Dokuz Eylül Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi
Cilt 6, Sayı:4, 2004

Markov Zincirlerinin Ekonomik Bir Probleme Uygulanması: Perakende Alışverişlerde Bireysel Olarak Kullanılan Madeni Para Stratejilerinin Karşılaştırmalı Analizi

Tevfik AYTEMİZ[*] Ahmet ŞENGÖNÜL[**]

ÖZET

Verdiği rahatsızlık nedeniyle pek çok kişi cebinde madeni para taşımak istemez. Ancak, kredi kartı kullanımı henüz çok fazla yaygınlaşmamış olan ülkemizde, madeni para taşınmaması nakit para ile yapılan alışverişlerde sorun yaratabilmektedir. Bireyler perakende alışverişlerini öderken madeni para kullanmasalar bile, para üstü olarak aldıkları madeni paralar kısa bir süre sonra önemli boyutlara ulaşabilmektedir. Bu çalışmanın amacı bireylere mevcut madeni paralarını alışveriş ödemelerinde etkin kullanma yönünde pratik stratejiler sunarak, uzun dönemde ceplerinde taşımak zorunda kalacakları madeni para miktarını en düşük seviyede tutacak stratejiyi belirlemektir. Bu amaçla önce, bireysel düzeyde uygulanabilecek üç farklı madeni para kullanma stratejisi geliştirilmiş ve daha sonra bu stratejiler, kesikli Markov zincirleri yardımıyla, uzun dönem denge durumunda analiz edilmiştir. Çalışmada ele alınan stratejiler mikro (bireyler) düzeyde olup, makro düzeylerde ele alınabilecek stratejiler kapsam dışı bırakılmıştır. Stratejiler için oluşturulan Markov zincirleri farklı alışveriş koşulları altında çözülerek bireyin uzun dönemde taşıyacağı madeni para miktarını en düşük yapan strateji tespit edilmiştir. Belirlenen bu strateji, uzun dönemde taşınacak madeni para miktarını minimum yapması yanında alışveriş koşullarındaki değişmelerden de etkilenmemektedir. Çalışma bu anlamda, paranın dolaşım hızı ile ilgili ekonomik bir probleme bu alanda klasikleşmiş olan istatistiksel ve ekonometrik analiz yöntemlerinden farklı ve genelde kullanılmayan bir yöntemle yaklaşmaktadır.

Anahtar Kelimeler: *Madeni Para Kullanımı, Madeni Para Stratejileri, Markov Zincirleri.*

---

[*] Mersin Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü, Çiftlikköyü Kampüsü, Mersin

[**] Mersin Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İktisat Bölümü, Çiftlikköyü Kampüsü, Mersin

1.GİRİŞ

Pek çok kişi cebinde madeni para taşımak istemez. Madeni paralar gerek ağırlık ve ses yapması, gerekse giysilere zarar vermesi nedeniyle bireyleri rahatsız etmektedir. Ancak, nakit para ile yapılan alışverişlerde madeni para eksikliği de sorun yaratabilmektedir. Kredi kartı kullanımı, bu sorunu ortadan kaldırmakla birlikte, komisyonlar nedeniyle, ülkemizde henüz çok yaygın değildir. Bu nedenle, perakende alışverişlerde madeni para ihtiyacı ve kullanımı incelenmesi gereken bir sorun olarak devam etmektedir. Ayrıca, son zamanlarda gündeme gelen bir konu olarak, Türk Lirası'ndan altı sıfır atılması durumunda bu sorun bireyleri daha da fazla etkileyebilecektir. Günümüz Türkiye ekonomisinde çok fazla hissedilmeyen ve değeri göz ardı edilebilen madeni paralar Türk Lirası'ndan altı sıfır atılması ile birlikte önemli bir değere sahip olacaktır.

Türkiye'de madeni para basma yetkisi 1467 yılından bu yana faaliyet gösteren T.C. Başbakanlık Hazine Müsteşarlığı Darphane ve Damga Matbaası Genel Müdürlüğü'ne aittir. Bu kurum, kurulduğu tarihten günümüze pek çok tür ve değerde madeni parayı tedavüle sürmüştür. Günümüzde ise Türkiye'de 25.000, 50.000, 100.000 ve 250.000 TL'lik madeni paralar tedavüldedir. 2001 yılına kadar oldukça büyük ve ağır olan madeni paralar 2001 yılından sonra daha küçük ve hafif olarak basılmaya başlanmış ve bu uygulama madeni paraların verdiği rahatsızlığı büyük ölçüde hafifletmiştir (Darphane ve Damga Matbaası Genel Müdürlüğü, 2004). Bu hafiflemeye rağmen madeni paraların, alışverişlerde etkin kullanılmadığı takdirde, kişileri rahatsız edici boyutlara ulaşması kaçınılmazdır.

Bu çalışmanın amacı, bireylere madeni paralarını, nakit para ile yaptıkları alışverişlerde, etkin kullanmaları konusunda pratik stratejiler sunmaktır. Bu amaçla bu çalışmada, bireylerin alışveriş ödemelerini yaparken uygulayabileceği üç alternatif strateji (madeni para stratejileri) geliştirilerek bu stratejiler uzun dönemde karşılaştırmalı olarak analiz edilecektir. Ayrıca, Markov zincirleri yardımıyla analiz edilerek karşılaştırılan bu stratejiler içerisinden ve en etkin olanı belirlenecektir. Bu çalışmada ele alınacak olan stratejiler bireysel düzeyde olup, sadece tek bir bireyi ilgilendirmektedir. Ayrıca, madeni para stratejileri karşılaştırılırken, sadece bireyde mevcut madeni para miktarında değişikliğe yol açan alışverişler göz önünde bulundurularak, kredi kartı ile veya veresiye yapılan alışverişler kapsam dışı bırakılacaktır.

Bir sonraki bölümde, ele alınan problem temel karakteristikleri ile tanıtılacaktır. İkinci bölümde ise bu çalışmanın analiz yöntemi olarak belirlenen Markov zincirlerinin teorik altyapısı özetlenerek ele alınan probleme nasıl uygulanabileceği açıklanacaktır. Üçüncü bölümde ise analiz sonuçları sunularak ele alınan problem açısından değerlendirilecektir. Genel bir değerlendirmenin yer aldığı sonuç bölümüyle çalışma tamamlanacaktır.

2. PROBLEM TANIMI

Çalışmanın bu bölümünde, bireyin perakende alışverişlerinde uygulayabileceği üç alternatif madeni para stratejisi geliştirilecek ve ele alınan problem temel karakteristikleri ile tanıtılacaktır. Bir strateji geliştirirken bu stratejinin temel parametreleri üzerinde durmakta yarar vardır. Markov zincirleri açısından bakıldığında, madeni para stratejilerinin temel parametreleri *başlangıç koşulları, ödeme şekli* ve *süreklilik* olarak sıralanabilir. Başlangıç koşulları, başlangıç aşamasında bireyin elinde mevcut olan madeni para miktarını ifade etmektedir. Ödeme şekli ise madeni para stratejilerinin en önemli karakteristiği olup, bireyin yaptığı bir perakende alışverişi öderken madeni paralarını nasıl kullandığını göstermektedir. Süreklilik ise bireyin madeni para stratejisinin zaman içerisinde (bir alışverişten diğer alışverişe) değişip değişmediğini belirtmektedir. Daha önce belirtildiği gibi bu çalışmanın amacı stratejileri uzun dönem denge durumunda karşılaştırmak idi. Uzun dönem analizlerde, elde edilen sonuçların başlangıç koşullarından bağımsız olacağı düşünüldüğünde başlangıç koşullarının yapılan analizlerde çok fazla bir önemi olmamaktadır (Taha, 2003). Ayrıca bu çalışmada, bireyin madeni para stratejilerini zaman içerisinde değiştirmediği varsayılacaktır.

2.1. Madeni Para Stratejileri

Yukarıda sunulan bilgiler ışığında bir bireyin uygulayabileceği alternatif madeni para stratejileri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

Strateji 1 :
Bu stratejide, birey ödemelerini yalnızca kağıt para kullanarak yapmakta, kasiyerin para üstü olarak verdiği madeni paraları sürekli olarak biriktirmektedir. Kolayca anlaşılabileceği gibi bu stratejide bireyin cebindeki madeni para miktarı sürekli ve sınırsız olarak artmaktadır.

Strateji 2 :
Bu stratejide, birey eğer cebindeki madeni para miktarı alışveriş tutarının küsuratlı kısmına (500.000 TL ve katlarını aşan tutar) eşit veya onu aşıyorsa küsuratlı kısmı madeni para ile ödemekte, aksi halde ödemeyi kağıt para ile yapmaktadır. Kolayca anlaşılabileceği gibi bu strateji uygulandığında bireyin cebindeki madeni para miktarı artmakta (kağıt para ile ödeme durumunda) veya azalmaktadır (madeni para ile ödeme durumunda). Ancak bu strateji, bireyin cebindeki madeni para miktarının hiçbir zaman 500.000 TL'yi aşmamasını garanti etmektedir.

Strateji 3 :
Bu stratejide, birey cebindeki madeni para belli bir miktara (*dayanma miktarı*, T) ulaşıncaya kadar ödemelerini yalnızca kağıt para ile yapmaktadır. Cebindeki madeni para dayanma miktarına ulaştıktan sonra ise birey; eğer cebindeki madeni para miktarı alışveriş tutarının küsuratlı kısmına (500.000 TL ve katlarını aşan tutar) eşit veya onu aşıyorsa küsuratlı kısmı madeni para ile ödemekte, aksi halde ödemeyi kağıt para ile yapmaktadır. Kolayca anlaşılabileceği gibi bu strateji Strateji 1 ve Strateji 2'nin karışımı şeklindedir. Birey cebindeki madeni para dayanma miktarına ulaşıncaya kadar Strateji 1'i daha sonra ise Strateji 2'yi uygulamaktadır.

Yukarıdaki açıklamalardan anlaşılacağı gibi, bireyin uyguladığı strateji kendisinin belli bir anda cebinde taşıyor olacağı madeni para miktarını etkilemektedir. Örneğin, cebinde 300.000 TL madeni para bulunan bir birey 2.750.000 TL'lik bir alışveriş yapmış olsun. Bu bireyin alışveriş sonunda cebindeki madeni para miktarı Strateji 1'i uyguluyorsa 550.000 TL, Strateji 2'yi uyguluyorsa 50.000 TL ve Strateji 3'ü uyguluyorsa (dayanma miktarı 250.000 TL varsayıldığında) yine 50.000 TL olacaktır. Bu durumda birey için Strateji 2 ve Strateji 3 en iyi (cebindeki para miktarını minimum yapacak) stratejilerdir. Ancak, bu çalışmada stratejiler sadece tek bir alışveriş sonucunda değil uzun dönemde karşılaştırılacaktır. Ayrıca, bu çalışmada sadece tek bir alışveriş tutarı ve başlangıç madeni para miktarı değil mümkün olan tüm alışveriş tutarları ve tüm başlangıç madeni para miktarları göz önüne alınacaktır.

2.2. Performans Ölçütleri

Alternatif stratejilerin tanıtılmasından sonra, bu stratejiler içerisinde en iyisinin belirlenebilmesi için ortak bir performans ölçütünün tanımlanması gerekmektedir. İnsanların ceplerinde madeni para taşımak istemedikleri göz önüne alındığında, bireyin uzun dönemde cebinde taşıdığı madeni para miktarını minimum yapacak strateji doğal olarak en iyi stratejidir. Cepte taşınan madeni para miktarı; adet, parasal değer, ağırlık veya hacim olarak farklı birimlerle ölçülebilmektedir. Ancak bu çalışmada, belli bir anda cepte taşınan madeni para miktarı, modelleme kolaylığı açısından, parasal değer olarak ifade edilecektir. Ayrıca, para miktarını ölçmenin en doğal yolu parasal değerdir.

Yukarıdaki açıklamalar çerçevesinde, bu çalışmada ele alınacak olan problem: bir bireyin uzun dönemde cebinde taşıdığı madeni paraların parasal (TL) değerini minimum yapacak ödeme stratejisinin belirlenmesi olarak tanımlanabilir.

3. MODEL

Problem tanımından anlaşılacağı gibi, bireyin belli bir anda cebinde taşıyor olacağı madeni para miktarını etkileyen en önemli faktörler bireyin ödemelerini yaparken uyguladığı madeni para stratejileri ve bireyin perakende alışverişlerinin toplam tutarıdır. Bireyin uyguladığı madeni para stratejisinin zaman içerisinde değişmediği (statik ve sabit) varsayımından hareketle, ele alınan problemde dinamik (zaman içerisinde değişen) olan tek faktör perakende alışverişlerin toplam tutarlarıdır. Bu faktörün dinamik olması yanında stokastik (olasılıklı) olma özelliği de vardır. Dinamik ve stokastik sistemlerin analizinde Markov zincirleri sıkça kullanılmaktadır (Howard, 1960). Bunun yanında, bireyin cebindeki madeni para miktarı sürekli olarak değil, sadece alışveriş yaptığı (kesikli) zamanlarda değişmektedir. Dolayısı ile bu çalışmada ele alınan problem kesikli Markov zincirleri kullanılarak analiz edilebilir niteliktedir.

3.1. Markov Zincirleri

Markov zincirleri, dinamik ve stokastik sistemlerin analizinde ve özellikle bir sistemin zaman boyunca içinde bulunabileceği farklı durumlar (*states*) arasında yaptığı hareketlerin incelenmesinde yaygın olarak kullanılan modellerdir (Alfa ve Shi, 2000; Schnatter, 2001; Wang ve Puterman, 1999). Markov zincirlerinin, sistemin belli bir anda bulunacağı durumu tahmin etme yanında sistemin uzun dönemde (denge durumu, *steady state*) bulunacağı durumu tahmin etme yeteneği de vardır. Bu yönüyle Markov zincirleri bir optimizasyon aracından çok, simülasyon modelleri gibi bir açıklama ve tahmin aracıdır. Ancak günümüzde simülasyon ve Markov zincirleri de optimizasyon amaçlı olarak sıkça kullanılmaktadır (Taha, 2003).

Markov zincirlerinin en önemli elemanı sistemin zaman içerisinde bulunabileceği tüm olası durumların (*all possible states*) listesidir. Markov zincirlerinde, bir sistemin sonlu sayıda (sayılabilir), *n*, olası durumu vardır. Sistemin belli bir t anında içinde bulunabileceği tüm durumlara ait olasılıklar *n* boyutlu bir vektör ile gösterilir. Bu vektöre durum olasılık vektörü (*state probability vector*) adı verilir ve literatürde $\Pi^{(t)}$ ile gösterilir ($\Pi^{(t)}=[\pi_1, \pi_2,...,\pi_n]$). Bu vektörde π_i, i=1,2,...,n, sistemin t anında i. durumda bulunma olasılığını ifade eder (Howard, 1960).

Markov zincirlerinin diğer bir elemanı da meydana geldiğinde sistemin içerisinde bulunduğu durumu ve dolayısıyla durum olasılık vektörünü değiştiren olaylardır (*events*). Sistem, zaman içerisinde ortaya çıkan bu olaylar sonucunda bir durumdan diğer bir duruma geçer. Sistemin bir durumdan diğer duruma geçmesine neden olan olayların zaman içerisinde sürekli veya belirli zaman aralıklarında (kesikli) ortaya çıkmasına göre Markov zincirleri, sürekli veya kesikli Markov zincirleri olmak üzere ikiye ayrılır (Howard, 1960).

Markov zincirlerinin son elemanı ise, belli bir durumda bulunan sistemin bir olay sonucunda hangi olasılıkla hangi duruma geçeceğini gösteren n×n boyutlu geçiş matrisidir (*transition matrix*). Geçiş matrisi sistemin sadece bir olay sonucundaki değişim olasılıklarını gösterdiği için bu matrise tek adımda geçiş matrisi, $P^{(1)}$, (*one step transition matrix*) de denilmektedir. Bir örnek teşkil etmesi amacıyla, dört olası duruma sahip dinamik bir sistem için tek adımda geçiş matrisi aşağıda sunulmuştur.

Tablo 1: Dört Olası Durumlu Bir Sistem için Tek Adımda Geçiş Matrisi

	Durum 1	Durum 2	Durum 3	Durum 4
Durum 1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}
Durum 2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{24}
Durum 3	P_{31}	P_{32}	P_{33}	P_{34}
Durum 4	P_{41}	P_{42}	P_{43}	P_{44}

Yukarıda verilen geçiş matrisinde satırlar olay öncesinde, sütunlar ise olay sonrasında sistemin bulunabileceği tüm olası durumları sıralamaktadır. Matris elemanları (P_{ij}, i ve j=1,2,...,n) ise olay öncesinde i durumunda olan sistemin olay sonrasında j durumuna geçme olasılığını göstermektedir. Örneğin yukarıdaki geçiş matrisinde P_{32}, olay öncesinde Durum 3'te bulunan sistemin olay sonrasında Durum 2'ye geçme olasılığıdır. Tanımdan kolayca anlaşılabileceği gibi P_{32} bir koşullu olasılığı, P(Durum 2|Durum 3), ifade etmektedir. Geçiş matrisinin önemli bir özelliği her satırda yer alan olasılıklar toplamının 1'e eşit olmasıdır (tüm i'ler için $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$).

Markov zinciri olarak ele alınan bir sistemin en belirgin özelliği Markov yapısına sahip olmasıdır. Markov yapısına sahip olan bir sistemin k olay sonra içinde bulunacağı durum sadece şu an içinde bulunduğu duruma bağlıdır ve geçmiş olaylar sırasında içinde bulunduğu durumlardan bağımsızdır. Bir başka ifade ile sistemin k olay sonrasındaki durumunu tahmin edebilmek için sadece şu an içinde bulunduğu durumu ve tek adımda geçiş matrisini bilmek yeterlidir. Bu durum matematiksel olarak;

$$\Pi^{(t+k)} = \Pi^{(t)} * P^{(k)} \quad (1)$$

eşitliği ile ifade edilir.

Burada;

$\Pi^{(t+k)}$: Sistemin t+k anındaki durum olasılık vektörünü,

$P^{(k)}$: k adımda geçiş matrisini ifade etmektedir.

Markov zincirlerinin en önemli varsayımlarından birisi tek adımda geçiş matrisinin zaman içerisinde değişmediği varsayımıdır. Bu varsayım altında, k adımda geçiş matrisi tek adımda geçiş matrisinin k. kuvveti alınarak kolayca bulunabilir.

Bazı sistemlerde belli bir andan sonra durum olasılık vektörünün artık değişmediği görülmektedir (Turban ve Meredith, 1994). Sistemin uzun dönem analizlerine olanak sağlayan bu duruma denge durumu (*steady state*) denir ve matematiksel olarak;

$$\Pi^{(t+1)} = \Pi^{(t)} \qquad (2)$$

şeklinde gösterilir. Denge durumunda Denklem (2) Denklem (1)'de yerine konulursa;

$$\Pi^{(t)} = \Pi^{(t)} * P \qquad (3)$$

bulunur. Denklem (3)'de yer alan vektör ve matris açılarak çarpma işlemi gerçekleştirildiğinde;

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_1 & = & \pi_1 P_{11} & + & \pi_2 P_{21} & + & \cdots & + & \pi_n P_{n1} \\ \pi_2 & = & \pi_1 P_{12} & + & \pi_2 P_{22} & + & \cdots & + & \pi_n P_{n2} \\ \vdots & = & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots \\ \pi_n & = & \pi_1 P_{1n} & + & \pi_2 P_{2n} & + & \cdots & + & \pi_n P_{nn} \end{array} \qquad (4)$$

denklem sistemi elde edilir. Tek adımda geçiş matrisi bilindiği ve toplam olasılık şartı ($\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_n = 1$) göz önüne alındığında yukarıdaki denklem sistemi çözülerek denge durumu için durum olasılık vektörü, Π, elde edilir (Ross, 1996). Bu vektörde yer alan her bir π_i, i=1,2,...,n, değeri sistemin uzun dönemde i. durumda bulunma olasılığını, bir başka ifadeyle sistemin i. durumda zaman boyunca bulunma yüzdesini vermesi açısından önemli bilgiler sunar.

3.2. Uygulama

Markov zincirlerinin teorik altyapısı hakkında yukarıda sunulan bilgiler ışığında, bu çalışmada ele alınan problem için gerekli olan tanımlar yapılabilir.

Ele alınan problemde, bireyin belli bir anda cebinde taşıdığı madeni paraların toplam parasal (TL) değeri sistemin belli bir anda durumunu gösteren bir değişken olarak, *m*, tanımlansın. Bu tanıma göre *m*=200.000 TL ve *m*=300.000 TL sistemin farklı iki durumunu (bireyin belli bir anda cebinde sırasıyla toplam 200.000 TL'lik ve 300.000 TL'lik madeni para bulunması) ifade eder. Bu durumda, bireyin belli bir anda cebinde taşıyabileceği tüm olası madeni para miktarları (toplam parasal değer olarak) sistemin tüm olası durumlar vektörünü tanımlar. Her alışveriş sonucunda bireyin cebindeki madeni para miktarı değişeceği için, bireyin yaptığı her perakende alışveriş sistemin durumunu değiştiren bir olay (*event*) olarak tanımlanabilir.

Yapılan bir perakende alışverişin (olay) bireyin cebindeki madeni paraların toplam parasal tutarını (durum) nasıl değiştireceği bireyin kullandığı stratejiye bağlıdır. Bu durum, karşılaştırılan her strateji için farklı bir geçiş matrisini gerektirir. Ayrıca, yapılan alışverişlerin küsuratlı tutarları da geçiş matrisini önemli derecede etkiler. Bu tutarların her alışveriş için aynı olmadığı açıktır. Bu çalışmada alışverişlerin küsuratlı tutarları farklı olasılık dağılımları kullanılarak modellenmiş ve her dağılım için analizler tekrarlanmıştır.

3.3. Varsayımlar

Çalışmada ele alınan problemin bir Markov zinciri olarak formüle edilebilmesi için aşağıda sıralanan varsayımlara ihtiyaç vardır. Bu varsayımların bir kısmı Markov zincirlerinin genel varsayımları, bir kısmı ise ele alınan problemin doğasından kaynaklanan varsayımlardır.

- Birey düzenli aralıklarla (örneğin günde bir kez) alışveriş yapmaktadır.
- Bireyin yaptığı alışverişlerin tutarı cebindeki madeni para miktarından bağımsızdır. Bir başka ifade ile, bireyin cebindeki madeni para miktarı yaptığı alışverişin tutarını etkilemez.
- Birey madeni para stratejilerini ve alışveriş alışkanlıklarını (alışveriş tutarlarının olasılık dağılımını) zaman içerisinde değiştirmez.
- Bireyin sadece nakit para ile yaptığı alışverişler ve bu alışverişlerin küsuratlı (500.000 TL ve katlarını aşan) kısmı dikkate alınır.
- Satıcılar alışveriş tutarlarını en yakın 50.000 TL'ye yuvarlar.
- Satıcılar para üstünü öderken madeni paraları en akılcı kombinasyona göre seçerler. Örneğin satıcı 200.000 TL'lik bir para üstünü dört adet 50.000 TL ile değil iki adet 100.000 TL ile öder. Aynı şekilde satıcılar, para üstünün kağıt para ile ödeyebilecekleri kısmını madeni para ile ödemez.

- Birey para üstünü tam olarak alır, bahşiş bırakmaz ve alışveriş tutarını yuvarlamak amacı ile gereksiz alışveriş (sakız, kibrit, şeker, v.b.) yapmaz.

Yukarıda sıralanan varsayımlardan ilk üçü kesikli Markov zincirlerinin gerektirdiği varsayımlardır. Diğer dört varsayım ise uygulama ve analiz kolaylığı sağlama amacı ile yapılan varsayımlardır. Bu çalışmada sadece madeni paralar göz önüne alındığı için, 4. ve 6. varsayım kağıt paraların etkisini ortadan kaldırmak amacıyla yapılmıştır. Günümüzde tedavülde bulunan en küçük madeni para 25.000 TL'dır. Ancak, bu para yaygın olarak kullanılmadığı için, 5. varsayım ile model kapsamından çıkarılmıştır. Ayrıca, gerektiğinde model 25.000 TL'lik madeni paraları da kapsayacak şekilde kolayca değiştirilebilir. 2. varsayım ise ilk etapta gerçek hayatla tutarsız bir varsayım izlenimi verebilmektedir. Gerçek hayatta bireylerin nakit para ile yaptıkları alışverişlerin tutarı ceplerindeki para miktarına bağlıdır. Ancak, bu çalışmada kağıt paralar kapsam dışı bırakıldığı için 2.750.000 TL'lik bir alışveriş ile 15.750.000 TL'lik bir alışverişin aynı olduğu varsayılmaktadır. Dolayısı ile nakit para sıkıntısı nedeniyle alışveriş tutarının sınırlandırılması söz konusu olabilirken madeni para sıkıntısı (veya fazlalığı) yapılan alışveriş tutarını etkilemez. 7. varsayım ise uygulanan madeni para stratejilerinin sağlıklı bir karşılaştırmasını yapabilmek amacı ile eklenmiştir. Bireyler bahşiş bırakarak yada gereksiz alışverişler yaparak ceplerindeki madeni para miktarını her zaman için sıfırlayabilirler. Ancak bu durum kullandıkları stratejinin bir başarısı değildir.

4. ANALİZ

4.1. Stratejiler için Markov Analizleri

Yukarıda sıralanan varsayımlar altında, madeni para stratejilerinin karşılaştırmalı analizi için her stratejinin geçiş matrisini ayrı ayrı oluşturmak gerekmektedir.

Önceden belirtildiği gibi, Strateji 1'de birey alışverişlerini sürekli kağıt para ile ödemekte ve madeni para ile ödeme yapmamakta idi. Bu durumda bireyin cebindeki madeni para miktarı, para üstü söz konusu olduğunda, sürekli olarak artacaktır. Bu artış sonucunda belli bir anda bireyin cebindeki madeni para miktarı uzun dönemde sonsuza yaklaşacaktır. Bu durumda, Strateji 1'in karşılaştırmaya hiç de uygun bir strateji olmadığı açıktır. Ayrıca, bu strateji Markov zincirlerinin "sonlu sayıda olası durum" varsayımına aykırı bir sonuç doğurmaktadır. Bu nedenle Strateji 1 için, herhangi bir analiz yapmaksızın, uzun dönemde bireyin cebindeki madeni para miktarını aşırı miktarda artıracağı sonucuna varmak mümkündür.

Strateji 2'de birey eğer cebindeki madeni para miktarı alışveriş tutarının küsuratlı kısmına eşit veya onu aşıyorsa küsuratlı kısmı madeni para ile ödemekte, aksi halde ödemeyi kağıt para ile yapmakta idi. Kolayca anlaşılabileceği gibi, bu stratejiyi kullanan bir bireyin cebindeki madeni para miktarı hiçbir zaman 450.000 TL'yi aşmayacaktır. Yapılan alışveriş tutarlarının en yakın 50.000 TL'ye yuvarlanacağı varsayımıyla bireyin belli bir anda cebinde taşıyabileceği tüm olası madeni para miktarları 0, 50.000, 100.000, 150.000, 200.000,..., 450.000 TL olarak sıralanabilir. Sıralanan bu miktarlar Strateji 2 için sistemin tüm olası durumlar vektörünü tanımlar.

Strateji 2 için tek adımda geçiş matrisinin tanımlanması ile bu sistemin Markov zinciri oluşturularak uzun dönem analizleri kolayca yapılabilir. Tek adımda geçiş matrisi, belli bir durumda bulunan sistemin bir olay sonucunda başka bir duruma geçme olasılıklarını (her bir olası durum için) göstermektedir. Strateji 2 için bu matris, alışveriş tutarlarının küsuratlı kısmına bağlı olarak değişmektedir. Örneğin bir alışveriş (olay) öncesinde bireyin cebinde 150.000 TL olsun. Alışveriş sonrasında bireyin cebindeki para miktarının 200.000 TL'ye çıkması için yapılan alışveriş tutarının 450.000 TL olması gerekmektedir. Dikkat edilecek olursa bu durumda birey alışveriş tutarının küsuratlı kısmını cebindeki madeni paralar ile karşılayamayacak ve tüm ödemeyi kağıt para ile yapacaktır. Bunun sonucunda para üstü olarak alacağı 50.000 TL bireyin cebindeki madeni para miktarını 150.000 TL'den 200.000 TL'ye yükseltecektir. Dolayısı ile sistem durumunun alışveriş sonucunda 150.000 TL'den 200.000 TL'ye değişme olasılığı yapılan alışverişin küsuratlı kısmının 450.000 TL olma olasılığına eşittir. Diğer durumlar için de geçiş olasılıkları aynı mantıkla kolayca bulunabilir.

Strateji 2 için bir adımda geçiş matrisi Tablo 2'de sunulmuştur. Bu matriste satırlar alışveriş öncesi, sütunlar ise alışveriş sonrası bireyin cebindeki madeni para miktarlarını (sistemin olası durumlarını) göstermektedir. X rassal değişkeni ise yapılan alışverişin küsuratlı tutarını ifade etmektedir. Dolayısı ile hücrelerde yer alan olasılık değerleri $P(X = a)$, $a = 50.000, 100.000, ..., 450.000$, yapılan alışverişin küsuratlı tutarının a TL'sı olma olasılığını göstermektedir.

Tablo 2: Strateji 2 için Tek Adımda Geçiş Matrisi

TL	0	50.000	100.000	...	450.000
0	P(X=0)	P(X=450.000)	P(X=400.000)	...	P(X=50.000)
50.000	P(X=50.000)	P(X=0)	P(X=450.000)	...	P(X=100.000)
100.000	P(X=100.000)	P(X=50.000)	P(X=0)	...	P(X=150.000)
150.000	P(X=150.000)	P(X=100.000)	P(X=50.000)	...	P(X=200.000)
200.000	P(X=200.000)	P(X=150.000)	P(X=100.000)	...	P(X=250.000)
250.000	P(X=250.000)	P(X=200.000)	P(X=150.000)	...	P(X=300.000)
300.000	P(X=300.000)	P(X=250.000)	P(X=200.000)	...	P(X=350.000)

350.000	P(X=350.000)	P(X=300.000)	P(X=250.000)	...	P(X=400.000)
400.000	P(X=400.000)	P(X=350.000)	P(X=300.000)	...	P(X=450.000)
450.000	P(X=450.000)	P(X=400.000)	P(X=350.000)	...	P(X=0)

Strateji 3'de ise birey cebindeki madeni para belli bir miktara (dayanma miktarı, T) ulaşıncaya kadar Strateji 1'i, cebindeki madeni para dayanma miktarına ulaşınca ise Strateji 2'yi uygulamakta idi. Bu stratejiye göre bireyin belli bir anda cebinde taşıyabileceği madeni para miktarı 400.000 + T 'yi aşmayacaktır. Örneğin dayanma miktarı 100.000 TL (T=100.000) olduğunda belli bir anda bireyin cebindeki para miktarı 500.000 TL'den fazla olamayacaktır. En kötü durum (bireyin cebinde 50.000 TL madeni para bulunduğu ve yapılan alışverişin küsuratlı tutarının 50.000 TL olduğu durum) göz önüne alındığında, birey cebindeki madeni para ile yaptığı alışverişi ödeyebilecek iken cebindeki madeni para miktarı dayanma miktarına ulaşmadığı için kağıt para ile ödeme yapacak ve bu alışveriş sonunda cebindeki madeni para miktarı 500.000 TL'ye ulaşacaktır.

Strateji 3 için (T=100.000 varsayıldığında) bir adımda geçiş matrisi Tablo 3'de sunulmuştur. Geçiş matrisinden de anlaşılabileceği gibi dayanma miktarı ve sonrasındaki satırlar Strateji 2 için oluşturulan geçiş matrisine benzemektedir.

Tablo 3: Strateji 3 (T=100.000) için Tek Adımda Geçiş Matrisi

TL	0	50.000	...	450.000	500.000
0	P(X=0)	P(X=450.000)	...	P(X=50.000)	0
50.000	0	P(X=0)	...	P(X=100.000)	P(X=50.000)
100.000	P(X=100.000)	P(X=50.000)	...	P(X=150.000)	0
150.000	P(X=150.000)	P(X=100.000)	...	P(X=200.000)	0
200.000	P(X=200.000)	P(X=150.000)	...	P(X=250.000)	0
250.000	P(X=250.000)	P(X=200.000)	...	P(X=300.000)	0
300.000	P(X=300.000)	P(X=250.000)	...	P(X=350.000)	0
350.000	P(X=350.000)	P(X=300.000)	...	P(X=400.000)	0
400.000	P(X=400.000)	P(X=350.000)	...	P(X=450.000)	0
450.000	P(X=450.000)	P(X=400.000)	...	P(X=0)	0
500.000	0	P(X=450.000)	...	P(X=50.000)	0

4.2. Analiz Sonuçları ve Bulgular

Bir önceki bölümde tek adımda geçiş matrisleri verilen stratejilerin uzun dönem analizlerinin yapılabilmesi için alışveriş tutarlarının (küsuratlı kısmı) olasılık dağılımlarının, bir başka ifade ile tek adımda geçiş matrislerinde yer alan (P(X = a), a = 50.000, 100.000,..., 450.000) olasılık değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Bu çalışmada uzun dönem analizleri, alışveriş tutarları için Tablo 4'de sunulan dört farklı olasılık dağılımı kullanılarak yapılmıştır.

Tablo 4: Alışveriş Tutarları için Kullanılan Olasılık Dağılımları

	Dağılım 1 (Üniform)	Dağılım 2 (Üçgen)	Dağılım 3 (Doğrusal Artan)	Dağılım 4 (Doğrusal Azalan)
P(X=0)	1 / 10	1 / 30	1 / 55	10 / 55
P(X=50.000)	1 / 10	2 / 30	2 / 55	9 / 55
P(X=100.000)	1 / 10	3 / 30	3 / 55	8 / 55
P(X=150.000)	1 / 10	4 / 30	4 / 55	7 / 55
P(X=200.000)	1 / 10	5 / 30	5 / 55	6 / 55
P(X=250.000)	1 / 10	5 / 30	6 / 55	5 / 55
P(X=300.000)	1 / 10	4 / 30	7 / 55	4 / 55
P(X=350.000)	1 / 10	3 / 30	8 / 55	3 / 55
P(X=400.000)	1 / 10	2 / 30	9 / 55	2 / 55
P(X=450.000)	1 / 10	1 / 30	10 / 55	1 / 55

Strateji 2 ve Strateji 3 (T=100.000 ve T=300.000), yukarıda verilen her bir olasılık dağılımı için ayrı ayrı analize tabi tutularak Denklem (4)'de ifade edilen denklem sistemleri oluşturulmuştur. Oluşturulan bu denklem sistemleri Mathematica® (Sürüm 4) paket programı kullanılarak çözülmüş ve denge durumu (uzun dönem) için durum olasılık vektörleri, Π, elde edilmiştir. Analiz sonuçları Tablo 5'de özetlenmiştir. Bu tabloda satırlar, sistemin bulunabileceği olası durumları (örneğin $\pi_{100.000}$ satırı bireyin cebinde 100.000 TL madeni para bulunması durumunu) göstermektedir. Sütunlar ise, stratejileri ve her bir strateji için yukarıda sıralanan olasılık dağılımlarını göstermektedir. Hücre değerleri ise ilgili sütunda belirtilen strateji ve olasılık dağılımı için sistemin uzun dönemde (denge durumunda) ilgili satırda belirtilen durumda bulunma olasılıklarını vermektedir. Örneğin, 4'ncü satır 3'ncü sütunda yer alan 1/10 değeri, alışveriş tutarlarının doğrusal olarak artan bir olasılık dağılımı gösterdiği bir durumda Strateji 2'yi kullanan bir bireyin uzun dönemde cebinde 150.000 TL madeni para bulunma olasılığının 0.1 olduğunu belirtmektedir. En alt satır ise bireyin belli bir anda cebinde taşıdığı ortalama madeni para miktarını göstermektedir.

Tablo 5: Analiz Sonuçları

		Strateji 2				Strateji 3 (T=100.000)				Strateji 3 (T=300.000)			
		Olasılık Dağılımı				Olasılık Dağılımı				Olasılık Dağılımı			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Denge Durumu Olasılıkları (Π Vektörü Olasılıkları)	π_0	1/10	1/10	1/10	1/10	4/45	27/290	13/135	2/25	2/45	1/29	17/270	1/45
	$\pi_{50..000}$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/18	3/58	2/27	1/30
	$\pi_{100..000}$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/15	2/29	1/12	7/150
	$\pi_{150.000}$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	7/90	12/145	49/540	14/225
	$\pi_{200.000}$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	4/45	27/290	13/135	2/25
	$\pi_{250.000}$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10
	$\pi_{300.000}$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10
	$\pi_{350.000}$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10
	$\pi_{400.000}$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10
	$\pi_{450.000}$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10
	$\pi_{500.000}$	0	0	0	0	1/90	1/145	1/270	1/50	1/18	19/290	1/27	7/90
	$\pi_{550.000}$	0	0	0	0	0	0	0	0	2/45	7/145	7/270	1/15
	$\pi_{600.000}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1/30	9/290	1/60	4/75
	$\pi_{650.000}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1/45	1/58	1/108	17/450
	$\pi_{700.000}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1/90	1/145	1/270	1/50
Ortalama (Bin TL)		225	225	225	225	231	228	227	235	308	309	271	353

Analiz sonuçlarına göre Strateji 2 tüm olasılık dağılımları için bireyin cebindeki madeni para miktarını uzun dönemde en az yapan stratejidir. Ödemelerinde Strateji 2'yi kullanan bir birey cebinde ortalama olarak 225.000 TL taşıyacaktır. Bu miktar diğer stratejilere göre daha düşüktür. Analiz sonuçlarının ortaya koyduğu diğer bir durum da Strateji 2'nin alışveriş tutarlarının olasılık dağılımına duyarsız olmasıdır. Tablo 5'den kolayca anlaşılabileceği gibi alışveriş tutarlarının olasılık dağılımı değişse bile Strateji 2 için denge durumu sonuçları aynı kalmaktadır. Tablo 4'de görüldüğü gibi, olasılık dağılımı 3'te düşük tutarlı alışverişlerin olasılığı düşük, yüksek tutarlı alışverişlerin olasılığı ise yüksektir. Olasılık dağılımı 4'te ise bu durum tersine dönmekte ve düşük tutarlı alışverişlerin olasılığı yükselmektedir. Analiz sonuçları, Strateji 2'nin olasılık dağılımındaki bu değişmelerden etkilenmediğini göstermektedir. Strateji 3 (T=100.000) ise Strateji 2'den sonra en başarılı stratejidir. Bu strateji özellikle, yüksek tutarlı alışverişlerin daha yüksek olasılığa sahip olduğu durumlarda Strateji 2'ye oldukça yakın sonuçlar vermektedir. Yapılan ilave analizler yüksek tutarlı alışveriş olasılıkları yükseldikçe bu stratejinin başarısının daha da arttığını göstermektedir. Ancak, düşük tutarlı alışveriş olasılıklarının yüksek olması durumunda bu stratejinin başarısı azalmaktadır. Strateji 3 (T=300.000) ise en başarısız strateji olarak göze çarpmaktadır. Aynı zamanda bu strateji alışveriş tutarlarının olasılık dağılımlarındaki değişmelerden oldukça fazla etkilenmektedir. Özellikle, düşük tutarlı alışverişlerin yüksek olasılığa sahip olması durumunda bu strateji oldukça başarısız iken (353.000 TL ortalama ile) yüksek tutarlı alışverişlerin yüksek olasılığa sahip olması durumunda çok daha başarılı (271.000 TL ortalama ile) olmaktadır.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, bir bireyin perakende alışverişlerini öderken mevcut madeni paralarını kullanma konusunda uygulayabileceği çeşitli alternatif stratejiler, kesikli Markov zincirleri yardımıyla, karşılaştırmalı olarak analiz edilmiştir. Bu amaçla, geliştirilen üç alternatif strateji alışveriş tutarlarının farklı olasılık dağılımları göstermesi durumunda ayrı ayrı analize tabi tutulmuştur. Bireyin alışverişlerini öderken cebinde mevcut olan madeni paraları hiç kullanmadığı Strateji 1, taşınan madeni para miktarını sınırsız olarak artırması nedeniyle yapılan analizlerde kapsam dışı bırakılmıştır. Yapılan analizler sonucunda her bir olasılık dağılımı için stratejilerin uzun dönemde (denge durumunda) ne kadar başarılı oldukları tespit edilmiştir. Analiz sonuçlarına göre; Strateji 2 bireyin zaman boyunca cebinde taşıdığı madeni paraların ortalamasını (parasal değer olarak) minimum yapan ve dolayısı ile en başarılı strateji olarak ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışma bir bireyin perakende alışverişlerini öderken cebinde mevcut olan madeni paraları mümkün olduğunca fazla kullanması gerektiğini ortaya koymaktadır. Böyle bir strateji ile birey pek çok alışverişinde para üstünü kağıt para olarak alacak ve cebinde taşıyacağı madeni para miktarı azalacaktır. Bu çalışma ayrıca, alışveriş tutarlarının gösterdiği olasılık dağılımının bazı stratejilerin başarısını büyük ölçüde etkilediğini göstermektedir. Strateji 3 özellikle yüksek tutarlardaki alışveriş olasılıklarının yüksek olduğu durumlarda, diğer olasılık dağılımlarına kıyasla, daha başarılı olurken Strateji 2'nin başarısı alışveriş tutarlarının olasılık dağılımlarındaki değişmelerden etkilenmemektedir. Bu durum Strateji 3'ün sadece alışveriş tutarlarının (küsuratlı kısmı) yüksek olduğu durumlarda, Strateji 2'nin ise her durumda kullanılabileceğini göstermektedir. Analiz sonuçları ayrıca, yüksek tutarlardaki alışveriş olasılıklarının çok yüksek olması durumunda Strateji 3'ün (T=100.000) Strateji 2'den daha başarılı olabileceğine işaret etmektedir.

Paranın dolaşım hızı ile ilgili ekonomik bir probleme bu alanda sık olarak kullanılmayan bir yöntem olan Markov zincirleri ile yaklaşan bu çalışma aynı zamanda literatüre yeni bir araştırma alanı sunmaktadır. Özellikle, bu alanda gelecekte yapılacak çalışmalarla madeni paraların ödeme sırasında nasıl kullanılacağı konusunda yeni stratejiler geliştirilerek bu stratejiler analiz edilebilecek ve daha etkin bir strateji belirlenebilecektir. İlave olarak, modelin varsayımları gevşetilerek bu çalışmada kapsam dışı bırakılan kağıt paralar da analize dahil edilebilecektir. Bu yönde bir çalışma ile, sadece madeni paraların değil, kağıt paraların da dolaşım hızı ile ilgili önemli sonuçlar elde edilebilecektir.

KAYNAKLAR

1. Alfa, A. S. ve Yu-Fei Shi, (2000). A Discrete Time-Limited Vacation Model For The Fair Share Scheduler, Telecommunication Systems, 13, 2, 167-169.

2. Darphane ve Damga Matbaası Genel Müdürlüğü, (2004). Cumhuriyet Dönemi Tedavül Paraları, Erişim: [http://www.darphane.gov.tr/istatistik/yeni/tumdepara.htm], Erişim Tarihi: 15.02.2004.

3. Howard, R., (1960). Dynamic Programming and Markov Processes, MIT Press, Cambridge, Mass.

4. Mathematica® Paket Programı, Sürüm 4.0.2.0, Wolfram Research, 1988-1999.

5. Ross, Sheldon M., (1996). *Stochastic Processes*, 2. Baskı, John Wiley & Sons, NewYork.

6. Schnatter, S. F., (2001). Markov Chain Monte Carlo Estimation Of Classical And Dynamic Switching And Mixture Models, Journal of the American Statistical Association, 96, 453, 194-199.

7. Taha, Hamdy A., (2003). *Operations Research: an Introduction*, 7. Baskı, Prentice-Hall, NewJersey.

8. Turban, Efraim ve Jack R. Meredith, (1994). *Fundamentals of Management Science*, 6. Baskı, Irwin, Burr Ridge.

9. Wang, P. ve M. L. Puterman, (1999). Markov Poisson Regression Models For Discrete Time Series. Part 1: Methodology, Journal of Applied Statistics, 26, 7, 855-869.