BİLİMLERİ DERGİSİ . BUCA EĞİTİM FAKÜLTESİ YAYIN ORGANI
Yıl : 2
Sayı : 2
Ocak 1993

AĞIRLIKLI ENKÜÇÜK KARELER REGRESYONUNDA CHOLESKY, GRAM-SCHIMDT VE GENTLEMAN'S AYRIŞIM METODLARININ BİR KARŞILAŞTIRMASI

Yrd.Doç.Dr.Levent ŞENYAY
Dokuz Eylül Üniversitesi
İ.İ.B.F.Ekonometri Bölümü

ÖZET

Bu çalışmada değişken varyans varsayımı altında uygulanan ağırlıklı enküçük kareler regresyonunda, normal denklemlerin klasik çözüm metoduna karşın, belirli bir regresyona uyumu sağlamak amacıyla kullanılan hesaplama teknikleri'ı len Cholesky, Gram-schimdt ve Gentleman's ayrışım metodları incelenmiştir. Özellikle bilgisayar uygulamalarında, yuvarlama hataları, tekilliğe yakınsama ve kötü şartlandırılmış durumlar açısından bir karşılaştırmaya yer verilmiştir.

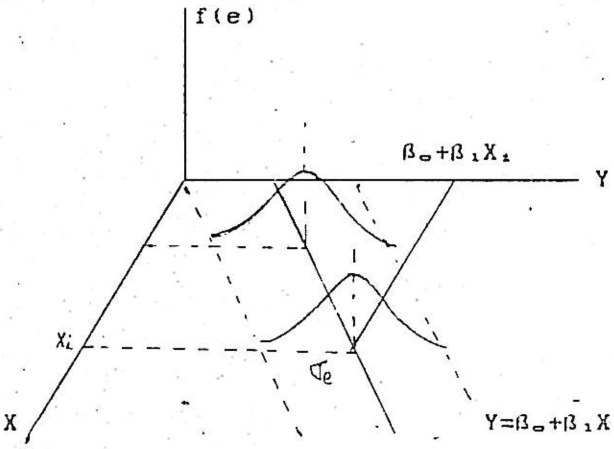
A COMPARISON OF CHOLESKY, GRAM-SCHMDT AND GENTLEMAN'S DECOMPOSITION METHODS IN THE WEIGHTED LEAST SQUARES

SUMMARY

Cholesky, Gram-Schimdt and Gentleman's decomposition methods which are computational techniques for fitting a specified regression have been investigated in this paper. These methods have been applied in the weighted least squares that the variances of the observations are not all equal. It has been stated a comparison of these methods from the point of view of roundoff errors, near singularity and ill-conditioned situations, especially in the computer applications.

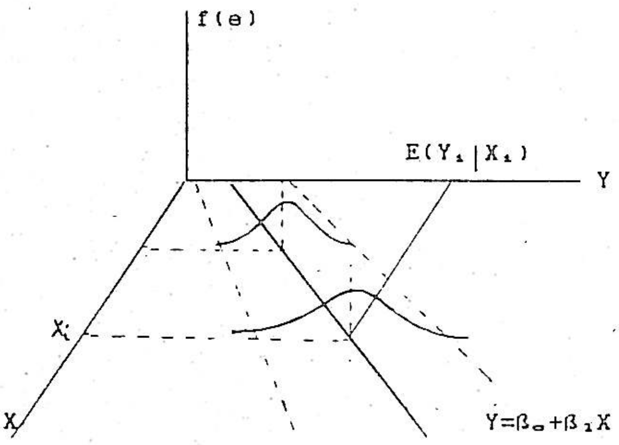
GİRİŞ

Klasik doğrusal regresyonun varsayımlarından biri de tüm hata terimleri varyanslarının sabitliğidir. Bu varsayımının geçerli olmadığı durumlarda ise, klasik doğrusal regresyonun değişen varyans varsayımı ele alınır.



Şekil 1. Sabit varyans varsayımı

Değişkenlerin aldığı değerlerin çok yaygın olduğu durumlarda, hata terimlerinin varyansları buna bağlı olarak farklı büyüklüktedir.



Şekil 2. Değişen varyans varsayımı.

Eğer hata terimleri varyansının, X değiştikçe nasıl değiştiği bilinirse, ilişkiyi hata terimleri varyansının sabit olduğu bir fonksiyona dönüştürülebilir va parametreleri tahminlenebilir. Örneğin ilişki, $Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_i + e_i$ şeklinde ise,

$E(e_i^2) = \sigma_e^2 * X_i^2$ şeklinde ele alınırsa, bu du umda

$E(e_i^2/X_i^2) = \sigma_e^2$

$$Y_i/X_i = \beta_0/X_i + \beta_1 + e_i/X_i$$

elde edilir ve bu model,

$$Y_i^* = \beta_1 + \beta_0 X_i^* + e_i^*$$

şeklinde yazılıp enküçük kareler tahn ini elde edilir. Matris notasyonu ile gösterilecek olursa,

$$E(ee') = E \begin{vmatrix} e_1^2 & e_1e_2 & \dots & e_1e_n \\ e_2e_1 & e_2^2 & \dots & e_2e_n \\ \vdots & & & \\ e_ne_1 & e_ne_2 & \dots & e_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma e^2_1 & & & 0 \\ & \sigma e^2_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma e^2_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma^2_e X2_1 & & & 0 \\ & \sigma^2_e X^2_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma^2_e X2_n \end{vmatrix} = \sigma^2_e W$$

şeklinde elde edilir. Burada W matrisini diagonal elemanları değişen varyansı içermektedir, diğer elemanlar ise hata terimlerinin biribiri ile bağımsız olduğu varsayımından dolayı sıfırdır. Burada değişen varyans $E(e^2_i) = \sigma^2_e * X^2_i$ olarak ele alındığında, bu varsayım genellenecek olursa,

$$E(e^2_i) = \sigma^2_e * \Omega_i \qquad (i = 1,2, \dots ,n)$$

şeklinde belirlenebilir. Burada Ω_i değişen varyans için ölçektir.

Değişen varyans varsayımı altında tahmin iki şekilde olur.

(1) İlişki, hata teriminin sabit varyanslı olacağı yeni bir fonksiyona dönüştürülür.

(2) Değişen varyansları yansıtan W matrisi kullanılarak, bu varsayım altında geliştirilmiş Ağırlıklı Enküçük Kareler formülleri uygulanır.

2. AĞIRLIKLI ENKÜÇÜK KARELER VE NORMAL DENKLEMLER

Temel fikir Y gözlemlerinin diğer bir Z değişkenine dönüştürülmesidir.

$$Z = Q\beta + e^*$$

Bu modelde, $E(e^*) = O$ ve $Var(e^*) = I\sigma^2$ dir. F testi ve güven aralıkları ancak bu durumda yapılabilir. $e^* = N(O, I\sigma^2)$ ve böylece uygulanan ağırlıksız analizle değişkenler elde edilir. Bu tahminler orjinal Y değişkenleri için tekrar açıklanabilir. Ağırlıklı E.K.K. yönteminde normal denklemler,

$$X'W^{-1}Xb = X'W^{-1}Y$$

şeklindedir ve parametre tahminleri ise,

$$b = (X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}Y$$

denklem sisteminin çözümü ile elde edilir.

Ağırlıklı E.K.K.'nın en basit uygulaması gözlemlerin bağımsız olduğu, ancak farklı varyanslara sahip bulunduğu (σ^2_i 'nin bazılarının eşit olabileceği hallerde) yerlerdir. Bu tip problemlerde ilk başta W'nun formu hakkında özel bilgi elde etmek sık sık güçtür. Bu sebeple zaman zaman W=I varsayımı yapmak gerekir ve regresyon analizi ile hatalar incelenerek W'nun formu hakkında bazı yorumlar yapılmaya çalışılır. Değişen varyansı ortaya koymak için çeşitli testler geliştirilmiştir. Bunların en basiti Spearman'ın sıra korelasyon testidir Goldfeld ve Quandt ile Glejser testi de değişken varyans varsayımı ile ilgili başlıca testler olarak kullanılmaktadır.

Eğer ağırlıklı E.K.K. analizi, ancak klasik E.K.K. analizinin uygulanması için adlandırılırsa, elde edilen tahminler sapmasız olacaktır. Minimmum varyanslı tahminler, düzeltilmiş ağırlıklı E.K.K. analizinden elde edilirler. Eğer w_i (pozitif) ağırlıklaaarı ile ağırlıklı E.K.K. uygulamak istenirse, normal denklemler aşağıdaki gibi olur.

$$X'WX\beta^* = X'WY$$

Burada $W = \text{diag}.(w_1, w_2 \ldots, w_n)$ dir. Yine bu denklemler

$$(W^{1/2}X)'(W^{1/2}X)\,\beta^* = (W^{1/2}X)'(W^{1/2}Y)$$

formunda yazılarak $W^{1/2}$ X ve $W^{1/2}$ Y formuna getirilip çözüm aranırsa Seber (1977)'nin 11.2 bölümünde yer alan tüm metodlar kullanılabilir. Burada (X:Y)'nin i'nci sırasının $\sqrt{w_i}$ ile çarpılmalıdır. Cholesky, Gram-Schmidt ve Given's metodlarındaki karekökün ihmal edilebildiği dikkat edilecek önemli bir noktadır. Bunları aşağıdaki çözümde görmek mümkündür.

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad Y = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{vmatrix} \qquad W = \begin{vmatrix} X^2_1 & 0 & 0 \\ 0 & X^2_2 & 0 \\ 0 & 0 & X^2_3 \end{vmatrix}$$

$(X' W^{-1} X)\ b = X' W^{-1} Y$ denklem sisteminin çözümü ile $b_1 = -36/13$ ve $b_2 = 48/13$ kolaylıkla elde edilir. Aynı veriler ile Cholesky, Gram-Schmidt ve Given's metodları kullanılarak çözüm aranacak olursa aşağıdaki gibi olur.

3. AYRIŞIM METODLARI

i) Cholesky metodu:

$W^{1/2}X = W^{1/2}Q_pU$ formundan

$$X'WX = U'Q'_pWQ_pU$$
$$= U'WU$$

formu elde edilebilir. W diagonal matrisin, sadece Q_p 'nin kolonlarına etki etmesinden ve karşılıklı ortogonal olmasından dolayı yukarıdaki eşitlik sağlanır. Bu nedenle,

$$B = U'U = U^{\wedge\prime}D^2U^{\wedge} = U^{\wedge\prime}D_1U^{\wedge}$$

yukarıdaki denklemdeki gibi uygulanmasıyla $X'WX = U^{\wedge\prime}DWDU^{\wedge}$ ve yine $X'WX = U^{\wedge\prime}D_2U^{\wedge}$ yazılabilir Buradan da $D_2 = DWD = WD^2 = WD_1$ pozitif diagonal elemanları ile bir diagonal matristir. β^*'yı bulmak için aşağıdaki eşitlikler çözülmelidir.

$$U^{\wedge\prime}\phi = X'(WY) \quad \phi \text{ için}$$
$$U^{\wedge}\beta^* = D^{-1}{}_2\phi \quad \beta \text{ için}$$

Yukarıdaki işlemler, Seber (1977)-11.2.2 bölümünün son paragrafında ifade edilen Martin ve arkadaşları (1965) tarafından geliştirilmiş karekökşüz tekniği göstermektedir. Bu teknik ağırlıklı E.K.K.'e kolaylıkla uygulanabilir.

$U^{\wedge\prime}D\,U^{\wedge}X = C$ normal denklemlerinin ($D_1 = D^2$ pozitif diagonal matris) için

$$U^{\wedge\prime}\phi = C \quad \phi \text{ için}$$
$$U^{\wedge}X = D^{-1}{}_1\phi \quad X \text{ için}$$

çözümündeki D_1 ve Y yerine WD_1 ve WY kullanılarak,

$X'W^{-1}X = LU$ şeklinde

$$\begin{vmatrix} 49/36 & 11/36 \\ 11/36 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{vmatrix}$$

sisteminin çözümü ile L ve U matrisleri kolaylıkla elde edilebilir. $L\phi = I$ den $\phi = 1$, $\phi = -66/49$ ve $\phi = O$, $\phi_2 = 1$ elde edilir. $U\phi = I$ den ise, $\phi_1 = 36/49$, $\phi_2 = O$ ve $\phi_1 = -66/26$, $\phi_2 = 49/26$ şeklinde U^{-1} matrisinin elemanları bulunmuş olur.

$$X'W^{-1}X = LU$$
$$(X'W^{-1}X)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

sistemlerinin çözümü $b = (X'W^{-1}X)^{-1}(X'W^{-1}Y)$ de yerine konularak

$b_1 = -36/13$ ve $b_2 = 48/13$ elde edilir.

ii) Gram-Schmdt metodu :

Seber (1977) - 11.2.4 bölümünde tanımlanan ortogonal üçgen ayrışım algoritması, ağırlıklı E.K.K. yöntemi ile ilgili olarak kolaylıkla değiştirilebilir. X matrisini U^ 'ya indirgeme işleminde D_1 $(= R'_p \; R_p)$ diagonal matrisinin elemanları saklanabilir. Eğer X yerine WX ve D_1 yerine D_2 saklanarak kullanılacak olursa,

$$U^{\wedge\prime}\emptyset = X'(WY) \qquad \emptyset \text{ için}$$
$$U^{\wedge}\beta^{*} = D^{-1}{}_2\emptyset \qquad \beta^{*} \text{ için}$$

çözümü kullanılabilir. Aynı veriler için bu çözüm,

$$X'W^{-1}X = \begin{vmatrix} 49/36 & 11/36 \\ 11/36 & 3 \end{vmatrix}$$

matrisinde

$$y_1 = x_1 = \begin{vmatrix} 49/36 \\ 11/36 \end{vmatrix} \quad \text{şeklinde alınarak,}$$

$$y_2 = x_2 - \frac{x'_2 y_1}{y'_1 y_1} y_1 = \begin{vmatrix} -1.52/6 \\ 0.188 \end{vmatrix} \quad \text{elde edilir. Buradan da,}$$

$$q_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} \Rightarrow \quad y_1 = \sqrt{5.2}\, q_1 \quad \text{ve}$$

$$q_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} \Rightarrow \quad y_2 = \sqrt{0.099}\, q_2 \quad \text{bulunur.}$$

bu çözüm Q_p U'da yerine konulursa, ve Q_p 'nin ortogonal bir matris olduğu gözönüne alınarak $Q_p = Q^{-1}$ yazılabilir. Bu sonuç kullanılarak, $U^{-1}Q^{-1}{}_p = U^{-1}Q_p$ yazılabilir. Buradan ø için elde edilen çözümler $\emptyset_1 = 1/\sqrt{5.2}$, $\emptyset_2 = O$ ve $\emptyset_1$ O, $\emptyset_2 = 1/\sqrt{0.099}$ şeklinde olur.

$$(Q_p U)^{-1} = U^{-1}Q^{-1}{}_p = \begin{vmatrix} 4.15 & -2.53 \\ -2.53 & 1.88 \end{vmatrix}$$

olarak $b_1 = -2.76$ ve $b_2 = 3.69$ elde edilir.

iii) Gentleman's metodu:

$U = D^{1/2}U^{\wedge}$ ya benzer şekilde, $U^{\wedge}$ ve D_1 çözümü aranırken X matrisinin numaralanan bir sırası ile elde edilen $D^{1/2}U^{\wedge}$ 'nun bir sırasının değiştirildiği gözönüne alınırsa,

$$0, \ldots, 0, \sqrt{d}, \sqrt{d}\,'u_{i+1}, \ldots . \sqrt{d}u^{\wedge}_m, \ldots, \sqrt{d}u^{\wedge}_p$$

$$0, \ldots, 0, \sqrt{\delta}v_i, \sqrt{\delta}v_{i+1}, \ldots . \sqrt{\delta}v_m, \ldots, \sqrt{\delta}v_p$$

Aşağıdaki denklemler kullanılarak dönüştürülen yeni denklem sistemleri oluşur (Gentleman-1973, 1974a).

$$0, \ldots, 0, \sqrt{d'}, \ldots . \sqrt{d'}u^{\wedge}_m, \ldots, \sqrt{d'}u^{\wedge}_p$$

$$0, \ldots, 0, 0, \ldots . \sqrt{\delta'}v'_m, \ldots, \sqrt{\delta'}v'_p$$

Burada, $d' = d + \delta\, v^2_i$

$$c = d/(d + \delta v^2_i) = d/d'$$

$$\delta' = d\delta/(d + \delta v^2_i) = c\,\delta$$

$$s = \delta v_i/(d + \delta v^2_i) = \delta v_i/d'$$

$$v'_m = v_m - v_i u^{\wedge}_m \quad (u^{\wedge}_i = 1) \text{ ve}$$

$$u^{\wedge\prime}_m = cu^{\wedge}_m + sv_m \text{ dir.}$$

Bu işlem, değiştirilen sıraların yeni $D^{1/2}_1$ $U^{\wedge}$ 'nın bir sırası ve X'in yeni sıralanmış bir sırası olarak açıklanabildiğidir. Saklanan D_1 ve $U^{\wedge}$, $U^{\wedge}$'yı saklamaktan daha çok yer kaplamaz ve yukarıdaki güncelleştirme formülleri sadece karekökü ortadan kaldırmaz, hatta birçok çarpımlar gibi yarıya indirir (Gentleman, 1974a, s.452). Ağırlıksız durumda, daima $\delta = 1$ alınır. Ağırlıklı E.K.K. yöndeminde, δ, X'nin belli sıralarına ait w ağırlıklarına eşit alınır ve böylece D_1 yerine D_2 $(=D_1W)$ elde edilir. Eğer yukarıdaki metod (X:Y)'de uygulanırsa,

$$\begin{vmatrix} U^{\wedge} & : & Z^{\wedge} \\ 0 & : & t^{\wedge} \end{vmatrix}$$

elde edilir. Buradaki $U^{\wedge}\beta^{*} = Z^{\wedge}$ ve hata kareler toplamları ise $t'\ {}^{\wedge}t^{\wedge}$ şeklindedir.

4. SONUÇ VE METODLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

$Bx = c$ doğrusal denklemlerinin bir seti, B ve c'nin elemanlarındaki küçük hatalar veya varyasyonlar x'in çözümünde büyük bir etkiye sahipse $Bx = c$'ye kötü şartlanmış ill-conditioned) denir. Örneğin; $Bx = c$'nin çözümü arasındaki δx farkı

$$(B + \delta B)(x + \delta x) = c + \delta c$$

yukarıdaki gibi olur,

$$\delta x = (B + \delta B)^{-1}(\delta c - \delta Bx)$$

olarak açıklanabilir ve bunun değeri ters matrise bağlıdır. Şayet B tekilliğe yakınsa, elemanlarındaki küçük değişiklikler tekilliğe neden olabilir, daha sonra δ x çok büyük olabilir. B '=X ' X) ve c (=X ' Y) normal E.K.K. denklemleri X ve Y'den hesaplanması gerektiği için yuvarlama hatalarını içerecektir. Hatta, B tam olarak hesap edilebilse bile, bilgisayarda tam olarak gerekli bir şekilde saklanamayacaktır. Bilgisayarda bütün sayılar ikili sistemde saklanır ve 0.1 gibi bir ondalıklı sayı bir sona erdirilemiyen ikkili sayı kesridir. 1/7 gibi bir ondalıklı sayı ise sona erdirilemiyen ondalıklı kesirdir. Bu, şayet X kötü şartlanmış ise, X'in elemanlarındaki küçük değişiklikler $(X' X)^{-1}$ ve $ß^\wedge = (X' X)^{-1}X$ Y'de büyük değişikliklere neden olabilir. Daha sonra X X formunda bulunan bir hata, sonucun doğruluğu ve kararlılığında ciddi bir etkiye sahip olabilir. Bu durum x'in tam olarak hesap edilememe nedeniyle daha da kötü olur. Yuvarlama hataları, çözüm işlemini hızlandırır ve bunlar dengeyi hafifçe bozarlar ve yine şayet X ' X tekilliğe yakınsa, problemi kararsız kılar. Kötü şartlanmış bir problem, polinomial regresyonda özellikle ciddidir (Seber, 1977).

X gibi bir matrisin kötü şartlanmış olmasının bir ölçüsü onun şart sayısıdır. K(X)'i, X'in sıfır olmayan en büyük tekil değerinin en küçüğe oranı olarak tanımlanırsa, X'in tekil değerleri, X' X'in eigen değerlerinin pozitif karekökleridir. K(X) ile aşağıdaki sonuçlar göz önüne alınarak,

1) $K(X'X) = [K(X)]^2$
2) $X'X = U'U$ iken $K(U) = K(X)$

K>1 olduğunda, (1)'den X' X'in X'den daha kötü şartlandırılmış olduğu görülür. Böylece K(X) makul bir büyüklükte olmadıkça ve X ' X doğru olarak oluşmadıkça X ' X'i hiç oluşturmamak daha iyidir. Hesaplamaya başlamadan önce K(X) bilinmediğinden ve (2)'ye dikkat ederek ve U'yu direk olarak ortogonal ayrışım metodlarından biri kullanılarak elde etmek ve X ile daha sonra işlem yapmak daha güvenlidir. Buna rağmen bu çok da kolay değildir. Çünkü; K^2 (X)'in etkisi tamamen önlenemez (Golup, 1969, s.385 ve Wilkinson, 1974). Bu çalışmalarda sözü edilen üç yaklaşımdan en çok tutulanının, sayısal analistler arasında Householder metodu olduğu görülmektedir. Bu metod MGSA (Modified Gram-Schimdt Algorithm)'den biraz daha hızlıdır.

MGSA ve Givens'a benzer bir doğruluğa sahiptir. Buna rağmen, Givens' metodunun kareköksüz düzeltilmiş hali, Householder metoduyla hemen hemen aynı işlem süresine sahip olmasıyla son derece kuvvetli bir alternatif görünümü arzeder, ağırlıklı E.K.K.'e kolaylıkla uygulanır ve Seber (1974)'de sözü edilen tüm avantajlara sahiptir. Tüm metodların hata analizleri Wilkinson (1967, 1974), Golup (1969, s.382-385) ve Gentleman (1973) tarafından yapılmıştır.

Tekil bir X ' X'in kullanılabilirliliğini sağllayan çeşitli düzeltme işlemleri Seber (1977) 11.5'inci bölümünde verilmektedir. örneğin, pivotlamayı kullanarak, X için kolonlarda karşılıklı olarak öyle değişim içine girerler ki, Givens' hariç, her aşamada U'nun bir sonraki diagonal elemanını enbüyükler.

Givens' metodu pivotlamasız kullanılabilir. Ayrışımın tekil değeri, enazından diğer metodlardaki kadar doğru görülmektedir. X'in rankı bilinmediğinde ve X tam ranklı ise ridge regresyonda olduğu gibi tahmin edilemez. Buna rağmen Householder metodundan 2 ile 4 kez daha uzun işlemlidir. Householder metodu genel doğrusal hipotezin testi için F istatistiğinin hesaplanması problemi ile ilgili olarak genelleştirilebilir. Aynı zamanda, bir sırayı (X:Y)'ye ilave etmek için veya bir kolonu X'e ilave etmek için seçeneki olarak uyarlanabilir. X'in sıraları ve kolonları Givens' dönüşümlerinin kullanılmasıyla en iyi şekilde ortadan kalkar. Aynı zamanda MGSA metodu X'e bir kolon ilave etmede basit bir yöntem sağlar, ancak sıraları ilave etmede aynı kolaylık geçerli değildir. Givens' metodu sıraların ilavesinde iyi bir yöntemdir, ancak bu metodda kolonların ilavesi daha zordur. Açıkca görülmektedir ki, Householder ve Givens' metodlarının bir kombinasyonu en uygun olandır.

Uygulamada bir bağımsız değişkenin, diğer değişkenlerin doğrusal bir kombinasyonu ile yüksek derecede korelasyonlu olduğu konusunda fikir birliği yoktur. Bu yüzden X'in kolonları doğrusal bağımlılığa yakın olacaktır. Bu, X ' X'in tekilliğe yakın olacağı anlamındadır. En küçük eigen değer küçük, K(X) büyük olacaktır. Örneğin; Lomgley (1967)in test verissi K = 4.8 * 10 'a sahiptir, buna karşılık Wampler (1970)'in polinomial regresyon modelleri 5. veya 6. dereceden kötü şartlandırılmıştır. Bu nedenlle, hem ß^'nın doğru bir yuvarlanmış çözümünü elde etmek, hem de daha yüksek bir hassaslıkta çalışmaksızın bunu başarabilmek için X X'in çok kötü şartlandırıldığını görmek amaçlanır ve böyle bir program arzu edilir. ß^ ve e'deki daha yüksek bir doğruluk için iteratif düzeltme kullanılabilir. Eğer model çok kötü şartlandırılmış ise bu da işe yaramayabilir. Eğer bir iterasyondan sonra ß^'da hissedilebilir bir ilerleme yoksa problem yüksek derecede kötü şartlandırılmıştır. Bu durumda daha doğru olan, bir daha yüksek bir hassaslıkta çalışmaktansa, bir tekil değer ayrışım yöntemini kullanmak ya da modele tekilmiş gibi davranmak daha uygun olacaktır. Björck ve Golup (1967'nin Householder dönüşümleri kullanılan programlar üstte sözü edilen gerekleri yerine getirirler.

Sonuç olarak, E.K.K. algoritmalarının Bauer (1965'e uygun diğer bir algoritma ile karşılaştırılması uygun olacaktır. Bu algoritmma da X için (X = Rp U^) gibi bir ayrışımı kullanır. Gauss eleminasyonu seçilmiş bir sıra yerine eleminasyon için kullanılan sıraların ağırlıklı uygun bir kombinasyonunu kullanır. Bu algoritma için hazırlanmış mükemmel Algol programları mevcuttur. Diğer metodların pek çoğu Wilkinson ve Reinsch (1971)'de detaylı olarak incelenmmektedir. Seber (1977) 11.2 bölümündeki algoritmaları kullanan programların sayısal bir karşılaştırması ise Wampler (1970) tarafından verilmiştir.

KAYNAKLAR

BAUER, F.L., "Eliminationwith weighted row combinations for solving linear equations and least squares problems", Numer. Math., 7,338-352, 1965.

BJÖRCK, A. ve GOLUP, G.H., "terative refinement of linear least square solutions by householder transformation", BIT Nord. Tidskr. Informations Behandl, 7, 322-337, 1967.

GENTLEMAN, W.M., "Algorithm AS 75P: Basic procedures for large, sparse or weighted linear least squares problems", Appl. Stat., 23, 448-44, 1974.

GLEWSER, H., "A new test for Heteoscedasticity", Journal of the American Statistical Association, 64, 326-323, 1969.

GOLDFELD, S.M. ve QUANDT, R.E., "Some tests for Homoscedasticity" Journal of the American Statistical Association, 60, 539-547, 1965.

GOLUP, G.H., "Matrix decompositions and statistical calculations", Statistical calculations", Statistical Computation, sf. 365-397, Academic Press, New York, 1969.

GOLUP, G.H. ve STYAN, G.P., "Some aspectes of numerical computations for linear models", Interface-Proceeings of Computer Sciences and Statistics, 8 Th. Annual Symposium on the Interface (Aug. 1973), sf. 189-192, Statistical Computing Laboratory: Iowa Statte University, 1974.

LONGLEY, J.W., "An appraisal of least squares programs for the electronic computer from the point of view of use", J. Am. Stat. Assoc. 62, 819-841, 1967.

MARTIN, R.S., PETERS, G. ve WILKINSON, J.H., "Symmetric decomposition of a positive definite matrix", Numer. Math., 7, 362-383, 1965.

MULLER, M.E., "Computers as an instrument for data analysis", Technometrics, 12, 259-294, 1970.

SEBER, G.A.F., Linear Regression Analysis, John Wiley and Sons, New York, sf. 317-330, 1977.

WAMPLER, R.H., "AA report on the accuracy of some widely least squares computer programs", J.Am. Stat. Assoc., 65, 549-565, 1970.

WILKINSON, J.H., "The solution of ill-conditioned linear equations", Mathematical Methods for Digital Computers, 2, 65-93, 1967.

WILKINSON, J.H., "The classical error analyses for the solution of linear systems", J. Inst. Math. Appl., 10, 175-180, 1974.

WILKINSON, J.H. ve REINSCH, J., Handbook for Automatic Computation. Vol. III, Linear Algebra, Springer-Verlag, Berlin 1971.