BİLİMLERİ DERGİSİ BUCA EĞİTİM FAKÜLTESİ YAYIN ORGANI

Yıl : 2
Sayı : 2
Ocak 1993

BİR GRAFIN KARAKTERİSTİK POLİNOMUNUN ÇARPANLARA AYRILMASI

Doç.Dr.Mehmet ARISOY
Necatibey Eğitim Fakültesi
Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
Öğretim Üyesi

ÖZET

Bu çalışmada, bir grafın otomorfizim grubunun tepeler kümesi üzerine etkisiyle ilgili temel kavramları kullanarak; bu grafın karakteristik polinomunun çarpanlara ayrılışı hakkında bir teorem ifade ve ispat edilmiştir. Bu teorem bazı örneklere uygulanarak sonuçlar tartışılmıştır.

On The Factorization Of The Characteristic Polynomial Of A Graph

ABSTRACT

In this study, using the fundamental concepts concerning with the effect over the vertices set of the automorphism group of a graph; a theorem about the factorization of the characteristic polynomial of this graph is expressed and proved. The results are discussed by applying this theorem to some examples.

GİRİŞ

Graflar ve gruplar arasındaki ilişkileri ortaya koyan ilk çalışmalar Cayley [4], Maschke [7] ve König [6] tarafından yapılmıştır. Daha sonra Artzy [3], Mowshowitz [8], Chao [5], Sabidussi [9], Stueckle [10] vb. birçok araştırıcı yapılan çalışmaları daha da geliştirmişlerdir. Bir grafın karakteristik polinomunun çarpanlara ayrılması için gereksinim duyulan bazı tanımlar ve temel kavramlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 1. : Tepeler kümesi $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ ve ayrıtlarkümesi de $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ ile belirtilen bir graf $G= (T,A)$ olsun [1].n tepeli ve m ayrıntılı birleştirilmiş bir G grafının tepeler kümesinin kendi üzerine bire-bir dönüşümüne, T üzerinde tanımlı bir permütasyon denir ve bu $P = \begin{pmatrix} t_1, t_2 ... t_n \\ t_{i1}\ t_{i2} .... t_{in} \end{pmatrix}$ ya da t yazarak $P = \begin{pmatrix} 1\ 2\ ...\ n \\ i_1 i_2 .... i_n \end{pmatrix}$ şeklinde gösterilir.

Bu gösterilişdeki $(i_1\ i_2 ... i_n)$, $(1\ 2\ ...\ n)$ nin bir sıra değişimidir.

Tanım 2 : n elemanlı T tepeler kümesinin kendi üzerinde bire-bir tüm dönüşümleri bir grup oluşturur ve bu gruba S_n simetrik grubu denir.

Tanım 3 : $S(G) < S_n$ alt grubuna G grafının otomorfizim grubu veya permütasyon matrislerinin grubu denir. $P \varepsilon S(G)$ ise: P,T kümesi üzerinde bir permütasyondur. Sonlu T tepeler kümesinin P altındaki bir yörüngesi C ve C nin eleman sayısı u ise, $(C(t) = \{t, P(t), P^2(t), \ldots, P^{u-1}(t)\}$ yazılabilir. Bu yazılışdaki $t \varepsilon T$; P(t), t tepesinin P ye göre görüntüsü ve P^2 de bileşke karedir. P permütasyonundan,

$$P'(t) = \begin{cases} P(t), & \text{eğer } t \varepsilon C \text{ ise} \\ t, & \text{eğer } t \notin C \text{ ise} \end{cases} \tag{1}$$

eşitliğiyle elde edilen P' permütasyonuna P nin uzunluğu u olan bir deviri denir. $P' \varepsilon S_n$ dir ve genel olarak S (G) ye ait olmayabilir. T tepeler kümesi P altında bir takım ayrık yörüngelere ayrılır. T nin P altındaki bir yörüngesi $C = \{t_{i_1}, P(t_{i_1}) = t_{i_2}, \ldots, P^{u-1}(t_{i_{u-1}}) = t_{i_u}\}$ ise, $P' = (t_{i_1}, t_{i_2} \ldots t_{i_u})$ biçimindedir. P nin tüm farklı devirleri $P'_1, P'_2, \ldots, P'_r$ ile gösterilirse; $P = P'_1, P'_2, \ldots, P'_r$ şeklinde yazılır.

Tanım 4 : n tepeli ve me ayrıtlı bir G=(T,A) grafının tepelerinin herhangi bir dizisi $\{t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{k+1}\}$ olsun. Eğer $i=1,2,\ldots,k$ için $(t_i, t_{i+1}) \varepsilon A$ ise, bu diziye t_1 ve t_{k+1} tepelerini birleştiren bir yol adı verilir. Bir $\{t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{k+1}\}$ yolundaki t_1 ve t_{k+1} tepelerine bu yolun son noktaları; $t_2, t_3, \ldots, t_k$ tepelerinden herbirine de bu yolun bir iç tepesi denir. Bir $t \varepsilon T$ tepesi ile bağlantılı olan ayrıtların sayısına t tepesinin derecesi denir ve bu d(t) ile gösterilir. Bir $\{t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{k+1}\}$ yolundaki t_1 ve t_{k+1} son noktalarının dereceleri bir ve herbir iç tepesinin derecesi iki ise, böyle bir yola elemanter yol, $t_1 = t_{k+1}$ olan elemanter yola da çevre denir.

Tanım 5: G=(T,A) n tepeli ve m ayrıtlı birleştirilmiş bir graf ve G_a da G nin birleştirilmiş bir altgrafı olmak üzere eğer G_a grafı G nin tüm tepelerini içeriyor ve G nin hiçbir çevresini içermiyor ise, G_a altgrafına G grafının bir ağacı denir.

MATERYAL VE YÖNTEM

Teorem 1: n tepeli birleştirilmiş bir grafın B bağlantı matrisinin reel sayılar cismi üzerinde hesaplanan tüm özdeğerleri birbirinden farklı ve GF (2) cismi üzerinde hesaplanan karakteristik ve minimal polinomları özdeş ise, S(G) otomorfizim grubunun her P elemanı; $b_i \varepsilon GF(2)$'nin tüm seçenekleri kullanılarak,

$$P = m_{B^2}(B)\left[\sum_{i=0}^{n-d-1} b_i B^i\right] + I_n \tag{2}$$

formülü ile hesaplanır [2].

Teorem 2: Ağaç olmayan n tepeli birleştirilmiş bir G grafının trivial olmayan bir otomorfizim grubu S(G) ve bu grafın $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ bağlantı matrisinin n.ci dereceden karakteristik polinomu $K_B(x)$ olsun. $P \varepsilon S(G)$ olmak üzere, T tepeler kümesinin P altındaki yörüngelerinin sayısı r(r<n) ise; $K_B(x)$ yi bölen r. dereceden bir polinom vardır.

İspat: n tepeli birleştirilmiş bir G grafı ağaç olmadığı için

$$BV = xV \tag{3}$$

matrisinin bir özvektörüdür. (3) eşitliğindeki x reel sayısı da bu özvektöre karşılık olan özdeğerdir. (3) eşitliğinden B matrisinin karakteristik polinomu $K_B(x) = \det(xI_n - B)$ ile hesaplanır. T tepeler kümesinin P altındaki yörüngeleri $C_1, C_2, \ldots, C_r$ olsun. S(G) otomorfizim grubunun bir P elemanı (2) formülü ile hesaplanabildiğinden ve bu formül grafın B bağlantı matrisine göre düzenlendiğinden B nin herbir satır vektörü $C_1, C_2, \ldots, C_r$ yörüngelerine karşılık gelen r parçalı bir $V = \| v_1, \ldots, v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_r \|_{n\times 1}$ sütun vektörüne eşlenebilir. i.ci (i = 1, 2, ..., r) yörüngenin eleman sayısı u_i olmak üzere, V sütun vektörünün u_i tane bileşeni v_i ye eşit olarak alandığından B nin herbir satır vektörünün bileşenleri ile V sütun vektörünün bileşenleri bire-bir olarak eşlenir. (3) denklemini sağlayan V özvektörünün bu şekilde düzenlenmesinin nedeni B ile V nin çarpılabilir iki matris olması ve B matrisi ile P nin $C_1, C_2, \ldots, C_r$ yörüngeleri arasındaki (2) ilişkisi dikkate alınarak, BV çarpımının yörüngelerdeki tepelere bağlantılı olan ayrıt sayılarına göre oluşturulmak istenmesindendir. Buradan,

$$BV = \left\| \sum_{j=1}^{r} v_j y_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{r} v_j y_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{r} v_j y_{rj}, \ldots, \sum_{j=1}^{r} v_j y_{rj} \right\| \quad (4)$$

eşitliği elde edilir. (4) eşitliğindeki y_{ij} (i=1,2,...,r) i.nci yörüngedeki bir tepeden j.nci yörüngedeki tepelere bağlantılı olan ayrıtların sayısıdır. i=1,2,...,r ve j=1,2,...,r olmak üzere; $Y = [y_{ij}]_{r\times r}$ matrisinin bir özdeğeri x ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörü de $V' = \| v_1, v_2, \ldots, v_r \|_{r\times 1}$ ile gösterilirse

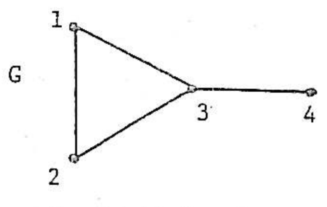
$$YV' = xV' \quad (5)$$

olur. (5) eşitliğindeki Y matrisinin karakteristik polinomu $K_Y(x) = \det(xI_r - Y)$ ile hesaplanır. V ile V' sütun vektörlerinin boyutları dikkate alınırsa, (3) denkleminin (5) denklemine indirgendiği görülür. Buradan n.ci dereceden olan $K_B(x)$ yi bölen r.nci dereceden bir $K_Y(x)$ polinomunun varlığı ortaya çıkar. Böylece G grafının $K_B(X)$ karakteristik polinomunun,

$$K_B(x) = K_Y(x).\,(z_{n-r}x^{n-r} + \ldots + z_2x^2 + z_1x + z_0) \quad (6)$$

şeklinde çarpanlara ayrılabileceği sonucuna varılır. (6) eşitliğindeki zo, $z_1, z_2, \ldots, z_{n-r}$ tam sayılardır.

Teorem 2. nin bir uygulaması olarak Şekil-1 de gösterilen G grafının B bağlantı matrisinin karakteristik polinomunun çarpanlara ayrılışı aşağıda sergilenmiştir.



Şekil-1 : T= {1,2,3,4} tepe kümesiyle bir G grafı.

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]_{4x4} \end{array} \quad (7)$$

Şekil-1'deki G grafının i tepesi j tepesi ile bağlantılı ise $b_{ij} = 1$ (değilse $b_{ij}=0$) olmak üzere oluşturulan $B= [b_{ij}]_{4x4}$ matrisine bu grafın bağlantı matrisi denir ve bu matris (7) de belirtilmiştir. (7) de belirtilen B bağlantı matrisinin karakteristik polinomu

$$K_B(x) = x^4 - 4x^2 - 2x+1 \qquad (8)$$

dir. Şekil-1 deki G grafının S(G) otomorfizm grubunun (2) eşitliğiyle hesaplanan bir elemanı P= (12) (3) (4) dir. T= {1,2,3,4} tepeler kümesinin P altındaki yörüngeleri $C_1 = \{1,2\}$, $C_2= \{3\}$ ve $C_3= \{4\}$ dür. P= (12) (3) (4) permütasyonunun farklı tüm devirleri de $P'_1 = (12)$, $P'_2 = (3)$ ve $P'_3 = (4)$ dür. C_1, C_2 ve C_3 yörüngelerinin eleman sayıları sırasıyla $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ ve $u_3 = 1$ olup, buna göre $V= \| v_1, v_1, v_2, v_3 \|$ sütun vektörü oluşturulur. Bu oluşuma göre (7) deki B bağlantı matrisi ile V sütun vektörünün çarpımı,

$$BV = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 + v_2 \\ 2v_1 + v_3 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

dir. (9) eşitliğinin sağ tarafındaki sütun matrisdeki v_1, v_2, v_3 ün katsayılarına göre;

$$Y= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3x3} \qquad (10)$$

matrisi elde edilir. (10) eşitliğindeki Y matrisi; C_1, C_2 ve C_3 yörüngelerindeki tepelerin bağlantılılık durumları Şekil-1'den denetlenerek şöyle de oluşturulabilir: i.ci (i=1,2,3) bir tepeden j.ci (j=1,2,3) yörüngedeki tepelere bağlantılı olan ayrıtların sayısı y_{ij} olmak üzere;

$$Y=[y_{ij}]_{3x3} = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dir. B, (7) deki matris olmak üzere; $V = \| v_1, v_2, v_3 \|$ ve $v' = \| v_1, v_2, v_3 \|$ sütün vektörlerine göre BV= xV denklemi BV' = xV' denklemine indirgenir. (10) daki Y matrisinin karakteristik polinomu,

$$K_Y(x)= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ -2 & x & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= x^3-x^2-3x+1 \qquad (11)$$

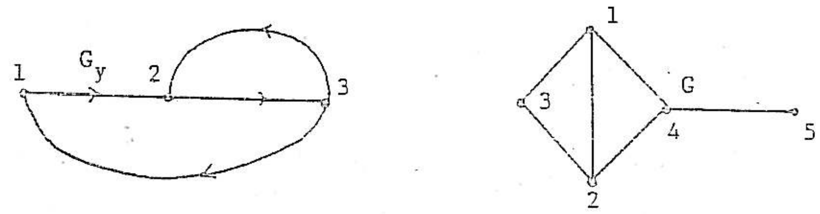
olarak hesaplanır. Hesaplanan $K_Y(x)$ polinomu (8) deki $K_B(x)$ karekteristik polinomu tam olarak böler. Böylece Şekil-1 deki G grafının B bağlantı matrisinin $K_B(x)$ karakteristik polinomu.

şeklinde çarpanlara ayrılır. T = {1,2,3,4} tepeler kümesinin P = (12) (3) (4) altındaki yörüngelerinin sayısı r= 3 olduğundan, $K_B(x)$ x^4-$4x^2$-2x+1 karakteristik polinomunu bölen 3.dereceden bir $K_Y(x) = x^3$-x^2-3x+1 polinomunun varlığı ortaya çıkar.

ŞONUÇ VE TARTIŞMA

Yönlü veya yönsüz bir grafın B bağlantı matrisinin K_B (x) karakteristik polinomu tamsayılar halkası üzerinde çarpanlara ayrılmazsa, S(G) otomorfizm grubu trivialdir.

Şekil-2'de gösterilen G_y yönlü grafının ve G yönsüz grafının karakteristik polinomları çarpanlara ayrılmaz ve bu nedenle $S(G_y)$ ve S(G) otomorfizm grupları trivialdir.



$K_{B(G_y)}(x) = x^3-x-1$ $\qquad$ $K_{B(G)} = x^5-6x^3-2x^2+3x+2$

Şekil-2: Karakteristik polinomları çarpanlara ayrılmayan G_y yönlü grafı ve G yönsüz grafı.

En az üç tepesi olan bir G grafı verildiğinde, bu grafın karakteristik polinomu; a bir tamsayı ve g (x) de çarpanlarına ayrılmayan bir polinom olmak üzere,

$$K_{B(G)}(x) = (x-a). g(x) \qquad (13)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılırsa, $|S(G)| \leq 2$ dir. Örneğin; Şekil-1 deki G grafının KB(X) karakteristik polinomunun (12) de belirtilen çarpanları ile (13) karşılaştırıldığında a= -1 ve g(x) = x3-x2-3x+1 olduğu görülür. Buradan Şekil-1'de gösterilen G grafının S(G) otomorfizm grubu için $|S(G)| \leq 2$ olduğu sonucu çıkar. Gerçekten de Şekil-1'deki G yönsüz grafının (2) formülüne göre hesaplanan S(G) otomorfizm grubu, SN nin trivial olmayan bir alt grubu olup bu grubun elemanları P= (12) (3) (4) ve I= (1) (2) (3) (4); S(G)= 2 dir. Böylece $|S(G)| \leq 2$ eşitsizliği doğrulanmaktadır.

Genel olarak f(x) ve g(x) sırasıyla r.ci ($r \neq 1$) ve k.cı ($k \neq 1$) dereceden ve çarpanlara ayrılmayan polinomlar olmak üzere; $K_B(x)$ = f(x). g(x) şeklinde ise, B= $[b_{ij}]_{nxn}$ bağlantı matrisine karşılık gelen n tepeli G grafının s(G) otomorfizm grubunu oluşturan permütasyonların yörüngelerinin sayısı r,k veya r+k=n dir.

KAYNAKLAR

[1] ARISOY, M., Grafların Kesimleri ve Bu kesimlerin Haberleşme Şebekelerine Uygulanması, Yıldiz Üniversitesi Dergisi, 77-84, 1985/3.

[2] ARASOY, M., Graf Teorisinin Grup Teorisine Bazı Uygulamaları, Ulusal Matematik Sempozyumu II, 25-28 Eylül 1989, İzmir, Baskıda,

[3] ARTZY, R., Cayley Diagrams of Binary Systems, Duke Math, J.28 (1961), 491-495.

[4] CAYLEY, A., The Theory of Groups: a Graphical Representation, Amer.J.Math. ! (1979), 174-176.

[5] CHAO, C.-Y., A note on the eigenvalues of a graph, J.Combinaturial Theory, 10B (1971), 301-302.

[6] KÖNİG, D., Theorie der Endlichen und Undendlichen Graphen, Academische Verlagsgesellschaft M.B.H., Leipzig, 1936.

[7] MASCHKE, W., The representation of finite groups, Amer.J.Math. 18 (1986), 156-194.

[8] MOWSHOWITZ, A., The group of a graph whose adjaceny matrix has all distinct eigenvalues (F.Harary, ed.) Prof Techniques in Graph Theory, Academic Press, New York (1969), 109-110.

[9] SABIDUSSI, G., Some remarks on focal graphs, Combinatorial desing theory, Nort-Holland Math. Stud., 149, North-Holland, Amsterdam New York, 409-418, 1987.

[10] STUECKLE, S., On natural isomorphisms of cycle permütation graphs, Graphs Combin. 4 (1988), no.1,75-85.