STANDART L_1 MANTIĞINDAN FUZZY KÜMELERİNE GEÇİŞ VE BİR UYGULAMA

Yard.Doç.Dr.Zekeriya GÜNEY
Buca Eğitim Fakültesi
Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi

ÖZET

Bu yazıda, sonlu ve sonsuz değerli mantıkların temel fikri verilmiş ve klasik mantıktan klasik kümelere geçişin bir genellemesi olarak sonsuz değerli mantıktan fuzzy kümelerine geçiş açıklanmıştır.

Öğrenci başarılarına ilişkin bazı önermeler, bunların tanımladığı fuzzy kümelerinin elemanlık fonksiyonları yardımıyla değerlendirilmiştir.

SUMMARY

The basic idea of the logics with finite and infinite value is given and to pass in to the fuzzy sets from logic with infinite value is explained as a generalization of to pass into the classical sets from classical logic in this article.

Some propositions relating to students succeses is evaluated by the membership function of the fuzzy sets which are defined by these propositions.

1.GİRİŞ

Klasik iki değerli biçimsel mantığın, Aristo (MÖ 384-322) tarafından önerilen üç temel varsayımından biri, "üçüncü halin imkansızlığı" ilkesidir.[1] Bunu, "Bir önerme ya doğrudur ya da yanlıştır, üçüncü bir olanak yoktur" şeklinde ifade ederiz. Fakat ilkeyi koyan Aristo bile, bunun gelecekteki olaylara ilişkin önermeler için doğru olup olmadığını, "On interpretation" adlı eserinde sorgulamıştır.[1] Bugün artık, yalnızca gelecekteki değil, günümüzdeki olaylara ilişkin bazı önermeler için de en azından "Heisenberg belirsizlik ilkesi"[2] gereğince kesin doğru veya kesin yanlış denilemiyeceği bilinmektedir. Bu gerçek, Aristo'nun (iki bin küsur yıl boyunca sadık kalınan) ilkesinden vazgeçilip çok değerli mantıkların gelişmesine yol açmıştır.

2.ÇOK DEĞERLİ MANTIKLAR

Lükasiewicz, Heyting, Reichenbach[3] gibi mantıkçılar, 1930'larda, bir örermenin, "doğru", "yanlış" ve "belirsiz" olmak üzere, üç durumu olabileceğini varsayarak çeşitli 3-değerli mantıklar geliştirmişlerdir. [1] Fakat belirsizlik durumunun da çeşitli dereceleri olabilir. Belirsiz diye nitelendirilen önermelere, günlük konuşma dilinde kullanılan, "az doğru", "çok doğru", "az çok doğru", "çok az doğru", "çok yanlış", "büyük ölçüde yanlış" vb. gibi niteleyicilere de mantıksal bir anlak kazandıracak şekilde, çeşitli sayısal doğruluk değerleri verilebilir. Bu düşünceyle de, bir önermenin, (herhangi bir $n \geq 2$ doğal sayısı için)

$$T_n = \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}$$

kümesindeki n farklı doğruluk değerini olabileceği varsayılarak n- değerli mantıklar geliştirilmiştir. Bunlardan, öncü sayılan, Lukasiewicz Mantığında, "değil(-)" ve " ise ($\Rightarrow$)" eklemleri ile elde edilen mantık asalları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\bar{a} = 1 - a$$

$$a \Rightarrow b = \min(1, 1+b-a) \qquad (1)$$

Bu ikisinden hareketle, " ve ($\wedge$) ", " veya ($\vee$)" , "ancak ve ancak ($\Leftrightarrow$)" eklemleri ile elde edilen mantık asalları da,

$$a \vee b = (a \Rightarrow b) \Rightarrow a \;,\quad a \wedge b = \overline{\bar{a} \vee \bar{b}} \;,\quad a \Leftrightarrow b = 1 - |a-b| \qquad (2)$$

1) Diğer iki varsayım: 1.Özdeşlik ilkesi (Bir şey kendisinin aynıdır), 2. Çelişmezlik ilkesi (Bir önerme hem doğru hem yanlış olamaz).

2) Werner Heisenberg (1901-1976), Belirsizlik ilkesi: Bir parçacığın herhangi bir andaki konumu ve hareketini kesinlikle belirlemek imkansızdır.

3) Jan Lukasiewics (1878-1956), Arend Heyting(1898-1980), Hans Reichenbach (1891-1953).

şeklinde tanımlanır. Burada a ve b hem önermeleri hem de onların doğruluk değerlerini temsil etmektedir. (1) ve (2) den,

$$a \vee b = \max(a,b) \quad , \quad a \wedge b = \min(a,b)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Sonuç olarak, n-değerli Ł. mantığının asalları aşağıdaki tabloda özellenmiştir (a , b ε T_n)

$\bar{a}$	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \Longrightarrow b$	$a \Longleftrightarrow b$
1 - a	max(a,b)	min(a,b)	min(1,1+b-a)	1- |a-b|

n = 2 için klasik 2-değerli mantık asalları elde edilir. Aşağıdaki tabloda, n = 4 için, olası tüm durumlara göre mantık asallarının aldığı değerler verilmiştir.

a	b	$\bar{a}$	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \Longrightarrow b$	$a \Longleftrightarrow b$
1	1	0	1	1	1	1
1	2/3	0	1	2/3	2/3	2/3
1	1/3	0	1	1/3	1/3	1/3
1	0	0	1	0	0	0
2/3	1	1/3	1	2/3	1	2/3
2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	1	1
2/3	1/3	1/3	2/3	1/3	2/3	2/3
2/3	0	1/3	2/3	0	1/3	1/3
1/3	1	2/3	1	1/3	1	1/3
1/3	2/3	2/3	2/3	1/3	1	2/3
1/3	1/3	2/3	1/3	1/3	1	1
1/3	0	2/3	1/3	0	2/3	2/3
0	1	1	1	0	1	0
0	2/3	1	2/3	0	1	1/3
0	1/3	1	1/3	0	1	2/3
0	0	1	0	0	1	1

Klasik mantıkta, m tane basit önerme içeren bir birleşik önermenin, 2^m tane durumu (yani tablosunda 2^m tane satır) olduğunu biliyoruz. n- değerli mantıkta, m tane basit önerme içeren bir bileşik önermenin de n^m durumu olacaktır. Her bir durum için aynı doğruluk değerini alan önermelere denk önermeler denir. Klasik mantıktan bildiğimiz aşağıdaki temel denklikler, n- değerli Lukasiewicz Mantığında da geçerlidir.

$$a \wedge b = b \wedge a \ , \quad a \vee b = b \vee a$$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \qquad (3)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)\ , \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$\overline{\overline{a}} = a \quad , \quad \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b} \ , \quad \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$$

Örnek olarak, $\vee$' nın $\wedge$ üzerine soldan dağılma özelliği:

$$a \vee (b \wedge c) = \max(a, \min(b.c)).$$

$$= \begin{cases} b, & a \leq b \leq c \\ c, & a \leq c \leq b \\ a, & b \leq a \leq c \\ a, & b \leq c \leq a \\ a, & c \leq a \leq b \\ a, & c \leq b \leq a \end{cases}$$

$$= \min(\max(a.b), \max(a.c))$$

$$= (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Buna karşın, 2- değerli mantıktaki, $a \vee \overline{a} = 1$, $a \wedge \overline{a} = 0$ denklikleri, n- değerli L. mantığında (n>2 için) geçerli değildir. Gerçekten, $n = 3$, $a = \frac{1}{2}$ için,

$$a \vee \overline{a} = \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq 1,$$

$$a \wedge \overline{a} = \min\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

Gerçekte, $a \vee \overline{a} = 1$ denkliği, 2- değerli mantığın "üçüncü halin imkansızlığı" ilkesini simgelemektedir. Bunun, (bu prensibi kabul etmeyen) çok değerli mantıklarda geçerli olmaması doğaldır. $a \wedge \overline{a} = 0$ denkliği ise "çelişmezlik" ilkesini, yani bir önermenin hem doğru hem de yanlış olamıyacağını simgelemektedir. (3) nedeniyle $a \vee \bar{a} = 1$ ve $a \wedge \bar{a} = 0$ önermeleri mantıkça denktir. Bu nedenle biri yanlış ise diğeri de yanlıştır.

3.SONSUZ DEĞERLİ MANTIKLAR

Bir önermenin [0,1] aralığındaki her rasyonel sayıyı, doğruluk değeri olarak alabileceği kabul edilirse, sonsuz değerli mantıklar geliştirilir. Nihayet, [0,3] aralığını oluşturan tüm gerçel sayılar doğruluk değerleri olarak alınırsa, fuzzy küme teorisine temel oluşturan sonsuz değerli mantıklara ulaşılır. Böylece sonlu ve sonsuz değerli mantıklar için, doğruluk değerleri kümesi olarak,

$$T_2 = \{0,1\}$$
$$T_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$$
$$T_4 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$$
$$\vdots$$
$$T_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-3}{n-1}, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$$
$$\vdots$$
$$T_{\aleph_0} = \{x \mid 0 \leq x \leq 1, x \in Q\}$$

$$T_{\aleph_1} = [0,1]$$

kümelerinin alınabildiği görüyoruz. Buradaki alt indisler kümelerinin kardinatilerini göstermektedir. $\aleph_0$, sayılabilir sonsuzluğun, $\aleph_1$'de kontinium kardinalitesidir. $T_{\aleph_0}$ ve $T_{\aleph_1}$ yerine, kısaca T_0 ve T_1 sembolleri kullanılır. Tüm bu kümeleri temel alan mantıklarda, eğer mantık asalları (*)daki gibi tanımlanırsa, elde edilen mantıklara Lukasievicz mantıkları denir ve bunlar,

$$L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$$

sembolleri ile gösterilir. L_0 ve L_1 sonsuz değerli lukasievicz mantıkları, diğerleri de $n \geq 2$ için n-değerli Lukasievicz mantıklarıdır. L_1 mantığına, Standart Lukasievicz L_1 Mantığı denir. Fuzzy kümelerine ilişkin verilen ilk teorinin temel aldığı mantık budur.

4.FUZZY KÜMELERİ

Bilindiği gibi, klasik kümeler, $T_2 = \{0,1\}$ kümesinin elemanlarını doğruluk değeri olarak alan, klasik iki değerli mantığı temel almıştır. p (x), L_2 mantığında bir açık önerme olsun. Yani, belirli bir X evreninin herhangi bir elemanı x yerine geldiğinde (doğru ya da yanlış olan) bir önerme elde edilsin. Buna göre,

$$A = \{ x \mid p(x) \} \subset X$$

şeklinde ifade edilen bir klasik A kümesi, X'in, p (x)'i doğru kılan elemanlarından oluşur. Yani aşağıdaki mantıksal çift gerektirme vardır:

$$X \varepsilon A \Leftrightarrow p(x) = 1$$

A kümesini,

$$\gamma_A : X \rightarrow \{0,1\},\ \gamma_A(x) = \begin{cases} 1, & x \varepsilon A \\ 0, & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & p(x) = 1 \\ 0, & p(x) = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu ile temsil edebiliriz. Buna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Gerçekte, X'in tüm alt kümelerinin P (X) ailesi ile X'den {0,1}'e tüm fonksiyonların oluşturduğu $\{0,1\}^X$ (veya 2^X) ailesi arasında,

$$\gamma : P(X) \rightarrow 2^X$$

$$\gamma(A) = \gamma_A$$

şeklinde bir izomorfi vardır (2). Bu izomorfi altında,

$$\gamma(A \cup B) = \gamma_{A \cup B} = \max\{\gamma_A, \gamma_B\}$$

$$\gamma(A \cap B) = \gamma_{A \cap B} = \min\{\gamma_A, \gamma_B\}$$

$$\gamma(\bar{A}) = \gamma_{\bar{A}} = 1 - \gamma_A$$

olur. $A = \{ x \mid p(x) \}$, $B = \{ x \mid q(x) \}$ ise,

$$(A \cup B) = \{ x \mid p(x) \vee q(x) \} \quad \gamma_{(A \cup B)}(x) = \max(p(x), q(x)) = \max(\gamma_A(x), \gamma_B(x))$$

$$(A \cap B) = \{ x \mid p(x) \wedge q(x) \} \quad \gamma_{(A \cap B)}(x) = \min(p(x), q(x)) = \min(\gamma_A(x), \gamma_B(x))$$

$$\bar{A} = \{ x \mid \overline{p(x)} \},\quad \gamma_{\bar{A}}(x) = 1 - p(x) = 1 - \gamma_A(x)$$

elde edilir. Sonuç olarak, herhangi bir incelemede, p (x)'in elemanları yerine, 2^Xde bunlara (γ altında) karşılık gelen elemanlar, (başka bir deyiş ile) kümeler yerine onların karakteristik fonksiyonları ele alınabilir.

İki değerli mantıkla, belirli bir X evrenine ilişkin p(x) açık önermelerinin, bu evrenin $A = \{ x \mid p(x) \}$ alt kümelerini tanımlaması gibi, L_1 mantığındaki p(x) açık önermeleri de, belirli bir X evrenine ilişkin fuzzy kümelerini tanımlar. Bu durumda p(x) önermeleri, x yerine X evreninin herhangi bir elemanı geldiğinde, doğruluk değeri olarak, [0,1]'den herhangi bir gerçel sayıyı alır. p(x) açık önermesinin tanımladığı A fuzzy kümesi,

$$\psi_A : X \rightarrow [0,1], \ \psi_A(x) = (p(x)\text{'in doğruluk değeri})$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon ile karakterize edilir. Buna A fuzzy kümesinin elemanlık fonksiyonu (membership function) denir. $\psi_A(x)$ gerçel sayısına da, x elemanının A fuzzy kümesindeki elemanlık derecesi denir. x elemanı, $\psi_A(x)$'in 1'e yakınlığı nisbetinde, A fuzzy kümesinin elemanı olmayı hak eder. Örnek olarak, belirli bir okuldaki öğrenciler kümesini X evreni olarak alalım. p(x)= "x, başarılıdır" olsun. x yerine evrenden belirli bir öğrenci geldiğinde, p(x), (L_1 mantığına göre) [0,1] aralığından bir doğruluk değeri alacaktır. Şimdi,

$$\psi_A : X \rightarrow [0,1]$$

$$\psi_A(x) = (\text{"x,başarılıdır" önermesinin doğruluk değeri})$$

fonksiyonu, "başarılılar" diye nitelendirdiğimiz A fuzzy kümesini tanımlar.P(X)'lerin doğruluk değerlerinin belirlenmesi ayrı bir sorundur. Bunun için bazı istatistiksel yöntemler geliştirilebilir. Örnek olarak öğrencilerin not ortalamaları ölçüt alınabilir.

Bir X evreninin herhangi bir A alt kümesine, yani p(x)'in her A elemanına, 2^X ailesinden, A'nın γ_A karakteristik fonksiyonun karşılık gelmesi gibi, X evrenine ilişkin herhangi bir A fuzzy kümesine de,

$$[0,1]^X = \{ \psi \mid \psi : X \rightarrow [0,1] \}$$

ailesinden, A'nın elemanlık fonksiyonu dediğimiz

$$\psi_A : X \rightarrow [0,1], \ \psi_A(x) = (x\text{'in elemanlık derecesi})$$

fonksiyonu karşılık gelir.

Fuzzy kümeleri arasındaki bazı temel işlemler. L_1 mantığındaki asalların tanımlarına uygun olarak aşağıdaki gibi tanımlanır: Bir X evrenine ilişkin A, B fuzzy kümelerinin, birleşimi, kesişimi ve A kümesinin tümleyeni, sıra ile,

$$\begin{aligned}
&\psi_{A\cup B} : X \rightarrow [0,1], \ \psi_{A\cup B}(x) = \max\{\psi_A(x), \psi_B(x)\} \\
&\psi_{A\cap B} : X \rightarrow [0,1], \ \psi_{A\cap B}(x) = \min\{\psi_A(x), \psi_B(x)\} \qquad (4) \\
&\psi_{\bar{A}} : X \rightarrow [0,1], \ \psi_{\bar{A}}(x) = 1 - \psi_A(x)
\end{aligned}$$

elemanlık fonksiyonlarına karşılık gelen fuzzy kümeleridir.

Sonuç olarak L1 mantığında geçerli olan (2) özelliklerinin bir çoğu, fuzzy kümelerinde bunlara karşılık gelen özellikler için de geçerlidir:

$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ $\quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\bar{\bar{A}} = A$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

5.FUZZY NİTELEYİCİLERİ

$p(x)$, L_1 mantığında, belirli bir X evrenine ilişkin bir açık önerme ve p(x)'in tanımladığı A fuzzy kümesinin elemanlık fonksiyonu,

$$\Psi_A : X \to [0,1], \quad \Psi_A(x) = p(x)$$

olsun. (Kısalık için p(x) in doğruluk değerini yine p(x) ile gösteriyoruz) şimdi,

" P(x) doğrudur,"
" P(x) çok doğrudur,"
" P(x) yanlıştır,"
" P(x) çok yanlıştır,"
"P(x) çok çok yanlıştır,"

gibi, fuzzy doğruluk dereceleri ile nitelendirilmiş önermelerin doğruluk değerleri için ne diyebiliriz? Bunlara karşılık gelen fuzzy kümeleri, [0,1] evreninde, elemanlık fonksiyonları, p(x)'in doğruluğunun (çok doğru, çok çok doğru vs. gibi niteleyicilerle) pekiştirildiği oranda sıfıra yakın ve P(x)'in yanlışlığının pekiştirildiği oranda da bir'e yakın değerler olacak şekilde tanımlanabilir. Örnek olarak,

$$f_\lambda : [0,1] \to [0,1], \quad f_\lambda(p(x)) = [p(x)]^\lambda \quad , \ (\lambda \geq 1)$$

şeklindeki fonksiyonlar, λ arttıkça, p(x)'in doğruluğunu pekiştiren önermelere karşılık gelir. Çünkü λ büyüdükçe $[p(x)]$ küçüleceğinden, (örnek olarak) p(x)'in çok doğru olduğu iddiasının doğruluk değeri azalacaktır. Benzer şekilde,

$$g_\lambda : [0,1] \to [0,1], \quad g_\lambda(p(x)) = [1-p(x)]^\lambda$$

fonksiyonları da, p(x)'in yanlışlığının pekiştirildiği önermelere karşılık gelir.

Sonuç olarak, $x \varepsilon \mathcal{X}$, $p(x) = \psi_A(x) \ \varepsilon\ [0,1]$ olmak üzere, "p(x) çok doğrudur" şeklindeki bir önermenin doğruluk değeri, uygun seçilmiş bir $\lambda \varepsilon R$ için,

$$f_\lambda\,(p(x)] = [p[x)]^\lambda$$

ve "p(x) çok yanlıştır" şeklindeki bir önermenin doğruluk değeri de, yine uygun bir λ için,

$$g_\lambda\,(p(x)) = [1\text{-}p(x)]^\lambda \text{ olur.}$$

6.ÖRNEK

$X = [0,100]$ aralığını öğrencilerin, belirli bir a alanında yapılan bir sınav sonucunda alabilecekleri puanların kümesi olarak farzedelim. Belirli bir $x\ \varepsilon\ [0,100]$ puanı alan öğrenciyi (veya öğrencileri) x puanı ile temsil edelim.Fuzzy önermemiz de,

p (X) = "x, (a alanında) bilgilidir"

olsun. P (X)'in tanımladığı, A fuzzy kümesi, "a alanında bilgili olan öğrenciler" olarak nitelendirilebilir. Bunun,

$$\psi_A : [0,100] \to [0,1]$$

elemanlık fonksiyonunu,

$$\psi_A\ (0) = 0,\quad \psi_A\ (50) = \frac{1}{2},\quad \psi_A\ (100) = 1,\quad \psi'_A\ (x) > 0$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olarak almak uygundur.* Bu koşulları sağlayan fonksiyonların bir ailesi,

$$\mathcal{A} = \left\{ \psi_{A_\alpha} \;\middle|\; \psi_{A_\alpha} : [0,100] \to [0,1],\ \psi_{A_\alpha}(x) = \alpha x^3 - 150\alpha x^2 + \frac{1 + 5\cdot 10^5 \alpha}{10^2} x,\ \alpha \in \left[-\frac{1}{5\cdot 10^5}, \frac{1}{25\cdot 10^4}\right] \right\}$$

olarak seçilebilir. Bu ailenin elemanları, üstelik,

$$1 - \psi_{A_\alpha}(x) = \psi_{A_\alpha}(100\text{-}x)$$

fonksiyonel denklemini de sağladığından, $x\varepsilon\ [0,50]$ için ψ_A (x) lerin belirlenmesi ile, $x\varepsilon\ [50,100]$ için ψ_A (x)lerin belirlenmesi kolaylaşır.

---

* Besbelli ki, [0,100] kümesi ile 1.1 eşlenen bir öğrenciler kümesi yoktur. Gerçekte, evren $X \subset [0,100]$ şeklinde sonlu bir X kümesidir. X=[0,100] almak ve A'nın elemanlık fonksiyonunu sürekli ve türevlenebilir farzetmek, varmak istediğimiz sonuçları etkilemez ve çalışma kolaylığı sağlar.

$$\alpha \in \left[-\frac{1}{5\cdot 10^5}, 0\right) \Longrightarrow \psi''A_\alpha(x) \begin{cases} >0, & x \in [0,50) \\ =0, & x = 50 \\ <0, & x \in (50,100] \end{cases}$$

$$\alpha \in \left(0, \frac{1}{25\cdot 10^4}\right] \Longrightarrow \psi''A_\alpha(x) \begin{cases} <0, & x \in [0,50) \\ =0, & x = 50 \\ >0, & x \in (50,100] \end{cases}$$

olduğundan, "x bilgilidir" iddiasına, α, $\frac{-1}{5.10^5}$'e yaklaşırken, ortalamanın altındakiler için gittikçe azalan, ortalamanın üstündekiler için de gittikçe artan doğruluk değerleri karşılık gelir. α, $1/25.10^4$'e yaklaştıkça da bunun tersi olur. $\alpha = 0$ için,

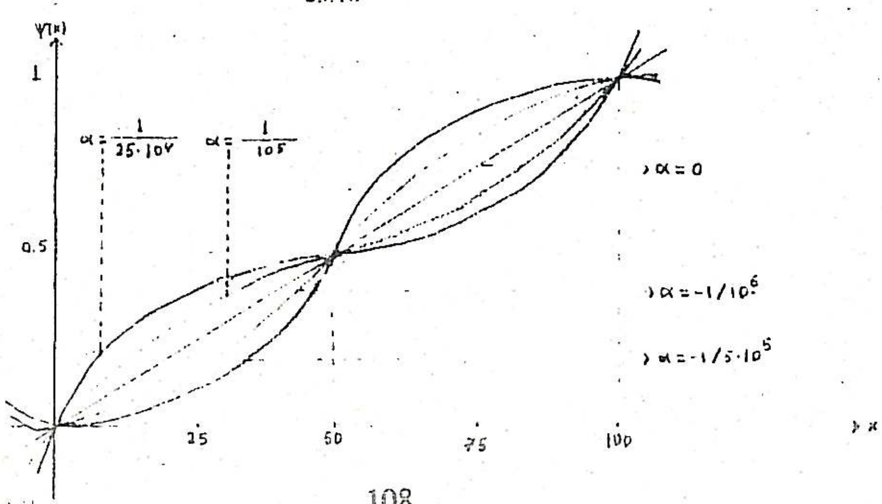
$$\psi A_0(x) = \frac{x}{100}$$

doğrusal fonksiyonu ise, x, 0'dan 100'e giderken, (ister ortalmanın altında, ister üstünde olsun), iddiaya, aynı oranda artan doğruluk değerleri verir. Aşağıda α'nın bazı özel değerleri için ψA_α fonksiyonları verilmiştir.

$$\psi A_{-1/5.10^5}(x) = \frac{-x^3 + 150\,x^2}{5.10^5}$$

$$\psi A_{1/25.10^4}(x) = \frac{x^3 - 150\,x^2 + 75.10^2 x}{25.10^4}$$

$$\psi A_{1/10^5}(x) = \frac{x^3 - 150\,x^2 + 15.10^3 x}{25.10^4}$$



1. Şekil

Şimdi, bu A ailesinin hangi elemanını, "x, a alanında bilgilidir" önermesinin tanımladığı fuzzy kümesinin elemanlık fonksiyonu olarak seçmeli? Bulanıklık buradadır! Bu iş sözkonusu önermenin doğruluk değerlerinin ne amaçla kullanılacağına ve konuyla ilgilenen kişilerin "başarılı" nitelemesini nasıl yorumladıklarına çok bağlıdır. Örnek olarak, ortalamanın oldukça geniş bir civarını hemen hemen aynı düzeyde ve çok zayıf olanlarla çok iyi olanların birbirlerinden aynı düzeyde ve çok zayıf olanlarla çok iyi olanların birbirlerinden çok farklı derecede bilgili sayılması isteniyorsa, ($\lambda = 1/25.10^4$ için)

$$\psi_{A\lambda}(x) = \frac{-x^3 - 150\,x^2 + 75.10^2 x}{25.10^4}$$

fonksiyonu seçmek en uygunudur. Gerçekten, bu fonksiyon için,

$$\psi'_{A\lambda}(50) = \psi''_{A\lambda}(50) = 0,$$

$$\alpha \in \left[-\frac{1}{5\cdot 10^5}, \frac{1}{25\cdot 10^4}\right] \Rightarrow \frac{1-10^5}{5\cdot 10^7} \leq \Psi'_{A_\alpha}(0) = \Psi'_{A_\alpha}(100) = \frac{1+5\cdot 10^5\alpha}{10^2} \leq \frac{3}{10^2} = \Psi'_{A_\lambda}(0) = \Psi'_{A_\lambda}(100)$$

olduğundan, istenen koşullar sağlanır. (Şekil 1). 0 ve 100 civarında eğimin maksimum olması, 0'a yakın notlar için başarının hızla azaldığını, 100'e yakın notlar için de hızla arttığını göstermektedir.

Buna karşın, (küçük bir tolerans ile) ortalamanın üstündekilerin (ya da altındakilerin) vurgulanmak istendiği bir meselede, ortalamanın üstündekiler ile altındakiler arasındaki derece farkını en büyük düzeyde tutmak ve ortalamanın solundan sağına geçerken en hızlı derece artışını sağlamak gerekir. Böyle bir yoruma (A ailesinden) en uygun fonksiyon ise, x = 50 de maksimum eğime sahip olan ve ortalamanın küçük bir civarının sağındakilere 1'e en yakın, solundakilere de 0'a en yakın değerler veren

$$\psi_{A\,-1/5.10^5}(x) = \frac{-x^3 + 150\,x^2}{5.10^5}$$

fonksiyonudur. Ortalamanın altındakilere, "bilgili" nitelemesini, minimum düzeyde yakıştırmanın daha uygun olacağı düşünülerek bizim, "x a alanında başarılıdır" önermesine karşılık getireceğimiz fuzzy kümesinin elemanlık fonksiyonu, bu ikincisi olsun.

Önemle kaydedelim ki, "50 ve bunun üstündekiler başarılıdır" diye, bir tanımlama yapılırsa, artık yukarıdaki önermenin tanımladığı küme bir fuzzy kümesi değil, bir normal küme olacaktır. Bu ise karakteristik fonksiyonu,

$$\psi_A : [0,100] \rightarrow [0,1], \qquad \psi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 50 \\ 0, & x < 50 \end{cases}$$

olan,

$$A = \{x \mid 50 \leq x \leq 100\}$$

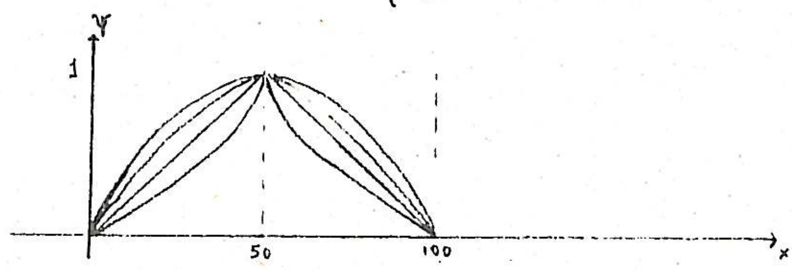
kümesidir.

Şimdi aynı evrende ([0,100]) başka bazı fuzzy kümeleri tanımlayalım.

" $q(x) \equiv x$ orta düzeyde başarılıdır"

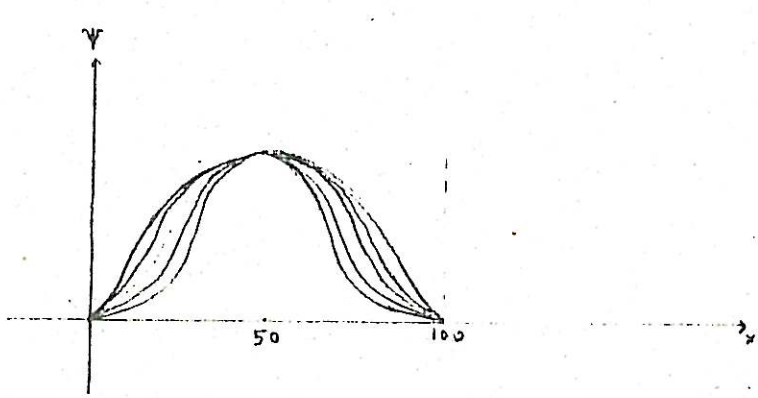
önermesinin tanımladığı B fuzzy kümesinin elemanlık fonksiyonu için aşağıdaki fonksiyon aileleri ele alınabilir:

$$\mathcal{A}_\alpha = \left\{ \Psi_\alpha \mid \Psi_\alpha : [0,100] \rightarrow [0,1],\ \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{50}\right)^\alpha, & x \leq 50 \\ \left(\frac{100-x}{50}\right)^\alpha, & x \geqslant 50 \end{cases},\ \alpha \in (0,\infty) \right\}$$



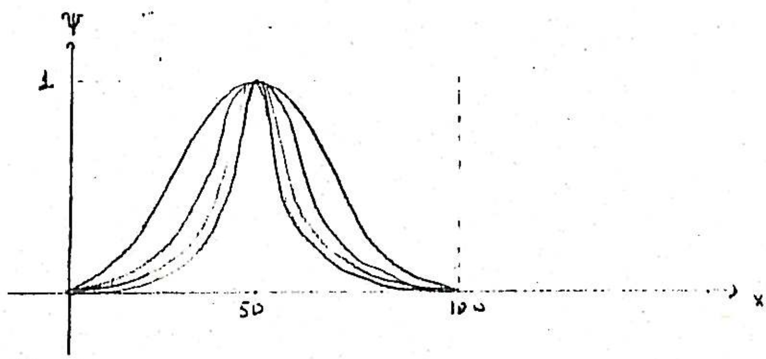
Ψ_α fonksiyonları

$$\mathcal{A}_\beta = \left\{ \Psi_\beta \mid \Psi_\beta(x) = \left(\frac{x^2(x-100)^2}{50^4} \right)^\beta,\ \Psi_\beta : [0,100] \rightarrow [0,1],\ \beta \in (0,\infty) \right\}$$



Ψ_β fonksiyonları

$$A_\gamma = \left\{ \Psi_\gamma \mid \Psi_\gamma : [0,100] \to [0,1],\ \Psi_\gamma(x) = \left(\frac{x(100-x)}{50^2 (1+(x-50)^2)} \right)^\gamma,\ \gamma \in (0,100) \right\}$$



Ψ_γ fonksiyonları

Bunlardan uygun biri, q (x) önermesine karşılık gelen fuzzy kümesi olarak seçilecektir. $\propto$ (β,γ) büyüdükçe

"x'in başarısı ortaya yakındır"
"x'in başarısı ortaya çok çok yakındır"

gibi önermelere karşılık gelen fuzzy kümeleri elde edilir. Son olarak,

"r(x) = çok başarılıdır"

önermesi için de, yine birçok seçenek arasından,

$$A_\delta = \left\{ \Psi_\delta \mid \Psi_\delta : [0,100] \to [0,1],\ \Psi_\delta(x) = \left(\frac{101}{2} - \sqrt{\frac{10201}{4} - x} \right)^\delta \right\}$$

veya

$$A_\gamma = \left\{ \Psi_\gamma \mid \Psi_\gamma : [0,100] \to [0,1],\ \Psi_\gamma(x) = \left(\frac{x}{100} \right)^\delta,\ \delta > 1 \right\}$$

aileleri düşünülebilir. s'nin büyük değerleri için yine,

"x çok çok çok başarılıdır"
"x süper başarılı"

gibi önermelere karşılık gelen fuzz kümeleri elde edilir. İlk ele aldığımız p(x) önermesi için de, bu sonuncu ailede $\gamma = 1$ için elde edilen

$$\psi_1(x) = \frac{x}{100}$$

fonksiyonunu pekala alabilirdik. Orada, bunun yerine $\psi_{A-1/5\cdot 10^5}(x) = \frac{-x^3+150x^2}{5\cdot 10^5}$ fonksiyonu alma nedenini açıklamıştık.

"Verilen bir evrene ilişkin bir p(x) önermesi hangi x'ler için hangi doğruluk değerlerini almalıdır?." ya da başka bir deyiş ile, "Bir fuzzy kümesinin elemanlık fonksiyonu nasıl seçilmelidir?" sorusu, formel (biçimsel) mantığın konusu değildir. Belli bir önermenin "doğrumu, yanlış mı?" olduğu, ya da ne ölçüde doğru (veya yanlış) olduğunu saptamak, mantıksal değil, bu önermenin içeriği ve evrenine ilişkin bir bilgisel iştir. Biçimsel mantığın konusu, varsayılan bir takım önermelerin, varsayılan doğruluk değerlerine ve varsayılan bir takım kurallara bağlı olarak, bunlardan bazı eklemlerle elde edilen yeni önermelerin doğruluk değerlerini sorğulamaktır. Şimdi, bir elemanlık fonksiyonu seçiminin ne denli bir sorun olduğunun okuyucu tarafından sezildiğini umarak işin formel yönüne dönelim.

$p(x) \equiv$ x başarılıdır
$q(x) \equiv$ x orta düzeyde başarılıdır
$r(x) \equiv$ x çok başarılıdır.
$s(x) \equiv$ x çok çok başarılıdır.

önermelerine karşılık gelen fuzzy kümelerinin elemanlık fonksiyonları sıra ile, ([0, 100]'den [0,1]'e)

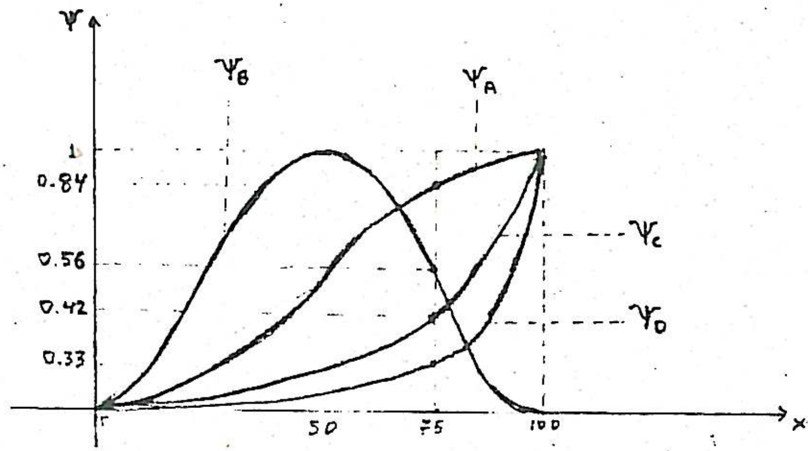
$$\psi A(x) = \frac{-x^3 + 150x^3}{5.10^5}$$

$$\psi_D(x) = \left(\frac{x}{100}\right)^4$$

$$\psi_B(x) = \frac{x^2 (x-100)^2}{5\,0^4}$$

$$\psi_C(x) = \left(\frac{x}{100}\right)^3$$

olsun. Bu fonksiyonlar aşağıdaki şekilde gösterilmişlir:



Şimdi, $x \in [0,100]$ için, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $\overline{p(x)}$, $\overline{q(x)}$, $\overline{r(x)}$, $\overline{s(x)}$, $p(x) \vee q(x) \wedge r(x)$, $\overline{p(x)} \wedge s(x)$, $p(x) \Longrightarrow q(x)$ vs gibi önermeleri ve

$p_1(x) = p(x)$ çok doğrudur.
$r_1(x) = r(x)$ çok yanlıştır.
$f(x) = p(x) \wedge \overline{q(x)}$ çok çok yanlıştır.

gibi {fuzzy niteleyicileri ile elde edilen} önermeleri, (4) bağıntıları ve (6) fonksiyonları yardımıyla değerlendirebiliriz. Bazı örnekler aşağıda gösterilmiştir

$$\overline{p(x)} = \psi_{\overline{A}}(x) = 1 - \frac{-x^3 + 150x^2}{5 \cdot 10^5}$$

$$\overline{q(x)} = \psi_{\overline{B}}(x) = 1 - \frac{x^2 (x-100)^2}{50^4}$$

$$\overline{p(x)} \vee r(x) = \psi_{\overline{A} \vee C}(x) = \max\left\{ 1 - \frac{-x^3 + 150x^2}{5 \cdot 10^5}, \left(\frac{x}{100}\right)^3 \right\}$$

$$p(x) \Rightarrow q(x) = \min\left\{1,\ 1+\frac{x^2(x-100)^2}{50^4} - \frac{-x^3+150x^2}{5\cdot 10^5}\right\}$$

$$p_1(x) = f_2(p(x)) = \left(\frac{-x^3+150x^2}{5\cdot 10^5}\right)^3$$

$$r_1(x) = g_2(r(x)) = \left[1-\left(\frac{x}{100}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$t(x) = q_2(p(x) \wedge \overline{q(x)}) = \left[\min\left\{\frac{-x^3+150x^2}{5\cdot 10^5},\ 1-\frac{x^2(x-100)^2}{50^4}\right\}\right]^3$$

$x = 75$ için

$p(75) = 0{,}84375$, $q(75) = 0.5625$, $r(75) = 0.421875$;

$\overline{p(75)} = 0{,}15625$, $\overline{q}(75) = 0.4375$, $\overline{r}(75) = 0.578125$,

$\overline{p}(75) \vee r(75) = \max\{0{,}15625,\ 0{,}421875\} = 0{,}421875$

$p(75) \Rightarrow q(75) = \min\{1,\ 1+0{,}5625 - 0{,}84375\} = 0{,}71975$

$p_1(75) = (0{,}84375)^3$, $r_1(75) = 0.33498$, $t(75) = 0{,}4375$

7. SONUÇ

Fuzzy kümelerini, standart Lukasiewicz mantığından hareketle tanımladık ve fuzzy önermelerinin fuzzy elemanlık fonksiyonları yardımıyla değerlendirilişini örnekledik. Sonuç olarak bir takım önermelerin bazı bağlaçlarla biraraya gelerek oluşturdukları bir metnin doğruluk derecesi belirlenebilir. Sorun, önermelerin evrenine ve içeriğine ilişkin en uygun elemanlık fonksiyonlarının belirlenebilmesindedir. Gerçekte, mantık usalları ve bunlara karşılık gelen küme işlemleri belirli aksiyonları sağlamak koşuluyla çeşitli şekillerde tanımlanarak çeşitli mantıklar ve fuzzy küme teorileri geliştirilmiştir. Bu yazının temel kaynağı olan [1] de bunların bazıla[illegible]a değin[illegible]ş ve konuya ilişkin [illegible] yayın [illegible]dirilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Klir, J.George, Folter A.Tina Fuzzy Sets, Uncertainty, and information. New Jersey 1988.

2. Hançerlioğlu, Orhan, Felsefe Sözlüğü

3. Güney Zekeriya, Soyut Matematiğe Giriş, İzmir, 1993.