TOPOLOJİK UZAYLARDA FONKSİYONLARIN KUVVETLİ SÜREKLİLİKLERİ ÜZERİNE

Yrd.Doç.Dr. **Ahmet Z.ÖZÇELİK**
Fen Bilimleri Eğitimi Böl.
Öğretim Üyesi

ÖZET

Bu çalışmada, bir fonksiyonun h.h. kuvvetli θ- sürekliliği tanımı yapıldı. Bu sürekliliğin kuvvetli θ- süreklilik ve süreklilikle olan ilişkileri araştırıldı. Aşağıdaki sonuçlar Teo.12. ve Teo.13. ile verildi.

1. Fonksiyonun tanım kümesi yarı regüler uzay ise, süreklilik ile h.h. kuvvetli θ- sürekliliğin çakıştıkları,

2. Tanım kümesi h.h. Regüler uzay olması halinde, h.h. kuvvetli θ- sürekliliğin kuvvetli θ- sürekliliği gerektirdiği ispat edildi.

SUMMARY

In this study, the definition of the almost strongly θ- continuity of a function is given. The relations between almost strongly θ- continuity with the continuity and strongly θ- continuity are investigated. The following results are given by theorem 12. and theorem 13.

1. If the domain of the function is semi regular space, the almost strongly θ- continuity of the function coincides with the original one,

2. If the domain of the function is almost regular space, the almost strongly θ- continuity of the function coincide with the strongly θ- continuity.

GİRİŞ

Topolojik uzaylarda bir fonksiyonun sürekliliği uzayların donatılmış olduğu topolojik yapıya doğrudan bağlı olduğundan fonksiyonların kuvvetli, zayıf sürekliliği konusunda birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan amacımıza yönelik olarak bazı tanımlar ve temel kavramlar aşağıda verilmiştir.

Hemen Hemen (Almost) Süreklilikler ve Özellikleri

Günümüz matematik literatüründe, bir topolojik uzaydan diğer bir topolojik uzaya tanımlı bir fonksiyonun hemen hemen (h.h.) sürekliliğinin birçok tanımı verilmiştir. Bu tanımlar içerisinde temel olanlar aşağıda verilmiştir. Bu çalışmada tanım 1 ile verilen h.h. süreklilik temel alınmıştır.

Tanım 1: $f: X \to Y$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x)$ noktasını kapsayan $\forall V \subset Y$ açık kümesi için

$$f(U) \subset \overset{o}{\overline{V}}$$

olacak şekilde, $x \in X$ noktasını kapsayan bir $U \subset X$ açık kümesi varsa f fonksiyonuna, x noktasında h.h. süreklidir denir [1].

Tanım 2: $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin, eğer $f(x)$ noktasını kapsayan $\forall V \subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(\overline{V})$ kümesi x noktasının bir komşuluğu ise f fonksiyonuna x noktasında h.h. süreklidir denir [2].

Tanım 3: $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun grafiğini kapsayan $W \subset X \times Y$ açık kümesi verildiğinde, grafiği W kümesinin alt kümesi olan sürekli bir $g: X \to Y$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonuna h.h süreklidir denir. [3].

Sırası ile SINGAL, M.K, HUSAIN, T. ve STALLINS tarafından verilen bu tanımlar aşağıdaki örneklerle görüleceği gibi birbirlerinden bağımsızdırlar. Ayrıca sürekli bir fonksiyon hem Singal hem Husain ve hemde Stallings anlamda h.h. süreklidir.

Örnek 1: $\mathbb{R}$ reel eksen ve üzerinde alışılmış topoloji verilmiş olsun.

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in \phi \quad \text{(rasyonel)} \\ -x & x \notin \phi \end{cases}$$

ile tanımlı $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Husain anlamda h.h. sürekli olan fakat Singal anlamda h.h. sürekli olmayan bir fonksiyondur.

Örnek 2: $(\mathbb{R}, \tau) \ni \tau = \{\phi, \mathbb{R}$ ve $(A \subset \mathbb{R}$, A sayılabilir$\}$ ve

$(X, \tau^*) \ni X = \{a,b\} \quad \tau^* = \{\phi, X, \{a\}\}$

topolojik uzayları ile

$$f(x) = \begin{cases} a & x \in \phi \text{ (rasyonel)} \\ b & x \notin \phi \end{cases}$$

fonksiyonu Singal anlamda h.h. sürekli olan ancak Husain anlamda h.h. sürekli olmayan bir fonksiyondur.

Örnek 3: Reel eksen ile alışılmış topoloji verilmiş olsun.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu Stallings anlamda h.h. sürekli olan, Singal anlamda h.h. sürekli olmayan bir fonksiyondur.

Kuvvetli (Strongly) θ - Süreklilik

T.Noiri, bir X topolojik uzayından Y uzayı içine tanımlı bir f fonksiyonunun kuvvetli θ-sürekliliği tanımını şöyle vermiştir.

Tanım 4: $f: X \to Y$ içine bir fonksiyon olsun. Eğer, $\forall x \in X$ ve $f(x)$ noktasını kapsayan $\forall V \subset Y$ açık kümesi için,

$$f(\overline{U}) \subset V$$

olacak şekilde x noktasının bir $U \subset X$ açık komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x noktasında kuvvetli θ - süreklidir denir [4].

Tanımdan görüleceği üzere bir f fonksiyonu kuvvetli θ- sürekli ise süreklidir ancak aşağıdaki örnekte görüleceği gibi sürekli bir fonksiyonun kuvvetli θ - sürekli olması gerekmez.

Örnek: $\mathbb{R}$ üzerinde sol yarı açık aralıklarla doğrulan topolojik yapı var olsun.

$$i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

birim fonksiyonu sürekli olan fakat kuvvetli θ - sürekli olmayan bir fonksiyondur.

Tanım 5: Bir X topolojik uzayında $A \subset X$ kümesi kapalı bir kümenin içine eşitse ya da kendi kapanışının içine eşit oluyorsa A kümesine **regüler açık** küme denir.

Tanım 6: Topolojik X uzayının bir B alt kümesi açık kümenin kapanışına eşitse ya da kendisinin içinin kapanışına eşit ise B kümesine **regüler kapalı** küme denir.

Tanım 7: Aşağıdaki [R] özelliğini sağlayan bir X topolojik uzayına **Regüler uzay** denir.

[R]: Uzayın bir K kapalı alt kümesi ile, K kümesine ait olmayan bir x noktası verildiğinde, K kümesi ile x noktasının ayrık birer komşulukları vardır.

Tanım 8: Topolojik bir X uzayında, uzayın regüler açık alt kümeleri ailesi uzayın topoloji tabanı oluyorsa uzaya, **yarı Regüler (semi regular)** uzay denir.

Tanım 9: X topolojik uzayında, $x \in X$ noktasını kapsamayan uzayın regüler kapalı her A alt kümesi için, x noktası ve A kümesinin ayrık birer komşulukları var ise uzaya **h.h. regüler (almost regular)** uzay denir.

Sonuç: 10: Her h.h regüler bir uzay aynı zamanda yarı regüler ise uzay regüler uzaydır.

Şimdi X topolojik uzayından Y topolojik uzayı içine tanımlı bir f fonksiyonunun h.h. kuvvetli θ - sürekliliği tanımını yapıp, bu sürekliliğin, süreklilik ve kuvvetli θ - süreklilik ile arasındaki ilişkileri araştıralım.

Tanım 11: $f: X \rightarrow Y$ içine bir fonksiyon X,Y iki topolojik uzay olsun. Eğer $\forall x \in X$ ve $f(x)$ noktasını kapsayan her $V \subset Y$ açık kümesi için,

$$f(\overset{\circ}{\bar{U}}) \subset V$$

olacak şekilde x noktasını kapsayan regüler açık bir $U\subset X$ kümesi varsa f fonksiyonuna h.h. kuvvetli θ - süreklidir denir. Açıktırki:

$$\underbrace{f(U)\subset \underbrace{f(\mathring{\bar{U}}) \subset \underbrace{f(\bar{U})\subset V}_{\text{kuvvetli } \theta \text{ - süreklilik}}}_{\text{h.h. kuvvetli } \theta \text{ - süreklilik}}}_{\text{süreklilik}}$$

kapsama bağıntıları gereği kuvvetli θ - sürekli fonksiyon, h.h. kuvvetli θ -sürekli ve süreklidir. Ancak sürekli bir fonksiyonun h.h. kuvvetli θ - sürekli olması gerekmez.

Teorem 12: $f:X\rightarrow Y$ içine bir fonksiyon X, h.h. regüler bir uzay olsun. f fonksiyonunun kuvvetli θ - sürekli olması için gerek ve yeter koşul, fonksiyonunun h.h. θ -sürekli olmasıdır.

İspat: Kuvvetli θ -sürekli bir fonksiyon h.h. kuvvetli θ -sürekli olduğundan gereklilik sağlanır.

$f:X\rightarrow Y$ h.h. kuvvetli θ - sürekli içine bir fonksiyon, X h.h. regüler bir uzay olsun. $\forall x\varepsilon X$ için V, $f(x)$ noktasını kapsayan bir açık küme olmak üzere

$$f(\mathring{\bar{U}})\subset V$$

olacak şekilde x noktasını kapsayan $U\subset X$ regüler açık kümesi vardır. Uzay h.h. düzenli olduğundan

$$x\varepsilon F\subset \bar{F}\subset \mathring{\bar{U}}$$

olacak şekilde $F\subset X$ açık kümesi vardır. O halde

$$f(x)\ \varepsilon\ f(\bar{F})\subset f(\mathring{\bar{U}})\subset V \text{ olur.}$$

Yani f fonksiyonu kuvvetli θ -süreklidir.

Teorem 13: $f:X\rightarrow Y$ içine bir fonksiyon, X yarı regüler uzay olsun. f fonksiyonunun h.h. kuvvetli θ -sürekli olması için gerek ve yeter koşul, f fonksiyonunun sürekli olmasıdır.

İspat: Her h.h. kuvvetli θ -sürekli fonksiyon'un sürekli olduğu açıktır.

$f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ve X yarı regüler uzay olsun. $x \varepsilon X$ noktası için $V \subset Y$ $f(x)$ noktasını kapsayan açık bir küme olmak üzere,

$$f(U) \subset V$$

olacak şekilde x noktasını kapsayan $U \subset X$ açık kümesi vardır. X yarı regüler uzay olduğundan regüler açık bir $K \subset X$ kümesi vardır.

$$x \varepsilon \overset{o}{\bar{K}} = K \subset U \text{ olur.}$$

Dolayısı ile

$$f(x) \varepsilon f(\overset{o}{\bar{K}}) \subset f(U) \subset V \text{ olup}$$

$f(\overset{o}{\bar{K}}) \subset V$ olur, yani f fonksiyonu h.h. kuvvetli θ - süreklidir.

Teorem 12 ve Teorem 13'ün bir sonucu olarak aşağıda verilmiştir.

Sonuç 14: $f: X \rightarrow Y$ içine bir fonksiyon, X regüler uzay olsun. f fonksiyonunun kuvvetli θ - sürekli olması için gerek ve yeter koşul fonksiyonunun sürekli olmasıdır.

KAYNAKLAR

[1] SINGAL, M.K. and SINGAL, A.R., Almost continuous mappings Yokohama, Math. J. 16/1968, 63-73, MR 41≠6182.

[2] HUSAIN, T., Almost continuous mappings. Prace Mat. 10 (1966), 1-7, MR 36 ≠ 3322.

[3] STALINS, J.P., Fixed point theorems for connectivity maps. Fund. Math. 249-263, MR 22 ≠ 8485.

[4] NOIRI, T., On δ.continuous functions, Jour. of Korean Math. Soc., 16, No.2 (1980) pp.161-166.

[5] Yüksel Ş.-ÖZÇELİK A.Z.; Topolojik Uzaylarda Fonksiyonların Sürekliliği, Zayıf ve Kuvvetli Süreklilikler S.Ü.Fen Bil.Enst. 1988 KONYA

[6] KURATOSKI, K., Topology Academic Press Newyork and London 1966.