# $R^4$ - UZAYINDA BİR EĞRİNİN YER VEKTÖRÜNÜN FRENET EKSENLERİ ÜZERİNDEKİ BİLEŞENLERİ
# The Components Of The Position Vector Of A Curve On Frenet Axist In Spacer$^4$

Doç.Dr.Şuur NİZAMOĞLU
Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
Öğretim Üyesi

Öğr.Gör.Hayrettin KÖROĞLU
Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
Öğretim Görevlisi

ÖZET

Bu çalışmada $R^4$ Euclidean uzayında bir eğrinin yer vektörünün Frenet ekseni üzerindeki bileşenlerini çözüm kabul eden diferensiyel denklem sistemi kurulmuştur. Denklem sisteminin bazı özel çözümlerinden hareketle eğrinin yer vektörünün bileşenleri, eğrinin $\rho, \tau, \sigma$ büyükleri cinsinden bulunarak bazı özel sonuçlar verilmiştir.

SUMMARY

In this paper, a system of differential equationwhich solution is the components of the position vector of a curve on the Frenet axis in Eculidean space $R^4$ is established. In view of some special solutions of a system of differential equation, the components of the position vector of a curve is obtained in terms of the quantities $\rho, \tau, \sigma$ of the curve Moreover some special results are given.

## 1. GİRİŞ

Reel sayılar kümesindeki bir $I = \{t: a < t < b\}$ açık aralığında tanımlı

$$x : I \longrightarrow R^4 \qquad (1)$$

$$t \longrightarrow \vec{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\}$$

şeklindeki differensiyellenebilir fonksiyona $R^4$ de bir eğri denir. $\vec{x}(t)$ eğrisinin hızı

$$v(t) = \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| \qquad (2)$$

biçiminde, $t = t_0$ noktasından $t = t$ noktasına kadar olan yay uzunluğu ise

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| dt \qquad (3)$$

şeklinde tanımlanır. Eğrinin $\vec{x}$ (t) gösteriminde t parametresi yerine s yay uzunluğu alınırsa $\vec{x}$ (s) eğrisine birim hızlı eğri denir [1, 2].

$\vec{x} = \vec{x}$ (s) dört boyutlu Euclidean uzayında birim hızlı bir eğri olsun, Eğrinin her noktasına

$$\begin{aligned}
\vec{T} &= \frac{d\vec{x}}{ds} \\
\vec{N} &= \frac{\vec{T}'}{\rho} \\
\vec{B} &= \frac{\vec{N}' + \rho\vec{T}}{\|\vec{N}' + \rho\vec{T}\|} \\
\vec{E} &= \mu\vec{T} \wedge \vec{N} \wedge \vec{B}
\end{aligned} \qquad (4)$$

olmak üzere $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}$ Frenet çatısını bağlamak mümkündür. Burada tanımlı $\rho(s) = \|\vec{T}'\| > 0$ reel değerli fonksiyonuna, $\vec{x}$ (s) eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonu denir. (4) formüllerindeki $\mu$ katsayısı $[\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{E}]$ matrisinin determinantını +1 yapacak şekilde +1 veya -1 olarak seçilir.

$\rho > 0, \tau > 0, \sigma > 0$ olmak üzere $x : I \longrightarrow R^4$, $C^4$- sınıfından birim hızlı bir eğri ise,

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \rho\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\rho\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N} + \sigma\vec{E} \\
\frac{d\vec{E}}{ds} &= -\sigma\vec{B}
\end{aligned} \qquad (5)$$

türev formülleri geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{B} = -\frac{d\vec{B}}{ds}\vec{N} \\
\sigma &= \frac{d\vec{B}}{ds}\vec{E} = -\frac{d\vec{E}}{ds}\vec{B}
\end{aligned} \qquad (6)$$

biçiminde olup $\tau$ ve $\sigma$ büyüklüklerine sırasıyla eğrinin ikinci ve üçüncü eğrilik fonksiyonu denir. Burada $\sigma$,reel değerli fonksiyonu $\vec{x}$ (s) eğrisinin T-N-B alt uzayından ayrılmasının bir ölçüsüdür. [3]

$$\frac{\sigma}{\tau}\frac{dR}{ds}+\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{\sigma}\left[R\tau+\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\frac{dR}{ds}\right)\right]\right\}=0 \qquad (7)$$

biçimindeki diferensiyel denklemi sağlarlar [3].

$\vec{x}(s)$ eğrisi, $R^4$ Euclidean uzayında sabit eğimli bir eğri ise eğrinin $\rho, \tau, \sigma$ büyüklükleri arasında

$$\frac{\rho}{\tau} = A\,\mathrm{Cos}\int_0^s \sigma ds + B.\mathrm{Sin}\int_0^s \sigma ds \qquad (8)$$

bağıntısı vardır [3].

$\vec{x}(s)$ eğrisi, basit kapalı bir eğri ise

$$\int_0^{2\pi} \sigma\, ds = 2k\pi \quad (k \text{ tam sayı}) \qquad (9)$$

bağıntısı geçerlidir [3]

## 2.$R^4$-UZAYINDA BİR EĞRİNİN YER VEKTÖRÜNÜN FRENET EKSENLERİ ÜZERİNDEKİ BİLEŞENLERİ

$R^4$ Euclidean uzayında, en az C4 sınıfından, birim hızlı bir eğri

$x : I \longrightarrow R^4$

$s \longrightarrow \vec{x} = \vec{x}(s)$

olsun. Eğrinin herhangi bir N(s) noktasındaki Frenet çatısı $\vec{T}$- $\vec{N}$- $\vec{B}$- $\vec{E}$ olmak üzere N(s) noktasındaki $\vec{x}(s)$ yer vektörü

$$\vec{x}(s) = m_1\vec{T} + m_2\vec{N} + m_3\vec{B} + m_4\vec{E} \qquad (10)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $m_i = m_i(s)$ $(i = 1,2,3,4)$ şeklinde fonksiyonlardır. (10) denkleminin her iki tarafının s'e göre türevi alınır ve (5) denklemleri gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} m_1' - \rho m_2 - 1 &= 0 \\ m_2' + \rho m_1 - \tau m_3 &= 0 \\ m_3' + \tau m_2 - \sigma m_4 &= 0 \\ m_4' + \sigma m_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. (11) denklemlerinden $m_2$, $m_3$, $m_4$ ve bunların türevleri yokedilerek $m_1$ değişkenine göre dördüncü mertebeden değişken katsayılı bir diferensiyel denklem bulunur. Bu denklemin çözümü bulunamamıştır. Burada bileşenlere ve $\rho, \tau, \sigma$ büyüklüklerine özel değerler vererek eğrileri sınıflandırmak mümkündür. Şimdi bazı özel durumları inceliyelim.

2.1. $m_1 = c =$ st olsun. Bu durumda $m_1' =$ olacağından (11) denklem sisteminin ilk üçünden sırasıyla

$$
\begin{aligned}
m_2 &= -\frac{1}{\rho} = -R \\
m_3 &= -\frac{1}{\tau}\frac{dR}{ds} + \frac{C}{R\tau} \qquad\qquad (12) \\
m_4 &= \frac{1}{\sigma}\frac{d}{ds}\left[-\frac{1}{\tau}\frac{dR}{ds} + \frac{C}{R\tau}\right] - \frac{\tau R}{\sigma}
\end{aligned}
$$

elde edilir. (11) diferensiyel denklem sisteminin aynı anda gerçekleşmesi için $(11)_4$'ün sağlanması gerekeceğinden $\vec{x}(s)$ eğrisinin $\rho = \frac{1}{R}$ $\tau, \sigma$ büyüklükleri

$$
\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{\sigma}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\tau}\frac{dR}{ds} + \frac{C}{R\tau}\right] + \frac{\tau R}{\sigma}\right\} + \frac{\sigma}{\tau}\frac{dR}{ds} + \frac{C\sigma}{R\tau} = 0 \qquad (13)
$$

biçimindeki diferensiyel denklemi sağlarlar. Burada C sabitinin değeri sıfır alınırsa $\vec{x}(s)$ eğrisinin $m_2$, $m_3$ ve $m_4$ bileşenleri

$$
\begin{aligned}
m_2 &= -\frac{1}{\rho} = -R \\
m_3 &= -\frac{1}{\tau}\frac{dR}{ds} \\
m_4 &= \frac{1}{\sigma}\frac{d}{ds}\left[-\frac{1}{\tau}\frac{dR}{ds}\right] - \frac{\tau R}{\sigma}
\end{aligned}
$$

şeklinde olur. Eğrinin $\rho = \frac{1}{R}$ $\tau, \sigma$ büyüklükleri ise (13) den,

$$
\frac{\sigma}{\tau}\frac{dR}{ds} + \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{\sigma}\left[R\tau + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\frac{dR}{ds}\right)\right]\right\} = 0
$$

diferensiyel denklemini sağlarlar. Son bağıntı (7) den dolayı $\vec{x}(s)$ eğrisinin küresel eğri olduğunu gösterir.

2.2. $m_2 = c =$ st olsun. Bu durumda $m'_2 = 0$ olacağından (11) denklem sisteminin ilk üç denkleminden sırasıyla

$$
\begin{aligned}
m_1 &= s + c\int_0^s \rho\, ds \\
m_3 &= \frac{\rho}{\tau}\left(s + c\int_0^s \rho\, ds\right) \qquad\qquad (14) \\
m_4 &= \frac{1}{\sigma}\frac{d}{ds}\left[\frac{\rho}{\tau}\left(s + c\int_0^s \rho\, ds\right)\right] + c\,\frac{\tau}{\sigma}
\end{aligned}
$$

elde edilir. (11) denklem sisteminin aynı anda sağlanması gerekeceğinden $\vec{x}(s)$ eğrisinin $\rho, \tau, \sigma$ büyüklükleri

$$
\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{\sigma}\frac{d}{ds}\left[\frac{\rho}{\tau}\left(s + c\int_0^s \rho ds\right)\right] + c\,\frac{\tau}{\sigma}\right\} + \frac{\sigma\rho}{\tau}\left(s + c\int_0^s \rho ds\right) = 0 \qquad (15)
$$

(14) den,

$$m_1 = s$$

$$m_3 = \frac{\rho s}{\tau}$$

$$m_4 = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{\rho s}{\tau}\right).$$

şeklindedir. Bu durumda $\vec{x}(s)$ eğrisinin $\rho, \tau, \sigma$ büyüklükleri arasındaki bağıntı da (15) den,

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\sigma} \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho s}{\tau}\right)\right] + \sigma \frac{\rho s}{\tau} = 0$$

biçimindeki ikinci mertebe değişken katsayılı lineer bir diferensiyel denklemdir. Bu denklemde $t = \int_0^s \sigma ds$ dönüşümü yapılırsa, denklem

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\rho s}{\tau}\right) + \frac{\rho s}{\tau} = 0$$

biçiminde sabit katsayılı diferensiyel denkleme dönüşür. Bunun çözümünden $\vec{x}(s)$ eğrisinin $\rho, \tau, \sigma$ büyüklükleri arasında

$$\frac{\rho s}{\tau} = A \operatorname{Cos} \int_0^s \sigma ds + B . \operatorname{Sin} \int_0^s \sigma ds$$

bağıntısı elde edilir. Burada A ve B Keyfi sabitlerdir. $\vec{x}(s)$ eğrisi $R^4$ de basit kapalı bir eğri ise (9) dan $\int_0^{2\Pi} \sigma ds = 2k\Pi$ (k, tam sayı) olacağından, eğrinin $\rho, \tau$ büyüklükleri arasında

$$\frac{\rho s}{\tau} = A$$

bağıntısı geçerlidir.

x (s) eğrisi için, $\int_0^s \rho ds = \frac{1-s}{c}$ ve $\frac{\tau}{\sigma} = st$

alınırsa, (15) den

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\rho}{\tau}\right) + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sigma}\right) . \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho}{\tau}\right) + \sigma \frac{\rho}{\tau} = 0$$

elde edilir. Bu denklemde, $t = \int_0^s \sigma ds$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{\rho}{\tau} = A \operatorname{Cos} \int_0^s \sigma ds + B . \operatorname{Sin} \int_0^s \sigma ds$$

bulunur. Bu ise $\vec{x}(s)$ eğrisinin (8) den sabit eğilimli bir eğri olduğunu gösterir.

2.3. $m_3 = c = st$ olsun. Bu durumda $m'_3 = 0$ olacağından (11) denklem sisteminin, dördüncü, üçüncü ve ikinci denklemlerinden,

$$m_4 = -c \int_0^s \sigma ds$$

$$m_2 = -c \frac{\sigma}{\tau} \int_0^s \sigma ds \qquad (16)$$

$$m_1 = \frac{c}{\rho}\left[\tau + \frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma}{\tau}\int_0^s \sigma ds\right)\right]$$

bulunur. (11) denklem sisteminin birinci denkleminin de sağlanması gerekeceğinden $\vec{x}$ (s) eğrisinin $\rho, \tau, \sigma$ büyüklükleri $C \neq 0$ koşulu ile

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\sigma}{\tau}\int_0^s \sigma ds\right) + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma}{\tau}\int_0^s \sigma ds\right) + \rho\frac{\sigma}{\tau}\int_0^s \sigma ds \qquad (17)$$

$$= \frac{1}{c} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\rho}\right)$$

ikinci mertebe değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemi sağlarlar. Son denklemin çözümü ise sabitlerin değişimi yöntemiyle,

$$\frac{\sigma}{\tau}\int_0^s \sigma ds = A \operatorname{Cos}\int_0^s \rho ds + B.\operatorname{Sin}\int_0^s \rho ds + \int_0^s\left[\frac{1}{c} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\rho}\right)\right]$$

$$\left(\operatorname{Cos}\int_0^s \rho ds - \operatorname{Sin}\int_0^s \rho ds\right)ds \qquad (18)$$

olarak bulunur. $\vec{x}$ (s) eğrisi basit kapalı bir eğri ise (9) dan $\int_0^{2\pi} \rho ds = 2k\Pi$, $\int_0^{2\pi} \sigma ds = 2k\Pi$ (k tam sayı) olacağından (17) den $\vec{x}$ (s) eğrisinin $\rho, \tau, \sigma$ büyüklükleri arasında,

$$\sigma = \frac{\tau}{2k\pi}\left(A - \frac{\tau}{\rho} + \frac{s}{c}\right)$$

bağıntısı bulunur.

2.4. $m_4 = c = st$ ise (11) denklem sisteminin son üç denkleminden,

$$m_1 = -\frac{c}{\rho}\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)$$

$$m_2 = c.\frac{\sigma}{\tau} \qquad (19)$$

$$m_3 = 0$$

koşulu ile

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right) + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right) + \rho\,\frac{\sigma}{\tau} = -\frac{1}{c} \qquad (20)$$

lineer değişken katsayılı ikinci mertebe diferensiyel denklemi sağlarlar. Bunun çözümü ise sabitlerin değişimi yöntemiyle,

$$\frac{\sigma}{\tau} = A\,\mathrm{Cos}\int_0^s \rho ds + B\,\mathrm{Sin}\int_0^s \rho\, ds + \frac{1}{c}\left\{\int_0^s \left[\,\mathrm{Sin}\int_0^s \rho ds - \mathrm{Cos}\int_0^s \rho ds\right] ds\right\}. \qquad (21)$$

dir. Burada A ve B keyfi sabitlerdir.

Eğer $\vec{x}$ (s) eğrisi basit kapalı bir eğri ise $\int_0^{2\pi} \sigma ds = 2k\Pi$ (k tam sayı)olacağından eğrinin $\tau$, $\sigma$ büyüklükleri arasında

$$\frac{\sigma}{\tau} = A - \frac{s}{c} \qquad (22)$$

bağıntısı vardır.

2.5. $\vec{x}(s)$ eğrisi için $\rho$ = st, $\sigma$ = st ve $\tau = 0$ olsun. Bu durumda (11) denklem sisteminin ilk ikisinden,

$$m_1 = A\,\mathrm{Cos}\,\rho s + B\,\mathrm{Sin}\,\rho s$$

$$m_2 = A\,\mathrm{Sin}\,\rho s - B\,\mathrm{Cos}\,\rho s + \frac{1}{\rho}$$

son ikisinden ise

$$m_3 = C\,\mathrm{Cos}\,\sigma s + D\,\mathrm{Sin}\,\sigma s$$

$$m_4 = -C\,\mathrm{Sin}\,\sigma s + D\,\mathrm{Cos}\sigma s$$

elde edilir. Burada A, B, C ve D keyfi parametrelerdir. Bu durumda $\vec{x}$ (s) eğrisinin $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ bileşenleri arasında

$$m_1^2 + \left(m_2 - \frac{1}{\rho}\right)^2 + m_3^2 + m_4^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = R^2 = \mathrm{st}.$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı, $\vec{x}(s)$ eğrisinin Frenet eksenleri üzerindeki bileşenlerinin, merkezi $(0,\frac{1}{\rho},0,0)$ yarıçapı R olan bir küre üzerinde olduğunu gösterir.

KAYNAKLAR

1.Hacısalihoğlu, H.H., 1983, Diferensiyel Geometri. İnönü Üniv.Fen-Edebiyat Fak.Yayınları.

2. O'Neill, B., 1966, Elementary Differential Geometry. Academic Press. New York.

3.Mağden, A., 1990, $R^4$-Uzayında Bazı Özel Eğriler ve Karakterizasyonları., Atatürk Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi.