Dokuz Eylül Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi
Cilt 5, Sayı:1, 2003

BİR İŞLETMENİN ÖDEMELER DENGESİNİN MARKOV SÜREÇLERİ YARDIMIYLA ANALİZİ

Yard.Doç.Dr. Nursel S. Rüzgar[1]

ÖZET

İşletmeler ticari işlemlerini (ödemeler dengesini) genel olarak müşteri şirketlerinin yada bireysel müşterilerin taleplerine göre şekillendirirler. Müşterilerin ödeme planları, ürün veya hizmet satan işletmeler için ise alacakların tahsili son derece önemlidir. İşletmeler, alacakların tahsili oranında bütçelerini dengelemekte ve ticari yaşamını sürdürmektedir. Ödemeler dengesi, işletmelerin ileriye dönük yaklaşımlarında birincil önceliği oluşturmaktadır. Dolayısıyla, işletmelerin alacaklarını tahmin etmek üzere bir yöntem olarak Markov süreçleri kullanılabilir. Bu amaçla, bir işletmenin bir yıllık tüm alacak kayıtları incelenmiş ve aylık alacak sayıları ortaya çıkarılmıştır. Alacaklar; Peşin alacaklar (0), 1, 2, 3, ... , 12 ay vadeli alacaklar ve bir yıldan uzun vadeli alacaklar olmak üzere 14 grupta sınıflandırılmıştır. İşletmenin uzun dönem alacaklarının tahmin oranlarının bulunması için Markov süreçleri kullanılmış, geçiş olasılıkları matrisinden ve denge-durum olasılıklarından yararlanarak aylara ait alacakların elde edilme oranları hesaplanmış ve her iki sonuç karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Alacak tahmini, Markov süreçleri, geçiş olasılıkları, denge-durum olasılıkları

GİRİŞ

İşletmeler sattıkları mal ve hizmetler karşılığında alacaklarını tahmin ederlerken geçmiş dönemdeki bilgilerinden yararlandıkları gibi, şu andaki bilgilerden de yararlanabilirler. Geçmiş bilgileri dikkate alarak bir tahminde bulunulacağı zaman regresyon analizinden yararlanırken, şu andaki bilgiler dikkate alınarak tahminde bulunulacağı zaman ise Markov süreçlerinden yararlanılır.

Bu çalışmada, bir işletmenin 2000 yılı bütçe kayıtları incelenmiş 28834 işlemden müşterilerin her ay için yaptıkları ödeme durumları ile yaptıkları peşin ödemeler ve bir yıldan uzun vadeye sarkıttıkları ödeme durumları tespit edilmiştir. Bu veriler bir tablo olarak düzenlendiğinde 14x14'lük bir matris oluşturmuştur. Veriler satır olarak yüzdelik dilime standartlaştırılmış ve Tablo 1'de gösterilmiştir. İşletmenin alacaklarına ait oranları tespit etmede Markov

[1] Marmara Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Bölümü

süreçleri bir yöntem olarak kullanılacağı için bu Tablo 1 ile oluşan 14x14'lük matris, Markov süreçleri için aynı zamanda geçiş matrisi olacaktır.

İşletmelerin muhasebe kayıtlarının sürekli tutuluyor olması ve bilanço analizleri ile mevcut durumların ortaya konulması, beraberinde alacakların tahsil edilme oranlarını da gündeme getirmektedir. İşletmeler, alacaklarının tahsilinde geçmiş deneyimlerine dayanarak hareket etmektedirler. Bu çalışmada amaç, bilgisayar teknolojisinin sağladığı olanaklardan yararlanarak mevcut durumlardan hareketle alacakların tahsil edilme oranlarını Markov süreçleri yardımıyla belirlemektir. Muhasebe kayıtlarının tutulması, elde edilen bilgilerle geçiş matrisinin rahatlıkla kurulabilmesi ve sürekli yenilenmesi değişen koşullara göre gelecekle ilgili beklentilerin de nasıl değişim gösterdiğini belirlememize olanak sağlamaktadır. Dolayısıyla, eldeki mevcut bilgilerle gelecekteki beklentileri planlamaya yönelik alternatif bir yaklaşım yöntemi olarak Markov süreçleri kullanılabilir.

1. MARKOV ÖZELLİĞİ VE MARKOV SÜREÇLERİ

Markov süreci bir olasılık sürecidir ve gelecekteki olayların bir durumunu içerir. Markov süreçleri ileride ortaya çıkması olası durumların gerçekleşme olasılıklarının, geçmiş verilerden değil şu andaki verilerden yararlanarak bulunduğu süreçlerdir. Markov süreçlerinin temel özelliği, belirli bir zaman diliminde çeşitli durumlarda bulunmanın ve bir durumdan diğer duruma geçişin olasılıklarının göz önüne alınmasıdır. Bir durumdan diğer duruma geçiş daha önceki durumlara bağlı olmayıp, sadece bir önceki duruma bağlıdır. Bu açıdan, Markov süreci için önceki durum hariç, daha önceki durumların bilinmesi gereksinimi yoktur. Bu özelliğe *Markov özelliği* denir (Lapin, 1992, 876). Markov özelliği olan bir sistemde, bir durumdan diğer duruma geçiş, sadece bir önceki duruma bağlı olan şartlı olasılıkla ifade edilir. Şöyleki, t_{n-1} anındaki durum olasılığı x_{n-1}, t_n anındaki durum olasılığı x_n ve Z_{t_n} ile $Z_{t_{n-1}}$ rastsal değişkenler olmak üzere, t_n anında x_n de olması olasılığı

$$p_{x_{n-1},x_n} = P\left(Z_{t_n} = x_n \middle| Z_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right) \qquad (1)$$

koşullu olasılığı ile gösterilir ve bu koşullu olasılık sistemin t_{n-1} anından t_n anına geçişi tanımladığından buna *bir adımlı geçiş* denir. k adımlı geçiş olasılığı ise Z_{t_n} rastsal değişken olmak üzere,

$$p_{x_n,x_{n+k}} = P\left(Z_{t_{n+k}} = x_{n+k} \middle| Z_{t_n} = x_n\right) \qquad (2)$$

ile ifade edilir. $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ (n=0,1,2,...) zamana ait noktaları gösteriyorsa $\{Z_{t_n}\}$ rastsal değişkenler ailesi, $Z_{t_0}, Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}$ lerin bütün olası değerleri için,

$$P\left(Z_{t_n} = x_n \middle| Z_{t_{n-1}} = x_{n-1}, Z_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \ldots, Z_{t_0} = x_0\right) = p_{x_{n-1}, x_n} = P\left(Z_{t_n} = x_n \middle| Z_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right) \quad (3)$$

biçiminde verilen Markov özelliğine sahip ise buna bir Markov sürecidir denir (Taha,1992,703).

2. MARKOV MATRİSİ (GEÇİŞ MATRİSİ)

E_j, (j=0,1,2,...) bir sistemin herhangi bir zamandaki ayrık olay durumlarını göstersin. Sistem t_0 başlangıç anında E_j durumlardan herhangi birinde olabilir. $a_j^{(0)}$ (j=0,1,2,...) Markov özelliğine sahip bir sistemin t_0 başlangıç anında E_j durumunda bulunma olasılığı ve $p_{ij} = P\left(Z_{t_n} = j \middle| Z_{t_{n-1}} = i\right)$, sistemin t_{n-1}'deki i durumundan t_n anındaki j durumuna bir adımda geçiş olasılığını göstermek üzere, p_{ij} olasılığının zamanla sabit olacaktır. E_i durumundan E_j durumuna p_{ij} geçiş olasılıklarının gösterildiği

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \ldots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \ldots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4)$$

matrisine *homojen geçiş matrisi* denir (Taha,1992,703).

P geçiş matrisi;

$$\sum_j p_{ij} = 1 \ , \ \forall i \text{ için,} \quad (5\text{-a})$$

$$p_{ij} \geq 0 \ , \ \forall i, j \text{ için,} \quad (5\text{-b})$$

özelliklerini sağlıyorsa bu matrise *stokastik matris*, *olasılık matrisi* veya *Markov matrisi* denir (Anton ve Rorres, 1994, 616). **P** geçiş matrisi, E_j durumlarının

$\{a_j^{(0)}\}$ başlangıç olasılıkları ile birlikte bir *Markov zinciri* veya *Markov süreci* tanımlar (Taha,1992,702).

2.1 CHAPMAN KOLMOGOROV DENKLEMLERİ

Bir sistemin $\{a_j^{(0)}\}$ başlangıç olasılıkları ve **P** geçiş matrisi verildiğinde, bir adım sonraki k durumundan j durumuna geçişin kesin olasılığı;

$$a_j^{(1)} = a_1^{(0)} p_{1j} + a_2^{(0)} p_{2j} + a_3^{(0)} p_{3j} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(0)} p_{ij} \tag{6}$$

İki adım sonraki k durumundan j durumuna geçişin kesin olasılığı;

$$\begin{aligned} a_j^{(2)} &= a_1^{(1)} p_{1j} + a_2^{(1)} p_{2j} + a_3^{(1)} p_{3j} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(1)} p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} p_{ki} \right) p_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_k^{(0)} p_{ki} \right) p_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} p_{ki} p_{ij}}_{p_{kj}^{(2)}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} p_{kj}^{(2)} \end{aligned} \tag{7}$$

Üç adım sonraki k durumundan j durumuna geçişin kesin olasılığı;

$$\begin{aligned} a_j^{(3)} &= a_1^{(2)} p_{1j} + a_2^{(2)} p_{2j} + a_3^{(2)} p_{3j} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(2)} p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} p_{ki}^{(2)} \right) p_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} p_{ki}^{(2)} p_{ij}}_{p_{kj}^{(3)}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} p_{kj}^{(3)} \end{aligned} \tag{8}$$

şeklindedir. Benzer biçimde, tümevarım ile k durumundan j durumuna geçiş için n adım sonraki olasılıklar başlangıç olasılıkları cinsinden

$$a_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_{ki}^{(n-1)} p_{ij} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} p_{kj}^{(n)} \tag{9}$$

şeklinde olacaktır. Burada $p_{kj}^{(n)}$'ye *n adım geçiş olasılığı* denir. Başlangıç durumunun n adım sonra bulunacağı durum, **P** geçiş matrisinden elde edilen $\mathbf{P}^{(n)}$ n-adım geçiş olasılıkları matrisi ile $\mathbf{a}^{(0)}$ başlangıç matrisinin çarpımı olacaktır. $\mathbf{P}^{(n)}$ n inci geçiş olasılıkları matrisi $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)}.\mathbf{P}$ dır. $0<m<n$ olmak üzere $\mathbf{P}^{(n)}$ n inci geçiş olasılıkları matrisi $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-m)}.\mathbf{P}^{(m)}$ olarak yazılabilir. Bu denklemlere **Chapman-Kolmogorov** denklemleri denir (Taha, 1992, 704).

3. DÜZENLİ MARKOV ZİNCİRİ VE DENGE DURUMU

Bir geçiş matrisinin tüm kuvvetlerinde bulunan tüm elemanların hepsi sıfırdan farklı ve pozitif ise bu geçiş matrisine *düzenli matris* (regular matris) denir. Bir Markov zincirinin düzenli geçiş matrisi var ise buna *düzenli Markov zinciri* denir (Anton ve Rorres, 1994, 620).

Markov zincirlerinde çok sayıda geçişin ardından yada n'in büyük değerleri için $\mathbf{P}^{(n)}$ geçiş olasılıkları matrisi sabit olma eğilimindedir. k durum içeren **P** matrisi düzenli geçiş matrisi ise q_i'ler $q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_k = 1$ koşulunu gerçekleyen pozitif sayılar için $n \to \infty$ iken

$$\mathbf{P}^{(n)} \to \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_k \end{bmatrix} \tag{10}$$

olur. Diğer bir deyişle, n-adım geçiş matrisi belirli ondalıklarla her satırı diğer satırlara eşit ve toplamları 1'e eşit olan bir matris haline dönüşür. $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_k \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$\mathbf{a}^{(0)}\,\mathbf{P}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0q_1 + a_1q_1 + \ldots + a_kq_1 & a_0q_2 + a_1q_2 + \ldots + a_kq_2 & \cdots & a_0q_k + a_1q_k + \ldots + a_kq_k \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_k \end{bmatrix} \left(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k\right) = \mathbf{q}\,(1) = \mathbf{q}$$

bulunur. Buradan, **P** düzenli geçiş matrisi ve a_{ij} herhangi bir olasılık vektörü ise $n \rightarrow \infty$ için

$$\mathbf{a}^{(0)}\,\mathbf{P}^{n} = \mathbf{q} \qquad (11)$$

olur. Burada, **q** tüm bileşenleri pozitif olan ve n'den bağımsız bir sabit olasılık vektörüdür. 11 formülünden görüldüğü üzere düzenli bir Markov zinciri, **q** gibi sabit bir durum vektörüne yaklaşır. Bu **q** vektörüne Markov zincirinin durağan veya denge durumu denir. Denge durumunda $\mathbf{P}^{(n)} \cong \mathbf{P}^{(n-1)}$ (yani; $n \rightarrow \infty$, $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)}$) dır. Diğer bir deyişle, n sonsuz olarak büyüdüğü durumda başlangıç koşulunun sürecin belirli bir durumda olması üzerindeki etkisi azalacaktır ve $\mathbf{a}^{(n)} \cong \mathbf{a}^{(n-1)}$ olacaktır. Markov zincirlerinde **P** geçiş matrisinin ne zaman denge durumuna geleceği hakkında kesin bir yaklaşım yoktur. Ancak geçiş olasılıklarının 0 ve 1'den uzaklaştığı oranda n'in küçüleceği söylenir (Anton ve Rorres, 1994, 621).

3.1 DENGE DURUM VEKTÖRÜNÜN HESABI

1. Yöntem: Yukarıda değinildiği üzere **P** geçiş matrisinin kuvvetleri alınarak denge durumuna ulaşılır. **P**'nin yeteri kadar büyük kuvvetlerinde her bir sütundaki elemanlar kendi içlerinde belirli ondalıklarla birbirine eşit duruma gelecektir.

2. Yöntem: n inci adımdaki ulaşılacak başlangıç durumuna $\mathbf{a}^{(n)}$, n-1 inci adımdaki başlangıç koşuluna $\mathbf{a}^{(n-1)}$ ile **P** geçiş olasılıkları matrisinin çarpımına yani,

$$\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{a}^{(n-1)}.\mathbf{P} \qquad (12)$$

eşittir. n adım sonra ulaşılacak başlangıç durumu Markov özelliğinden dolayı (n-1) inci adıma bağlı olacaktır. n'in yeterince büyük değerleri için $\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{a}^{(n-1)}$ olduğundan denge durumunda **a=a.P** eşitliği denge-durum olasılıklarını verecektir. **P** geçiş olasılıkları matrisinin sonlu elemandan oluştuğunu (r-satır, r-sütun) kabul edildiğinde. $\mathbf{a}_{1xr} = \mathbf{a}_{1xr}.\,\mathbf{P}_{rxr}$ matris yazılımı r-bilinmeyenli r-denklemden oluşan homojen bir sistemin çözümünü gerektirecektir. Bu homojen sistemin sabitler matrisi (ikinci taraf matrisi) sıfır olduğu için bütün a_j değerleri sıfır olur. Bu ise

$$\sum_{j=1}^{r} a_j = 1 \qquad (13)$$

tanımına aykırıdır. Dolayısıyla r denklemden bir tanesi sistem dışı tutularak sisteme (13) denklemi ilave edilir. Böylece **a**, **A** ve **B** matrisleri

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_r \end{pmatrix}_{1\times r}, \quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ p_{12} & p_{22}-1 & p_{32} & \cdots & p_{r2} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33}-1 & \cdots & p_{r3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1r} & p_{2r} & p_{3r} & \cdots & p_{rr}-1 \end{pmatrix}_{r\times r}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{r\times 1} \qquad (14)$$

şeklinde yazılabilir. Bu matrisler kullanılarak lineer denklem sistemi

$$\mathbf{A}_{r\times r} \bullet \mathbf{a}^{t}_{r\times 1} = \mathbf{B}_{r\times 1} \qquad (15)$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistemin çözülebilmesi için **A** matrisinin tersinin alınıp **B** matrisi ile çarpılması gerekir (Halaç, 1991, 119-120). Dolayısıyla,

$$\mathbf{a}^{t}_{r\times 1} = \mathbf{A}^{-1}_{r\times r} \bullet \mathbf{B}_{r\times 1} \qquad (16)$$

ifadesi denge durumundaki a_j olasılıklarını verecektir.

4. ALACAKLARIN TAHMİNİ İÇİN BİR UYGULAMA

Bir işletmenin bir yıllık süreçte sattığı mal ve hizmetlere karşılık alacaklarının her ay için elde edilme olasılıkları tespit edilmeye çalışılmıştır. İşletmenin daha önceki yıllara ait alacak kayıtlarının tümünün incelenmesi yerine sadece 2000 yılına ait 28834 kayıt incelenmiş ve her ay için kaç adet alacağın olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca; mal ve hizmet satın alındığında yapılan peşin ödemeler ve bir yıldan uzun vadeye bırakılan ödemeler ayrı ayrı ele alınmıştır. Yapılan araştırmanın sonuçları satır olarak yüzdelik oranlara göre standartlaştırılarak satır toplamı 1 olacak şekilde Markov özelliğine sahip duruma getirilmiştir. p_{ij} yerine 2 basamaklı sayıların problemde indis olarak kullanılması nedeniyle $p_{i;j}$ gösterimi kullanılacaktır. $p_{i;j}$: i'inci aydaki alacağın j'inci ayda tahsil edilme oranıdır. Ayrıca $p_{0;j}$; başlangıçtaki alacağın j'inci ayda tahsil edilme olasılığını ve $p_{13;j}$; bir yıldan uzun vadeye kalmış bir alacağın j inci ayda tahsil edilme olasılığını göstermektedir. Bu oranlar Tablo 1'de gösterilmiştir. Tablo 1'de standartlaştırılmış olarak oluşturulan veriler mevcut durumu kullanarak ileriye dönük çıkarımların yapılacağı geçiş matrisidir. Dolayısıyla, Tablo 1 bir geçiş matrisi olarak ele alındığında

$$\sum_{j=0}^{13} p_{i;j} = 1 \text{, (i=0, 1, 2,...,13)} \quad \text{ve} \quad p_{i;j} \geq 1 \ \text{(i,j=0, 1, 2,...,13)} \tag{17}$$

koşullarını sağlar. Bu durum, **P** geçiş matrisinin bir yıllık süreç içindeki bütün durumları belirlemesini sağlar ve bir Markov zincirini tamamen tanımlar. Ele alınan problem Markov özelliğine sahip olduğuna göre mevcut durumu kullanarak ileriye dönük aylara ait tahsil edilme olasılıkları yukarıda değinildiği gibi iki yolla bulunabilir. Birincisi **P** geçiş matrisinin ardışık kuvvetlerini alarak büyük n'ler için denge durumuna gelinceye kadar olan süreç incelenebilir. İkincisi ise denge durumu dikkate alınarak denklem sistemlerinin çözümü bulunarak denge-durum olasılıklarına ulaşılır. Her iki süreç ileride denge-durumuna ulaşıldığındaki aylara ait elde edilme olasılıklarını verecektir.

1. Yöntem:

Sistemin **P** geçiş matrisi Tablo 1'de verilmiştir. **P** geçiş matrisinin $\mathbf{P}^{(2)}$ ve $\mathbf{P}^{(3)}$ ardışık kuvvetleri ise sırasıyla Tablo 2 ve Tablo 3'te gösterilmiştir. Tablo 2 ve Tablo 3'te gösterilen matrislerde, sütunların kendi içlerinde büyük oranda birbirine 1 ve 2 ondalıkla eşit oldukları görülmektedir.

P geçiş matrisinin $\mathbf{P}^{(n)}$ kuvvetleri n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 ve 100 için alınmış ve bunların sadece birer satırları alınarak, diğer sütun elemanları ile kaç ondalıkta yaklaşık değer aldıkları Tablo 4'te gösterilmiştir. Tablo 4'ten sitemin n=5 için denge durumuna ulaştığı görülmektedir.

2. Yöntem:

P geçiş matrisi denge durumuna göre incelendiğinde, n'nin yeterince büyük değerleri için **a**=**a.P** homojen denklem sisteminin çözülmesi gerekir. Tablo 1'de gösterilen **P** geçiş matrisi ile $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{13} \end{pmatrix}$ matrisi ele alındığında,

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{13} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p_{0;0} & p_{0;1} & p_{0;2} & \cdots & p_{0;13} \\ p_{1;0} & p_{1;1} & p_{1;2} & \cdots & p_{1;13} \\ p_{2;0} & p_{2;1} & p_{2;2} & \cdots & p_{2;13} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{13;0} & p_{13;1} & p_{13;2} & \cdots & p_{13;13} \end{pmatrix} \tag{18}$$

matris sisteminin çarpımından yararlanarak denklem sisteminin çözümü aşağıdaki biçimde bulunur.

$$(a_0\ a_1\ a_2\ \cdots\ a_{13}) = (a_0\ a_1\ a_2\ \cdots\ a_{13}) \bullet \begin{pmatrix} 0{,}1446 & 0{,}2098 & 0{,}1412 & \cdots & 0{,}0289 \\ 0{,}2301 & 0{,}1534 & 0{,}0926 & \cdots & 0{,}0543 \\ 0{,}0535 & 0{,}1352 & 0{,}0952 & \cdots & 0{,}1059 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0{,}2378 & 0{,}0762 & 0{,}1433 & \cdots & 0{,}3780 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0{,}1446a_0 + 0{,}2301a_1 + 0{,}0535a_2 + \ldots + 0{,}2378a_{13} \\ a_1 &= 0{,}2098a_0 + 0{,}1534a_1 + 0{,}1352a_2 + \ldots + 0{,}0762a_{13} \\ a_2 &= 0{,}1412a_0 + 0{,}0926a_1 + 0{,}0952a_2 + \ldots + 0{,}1433a_{13} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{13} &= 0{,}0289a_0 + 0{,}0543a_1 + 0{,}1059a_2 + \ldots + 0{,}3780a_{13} \end{aligned} \tag{20}$$

sistemde gerekli sadeleştirmeler yapılır ise

$$\begin{aligned} 0 &= -0{,}8554a_0 + 0{,}2301a_1 + 0{,}0535a_2 + \ldots + 0{,}2378a_{13} \\ 0 &= 0{,}2098a_0 - 0{,}8466a_1 + 0{,}1352a_2 + \ldots + 0{,}0762a_{13} \\ 0 &= 0{,}1412a_0 + 0{,}0926a_1 - 0{,}9048a_2 + \ldots + 0{,}1433a_{13} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= 0{,}0289a_0 + 0{,}0543a_1 + 0{,}1059a_2 + \ldots - 0{,}6280a_{13} \end{aligned} \tag{21}$$

Bu sistem 14 bilinmeyenli 14 denklemden oluşmaktadır ve katsayılar determinantı sıfırdan farklıdır. Sistemin çözümü ancak $a_0=a_1=a_2= \ldots =a_{13}=0$ ise mümkündür. Bu ise $\sum_{i=0}^{13} a_i = 1$ tanımına aykırıdır. O halde sistemden bir denklem dışarı alınıp bunun yerine $\sum_{i=0}^{13} a_i = 1$ denklemi ilave edilmelidir. Sistemden rastgele seçilen $-0{,}8554a_0+0{,}2301a_1+0{,}0535a_2+ \ldots +0{,}2378a_{13}$ denklemini dışarı alır bunun yerine $a_0+a_1+a_2+ \ldots +a_{13}=1$ denklemi ilave edilir ise sistemin katsayılar matrisi **A**

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0,2098 & -0,8466 & 0,1352 & 0,1300 & 0,1186 & 0,1135 & 0,1000 & 0,1079 & 0,0630 & 0,1049 & 0,0976 & 0,0686 & 0,0978 & 0,0762 \\
0,1412 & 0,0926 & -0,9048 & 0,1340 & 0,1126 & 0,0970 & 0,1049 & 0,0862 & 0,0816 & 0,0845 & 0,0763 & 0,1339 & 0,1141 & 0,1433 \\
0,0995 & 0,0702 & 0,0696 & -0,8950 & 0,0614 & 0,0832 & 0,0437 & 0,0933 & 0,0723 & 0,0772 & 0,0866 & 0,1078 & 0,1331 & 0,0366 \\
0,0464 & 0,0615 & 0,0662 & 0,0714 & -0,9496 & 0,0698 & 0,0587 & 0,0687 & 0,0781 & 0,0800 & 0,0811 & 0,0810 & 0,0821 & 0,0030 \\
0,0693 & 0,0883 & 0,0622 & 0,0652 & 0,0571 & -0,9338 & 0,0862 & 0,0800 & 0,0615 & 0,0882 & 0,1007 & 0,0764 & 0,0733 & 0,0213 \\
0,0753 & 0,0340 & 0,0427 & 0,0675 & 0,0642 & 0,0619 & -0,9121 & 0,0696 & 0,0669 & 0,0821 & 0,0775 & 0,0738 & 0,0794 & 0,0366 \\
0,0632 & 0,0492 & 0,0649 & 0,0721 & 0,0733 & 0,0505 & 0,0789 & -0,9313 & 0,0727 & 0,0670 & 0,0256 & 0,0568 & 0,0462 & 0,0122 \\
0,0168 & 0,0543 & 0,0427 & 0,0421 & 0,0610 & 0,0607 & 0,0794 & 0,0750 & -0,5290 & 0,0523 & 0,0659 & 0,0640 & 0,0516 & 0,0030 \\
0,0316 & 0,0347 & 0,0699 & 0,0477 & 0,0500 & 0,0757 & 0,0737 & 0,0441 & 0,0491 & -0,9437 & 0,0165 & 0,0294 & 0,0692 & 0,0000 \\
0,0249 & 0,0152 & 0,0716 & 0,0550 & 0,0733 & 0,0690 & 0,0664 & 0,0462 & 0,0599 & 0,0621 & -0,9475 & 0,0444 & 0,0285 & 0,0183 \\
0,0350 & 0,0268 & 0,0706 & 0,0336 & 0,0528 & 0,0426 & 0,0628 & 0,0529 & 0,0708 & 0,0670 & 0,0647 & -0,9650 & 0,0455 & 0,0274 \\
0,0134 & 0,0355 & 0,0498 & 0,0349 & 0,0626 & 0,0489 & 0,0360 & 0,0433 & 0,0750 & 0,0563 & 0,0757 & 0,0483 & -0,9803 & 0,0061 \\
0,0289 & 0,0543 & 0,1059 & 0,0695 & 0,0819 & 0,0796 & 0,0464 & 0,0779 & 0,0793 & 0,0425 & 0,0665 & 0,0745 & 0,0726 & -0,6220
\end{bmatrix}
$$

olur. Bu lineer denklem **A.a=B** şeklinde kısaca matris gösterimi ile yazılabilir. **a** satır matrisini bulabilmek için $\mathbf{a}=\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{B}$ işleminin yapılması gerekir. **A** matrisinin tersi alınıp **B** ikinci taraf ya da sabitler matrisi ile çarpılır ise,

$$
\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 0,12193 & 0,12319 & 0,10996 & 0,0786 & 0,05968 & 0,069 & 0,06124 & 0,05638 & 0,0479 & 0,0445 & 0,0459 & 0,04625 & 0,03914 & 0,0964 \end{pmatrix}
$$

bulunur. Bu **a** matrisi $\sum_{i=0}^{13} a_i = 1$ koşulunu da sağlamaktadır.

Her iki yöntem ile bulunan sonuçlar (Tablo 4 ve **a** matrisi) karşılaştırıldığında çözümlerin en az üç ondalıkla aynı değerleri aldığı görülmektedir.

Alacakların ödeme tahmininin yapılması için sistem Markov süreçleri ile tanımlanmış, sistemin denge durumuna ulaşması iki farklı yöntem ile çözülmüş ve birbirine en az üç ondalıkla yakın sonuçlar bulunmuştur. Buna göre işletmenin ilk ayda olan alacağının peşin tahsil etme olasılığı 0,12193; birinci ayda tahsil etme olasılığı 0,12319; ikinci ayda tahsil etme olasılığı 0,10996; üçüncü ayda tahsil etme olasılığı 0,0786; dördüncü ayda tahsil etme olasılığı 0,05968; beşinci ayda tahsil etme olasılığı 0,069; altıncı ayda tahsil etme olasılığı 0,06124; yedinci ayda tahsil etme olasılığı 0,05638; sekizinci ayda tahsil etme olasılığı 0,0479; dokuzuncu ayda tahsil etme olasılığı 0,0445; onuncu ayda tahsil etme olasılığı 0,0459; onbirinci ayda tahsil etme olasılığı 0,04625; onikinci ayda tahsil etme olasılığı 0,03914 ve bir yıldan daha uzun sürede tahsil etme olasılığı 0,0964’tür.

SONUÇ

İşletmelerin mevcut alacaklarının tahsil edilme oranları markov süreçlerinde geçiş matrisi yardımıyla bulunabilir. Yukarıda elde edilen sonuçlara göre, şirket 100 birimlik alacağının 12 birimini peşin, 12 birimini birinci ayda, 10 birimini ikinci ayda, 7 birimini üçüncü ayda, 5 birimini dördüncü ayda, 6 birimini beşinci ayda, 6 birimini altıncı ayda, 5 birimini yedinci ayda, 4 birimini sekizinci ayda, 4 birimini dokuzuncu ayda, 4 birimini onuncu ayda, 4 birimini onbirinci ayda, 3 birimini onikinci ayda ve 9 birimini bir yıldan daha uzun sürede tahsil edecektir.

Markov süreçleri kullanılarak, içinde bulunulan yıldan kaç yıl sonrası için tahmin yapılmak isteniyorsa **P** geçiş matrisinin o kadar kuvveti alınarak tahmin yapılabilir. Örneğin; 3 yıl sonra şirketin içinde bulunacağı durumun tahmini için, **P** geçiş matrisinin üçüncü kuvveti alınarak başlangıç olasılık vektörü ile çarpılır. Böylece, Markov süreçleri bir yöntem olarak gelecekteki beklentilerin tahmininde kullanılabilir.

Bu çalışmada tahsil edilecek faturaların değerleri göz önüne alınmamış, sadece şirketin aylara göre bir yıl boyunca ve daha uzun sürede tahsil edilen faturaların tahsil edilme yüzdeleri dikkate alınarak gelecekle ilgili tahmin yapılmıştır. İşletmeler genel olarak alacakları ile ilgili tahminlerinde geçmiş deneyimlerinden yararlanmakta ve gelecekle ilgili yatırımlarını veya beklentilerini bu deneyimlere göre yapmaktadırlar. İşletmelerin alacakları ile ilgili projeksiyonlarında geçmiş verilerinin kullanılması ise son derece fazla verinin işlenmesini gerektirecektir. Markov süreçleri yardımıyla yapılan işlemler için ulaşılan bir yıllık verilerin çokluğu dikkate alındığında, yıllardır var olan verilerin işlenmesi ve değerlendirilmesi oldukça uzun zaman alacaktır. İşletmeler açısından ulaşılmak istenen sonuç, kesin tahmin edilecek oranın belirlenmesinden çok, gelecekle ilgili planlar yapılırken beklentilerin yaklaşık olarak nasıl oluşacağının belirlenmesidir. Bu nedenle, işletmelerin gelecekte yapmayı düşündükleri işlemleri planlayabilmeleri ve bir bilgi oluşturması açısından alacakların tahsil edilme oranlarının tahmini işletmeler açısından önemlidir. Bu da şunu gösteriyor ki, en az birkaç yıllık veriye gereksinim duyularak yapılan tahmin yöntemleri yerine, sadece içinde bulunulan dönemdeki verilerle Markov süreçleri yardımıyla gelecekte alacakların tahsil edilme oranları hakkında tahminler yapılabilir. İşletmelerin muhasebe kayıtlarının bilgisayar ortamında tutuluyor olması ve bilgilerin geçiş matrisine kolayca dönüştürülebilmesi Markov süreçlerinin bir yöntem olarak işletmelerin alacaklarının tahsil edilme oranlarının tahmininde kullanılabileceğini göstermiştir. Geçiş matrisinin rahatlıkla oluşturulabilmesi, yeni işlemlerin sürekli değerlendirilebilmesine olanak sağlamakta ve değişen koşullara göre gelecekteki beklentilerin nasıl değişim göstereceğinin tahmin edilmesine de yardımcı olmaktadır.

Şirketin tahsil ettiği veya edeceği fatura değerlerinin işleme katılması ile ilgili çözümler gelecekteki çalışmalara bırakılmıştır.

KAYNAKÇA

Anton, Howard ve Rorres, Chris. (1994). “Elementary Linear Algebra: Applications Version”, John Wiley & Sons Inc., Canada.

Curvin, Jon; Slater, Roger. (1988), “Quantitative Methods For Business Decisions”, Van Nosrand Reinhold Co. Ltd., London.

Halaç, Osman. (1991), “Kantitatif Karar Verme Teknikleri”, Evrim Basım Yayım Dağıtım, İstanbul.

Roberts, A. Wayne, (1982), “Elementary Linear Algebra”, The Benjamin Publishing Company Inc., California.

Taha, A. Hamdy. (1992), “Operation Research”, Prentice Hall, New Jersey.

Tablo 1. Geçiş Matrisi

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}
p_0	0,1446	0,2098	0,1412	0,0995	0,0464	0,0693	0,0753	0,0632	0,0168	0,0316	0,0249	0,0350	0,0134	0,0289
p_1	0,2301	0,1534	0,0926	0,0702	0,0615	0,0883	0,0340	0,0492	0,0543	0,0347	0,0152	0,0268	0,0355	0,0543
p_2	0,0535	0,1352	0,0952	0,0696	0,0662	0,0622	0,0427	0,0649	0,0427	0,0699	0,0716	0,0706	0,0498	0,1059
p_3	0,0721	0,1300	0,1340	0,1050	0,0714	0,0652	0,0675	0,0721	0,0421	0,0477	0,0550	0,0336	0,0349	0,0695
p_4	0,0807	0,1186	0,1126	0,0614	0,0504	0,0571	0,0642	0,0733	0,0610	0,0500	0,0733	0,0528	0,0626	0,0819
p_5	0,0816	0,1135	0,0970	0,0832	0,0698	0,0662	0,0619	0,0505	0,0607	0,0757	0,0690	0,0426	0,0489	0,0796
p_6	0,0721	0,1000	0,1049	0,0437	0,0587	0,0862	0,0879	0,0789	0,0794	0,0737	0,0664	0,0628	0,0360	0,0494
p_7	0,0862	0,1079	0,0862	0,0933	0,0687	0,0800	0,0696	0,0687	0,0750	0,0441	0,0462	0,0529	0,0433	0,0779
p_8	0,0947	0,0630	0,0816	0,0723	0,0781	0,0615	0,0669	0,0727	0,0750	0,0491	0,0599	0,0708	0,0750	0,0793
p_9	0,0796	0,1049	0,0845	0,0772	0,0800	0,0882	0,0821	0,0670	0,0523	0,0563	0,0621	0,0670	0,0563	0,0425
p_{10}	0,1129	0,0976	0,0763	0,0866	0,0811	0,1007	0,0775	0,0256	0,0659	0,0165	0,0525	0,0647	0,0757	0,0665
p_{11}	0,1065	0,0686	0,1339	0,1078	0,0810	0,0764	0,0738	0,0568	0,0640	0,0294	0,0444	0,0346	0,0483	0,0745
p_{12}	0,0869	0,0978	0,1141	0,1331	0,0821	0,0733	0,0794	0,0462	0,0516	0,0692	0,0285	0,0455	0,0197	0,0726
p_{13}	0,2378	0,0762	0,1433	0,0366	0,0030	0,0213	0,0366	0,0122	0,0030	0,0000	0,0183	0,0274	0,0061	0,3780

Tablo 2. $P^{(2)}$ Matrisi

0,122872	0,134991	0,108217	0,079628	0,061903	0,073198	0,0594063	0,059925	0,049368	0,047365	0,045213	0,044987	0,038684	0,074242
0,125899	0,137466	0,112144	0,082194	0,059396	0,069776	0,0614975	0,05867	0,045203	0,044979	0,043075	0,043969	0,036616	0,079116
0,122763	0,114854	0,107182	0,078703	0,06159	0,070176	0,0609379	0,054271	0,050293	0,043134	0,046156	0,046753	0,041816	0,101371
0,114355	0,12126	0,106786	0,078431	0,062148	0,070567	0,0610048	0,058053	0,050927	0,046903	0,048806	0,047967	0,041865	0,090926
0,117654	0,117357	0,106341	0,079777	0,062602	0,071038	0,0623078	0,055907	0,051201	0,0452	0,046773	0,04834	0,041697	0,093805
0,11622	0,118142	0,106819	0,078988	0,062471	0,070753	0,0628364	0,056731	0,050693	0,045579	0,048088	0,048291	0,042413	0,091975
0,109539	0,115177	0,103624	0,078609	0,064799	0,072698	0,0643736	0,058682	0,054873	0,048076	0,05049	0,050538	0,044907	0,083616
0,115385	0,117684	0,10814	0,079422	0,06208	0,069689	0,0628052	0,057907	0,051473	0,046088	0,048102	0,047344	0,041719	0,092165
0,110877	0,114714	0,108947	0,081663	0,062784	0,069608	0,0651727	0,05743	0,05159	0,045755	0,048322	0,048485	0,04186	0,092792
0,109657	0,117801	0,106533	0,081141	0,06468	0,072498	0,0647505	0,058728	0,053947	0,048074	0,049609	0,048357	0,043269	0,080957
0,114417	0,119698	0,110671	0,081681	0,062285	0,069554	0,0639958	0,057252	0,050745	0,047114	0,047706	0,046306	0,040564	0,088009
0,108106	0,120989	0,109652	0,079539	0,061337	0,068155	0,062962	0,058951	0,049673	0,047934	0,050207	0,048608	0,041113	0,092774
0,110515	0,120814	0,109659	0,078071	0,061605	0,069124	0,0626421	0,059955	0,04999	0,047624	0,050411	0,047656	0,041502	0,090432
0,163602	0,126743	0,126665	0,066938	0,038054	0,052857	0,0526321	0,042887	0,025752	0,028613	0,033488	0,038713	0,022753	0,180302

Tablo 3. $P^{(3)}$ Matrisi

0,120129	0,124544	0,108841	0,079531	0,061057	0,07027	0,0615337	0,057376	0,049057	0,04544	0,046265	0,04645	0,039975	0,089531
0,121137	0,125189	0,109333	0,079208	0,060537	0,070012	0,0612092	0,05724	0,048494	0,045185	0,045937	0,046184	0,039416	0,090918
0,121478	0,122537	0,110354	0,078629	0,059447	0,068544	0,0614275	0,056185	0,047642	0,04433	0,045947	0,046246	0,039033	0,098202
0,120412	0,122178	0,109363	0,078929	0,060361	0,069362	0,0615743	0,056559	0,048634	0,044802	0,046314	0,046563	0,039795	0,095152
0,120419	0,122261	0,109821	0,078853	0,060071	0,069044	0,0616259	0,056559	0,048336	0,044747	0,046301	0,046458	0,039534	0,095972
0,120188	0,122199	0,109618	0,078914	0,060235	0,069221	0,0616748	0,056585	0,048517	0,044838	0,046359	0,046549	0,039655	0,095446
0,118301	0,121243	0,108948	0,079304	0,061064	0,069719	0,062178	0,05698	0,049469	0,04537	0,046944	0,046983	0,040411	0,093086
0,120045	0,122131	0,109521	0,078841	0,060242	0,069207	0,0616469	0,05663	0,04854	0,04485	0,04642	0,046641	0,039712	0,095575
0,119386	0,121524	0,109523	0,078738	0,060306	0,069141	0,0617231	0,056686	0,04871	0,044984	0,046689	0,046756	0,039837	0,095998
0,118071	0,121742	0,108832	0,079271	0,061147	0,069832	0,0620688	0,05718	0,049498	0,04556	0,047045	0,047014	0,040447	0,092293
0,11947	0,122453	0,109325	0,078867	0,060477	0,069429	0,0616516	0,056895	0,04872	0,045138	0,046631	0,04675	0,039871	0,094323
0,120199	0,121556	0,109191	0,07867	0,060385	0,069379	0,0614891	0,05649	0,04877	0,044796	0,04647	0,046711	0,039921	0,095975
0,11997	0,121865	0,109092	0,078801	0,060477	0,069486	0,0615712	0,056583	0,048838	0,044904	0,046495	0,046766	0,039961	0,095192
0,136765	0,126512	0,115181	0,074829	0,052775	0,064357	0,0578067	0,052276	0,040617	0,039444	0,041402	0,043362	0,03355	0,121122

Tablo 4. $P^{(n)}$ Matrisinin n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 ve 100 için Değerleri

$p^{(n)}$	$p_{0;j}$	$p_{1;j}$	$p_{2;j}$	$p_{3;j}$	$p_{4;j}$	$p_{5;j}$	$p_{6;j}$	$p_{7;j}$	$p_{8;j}$	$p_{9;j}$	$p_{10;j}$	$p_{11;j}$	$p_{12;j}$	$p_{13;j}$	*Or.on. ay.
2	0,122872	0,134991	0,108217	0,079628	0,061903	0,073198	0,0594063	0,059925	0,049368	0,047365	0,045213	0,044987	0,038684	0,074242	1
3	0,120129	0,124544	0,108841	0,079531	0,061057	0,07027	0,0615337	0,057376	0,049057	0,04544	0,046265	0,04645	0,039975	0,089531	2
4	0,120821	0,123216	0,109582	0,078927	0,060203	0,069377	0,0614386	0,056709	0,048367	0,044835	0,046136	0,046391	0,039503	0,094495	3
5	0,12141	0,123104	0,109829	0,078702	0,059861	0,069103	0,0613055	0,056473	0,048044	0,044583	0,04598	0,046302	0,039274	0,09603	4
6	0,121654	0,12313	0,109918	0,078635	0,059742	0,069018	0,0612514	0,056397	0,047923	0,044495	0,045909	0,046258	0,039182	0,096487	4
7	0,121738	0,12315	0,109947	0,078614	0,059704	0,068993	0,0612325	0,056375	0,047882	0,044467	0,045884	0,046241	0,039151	0,09662	4
8	0,121765	0,123159	0,109956	0,078608	0,059692	0,068985	0,0612263	0,056368	0,04787	0,044459	0,045876	0,046236	0,039142	0,096658	5
9	0,121773	0,123162	0,109958	0,078607	0,059689	0,068983	0,0612245	0,056366	0,047866	0,044456	0,045874	0,046234	0,039139	0,096669	5
10	0,121776	0,123163	0,109959	0,078606	0,059688	0,068983	0,0612239	0,056366	0,047865	0,044455	0,045873	0,046234	0,039138	0,096672	6
20	0,121777	0,123163	0,109959	0,078606	0,059687	0,068982	0,0612237	0,056366	0,047864	0,044455	0,045873	0,046234	0,039137	0,096673	6
30	0,121777	0,123163	0,109959	0,078606	0,059687	0,068982	0,0612237	0,056366	0,047864	0,044455	0,045873	0,046234	0,039137	0,096673	6
40	0,121777	0,123163	0,109959	0,078606	0,059687	0,068982	0,0612237	0,056366	0,047864	0,044455	0,045873	0,046234	0,039137	0,096673	6
50	0,121777	0,123163	0,109959	0,078606	0,059687	0,068982	0,0612237	0,056366	0,047864	0,044455	0,045873	0,046234	0,039137	0,096673	6
100	0,121777	0,123163	0,109959	0,078606	0,059687	0,068982	0,0612237	0,056366	0,047864	0,044455	0,045873	0,046234	0,039137	0,096673	6

*Or. on. Say.: Alınan kuvvet matrislerinde sütun elemanlarının birbirine kaç ondalıkla yaklaşık değer aldığını göstermektedir.