ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN DOĞRUSAL OLMAYAN SINIR-DEĞER PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Yrd.Doç.Dr.Ali Tekin TİN
Dokuz Eylül Üniversitesi
Mühendislik-Mimarlık Fakültesi

Arş.Gör.Seval ALKU
Dokuz Eylül Üniversitesi
Mühendislik-Mimarlık Fakültesi

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, üçüncü mertebeden doğrusal olmayan bir sınır-değer probleminin sayısal çözümünü, sayısal integrasyon tekniği ile elde etmektedir.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to obtain the numerical solution of a nonlinear third order boundary value problem by the numerical integration techniques.

1.GİRİŞ

Fiziksel olaylar içinde, üçüncü mertebeden doğrusal olmayan sınır-değer problem modeline az rastlandığı gözlenir. Hidrodinamikte bir sınır tabaka problemi olan Blasius denklemi, bunun tipik bir örneğidir. Problem ilk kez H.Blasius tarafından çözülmüştür. Ancak problemin genel çözümünün varlığı ve tekliği, 1930'da S. Goldstein, 1936'da V.M. Falkner ve S.W. Skan, 1937'de L. Howarth D.R. Hartree tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir [1].

2. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN DOĞRUSAL OLMAYAN SINIR-DEĞER PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Genel olarak rasyonel katsayılı üçüncü mertebeden bir diferansiyel denklem

$$y'''(x) = A(x,y)\,[y''(x)]^3 + B(x,y)\,[y''(x)]^2\,y'(x) + C(x,y)y''(x)[y'(x)]^2 + D(x,y)[y'(x)]^2 + E(x,y) \quad (2.1)$$

ya da kapalı formda

$$y'''(x) = f(x,y,y',y'') \quad (2.2.)$$

şeklinde gözönüne alınırsa (2.2)'nin

$$y(a) = \alpha \quad , \quad y'(a) = \beta \quad , \quad y(b) = \gamma. \quad (2.3)$$

Şimdi (2.2) denklemine

$$y'''(x) = \varphi(x) \tag{2.4}$$

dönüşümü getirilerek [a,x] aralığında üç kez ardışık integrasyonu sonucunda

$$y(x) = \alpha + \beta(x-a) + \frac{s}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2\,\varphi(t)\,dt \tag{2.5}$$

yazılır, burada s = y"(a) dır. O halde ikinci sınır koşulu kullanılarak (2.5) den elde edilen

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{(b-a)^2}\left[\gamma - \alpha - \beta(b-a) - \frac{1}{2}\int_a^b (b-t)^2\,\varphi(t)\,dt\right] \tag{2.6}$$

değeri, tekrar (2.5) de yazılarak

$$y(x) = \alpha + \beta(x-a) + \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left[\gamma - \alpha - \beta(b-a) - \frac{1}{2}\int_a^b (b-t)^2\varphi(t)\,dt\right] + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2\,\varphi(t)\,dt \tag{2.7}$$

bulunur. Buradan (2.7) eşitliği, [a,b] aralığı [a,x] ve [x,b] şeklinde bölünerek yeniden düzenlenirse

$$y(x) = F(x) + \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{2.8}$$

doğrusal olmayan integral denkleme dönüşür ve (2.8) de

$$F(x) = \frac{(b-a)^2[\alpha + \beta(x-a)] + (x-a)^2[\gamma - \alpha - \beta(b-a)]}{(b-a)^2} \tag{2.9}$$

sürekli bir fonksiyon

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(x-t)^2(b-a)^2 - (x-a)^2(b-t)^2}{(b-a)^2}, & t < x \\[2ex] \dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{(x-a)^2(b-t)^2}{(b-a)^2}, & x < t \end{cases} \tag{2.10}$$

Ohalde (2.2) ve (2.4)'den elde edilen

$$\varphi(x) = f(x,y,y'') \tag{2.11}$$

ve (2.8) deki

$$H(x,t) = K(x,t)\,\varphi(x) \tag{2.12}$$

fonksiyonları için merkezi sonlu farklar kullanılırsa (2.8) eşitliği üç düzeltilmeli "Simpson Kuralı" ile

$$y_i = F_i + \frac{h}{15}\left[7(H_0 + H_n) + 14\sum_{k=1}^{n-1} H_{2k} + 16\sum_{k=0}^{n-2} H_{2k+1}\right] \tag{2.13}$$

doğrusal olmayan denklem sistemine dönüşür. (2.13) $h = \frac{b-a}{n}$ uzunluklu Gauss-Seidel iterasyonu ile çözülerek y_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ çözümleri elde edilir.

3. ÖRNEK PROBLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Analitik çözümü dönüşümle elde edilemeyen

$$y''' = 1 - (y')^2 - yy' \tag{3.1}$$

diferansiyel denklemin

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y(5) = 1 \tag{3.2}$$

koşullarında çözümünü araştıralım; (2.9) ve (2.10)'dan (3.2) sınır koşulları kullanılarak

$$F(x) = \frac{x^2}{25}, \qquad K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{25(x-t)^2 - x^2(5-t)^2}{50}, & t<x \\[2ex] \dfrac{-x^2(5-t)^2}{50}, & x<t \end{cases}$$

yazılacağı açıktır. O halde (2.13) ün n=10 için çözümleri

İTERASYON SAYISI =19

X	ÇÖZÜM
0.50000	-0.09730
1.00000	-0.33209
1.50000	-0.61473
2.00000	-0.89201
2.50000	-1.12548
3.00000	-1.26497
3.50000	-1.23262
4.00000	-0.89064
4.50000	-0.10812

dir.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Üçüncü mertebeden doğrusal olmayan bir sınır-değer probleminin çözümü amaçlanan bu çalışmada;

a) Analitik çözümü, değişken dönüşümü ile elde edilemeyen problemleri çözme olanağı vardır.

b) Uzun bir işlem zinciri sonunda elde edilen (2.13) sistemi, Gaus-Seidel yöntemi ile bilgisayar destekli çözümler verir.

c) Simetrik olmayan çekirdekli doğrusal olmayan Fredholm türü bir integral denklemi de çözebilen bir yöntemdir.

Yakın geçmişte doğrusal olmayan yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerinde çalışanlar, 1987'de Q. Kong [2] 1988'de K. Vadim [3] 1988'de B.G. Pachpatte [4] dır. Ancak bu çalışmalar çözümlerin yapısını ve davranışını belirlemek için yapılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] DAVIS, H.T., Introduction To Nonlinear Differential and Integral Equations", Dover Publications, Inc. New York, 1962, 400-404.

[2] KONG, Q., "Asymtotic Behavior of A Class of Nonlinear Differential Equatiens of n th order", The Am. Math. Society, Vol. 103, No. 3, July 1988., 831-838.

[3] VADIM, K., "Pertturbations Near Zero of The leading Coefficient of to A Nonlinear Differential Equation", Proc. Am. Math., Soc. 99, 1987, 93-104.

[4] PACHPATTE, B.C., "On Certain Nonlinear Higher Order Differential Equations", Chinese Journal of Mathematic, Vol.16, No. 1, March 1988, 41-54.