} (rad)	T_{maks} (ton)	M_{maks} (tm)
0	0	0	-6,76431	-36,0168
0,25	0,01037449	0,001816	3,862656	-14,1764
0,5	-0,0185504	0,001951	-3,17068	-17,0925
0,75	0,02273914	0,003339	2,094825	19,59891
1	-0,0456659	0,004345	0	0

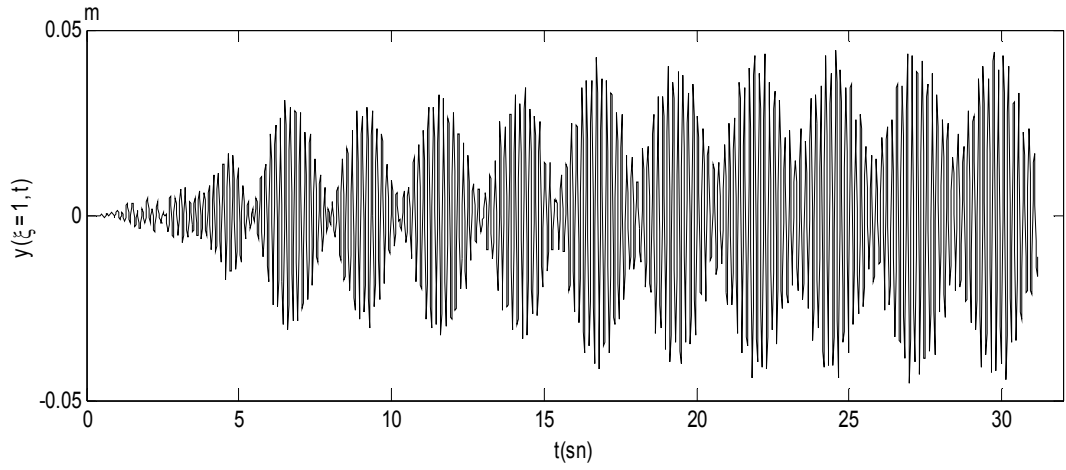
Model-1'in, $\xi = 0$ ve $\xi = 1$ 'de elde edilen kesme kuvveti, eğilme momenti ve deplasman değerlerinin zamana göre değişimi, Şekil 6.78, 6.79, 6.80 ve 6.81'de sunulmuştur.



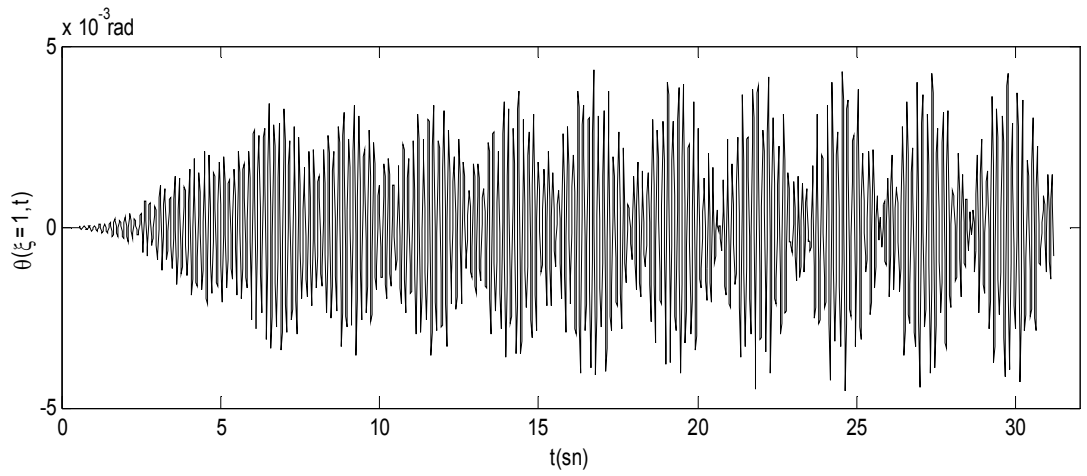
Şekil 6.78 Model 1'in, $\xi = 0$ için elde edilen kesme kuvveti-zaman diyagramı



Şekil 6.79 Model 1'in, $\xi = 0$ için elde edilen eğilme momenti-zaman diyagramı

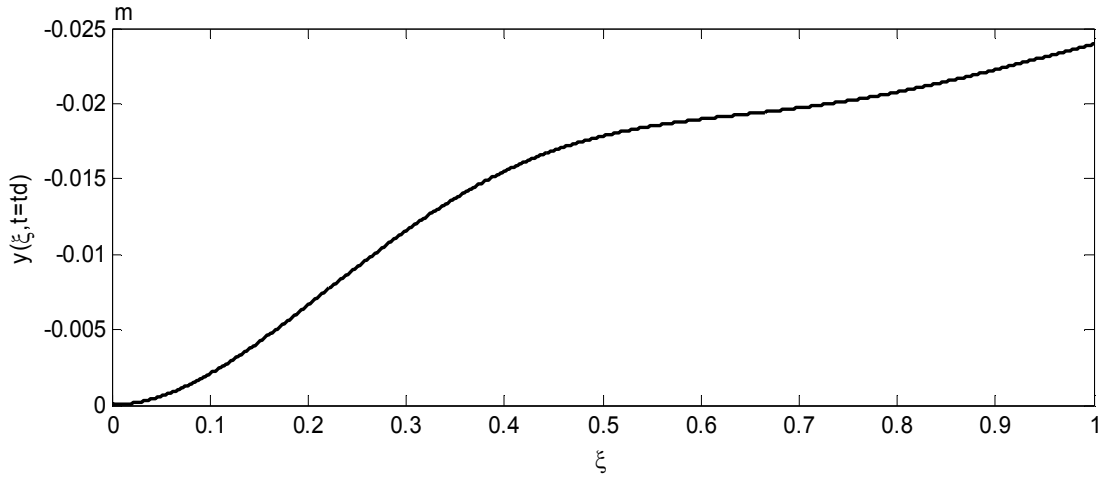


Şekil 6.80 Model 1'in, $\xi = 1$ için elde edilen deplasman-zaman diyagramı

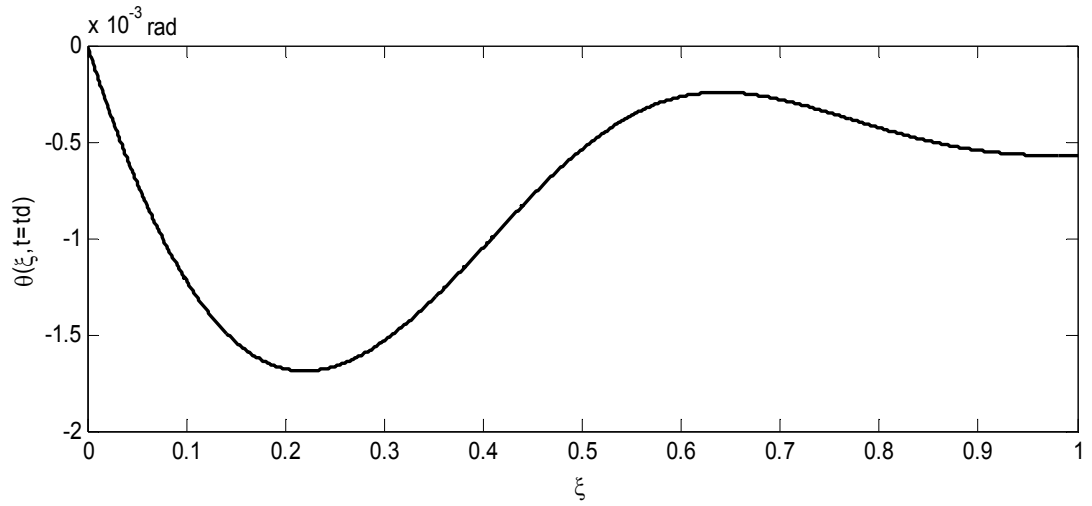


Şekil 6.81 Model 1'in, $\xi = 1$ için elde edilen kesit dönmesi-zaman diyagramı

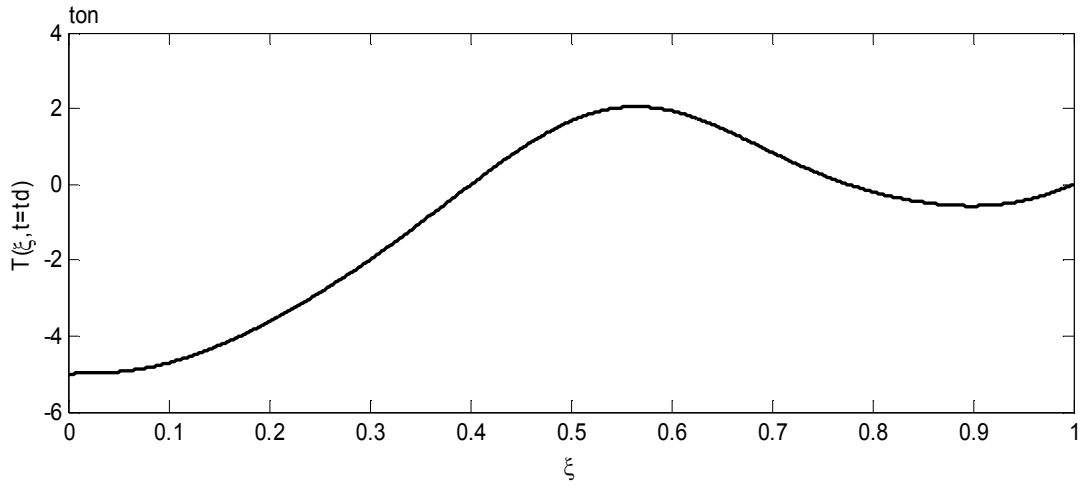
Model 1'in, akış diyagramı Ek-4'de verilen bilgisayar programı yardımıyla, birinci moda ait normal koordinat fonksiyonunun maksimum değere ulaştığı $t=t_d$ anında elde edilen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, Şekil 6.82, 6.83, 6.84 ve 6.85'de sunulmuştur.



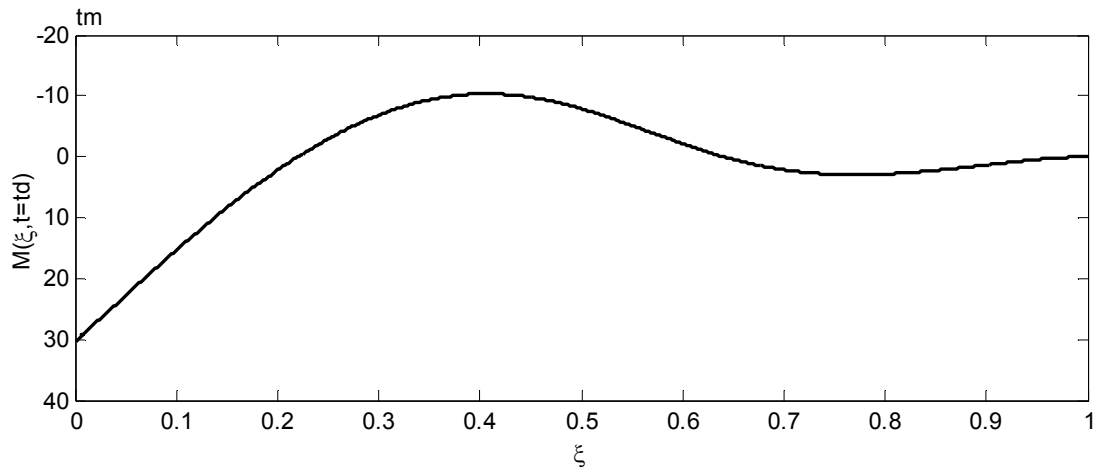
Şekil 6.82 Model 1'in, $t=t_d$ anında elde edilen deplasman diyagramı



Şekil 6.83 Model 1'in, $t=t_d$ anında elde edilen kesit dönmesi diyagramı

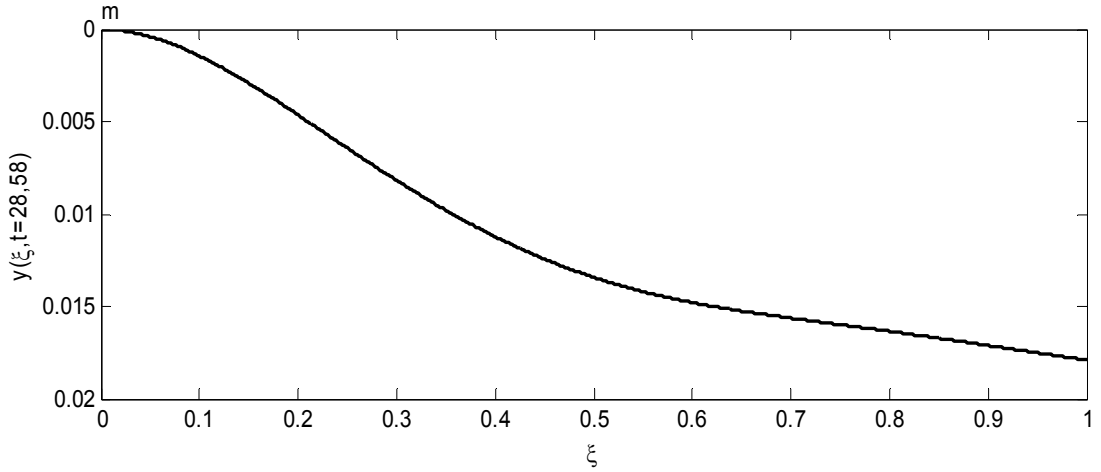


Şekil 6.84 Model 1'in, $t=t_d$ anında elde edilen kesme kuvveti diyagramı

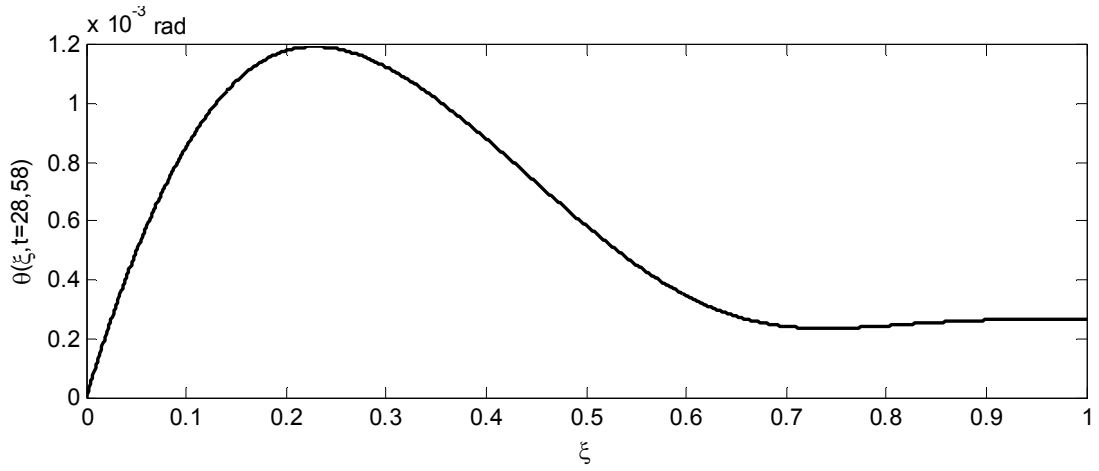


Şekil 6.85 Model 1'in, $t=t_d$ anında elde edilen eğilme momenti diyagramı

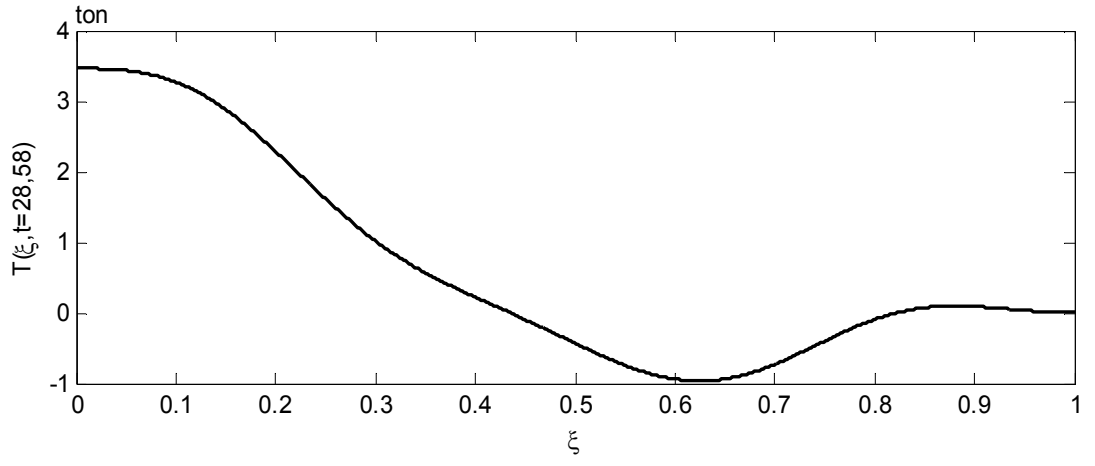
Model 1'in, akış diyagramı Ek-4'de verilen bilgisayar programı yardımıyla, $\xi = 0$ 'da maksimum eğilme momentinin meydana geldiği $t=28,58 sn$ 'de elde edilen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, Şekil 6.86, 6.87, 6.88 ve 6.89'da sunulmuştur.



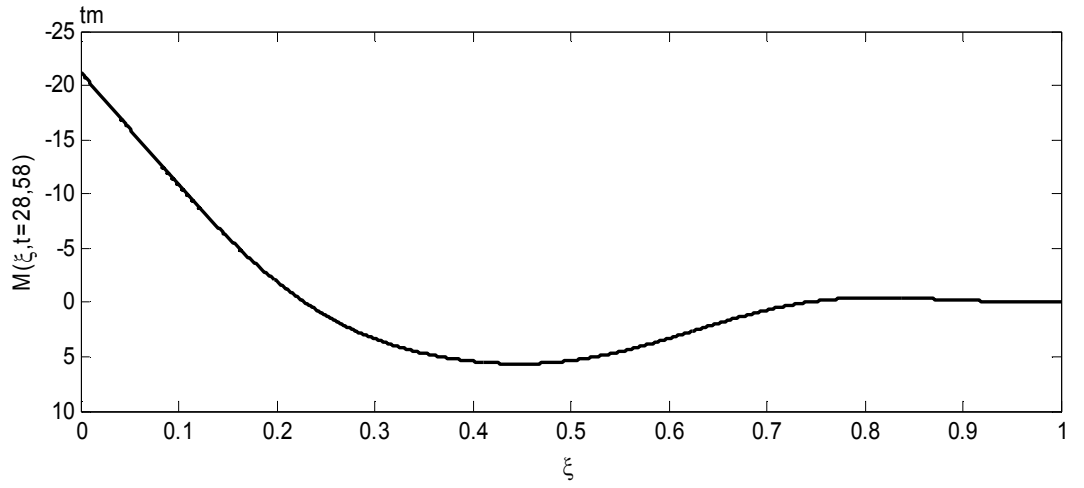
Şekil 6.86 Model 1'in, $t=28,58 sn$ 'de elde edilen deplasman diyagramı



Şekil 6.87 Model 1'in, $t=28,58 sn$ 'de elde edilen kesit dönmesi diyagramı

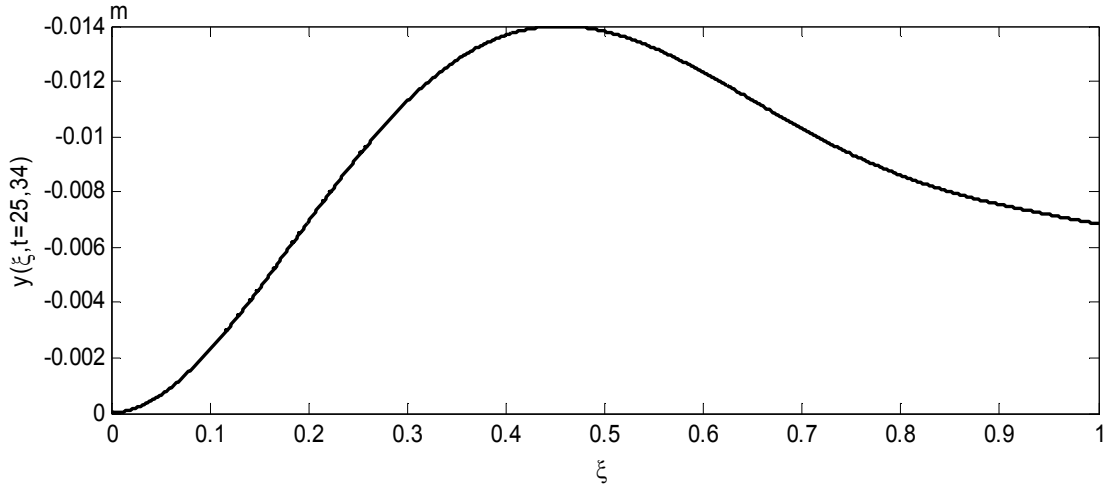


Şekil 6.88 Model 1'in, $t=28,58$ sn 'de elde edilen kesme kuvveti diyagramı

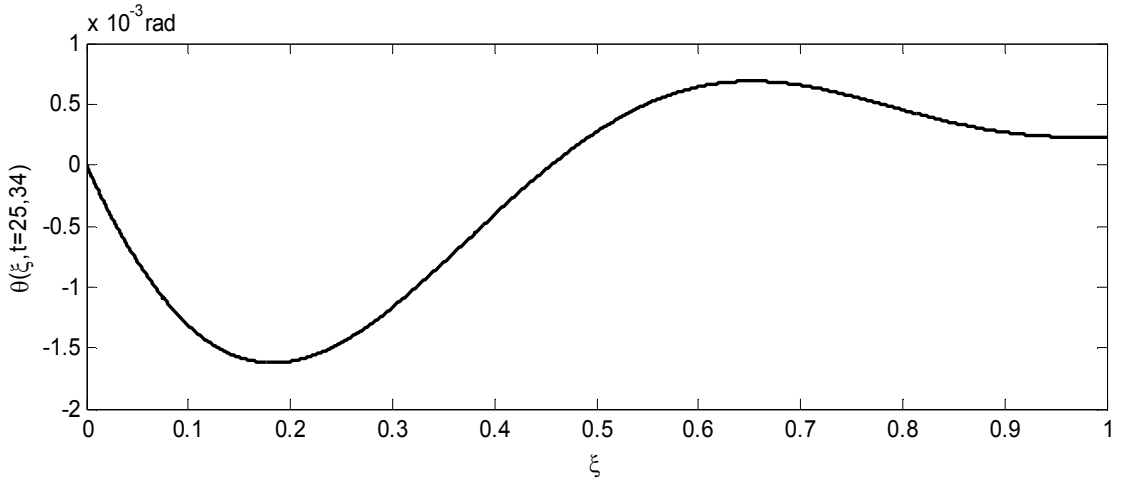


Şekil 6.89 Model 1'in, $t=28,58$ sn 'de elde edilen eğilme momenti diyagramı

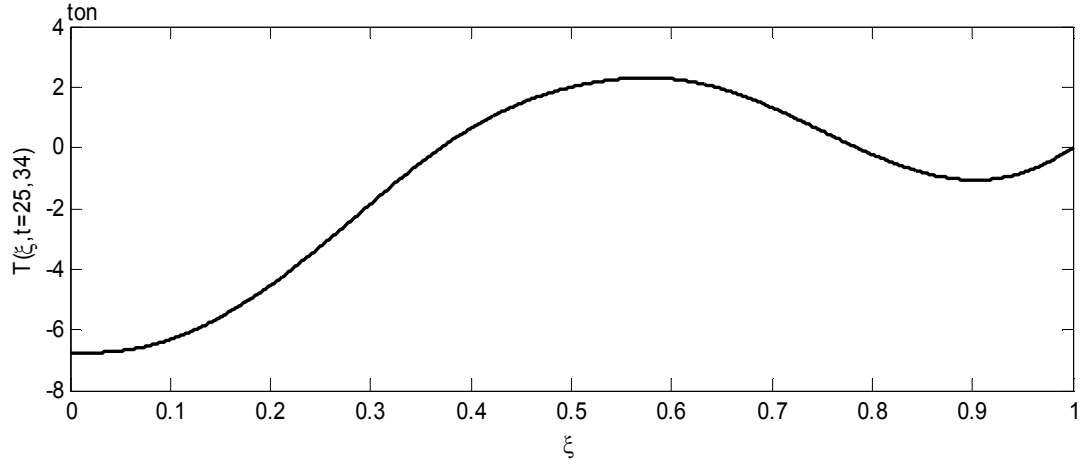
Model 1'in, akış diyagramı Ek-4'de verilen bilgisayar programı yardımıyla, $\xi = 0$ 'da maksimum kesme kuvvetinin meydana geldiği $t=25,34 sn$ 'de elde edilen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, Şekil 6.90, 6.91, 6.92 ve 6.93'de sunulmuştur.



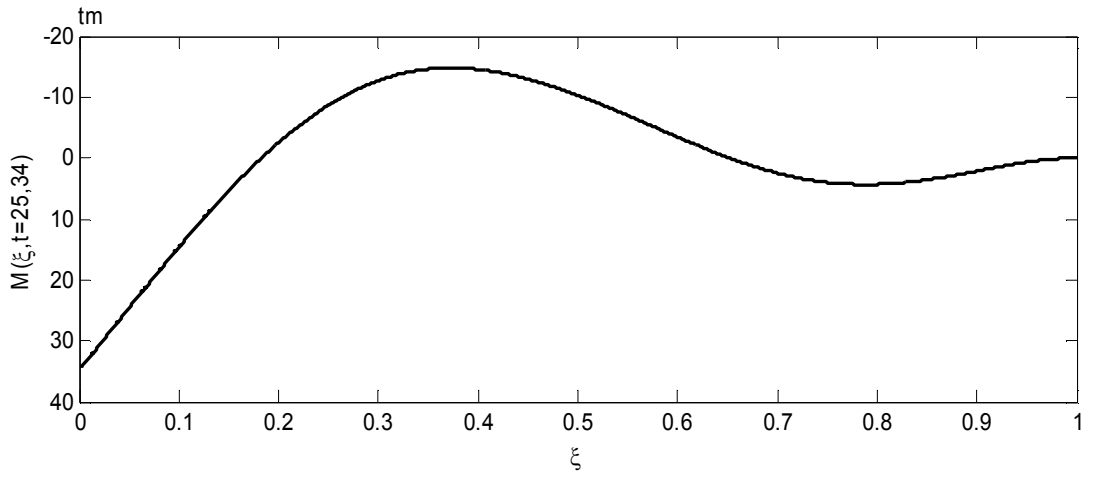
Şekil 6.90 Model 1'in, $t=25,34 sn$ 'de elde edilen deplasman diyagramı



Şekil 6.91 Model 1'in, $t=25,34 sn$ 'de elde edilen kesit dönmesi diyagramı

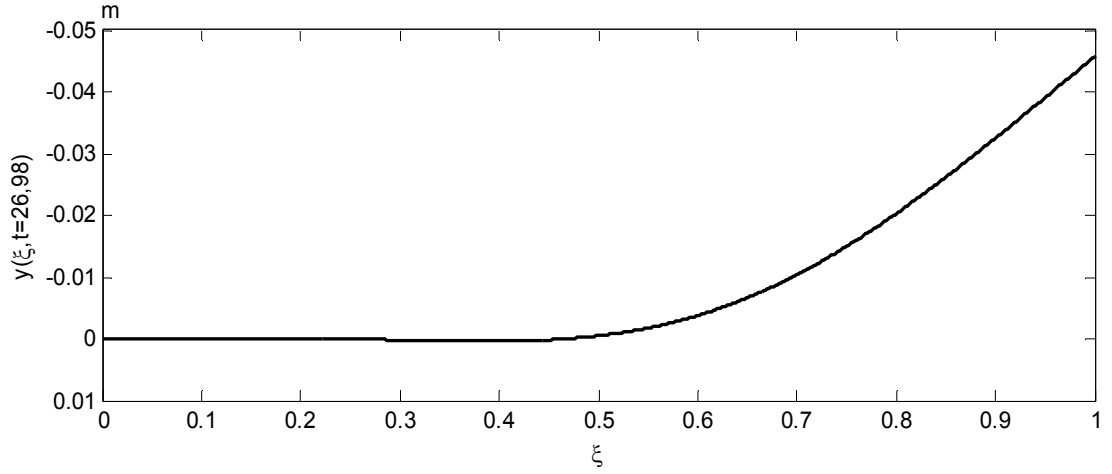


Şekil 6.92 Model 1'in, $t=25,34sn$ 'de elde edilen kesme kuvveti diyagramı

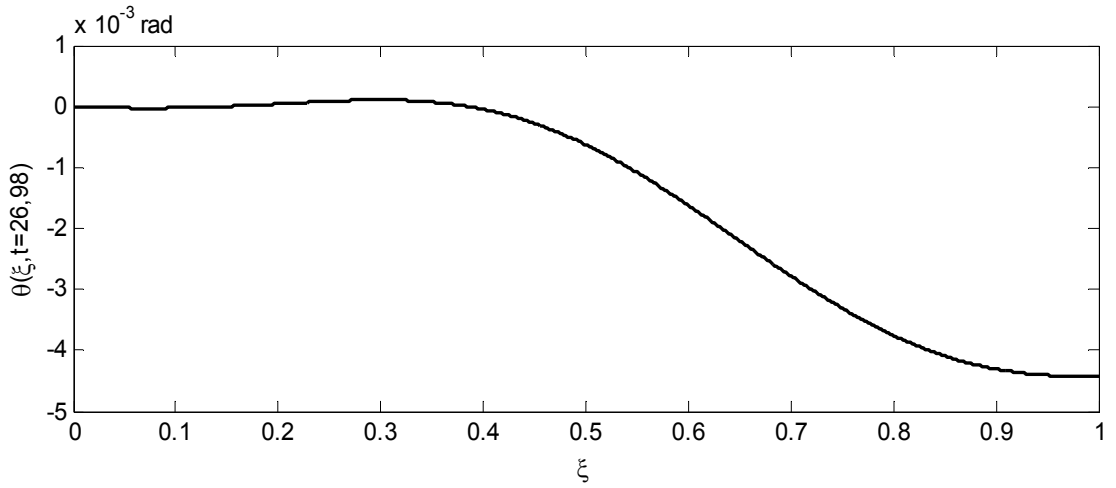


Şekil 6.93 Model 1'in, $t=25,34 sn$ 'de elde edilen eğilme momenti diyagramı

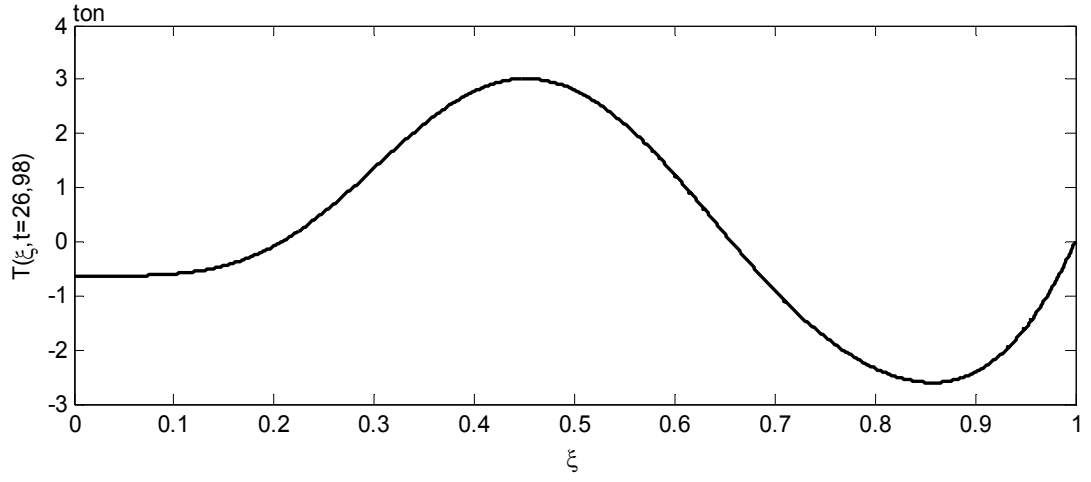
Model 1'in, akış diyagramı Ek-4'de verilen bilgisayar programı yardımıyla $\xi = 1$ 'de maksimum deplasmanın meydana geldiği $t=26,98$ sn 'de elde edilen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, Şekil 6.94, 6.95, 6.96 ve 6.97'de sunulmuştur.



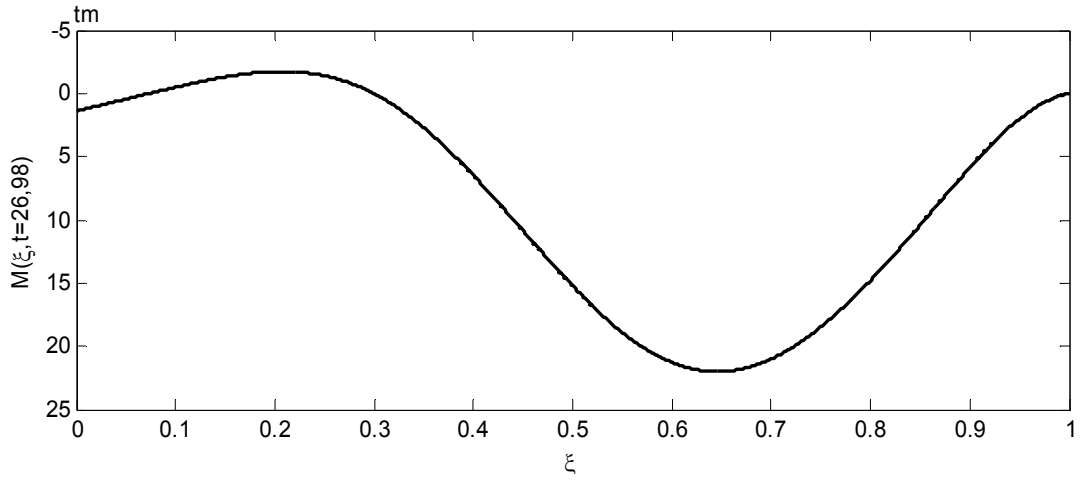
Şekil 6.94 Model 1'in, $t=26,98$ sn 'de elde edilen deplasman diyagramı



Şekil 6.95 Model 1'in, $t=26,98$ sn 'de elde edilen kesit dönmesi diyagramı

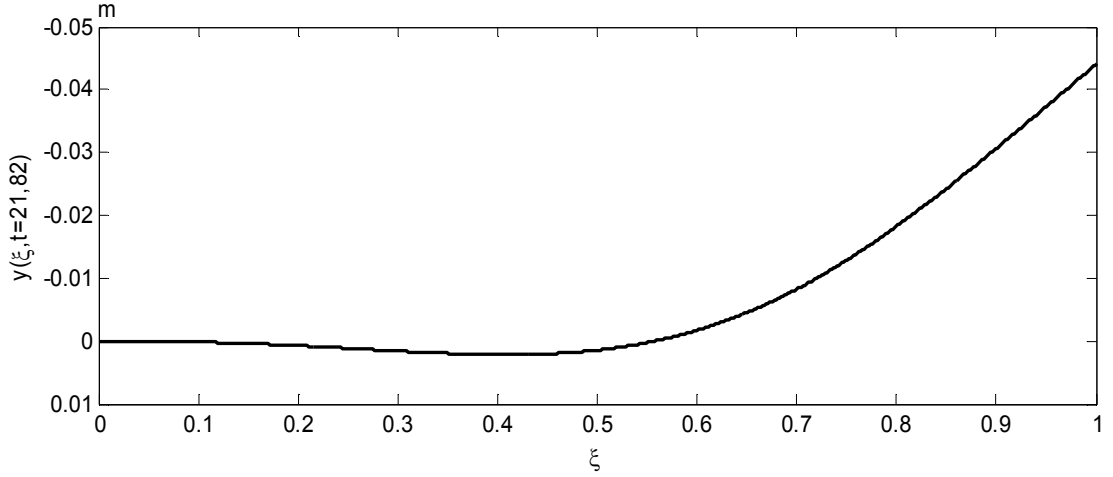


Şekil 6.96 Model 1'in, $t=26,98$ sn 'de elde edilen kesme kuvveti diyagramı

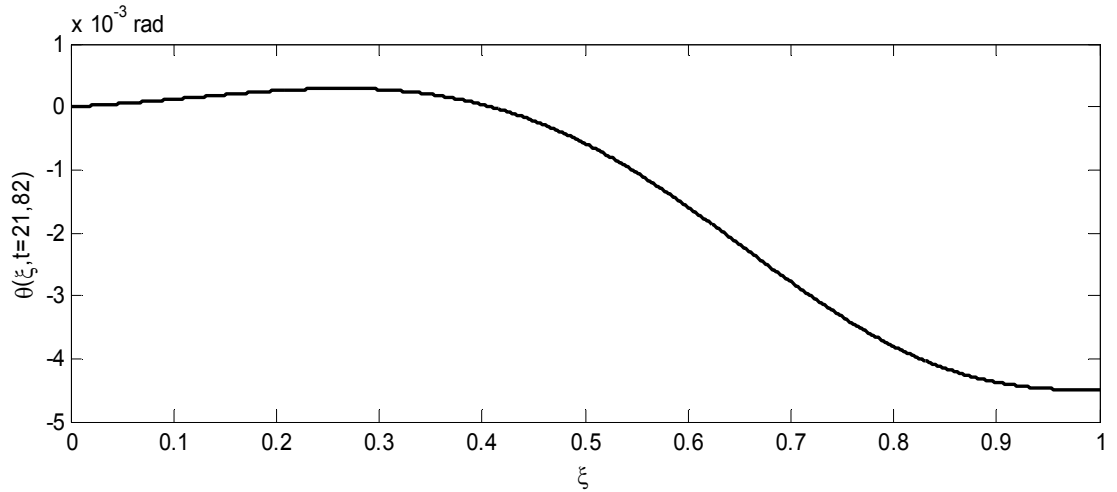


Şekil 6.97 Model 1'in, $t=26,98$ sn 'de elde edilen eğilme momenti diyagramı

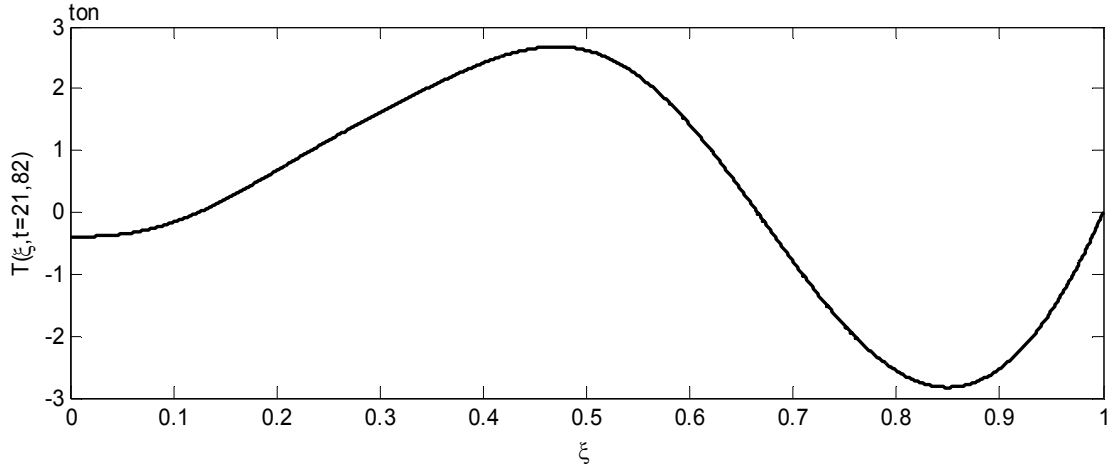
Model 1'in, akış diyagramı Ek-4'de verilen bilgisayar programı yardımıyla, $\xi = 1$ 'de maksimum kesit dönmesinin meydana geldiği $t=21,82 \text{ sn}$ 'de elde edilen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, Şekil 6.98, 6.99, 6.100 ve 6.101'de sunulmuştur.



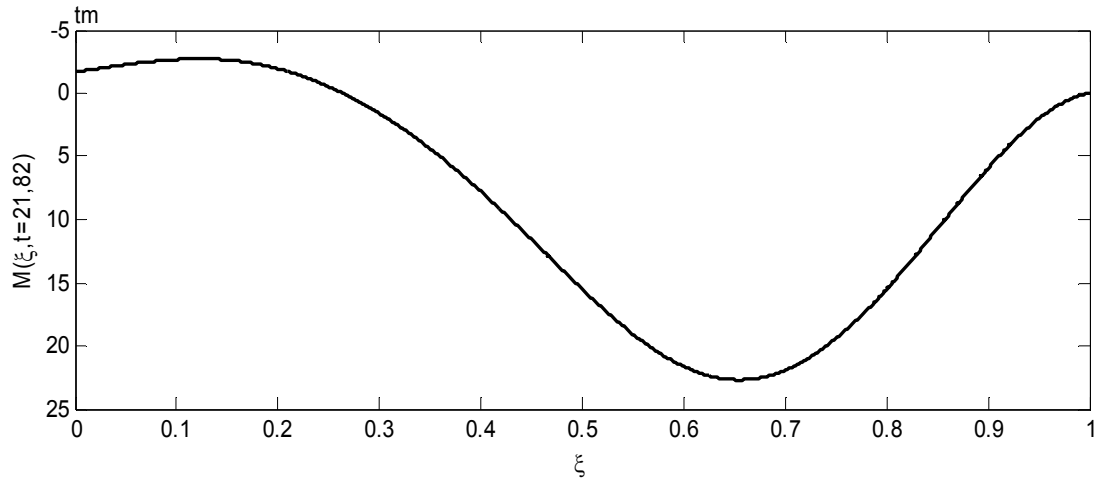
Şekil 6.98 Model 1'in, $t=21,82 \text{ sn}$ 'de elde edilen deplasman diyagramı



Şekil 6.99 Model 1'in, $t=21,82 \text{ sn}$ 'de elde edilen kesit dönmesi diyagramı



Şekil 6.100 Model 1'in, $t=26,98$ sn 'de elde edilen kesme kuvveti diyagramı



Şekil 6.101 Model 1'in, $t=26,98$ sn 'de elde edilen eğilme momenti diyagramı

Model 2'nin, Kocaeli (1999) depremine ait yer ivmesi etkisi altında, "Newmark Yöntemi" kullanılarak, akış diyagramı Ek-4'de verilen bilgisayar programı yardımıyla elde edilen maksimum modal ivme, hız ve deplasman değerleri, Tablo 6.22'de sunulmuştur.

Tablo 6.22 Model-2'in, Kocaeli (1999) depreminden elde edilen maksimum modal değerleri

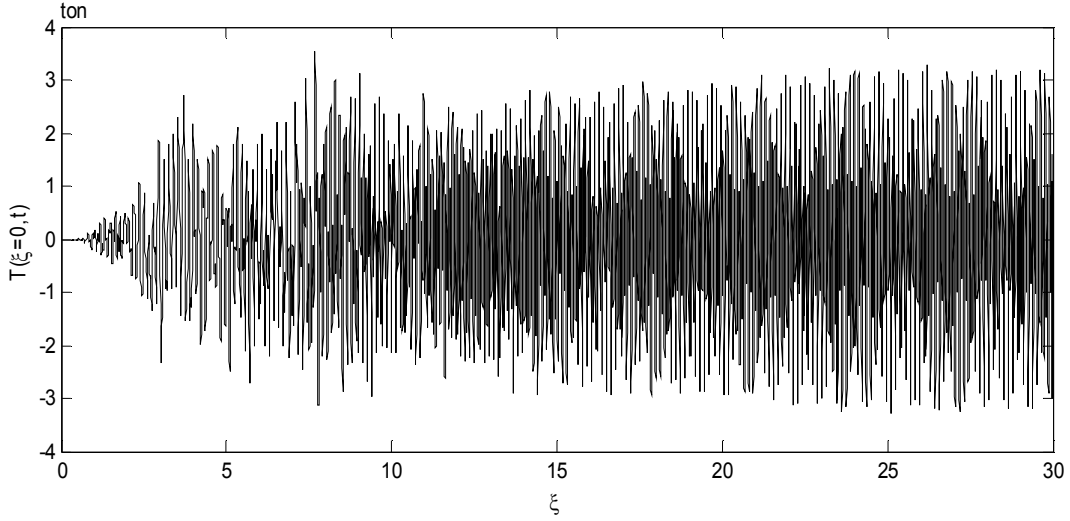
MOD SAYISI	$\ddot{\mu}_{maks}$ (cm^2 / sn)	$\dot{\mu}_{maks}$ (cm / sn)	μ_{maks} (cm)
1	1184,02687	28,0985454	0,764736
2	0	0	0
3	-551,78595	5,79884055	0,061749
4	0	0	0
5	18,8879502	-0,1064285	-0,00184
6	0	0	0
7	-3,2778802	-0,0157735	-0,00039
8	0	0	0
9	0,58554974	-0,0052344	-0,00012

Model 2'nin, değişik ξ değerleri için, akış diyagramı Ek-4'de verilen bilgisayar programı yardımıyla elde edilen maksimum deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti değerleri, Tablo 6.23'de sunulmuştur.

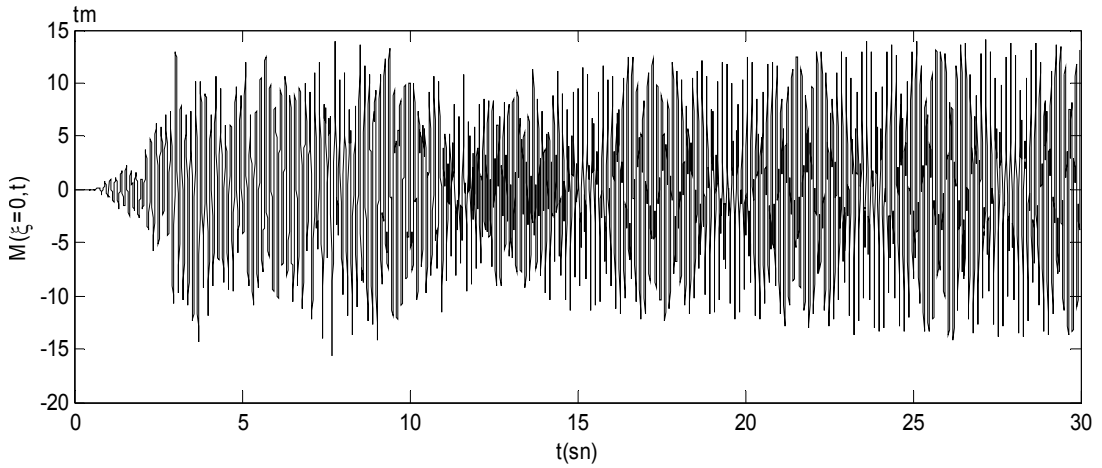
Tablo 6.23 Model-2 için, ξ parametrelerine bağlı olarak elde edilen maksimum iç tesirler

ξ	y_{maks} (m)	θ_{maks} (rad)	T_{maks} (ton)	M_{maks} (tm)
0	0	0	3,545443	-15,6783
0,25	0,00357658	0,000767	-1,46856	-4,40763
0,5	0,00765623	0	0	-9,33354
0,75	0,00417228	0,000767	1,46856	-4,40763
1	0	0	-3,55028	-15,6864

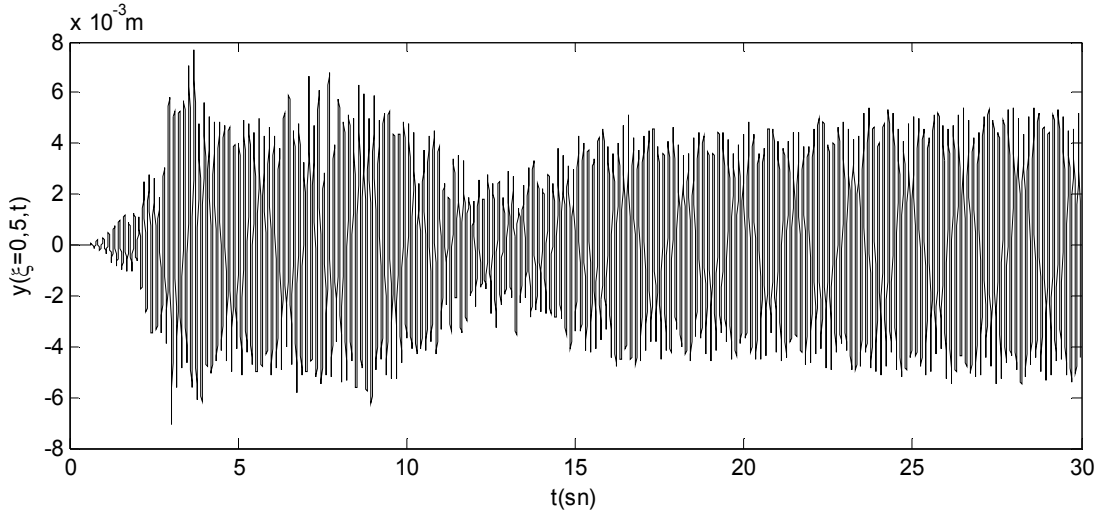
Model 2'nin, $\xi = 0$, $\xi = 0,5$ ve $\xi = 1$ 'de, akış diyagramı Ek-4'de verilen bilgisayar programı yardımıyla elde edilen kesme kuvveti, eğilme momenti ve deplasman değerlerinin zamana göre değişimi, Şekil 6.102, 6.103, 6.104, 6.105, 6.106 ve 6.107'de sunulmuştur.



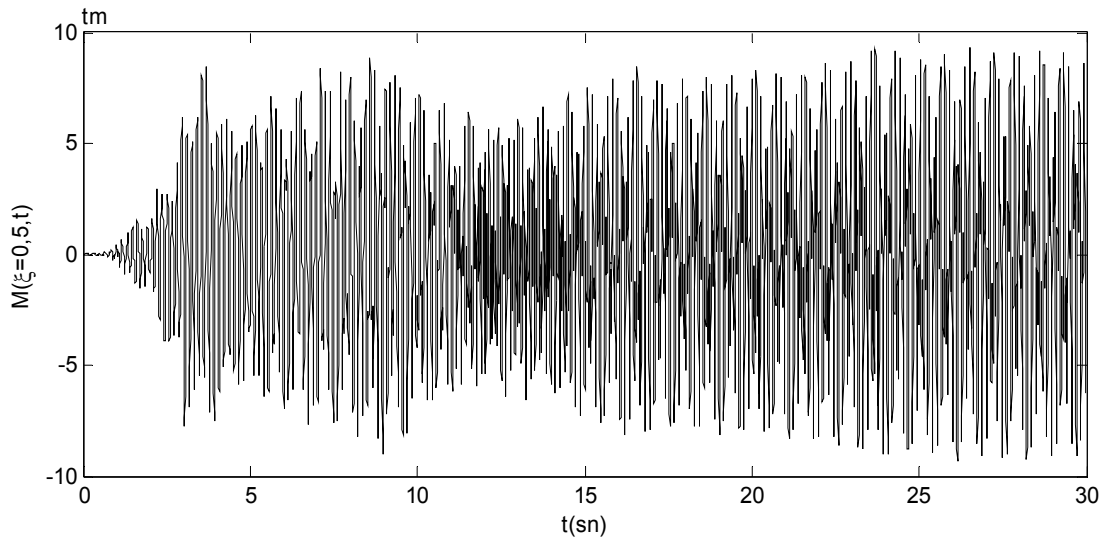
Şekil 6.102 Model 1'in, $\xi = 0$ için elde edilen kesme kuvveti-zaman diyagramı



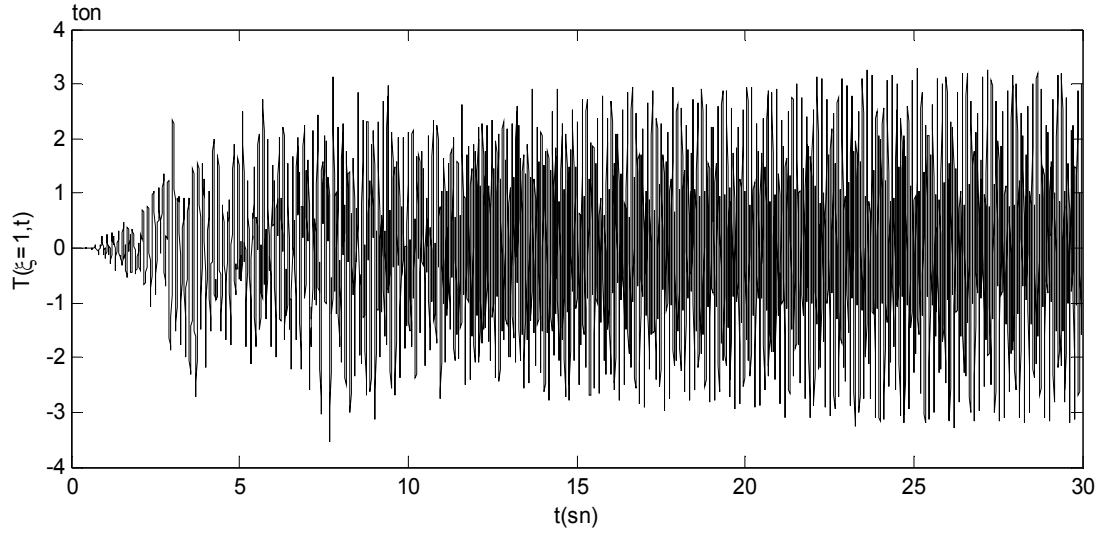
Şekil 6.103 Model 1'in, $\xi = 0$ için elde edilen eğilme momenti-zaman diyagramı



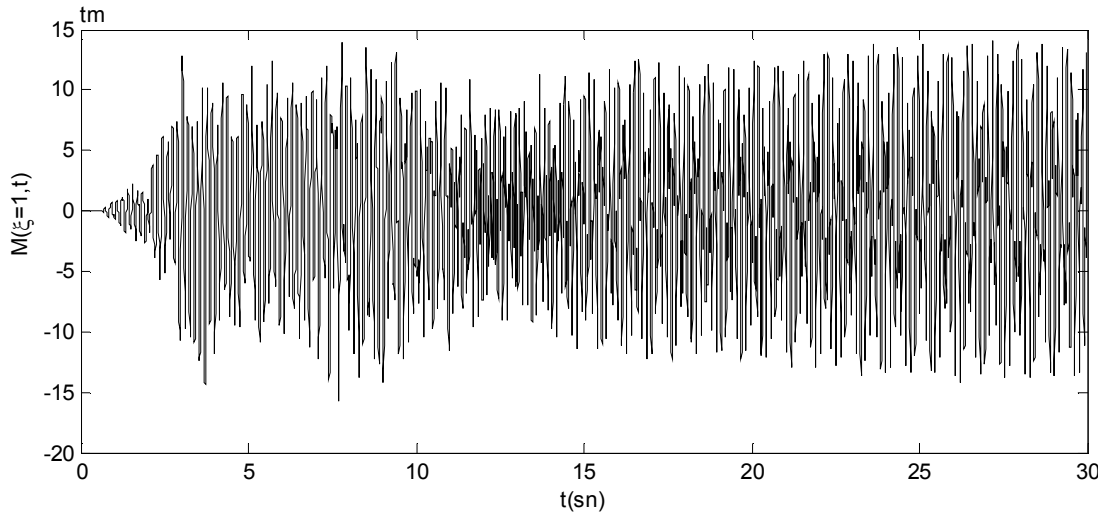
Şekil 6.104 Model 2'nin, $\xi = 0,5$ için elde edilen deplasman-zaman diyagramı



Şekil 6.105 Model 2'nin, $\xi = 0,5$ için elde edilen eğilme momenti-zaman diyagramı

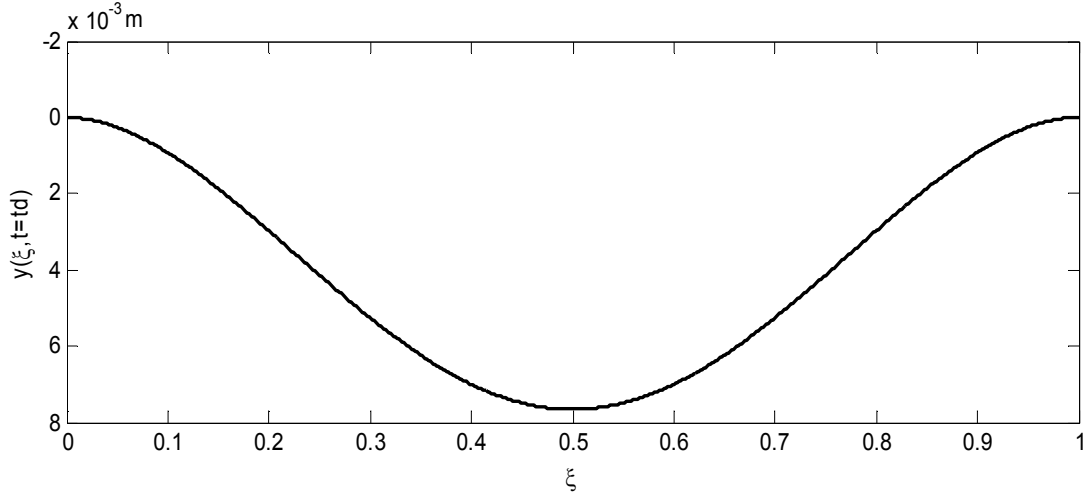


Şekil 6.106 Model 2'nin, $\xi = 1$ için elde edilen kesme kuvveti-zaman diyagramı

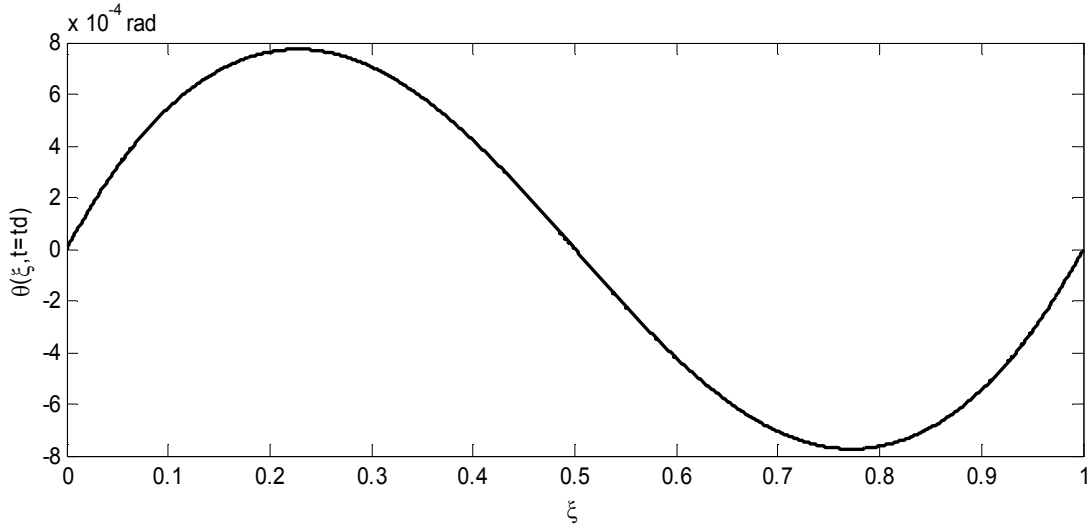


Şekil 6.107 Model 2'nin, $\xi = 1$ için elde edilen eğilme momenti-zaman diyagramı

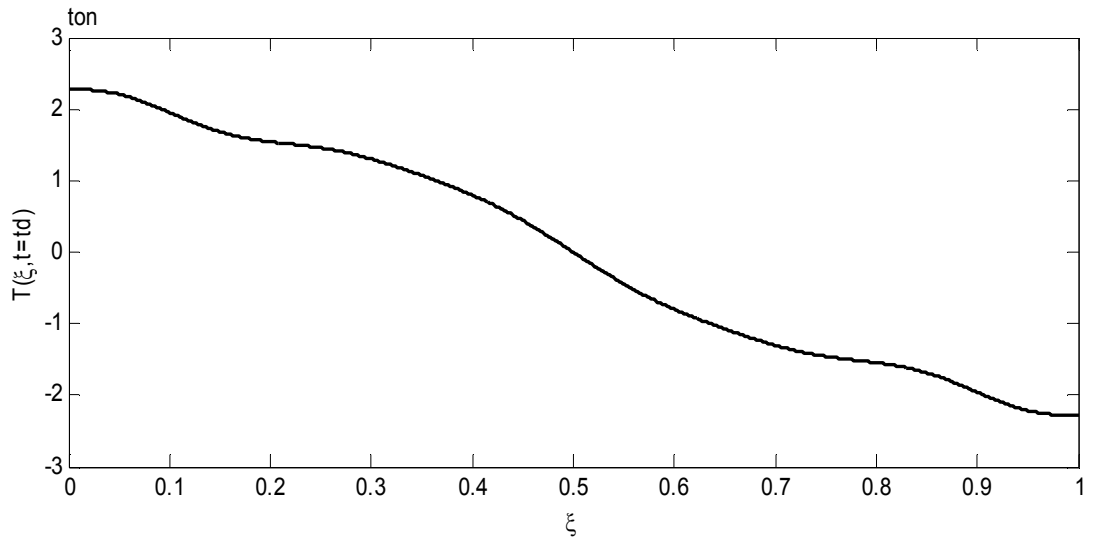
Model 2'nin, akış diyagramı Ek-4'de verilen bilgisayar programı yardımıyla, 1. modunun maksimum deplasman değerine ulaştığı ve $\xi = 0,5$ 'de maksimum deplasmanın meydana geldiği $t=t_d=3,7$ sn'de elde edilen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, Şekil 6.108, 6.109, 6.110 ve 6.111'de sunulmuştur.



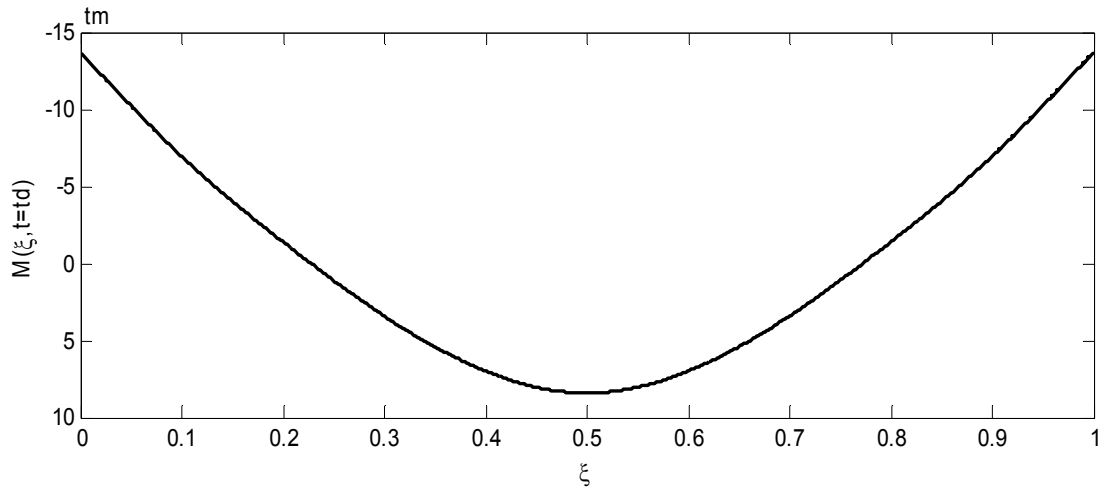
Şekil 6.108 Model 2'nin, $t=t_d$ anında elde edilen deplasman diyagramı



Şekil 6.109 Model 2'nin, $t=t_d$ anında elde edilen kesit dönmesi diyagramı

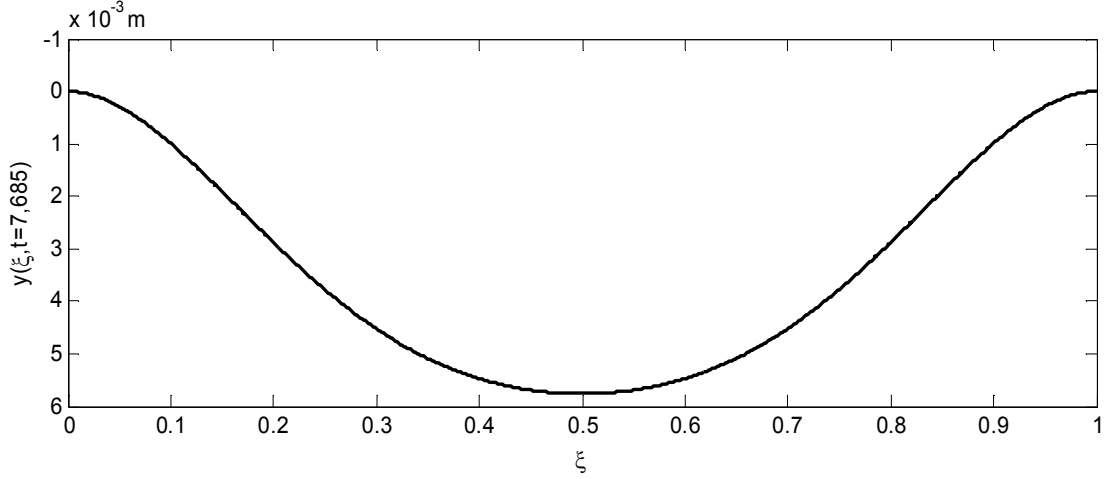


Şekil 6.110 Model 2'nin, $t=t_d$ anında elde edilen kesme kuvveti diyagramı

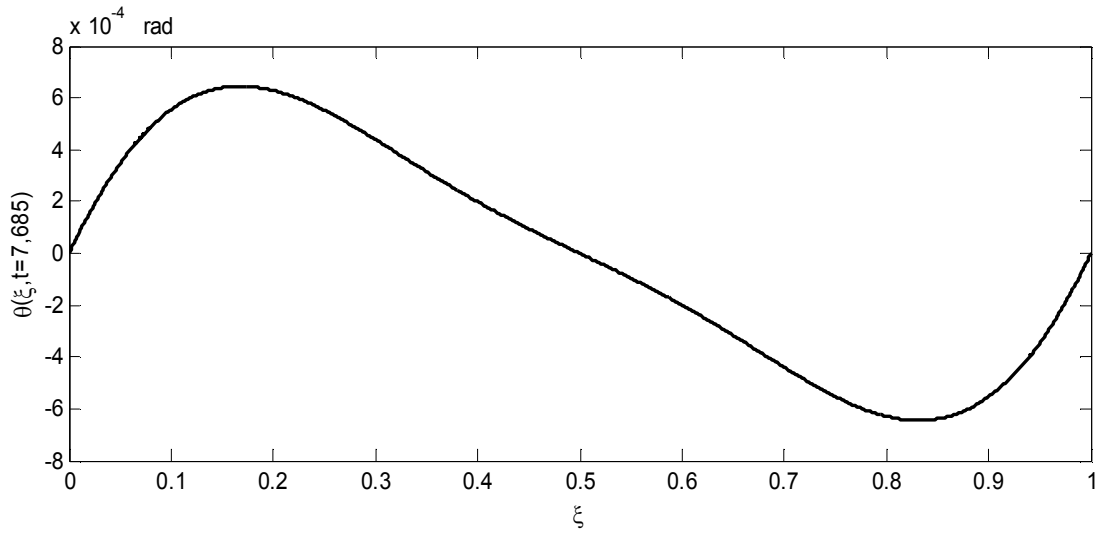


Şekil 6.111 Model 2'nin, $t=t_d$ anında elde edilen eğilme momenti diyagramı

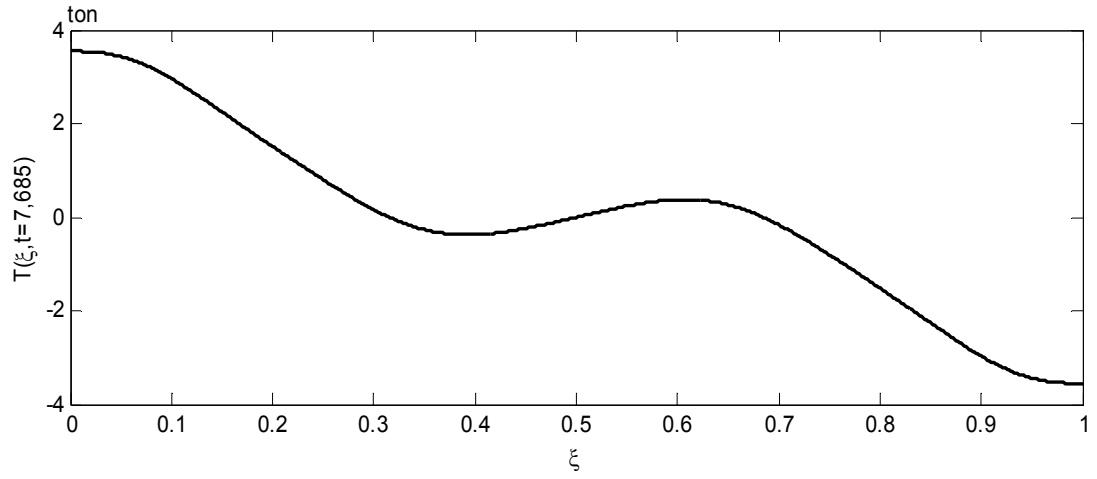
Model 2'nin, akış diyagramı Ek-4'de verilen bilgisayar programı yardımıyla, $\xi = 0$ ve $\xi = 1$ 'de, maksimum kesme kuvveti ve eğilme momentinin meydana geldiği $t=7,685 \text{ sn}$ 'de elde edilen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, Şekil 6.112, 6.113, 6.114 ve 6.115'de sunulmuştur.



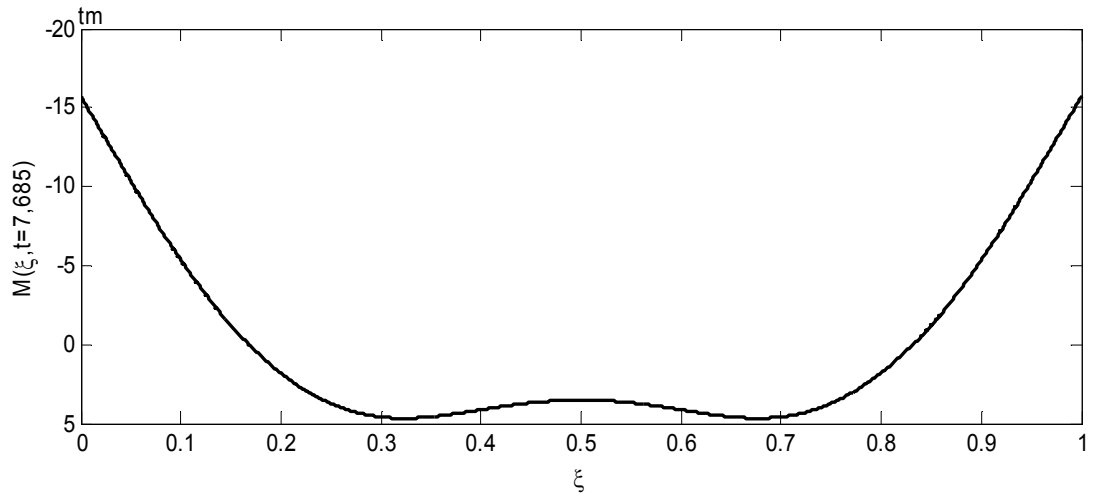
Şekil 6.112 Model 2'nin, $t=7,685 \text{ sn}$ 'de elde edilen deplasman diyagramı



Şekil 6.113 Model 2'nin, $t=7,685 \text{ sn}$ 'de elde edilen kesit dönmesi diyagramı

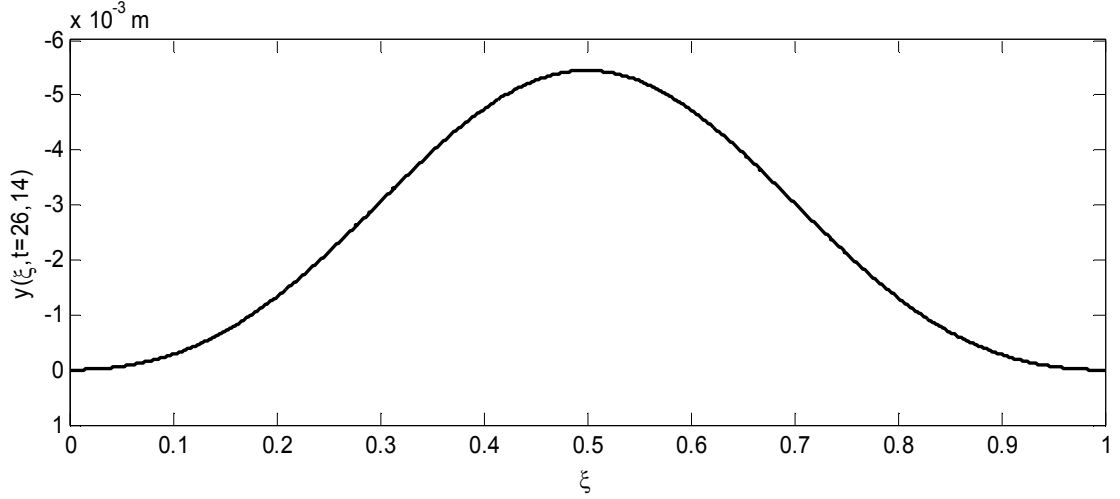


Şekil 6.114 Model 2'nin, $t=7,685$ sn 'de elde edilen kesme kuvveti diyagramı

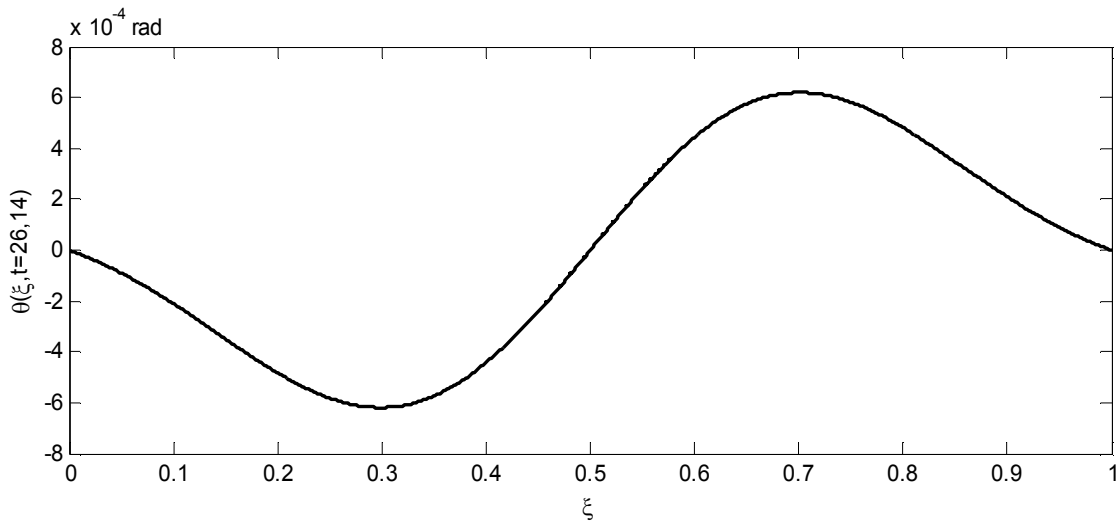


Şekil 6.115 Model 2'nin, $t=7,685$ sn 'de elde edilen eğilme momenti diyagramı

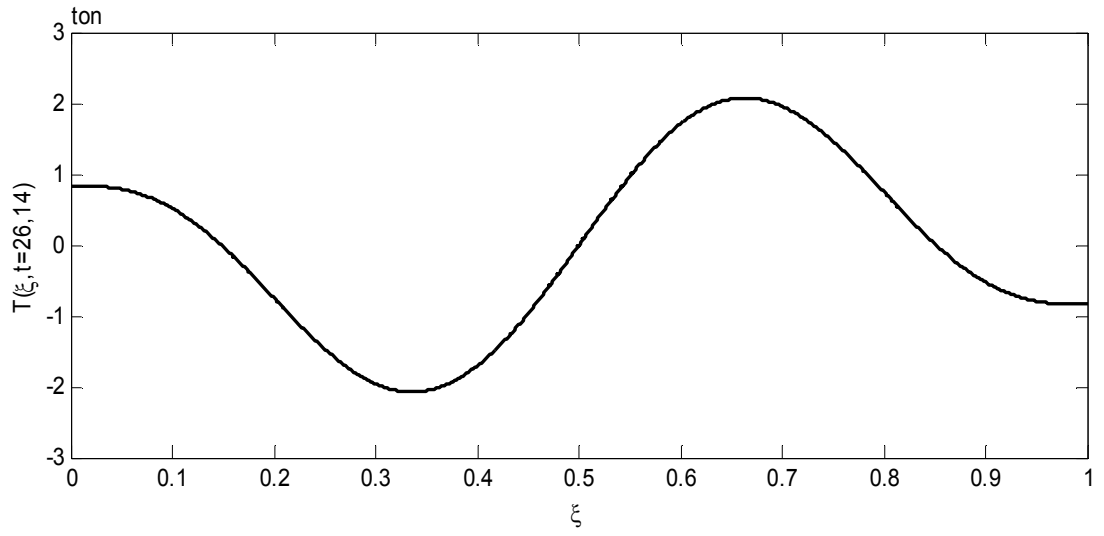
Model 2'nin, akış diyagramı Ek-4'de verilen bilgisayar programı yardımıyla, $\xi = 0,5$ 'de maksimum eğilme momentinin meydana geldiği $t=26,14$ sn 'de elde edilen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, Şekil 6.116, 6.117, 6.118 ve 6.119'da sunulmuştur.



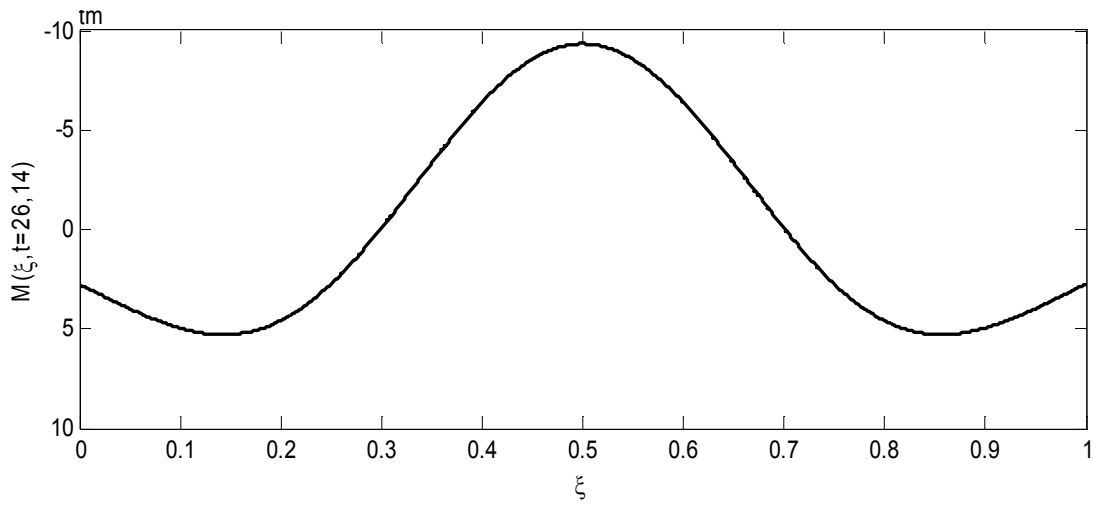
Şekil 6.116 Model 2'nin, $t=26,14$ sn 'de elde edilen deplasman diyagramı



Şekil 6.117 Model 2'nin, $t=26,14$ sn 'de elde edilen kesit dönmesi diyagramı



Şekil 6.118 Model 2'nin, $t=26,14$ sn 'de elde edilen kesme kuvveti diyagramı



Şekil 6.119 Model 2'nin, $t=26,14$ sn 'de elde edilen eğilme momenti diyagramı

BÖLÜM YEDİ

SONUÇLAR

Sürekli sistemler olarak modellenen elastik zemine oturan kirişlere ait zorlanmış titreşim hareketinin incelenmesi durumunda, her ne kadar genel bir hareket denkleminin elde edilmesi mümkün olsa da bu denklemin sayısal olarak çözümü mesnet ve süreklilik koşullarına bağlı olarak değişmektedir. Sonsuz sayıda küçük kütlelerden oluşan ve bu nedenle de yine sonsuz sayıda serbestlik derecesi ile titreşim moduna sahip bu tür sistemlerde, hareket denkleminin her bir mod için ayrı ayrı çözülmesi gerekmekte, bu durum da serbest titreşim analizinin önemini arttırmaktadır. Serbest titreşim analizinde elde edilen mod şekilleri ve açısal frekanslar, dinamik yük fonksiyonunun incelenen titreşim moduna olan katkısının belirlenmesinde ve kirişin zorlanmış titreşim etkisindeki deplasman genliğinin ve bu genliklere bağlı olarak meydana gelecek iç tesirlerin elde edilmesinde büyük önem arz etmektedir. Her bir mod için elde edilen ayrık hareket denklemleri ile de her kütle için modal koordinatlarının zamana bağlı değişimi elde edilebilmektedir.

Zorlanmış titreşim analizinde hesaba katılan mod adedi, dinamik davranışın daha doğru belirlenebilmesi açısından oldukça önemlidir. Yeterli sayıda mod etkisinin hesaba katılması dinamik tesirlerin gerçeğe daha yakın olarak elde edilmesini mümkün kılmaktadır. Zemin yatak katsayısı değerinin artması durumunda, modal titreşim genliklerinin sayısal değerleri birbirine yaklaştığından, yüksek modların toplam deplasman, kesme kuvveti ve eğilme momentine olan katkısı da artmaktadır. Bu nedenle, dinamik analizin mümkün olan en fazla sayıda mod adedinin hesaba katılarak gerçekleştirilmesi daha uygun olmaktadır.

Bu çalışma kapsamında yapılan sayısal analizlerde yukarıda bahsedilen etkilerin tümü, değişik mesnet koşullarına ve yükleme tiplerine maruz farklı analiz modelleri kullanılarak incelenmiştir.

Sayısal uygulama 1’de elastik Winkler zeminine oturan bir temel kirişi, her iki ucu serbest, her iki ucu basit mesnetli ve her iki ucu hem basit mesnetli hem de

dönme tipi bir yayla bağlı olarak üç değişik şekilde modellenmiş ve bu modellerin, açıklık ortasından etki eden ve üç model için de aynı olan tekil dinamik yük etkisi altındaki davranışı incelenmiştir.

Yapılan analizler sonucunda, yüksek modların kesme kuvveti ve eğilme momentine olan katkısının, deplasman ve kesit dönmesine oranla daha fazla olduğu ve Winkler zeminine ait elastik yay katsayısının artmasıyla birlikte yüksek modların katkısının da arttığı belirlenmiştir.

Sayısal uygulama 2’de elastik Vlasov zeminine oturan, her iki ucu serbest bir temel kirişi, değişik yükleme tipleri için iki farklı şekilde modellenmiştir. Temel kirişi, bu modellerin ilkinde, üç ayrı noktadan ikincisinde ise dört ayrı noktadan tekil dinamik yüke maruz bırakılmıştır. Temel kirişinin bu iki farklı yükleme etkisindeki davranışı incelenmiş, zemininin Winkler hipotezine uygun olarak modellenmesi durumunda meydana gelen farklılıklar belirlenmiştir.

Yapılan analizler sonucunda, temel kirişinin üç noktadan dinamik yüke maruz kalması durumunda, birinci moda ait normal koordinat fonksiyonunun maksimum değere ulaştığı anda elde edilen deplasman ve kesit dönmesi fonksiyonlarının ağırlıklı olarak birinci titreşim modunun etkisinde olmakla beraber üçüncü modun etkisinin de oldukça yüksek olduğu, kesme kuvveti ve eğilme momenti fonksiyonlarının ise ağırlıklı olarak üçüncü mod etkisinde olduğu görülmüştür.

Temel kirişinin dört noktadan dinamik yüke maruz kalması durumunda ise, birinci moda ait normal koordinat fonksiyonunun maksimum değere ulaştığı anda elde edilen deplasman ve kesit dönmesi fonksiyonlarının ağırlıklı olarak birinci titreşim modunun etkisinde olmakla beraber, beşinci modun etkisinin de oldukça yüksek olduğu, kesme kuvveti ve eğilme momenti fonksiyonlarının ise ağırlıklı olarak beşinci mod etkisinde olduğu görülmüştür.

Zeminin Winkler ve Vlasov modeline uygun olarak iki değişik şekilde modellenmesi durumunda ise temel kirişinin dinamik yüke olan tepkisi, elastik

zeminin kayma parametresi, C_G 'ye bağılı olarak farklılaşmaktadır. Kayma parametresinin düşük mertebede olması durumunda, Winkler ve Vlasov modelleri birbirine yakın sonuçlar vermekle beraber kayma parametresinin artmasıyla birlikte elde edilen sonuçların da birbirinden oldukça farklı olduğu görülmüştür. Bu nedenle elastik zemine oturan kirişlerin dinamik analizinin, zeminin davranışını en iyi ölçüde temsil eden zemin modelinin kullanılarak gerçekleştirilmesi büyük önem arz etmektedir.

Sayısal uygulama 1 ve 2'de, temel kirişinin tekil dinamik yük etkisinde, birinci modun maksimum modal koordinat değerine ulaştığı anda elde edilen iç tesirleri, ilk on beş titreşim modu dikkate alınarak elde edilmiştir. İlk on beş moddan daha yüksek sayıdaki titreşim modları; deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momentine olan katkılarının ihmal edilebilir mertebede olması sebebiyle hesaba katılmamıştır.

Sayısal uygulama 3'de, elastik Winkler zeminine oturan bir kirişin deprem ivmesi etkisi altındaki davranışı, bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest ve her iki ucu ankastre mesnetli iki adet betonarme kazık modeli kullanılmak suretiyle incelenmiştir. Bir ucu ankastre mesnetli ve diğer ucu serbest olan kazık modeli, Elcentro (1940) depremine ait yer ivmesi fonksiyonu, her iki ucu ankastre mesnetli olan kazık modeli ise Kocaeli (1999) depremine ait yer ivmesi fonksiyonu kullanılarak analiz edilmiştir.

Yapılan analizler sonucunda, Elcentro (1940) depremine ait yer ivmesi fonksiyonu etkisindeki, bir ucu ankastre mesnetli ve diğer ucu serbest kirişin $\xi = 0$ ve $\xi = 1$ noktasında elde edilen maksimum iç tesirlerinin, birinci moda ait normal koordinat fonksiyonunun maksimum değere ulaştığı anda elde edilen iç tesirlerden farklı olduğu ve değişik anlarda meydana geldiği görülmüştür.

Kocaeli (1999) depremine ait yer etkisindeki yer ivmesi fonksiyonu etkisindeki, her iki ucu ankastre mesnetli kirişin ise $\xi = 0,5$ noktasında elde edilen maksimum deplasman değerinin, birinci moda ait normal koordinat fonksiyonunun maksimum

değere ulaştığı anda meydana geldiği, aynı noktada elde edilen maksimum eğilme momentinin ise farklı bir anda meydana geldiği görülmüştür. $\xi = 0$ ve $\xi = 1$ noktasında elde edilen maksimum kesme kuvveti ve eğilme momentinin aynı anda meydana geldiği, maksimum iç tesirlerin aynı anda oluştuğu görülmüştür.

Sayısal uygulama 3'de, elastik zemine oturan bir kirişin deprem yükü etkisindeki iç tesirlerinin, zamana göre değişiminin birbirinden olabileceği ve bu iç tesirlere ait maksimum değerlerin, depremin etki ettiği süre içerisinde farklı zamanlarda meydana gelebileceği görülmüştür. Bu nedenle, bu tip problemlerde kirişte meydana gelen deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momenti etkilerinin zamana bağlı olarak değişiminin, farklı ξ değerleri için elde edilmesi daha uygun olmaktadır.

Sayısal uygulama 3'de, betonarme kazığın deprem ivmesi etkisindeki davranışı, ilk dokuz titreşim modu dikkate alınarak elde edilmiştir. İlk dokuz moddan daha yüksek sayıdaki titreşim modları; deplasman, kesit dönmesi, kesme kuvveti ve eğilme momentine olan katkılarının ihmal edilebilir mertebede olması sebebiyle hesaba katılmamıştır.

KAYNAKLAR

- Arbeloda-Monsalve, L. G., Zapata-Medina, D. G., & Aristizabal-Ochoa J. D. (2008). Timoshenko beam-column with generalized end conditions on elastic foundation: Dynamic-stiffness matrix and load vector. *Journal of Sound and Vibration*, 310, 1057-1079.
- Bowles, J. E. (1996). *Foundation Analysis and Design* (5th ed.). USA: McGraw-Hill.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2001). *Elementary differential equations and boundary value problems* (7th ed.). New York: Jon Wiley & Sons.
- Chopra, A. K. (2005). *Dynamics of structures, theory and applications to earthquake engineering*. New Jersey: Prentice Hall.
- Clough, R. W., & Penzien, J. (2003). *Dynamics of structures* (3rd ed.). USA: Computers And Structures.
- Çatal, H. H., & Alku, S. (1996). Elastik zemine oturan çubuğun ikinci mertebe rijitlik matrisinin hesabı. *Turkish Journal of Engineering& Environmental Sciences*, 20, 109-105.
- Çatal, H. H. (2002). Free vibration of partially supported piles with the effects of the bending moment, axial and shear force. *Engineering Structures*, 24, 1615-1622.
- Çatal, H. H. (2006). Free vibration of semi-rigid connected and partially embedded piles with the effects of the bending moment, axial and shear force. *Engineering Structures*, 28, 1911-1918.
- Çatal, S., & Çatal, H. H. (2006). Buckling Analysis of partially embedded pile in elastic soil using the differential transform method. *Structural Engineering and Mechanics*, 24 (2), 247-268.

- Catal, S. (2012). Response of Forced Euler-Bernoulli beam using the differential transform method. *Structural Engineering and Mechanics*, 42 (1), 95-120.
- Dadfarnia, M., Jalili, N., & Esmailzadeh, E. (2005). A comparative study of the galerkin approximation utilized in the Timoshenko beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, 280, 1132-1142.
- Das, B. M., (1997). *Advanced soil mechanics* (2nd ed.). USA: Taylor & Francis.
- Doyle, P.F. & Pavlovic, M.N. (1982). Vibration of beams on partial elastic foundations. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, 663-674.
- Kayış, G. (2006). *Yatay yüklü düşey kazıkların arazi koşullarında modellenmesi ve hesap yöntemleri (Yüksek lisans tezi)*. İstanbul: Yıldız Teknik Üniversitesi.
- Kocaeli(1999) ground motion data. (n.d.). Retrived March 13, 2012, from <http://peer.berkeley.edu/smcat/search.html>.
- Morfidis, K. (2010). Vibration of Timoshenko beams on three-parameter elastic foundation. *Computer And Structures*, 88, 294-308.
- Morfidis, K., & Avramidis I. E. (2002). Formulation of a generalized beam element on a two-parameter elastic foundation with semi-rigid connections and rigid offsets. *Computer And Structures*, 80, 1919-1934.
- Herrmann, G. (1953). *Forced motions of Timoshenko beams (Technical report, no: 9)*. New York: Columbia University.
- Hetenyi, M. (1946). *Beams on Elastic Foundations* (7th ed.). Michigan: The University of Michigan Press.

- Huang, T. C. (1961). The effect of rotatory inertia and shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams. *Journal of Applied Mechanics*, 28, 579-584.
- İnan, M. (2001). *Cisimlerin Mukavemeti* (8.Baskı). İstanbul: İTÜ Vakfi Yayınları.
- Önalp, A. ve Sert, S. (2006). *Geoteknik bilgisi III: Bina temelleri*. İstanbul: Birsen Yayınevi,
- Pasternak, P.L. (1954) *Fundamentals on a new method of analysis of an elastic foundation by means of two-constants*. Moscow, USSR: Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture.
- Terzaghi, K. (1955). Evaluation of coefficient of subgrade reaction. *Geotechnique*, 5, 297-326.
- Timoshenko, S.P. (1922). On the transverse vibration of the of uniform cross-section bars. *Philosophical Magazine*, 43, 125-131.
- Timoshenko, S., & Gere, J.M. (1961). *Theory of elastic stability (2nd ed.)*. New York: McGraw-Hill
- Vallabhan, C. V. G., & Das, Y. C. (1991). Modified Vlasov model for beams on elastic foundation. *Journal of Geotechnical Engineering*, 117, 956-966.
- Valsangkar, A. J., & Pradhanang, R. B. (1987). Free vibration of partially supported piles. *Journal of Engineerings Mechanics*, 13, 1244-1247.
- Vesic, A.S. (1961). Bending of Beams Resting on Isotropic Elastic Solid. *Journal of Engineering Mechanical Division*, 87, 35-53.

- Vlasov, V.Z., & Leont'ev, N. N. (1966) *Beams, plates, and shells on elastic foundation*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations. (Original work was published 1960).
- Yesilce, Y. (2004). *Yatak Katsayısı Degisken Elastik Zemine Kısmi Gömülü Kazıkların Serbest Titresim Analizi (Yüksek lisans tezi)*. İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi.
- Yeşilce, Y., & Çatal, H.H. (2008). Free vibration of piles embedded in soil have different modulus of subgrade Reaction. *Applied Mathematical Modeling*, 32, 889-900.
- Zhaohua, F., & Cook, R. D. (1983). Beam elements on two-parameter elastic foundations. *Journal of Engineering Mechanics*, 109, 1390–1402.

EKLER

Ek-1: Sayısal Uygulamalar İçin Geliştirilmiş Olan Bilgisayar Programlarında Kullanılan Parametreler

AG: Kiriş kesitinin kayma rijitliğidir.

B: Newmark yöntemi için girilen β katsayıdır.

CG: Elastik zemine ait kayma parametresidir.

CS: Elastik zemine ait yay katsayıdır.

CY1: Kirişin sol ucuna bağlı, deplasmana karşı direnç gösteren elastik yay katsayıdır.

CY2: Kirişin sağ ucuna bağlı, deplasmana karşı direnç gösteren elastik yay katsayıdır.

CTET1: Kirişin sol ucuna bağlı, dönmeye karşı direnç gösteren elastik yay katsayıdır.

CTET2: Kirişin sağ ucuna bağlı, dönmeye karşı direnç gösteren elastik yay katsayıdır.

DT: Newmark Yönteminde kullanılan deprem ivmesine ait verilerin toplandığı zaman aralığıdır.

EI: Kiriş kesitinin eğilme rijitliğidir.

G: Newmark yöntemi için girilen γ katsayıdır.

HMS: Hesaba katılan mod sayısıdır.

k: Kiriş kesitindeki maksimum kayma gerilmesini veren şekil faktörüdür.

[k]: Newmark Yöntemi için kullanılacak olan rijitlik matrisidir.

L: Kiriş uzunluğudur.

m: Kirişin, uzunluğu boyunca yayılı olan kütesidir.

[m]: Newmark Yöntemi için kullanılacak olan kütle matrisidir.

MS: Mod sayısıdır.

N: Kirişe etki eden aksenal basınç kuvvetidir.

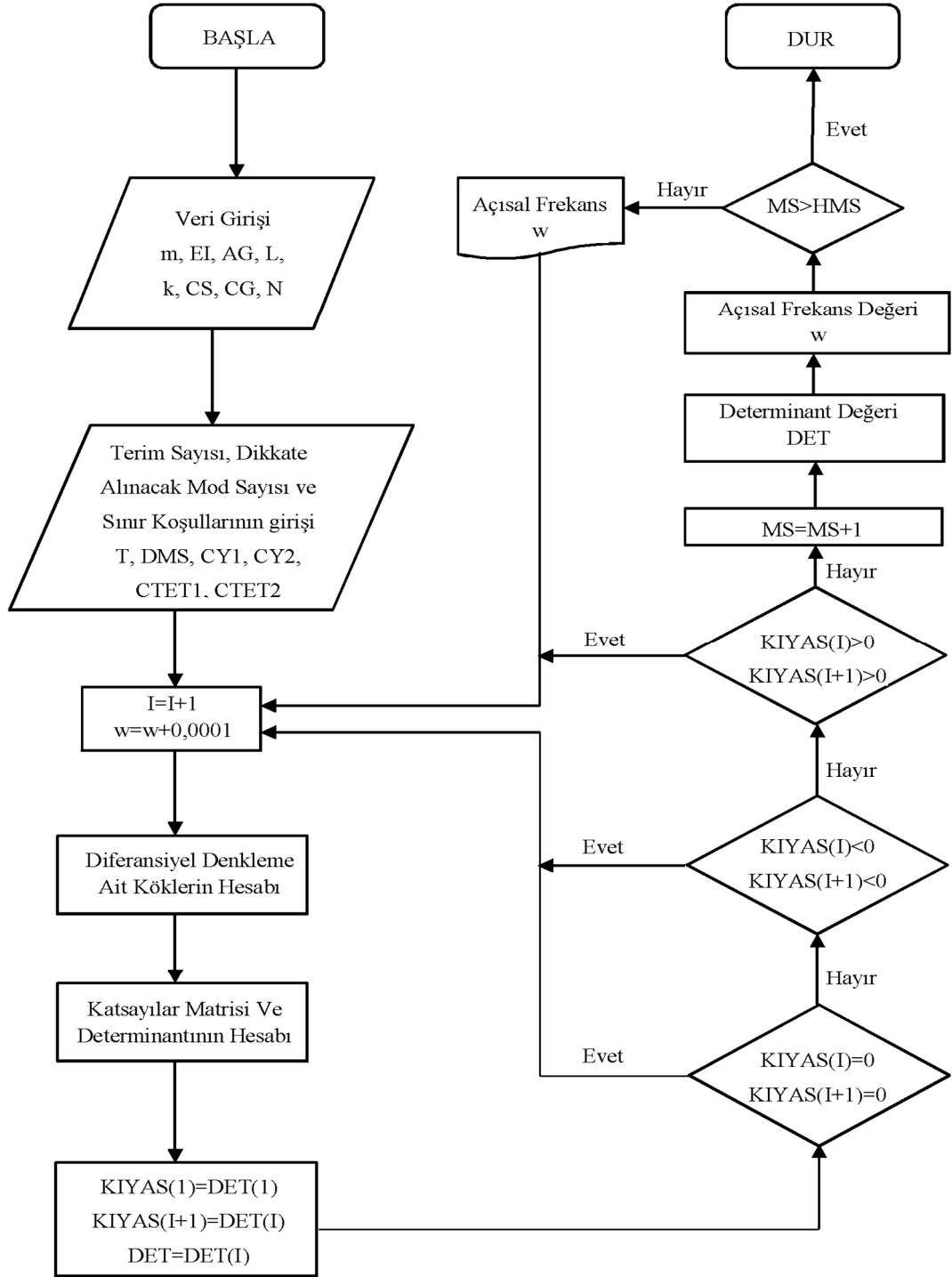
w: Açısal frekans değeridir.

U(t): Zorlanmış titreşim analizinde kullanılan depreme ait yer ivmesi fonksiyonudur.

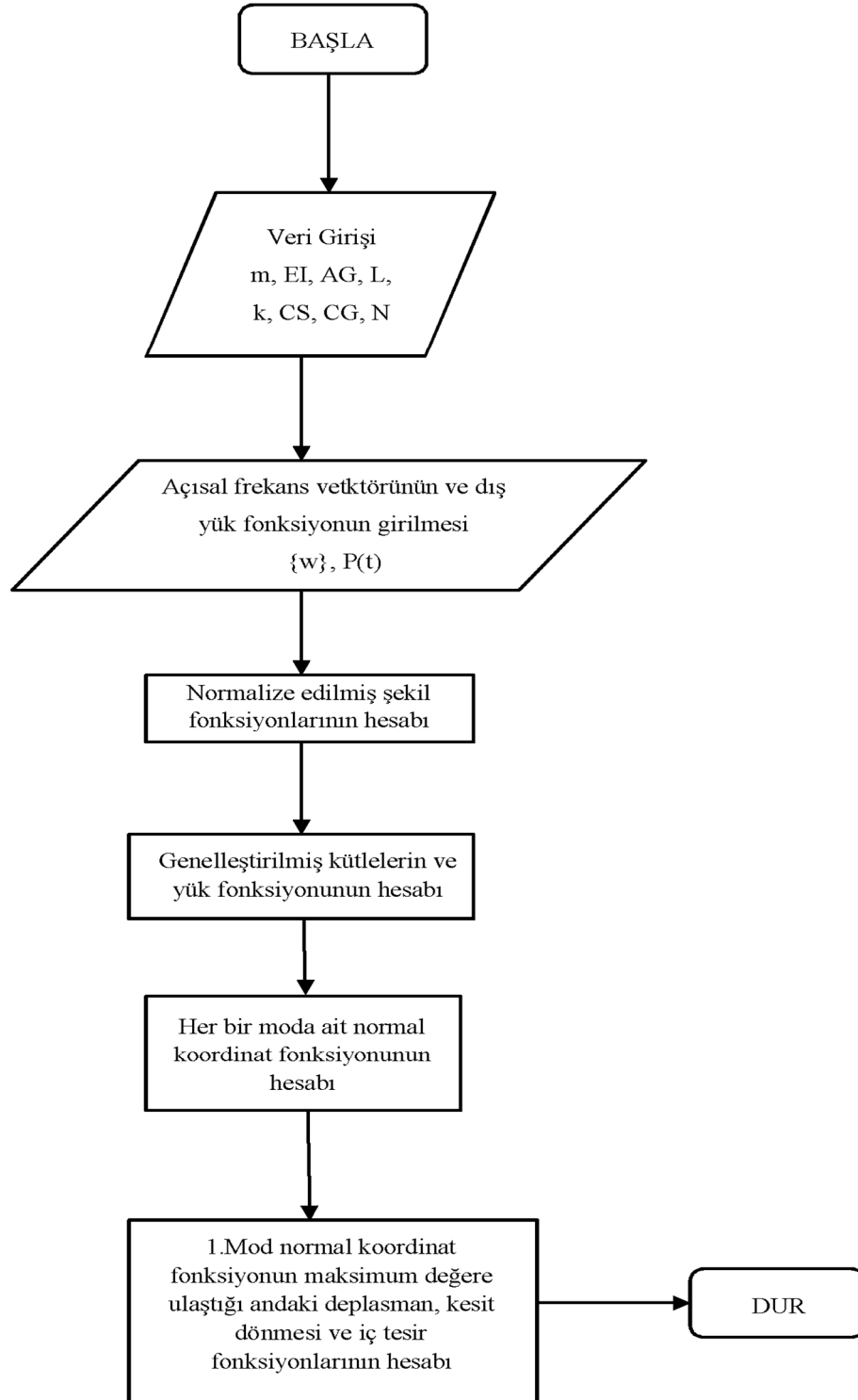
P(t): Zorlanmış titreşim analizinde kullanılan dış yük fonksiyonudur.

{w}: Boyutu, hesaba katılacak mod sayısına eşit olan ve ilgi modların açısal frekans değerlerini içeren vektördür.

Ek-2: Elastik Zemine Oturan Kirişin Serbest Titreşim Analizi İçin Geliştirilmiş Olan Bilgisayar Programına Ait Akış Diyagramı



Ek-3: Yayılı veya Tekil Dinamik Yüke Maruz, Elastik Zemine Oturan Kirişin Zorlanmış Titreşim Analizi İçin Geliştirilmiş Olan Bilgisayar Programına Ait Akış Diyagramı



Ek-4: Deprem İvmesi Etkisi Altındaki Elastik Zemine Oturan Kirişin Zorlanmış Titreşim Analizi İçin Geliştirilmiş Olan Bilgisayar Programına Ait Akış Diyagramı

