Dokuz Eylül Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi
Cilt 9, Sayı: 1, 2007

İŞLETMELERİN TAHMİNLEME SORUNLARININ ÇÖZÜMLENMESİNDE MARKOV ZİNCİRLERİ ANALİZİNİN UYGULANMASI

Aslı Yüksek Özdemir*
Şevkinaz Gümüşoğlu**

Özet

Global rekabetin artması ile işletmelerin karar verme sürecinde belirsizlik artmakta ve bu nedenle işletmelerin karar verme süreci stokastik bir yapıya sahip olmaktadır. İşletmelerin belirsizlik altında etkin kararlar verebilmeleri için en önemli unsurlardan biri, kararlara temel oluşturan ve planlama faaliyetlerinin ayrılmaz bir parçası olan tahminleme süreci olmaktadır. İşletmelerin geleceğe ilişkin yapmakta olduğu tahminler değişimlere ve sürekli artan rekabet ortamındaki risklere kendilerini hazırlamalarını sağlamaktadır.

İşletmeler karar verme sürecinde deterministik nitelik taşıyan regresyon analizi ve zaman serileri analizi gibi çeşitli tahminleme tekniklerinden faydalanabilmektedirler. Fakat yöneticiler çoğunlukla, belirsizliğe sahip olgulara dayanan kararlar verme durumu ile karşı karşıya kalmaktadırlar. Bu kararların verilmesinde ise risk unsurunu da ele alan çeşitli kantitatif teknikler kullanılabilmektedir. Belirsizlik altında karar verme sürecinde kullanılan stokastik modellerden biri olan Markov zincirleri, işletme biliminde ve diğer sosyal bilimlerde pek çok uygulama alanına sahiptir.

Bu çalışmada, işletmelerin belirsizlik altında vermeleri gereken kararlarda, incelenen süreç veya sistemin gelecek periyodlardaki değişimlerini ortaya koyan Markov zincirleri ele alınmaktadır. Uygulama bölümünde ise masa örtüsü üreten ve yurtiçi ve yurtdışında önemli pazar payına sahip bir firmanın ay sonu envanter miktarlarındaki değişimlere ilişkin tahminlerin geliştirilmesinde Markov zincirleri analizinden faydalanılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre firmanın gelecek periyodlar için alması gereken önlemler belirlenerek öneriler geliştirilmiştir.

***Anahtar Kelimeler**: Stokastik Süreç, Markov Süreci, Markov Zinciri, Tahminleme.*

---

* Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi İşletme Bölümü Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi.
** Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi İşletme Bölümü Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı Öğretim Üyesi.

1. Stokastik Süreç ve Markov Süreci

Karar verme süreci, farklı davranış biçimlerinden birinin tercih edilmesiyle sonuçlanan bir süreç olarak tanımlanabilmektedir (Tütek ve Gümüşoğlu, 2000; 65). Belirli bir aşamada mevcut politika ve durumlarla, gelecek durum ve kararların kesin olarak belirlenebildiği süreçler deterministik süreçler olarak adlandırılmaktadır (Hillier ve Lieberman,1995; 433). Bir ya da birden çok kararın zaman fonksiyonuna göre tesadüfi bir özellik nedeniyle değişmesi durumuna denk düşen modele ise "Stokastik Süreç" adı verilmektedir (Demir, 1974; 23). Ancak değişen durum, yapılan harekete ve ilk duruma bağlı olarak ortaya konan bir olasılık fonksiyonu yolu ile belirginleştirilebilmektedir. (Taha, 1997; 561). Bir stokastik süreç, verilen T kümesinin bir elemanı olan t zamanında sistemin durumunu gösteren $\{X_t\}$ rassal değişkenlerinin birleşimi olarak tanımlanmaktadır. T, genellikle negatif olmayan tam sayılardan oluşan bir kümeyi ve X_t de sistemin ilgilenilen ölçülebilir bir karakteristiğinin t zamanındaki değerini simgelemektedir (Hillier ve Lieberman, 1990; 103).

Kesikli $\{X_t, t = 0,1,2,...\}$ veya sürekli $\{X_t, t \geq 0\}$ bir stokastik süreç, n zaman periyodlar kümesi $t_1 < t_2 < \cdots t_n$ için, sürecin hangi durumda olacağına ilişkin koşullu olasılığın sadece bir önceki periyoddaki değere bağlı olması halinde Markov süreci olarak adlandırılmaktadır. Diğer bir ifadeyle, sürecin şu anki durumu bilindiğinde gelecek, geçmiş durumlardan bağımsız olmaktadır (Parzen, 1962; 188). Markov süreçleri, sürecin indeks kümesinin ve sürecin durum uzayının yapısına bağlı olarak Tablo 1'de gösterildiği gibi sınıflandırılabilmektedir.

Tablo 1. Markov Süreçlerinin Sınıflandırılması

		Durum Uzayı	
		Kesikli	Sürekli
Parametre Yapısı	Kesikli	Kesikli parametreye sahip Markov zinciri	Kesikli parametreye sahip Markov süreci
	Sürekli	Sürekli parametreye sahip Markov zinciri	Sürekli parametreye sahip Markov süreci

(Kaynak: Parzen, 1962; 188)

Markov süreçlerinin sınıflandırmasına genel olarak bakılmasından sonra firmanın tahminleme sorununun çözümlenmesinde kullanılacak olan kesikli parametreye sahip Markov Zincirleri ayrıntısıyla ele alınacaktır.

2. Markov Zinciri

Markov zincirleri, geçmişteki olaylardan bağımsız olarak, sadece mevcut süreç durumuna bağlı kalan sürecin, gelecekte nasıl gelişeceğini içeren olasılıkları bulunduran bir yapıya sahip olmaktadır. Markov zinciri, sonlu durumlar kümesine sahip Markov süreçleri olarak nitelendirilmektedir. Sürecin durumları olarak adlandırılan belirli değerler arasındaki geçişler dizisi ile ele alınan ve sürecin belirli bir durumda iken (*i*), gelecekte başka bir durumda (*j*) olma olasılığı sadece *i* durumuna bağlı ve bu duruma nasıl gelindiğinden bağımsız olan bir olasılık kuralına sahip Markov süreci olmaktadır (Parzen, 1962; 187). Diğer bir ifadeyle Markov zincirleri, geçmiş özellikleri sadece mevcut duruma bağlı ve sürecin geçmiş özelliklerinden veya mevcut duruma nasıl ulaştığından bağımsız olan stokastik süreçler olarak tanımlanmaktadır (Collins, 1970; 26).

Markov zinciri analizinde, durum, geçiş, geçiş olasılıkları, geçiş olasılıkları matrisi, başlangıç vektörü gibi çeşitli kavramlar büyük öneme sahip olmaktadır. Stokastik süreçte, rassal değişkenlerin aldığı her bir özel değer, bir *durum (s)* olarak adlandırılırken, sistemin bir durumdan diğerine hareketleri veya durumlar arası değişimleri *geçiş* olarak ifade edilmektedir (Winston, 2004; 931). Durum ve geçiş kavramlarından sonra *geçiş olasılıkları ve geçiş olasılıkları matrisi* kısaca ortaya konmalıdır. Eğer sistem bir periyodda *i* durumundan gelecek periyodda *j* durumuna giderse, *i*'den *j*'ye geçiş olmakta ve bu nedenle Markov zincirinde yer alan p_{ij} olasılıkları *geçiş olasılıkları (P)* olarak adlandırılmaktadır. Geçiş olasılıkları çoğu uygulamada, *s* durumların sayısını ifade ederken, $s \times s$ geçiş olasılıkları matrisi *P* ile gösterilmektedir. Geçiş olasılıkları matrisinin genel notasyonu aşağıdaki biçimde olmaktadır (Winston, 2004; 925):

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Son olarak, ***başlangıç vektörü*,** sistemin veya sürecin mevcut durumunu diğer bir deyişle sistemin *t=0* periyodunda iken *i* durumunda olması olasılığını, $P(X_0 = i) = q_i$, ifade etmekte ve $q = [q_1 \; q_2 \; \cdots \; q_s]$ şeklinde gösterilmektedir (Austin ve Burns, 1985; 352).

Markov zincirlerinde yer alan bu araçlardan yararlanılarak *n*-aşamalı geçiş olasılıkları hesaplanmaktadır. Kısa dönemli sistem davranışları sadece sistemin mevcut periyoddaki durumuna ve geçiş olasılıklarına bağlı olmaktadır. Sistemin uzun dönemli davranışları ise, denge durumu olasılıkları ile belirlenmekte ve başlangıç olasılıklarından bağımsız olmaktadır (Stevenson, 1989; 752).

Markov zinciri analizlerinde durumlar önemli rol oynamakta ve Markov zincirlerinin çözüm süreci, durumların ve zincirin taşıdığı özelliklere göre değişmektedir. Markov zincirleri analizinde yer alan durumlar;

- Ulaşılabilir Durum
- Açılımlı Durum
- Geçici Durum
- Yinelenen Durum
- Yutucu Durum
- Periyodik Durum

Ergodik Durum biçiminde sıralanabilmektedir. Uygulamada ortaya konan Markov zinciri incelenirken bu durum özellikleri ele alınmaktadır.

Fiziksel veya ekonomik bir sürecin sonlu duruma sahip birinci dereceli Markov zinciri olarak modellenebilmesi için ise aşağıdaki özelliklere sahip olması gerekmektedir (Render ve Stair, 2000; 706):

1. Olası durumlar kümesi sonlu olmaktadır.
2. Bir sonraki durumun ortaya çıkması yalnızca bir önceki duruma bağlı olmaktadır.
3. Durumların değişmesine ilişkin olasılıklar zaman içinde değişmemektedir.
4. İncelenilen sistemin büyüklüğü ve yapısı analizler boyunca değişmemektedir.
5. Gelecekteki herhangi bir durum, mevcut durumdan ve geçiş olasılıkları matrisinden tahmin edilebilmektedir.

Zinciri oluşturan durumların niteliklerine göre markov zincirleri farklı şekilde adlandırılmakta ve analiz yapılırken bu özellikler önemli rol oynamaktadır. Markov zincirinin geçiş olasılıkları zamandan yani *n* değerinden bağımsız ise olasılık dağılımı değişmemekte ve bu durumda Markov zinciri homojen olarak nitelendirilmektedir (Şahinoğlu, 1992; 20). Markov zinciri, kendisini oluşturan durumların hepsinin birbiri ile açılımlı olması koşulunda küçültülemeyen Markov zinciri olarak adlandırılmaktadır (Hastings, 1973; 111). Markov zinciri, tüm durumların yinelenen, birbirine açılımlı ve periyodik olmayan durumlar olması koşulunda ise ergodik olma özelliğine sahip olmaktadır (Winston, 2004; 933). Diğer bir ifadeyle, ergodik bir Markov zinciri küçültülemeyen bir süreç niteliği taşımaktadır. Bu özelliği Markov zincirleri ile tahminleme yapılmasında önemli rol oynamaktadır. Bir Markov zinciri iki özelliğe sahip olması halinde de yutucu Markov zinciri olarak adlandırılmaktadır. Bu özellikler, (1) zincirin en az 1 yutucu duruma sahip olması ve (2) yutucu olmayan tüm durumlardan en az 1 yutucu duruma geçişin olası olmasıdır (Shamblin ve Stevens, 1974; 66).

Tüm bu özellikleri taşıyan Markov zinciri analizinde amaç, kompleks bir sistemi, sistem elemanları arasındaki ilişkilerde deterministik veya belirli spesifikasyonlar kullanarak ortaya koymak ve de bu ilişkileri sistemin dinamik davranışını tahminlemek için kullanmaktır (Buffa ve Dyer, 1977; 260).

2.2. Markov Zincirinin Gelişimi ve Literatür Taraması

Markov zinciri kavramı ilk olarak 20. yüzyılın başlarında (1906) Rus Matematikçi Andrei Markov tarafından ele alınmıştır. Markov zincirlerine ilişkin ilk uygulamalar fiziksel sistemlerde yapılmakla birlikte daha sonraki uygulamalar, finans, pazar araştırmaları, genetik, ilaç sektörü, demografik, psikoloji ve politik bilimler gibi çok farklı alanlara yayılmıştır (Barnett ve Ziegler, 2003; 461). Yapılan literatür taramasında karşılaşılan, çeşitli karar sorunlarının çözümünde Markov zincirlerinin son yıllarda işletme alanında uygulandığı belli başlı çalışmalar aşağıda sıralanmaktadır;

i. A. Charnes, W. Cooper ve R. Niehaus (1972) ve Eric Flamholtz (1974), Markov zincirlerinin insan kaynakları planlamasında uygulanması (Buffa ve Dyer, 1977; 274)

ii. Türkiye Elektrik Kurumunda, kurumun kritik insan gücü olan elektrik mühendislerinin 17 fonksiyonel grup olarak sınıflandırılması ile oluşturulan Markov zinciri kullanılarak personelin birimler arasındaki geçişlerinin tahminlenmesi (Saatçioğlu, 1978; 251)

iii. Avrupa Birliği'ndeki ekonomik büyüme dinamiklerinin denge durumunun incelenmesine yönelik bir çalışma (Fingleton, 1997; 385)

iv. Tahvil piyasalarındaki işlem maliyetlerinin ve işlem hızının tahminlenmesi ve bu bilgi ışığında piyasaların etkinliğinin ölçülmesi (Los, 1998; 1)

v. Firmaların kredi risklerinin ölçülmesi ve riskli olabilecek senetlerin belirlenmesi (Kijima, 1998; 229)

vi. Kredi ödemelerine ilişkin davranış biçimlerinin belirlenmesi, kredi borçlarından dolayı oluşacak kayıpların tahminlenmesi ve ayrılması gereken karşılıkların belirlenmesi (Betancourt, 1999; 303)

vii. Yığın üretim sisteminde faaliyet tabanlı hata maliyetlerinin belirlenmesi ve analizi (Sastri v.d., 2000; 43)

viii. Türev piyasalarda kredi risklerinin modellenmesi ve derecelendirilmesi (Israel v.d., 2001; 245)

ix. Çalışanların firmadaki çalışma süresi, deneyim, yaş, ekonomik veya sosyal statü gibi çeşitli niteliklerine göre gruplandırılması, davranış biçimlerinin tahminlenmesi ve gruplar arasındaki akışın, yeni çalışanların işe girmesi ödüllendirme veya emeklilik gibi, ortaya konması (Tsantas, 2001; 101)

x. Tek bir makine ve tek bir ürün üretiminin olduğu, üretim ve talep oranlarının sabit ve bilindiğinin varsayıldığı bir üretim-envanter sistemi için zamanın kesikli olarak ele alınması, durumların envanter düzeyi ve makinenin mevcut hali ile ifade edilmesi ve bu şekilde sistemin Markov zincirleri ile modellenmesi (Abboud, 2001; 98)

xi. Tüketici kredilerinin ödenmeme nedenlerinin ve tüketici skorlarının belirlenmesi (Thomas v.d., 2001; 89)

xii. Çok sayıda kategoriye sahip verilerin modellenmesi ve Hong-Kong'taki bir içecek firmasında talebin tahminlenmesinde uygulanması (Ching v.d., 2002; 187)
xiii. Müzakere sürecinde tarafların davranış biçimlerinin tahminlenmesi ve müzakere güçlerinin belirlenmesi (Bonacich ve Liggett, 2003; 155)
xiv. Hisse senedi fiyatlarındaki değişimlerin tahminlenmesi (Yin v.d., 2003; 157)
xv. İspanya'daki şehirlerin ayrı ayrı durumlar olarak tanımlanması ve Markov zincirleri ile 1900-99 periyodunda kentsel gelişimin analiz edilmesi (Lanaspa v.d., 2003; 567)
xvi. Optimal üretim/kontrol/bakım politikalarının belirlenebilmesi için, üretim sürecinin, süreç kontrol aralıklarının ve bakım düzeyinin hesaplanmasında Markov zincirinin kullanılması (Wang ve Sheu, 2003; 1)
xvii. Esnek üretim sistemlerinde makine-envanter sürecinin sürekli Markov zinciri olarak ele alınması ve sistemlerin performansının denge durumu olasılık dağılımları ile ölçülmesi (Ching ve Loh, 2003; 553)

İşletme sorunlarının çoğu sosyal bilimler boyutu içerisinde değerlendirilmekte ve bu sorunların çözümünde özellikle disiplinler arası olma özelliği taşıyan kantitatif karar verme tekniklerinden sıkça yararlanılmaktadır. Özellikle belirsizlik altında karar verme sürecinde stokastik modellerden Markov zincirleri sayısal ve sosyal bilimlerde pek çok uygulama alanına sahip olmaktadır. İşletme biliminde yönetim sorunları, muhasebe ve finansman sorunları, üretim planlaması ve kontrolü, tahminleme, ulaştırma, kuruluş yeri seçimi, pazarlama ve satış gibi birçok sorun Markov zincirleri ile modellenerek çözülebilmektedir. Markov zincirinin uygulama alanlarına ilişkin literatür taramasına değinildikten sonra Markov zincirlerinin yapısı ve çözüm süreci ele alınmalıdır.

2.3. Markov Zincirinin Çözüm Süreci

Çalışmanın bu bölümünde *n*-aşamalı geçiş olasılıkları, herhangi bir duruma ilk kez geçişin olması için geçmesi beklenen periyod sayısı, denge durumunun oluşumu ve denge durumu olasılıklarına yer verilmektedir. Uygulama bölümünde yer alan markov zinciri bu özelliği taşımadığı için yutucu markov zincirlerinin analizine yer verilmeyecektir.

P geçiş olasılıkları matrisi bilinen ve durağan bir Markov zinciri ile modellenen bir sistem ele alındığında ve sistem *t* zamanında durum *i*'de iken *n* periyod sonra sistemin durum *j*'de olması olasılığı elde edilmek istendiğinde zincirin durağanlık özelliğinden dolayı bu olasılık *t*'den bağımsız olacaktır. Bu durumda elde edilmek istenilen koşullu olasılık aşağıdaki şekilde gösterilebilmektedir ve durum *i*'den durum *j*'ye geçişi ifade eden *n-aşamalı geçiş olasılığı* olarak adlandırılmaktadır (Winston, 2004; 928):

$$P(X_{t+n} = j \mid X_t = i) = P(X_n = j \mid X_0 = i) = P_{ij}(n) \qquad (2)$$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{k=s} p_{ik}(m).p_{kj}(n-m) \quad \text{tüm } i, j, n \text{ ve } 0 \le m \le n \text{ için.} \tag{3}$$

n-aşamalı geçiş olasılıklarının hesaplanmasında kullanılan bu eşitlikler *Chapman-Kolmogorov Eşitlikleri* olarak adlandırılmaktadır (Hillier ve Lieberman, 1995; 633). *n*-aşamalı geçiş olasılıkları, sürecin *i* durumunda iken *n* periyod sonra *j* durumunda olma olasılığını ifade etmektedir. Çoğu zaman, sürecin durum *i*'den durum *j*'ye ilk olarak geçmesi için gerekli geçiş sayısına ilişkin de bilgi edinmek istenilebilmektedir. Bu süre, durum *i*'den *j*'ye gidişte, *ilk geçiş süresi* veya *ortalama ilk geçiş süresi* olarak adlandırılmaktadır (Hillier ve Lieberman, 1995; 638). *i=j* olması halinde, ortalama ilk geçiş süresi sürecin başlangıç duruma geri dönmesi için gerekli geçişlerin sayısı olmaktadır. Bu durumda ortalama ilk geçiş süresi, durum *i* için *yinelenme süresi* olarak adlandırılmaktadır. *i*'den *j*'ye ortalama ilk geçiş süresi μ_{ij} ile gösterilmekte ve aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır (Hillier ve Lieberman, 1995; 639);

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \infty, & \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n) < 1 \text{ ise} \\ \sum_{n=1}^{\infty} n.f_{ij}(n) & \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n) = 1 \text{ ise} \end{cases} \tag{4}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n) = 1$ olduğunda, μ_{ij}, $\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik}.\mu_{kj}$ eşitliğini sağlamaktadır. Bu eşitlikten elde edilen denklemler kümesinin çözümü ile istenilen ilk geçiş süreleri elde edilebilmektedir.

Denge durumu ise, ergodik bir markov zincirinde çok sayıda geçiş diğer bir ifadeyle çok sayıda periyod sonra, geçiş olasılıklarının bu noktadan sonra değişiklik göstermediği değerler almasını ifade etmektedir. Süreç, başlamasından uzun bir süre sonra denge durumuna gelmekte ve geçiş olasılıkları matrisi birbirinin aynısı olan satırlara dönüşmektedir (Hillier ve Lieberman, 1995; 641). *P*, *s* duruma sahip ergodik bir markov zinciri için geçiş olasılıkları olarak tanımlandığında, *n* ile gösterilen çok sayıda periyod sonra aşağıdaki ifadeyi sağlayan bir $\pi = [\pi_1 \; \pi_2 \; \ldots \; \pi_s]$ vektörü ortaya çıkmaktadır (Winston, 2004; 934).

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_s \end{bmatrix} \tag{5}$$

Çok büyük *n* değerleri için, P^n aynı satırlara sahip bir matrise yaklaşmaktadır. Bu da uzun bir süre sonra Markov zincirinin durağanlaştığını ve başlangıç durumu *i*'den bağımsız olarak, *j* durumunda olma olasılığının π_j olacağını ifade etmektedir (Winston, 2004; 935).

Çok büyük n değerleri ve tüm i değerleri için, $P_{ij}(n+1) \cong P_{ij}(n) \cong \pi_j$ olmaktadır. $P_{ij}(n+1) =$ (P^n matrisinin i satırı) (P^n matrisinin j kolonu) olduğundan bu ifade $P_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^{k=s} P_{ik}(n).p_{kj}$ biçiminde yazılabilmektedir. $P_{ik}(n)$ yerine π_k ve $P_{ij}(n+1)$ yerine de π_j ifadesi yerleştirildiğinde bu gösterim aşağıdaki biçimi almaktadır;

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{k=s} \pi_k . p_{kj} \tag{6}$$

Matris yapısında, elde edilen bu ifade $\pi = \pi.P$ şeklinde gösterilmektedir. Denge durumu olasılıklarını simgeleyen π_j değerleri, o duruma ilişkin beklenen yinelenme sürelerinin tersine eşit olmaktadır. Matematiksel olarak bu ifade $\pi_j = 1/\mu_{jj}$ biçiminde gösterilmektedir (Hillier ve Lieberman, 1995; 641);

3. Dönem Sonu Envanter Miktarlarının Tahminlenmesinde Markov Zincirleri Analizinin Kullanılması

Markov zincirlerinin en sık kullanıldığı işletme sorunlarından biri tahminlemedir. Son yıllarda risk ortamında envanter düzeylerinin belirlenmesi için uygun yöntemin seçilmesi en sık karşılaşılan sorunlardan biri olmuştur. İşletmelerin karşılaştığı tahminleme sorunlarından biri olan dönem sonu envanter düzeylerinin belirlenmesine ilişkin Markov modelinin kullanılması literatürde ele alınan konular arasındadır. Çalışmada bir firmadan alınan verilere göre firmanın ay sonu envanter miktarlarının 1 yıl içindeki değişimleri ve bu değişimlerin firma politikasına etkileri incelenmektedir.

3.1. Firma Uygulamasında Kullanılan Envanter Modeli

Bir üretim firmasının, üretim miktarlarına göre her dönem sonunda ne kadar stok bulunduracağına ilişkin değişimleri ve hangi dönemlerin firma için riskli olabileceğini ortaya koyan Markov modelinin kurulması için öncelikle firmanın bulundurabileceği maksimum dönem sonu envanter miktarı belirlenmiştir. Bu veriye göre firmanın bulundurabileceği dönem sonu envanter miktarları sürecin durumları olarak sınıflandırılmıştır. Envanter miktarlarının alabileceği bu tamsayı değerleri sürecin durumları olarak adlandırılmakta ve i_t ile gösterilen bu rassal değişkenler *t.* ayın sonundaki envanter miktarlarını ifade etmektedir. Bu sınıflandırma yapıldıktan sonra üretim miktarlarına göre firmanın elinde tutabileceği dönem sonu envanter miktarları arasındaki geçiş olasılıklarının hesaplanmasında aşağıda belirtilen model kullanılmıştır;

$$
i_{t+1} = \begin{cases} i_t < I \Rightarrow \max \begin{cases} i_t + X_{t+1}^{i_t} - C_{t+1} > 0 \Rightarrow i_t + X_{t+1}^{i_t} - C_{t+1} \\ i_t + X_{t+1}^{i_t} - C_{t+1} \leq 0 \Rightarrow 0 \end{cases} \\ I \leq i_t < G \Rightarrow \max \begin{cases} i_t + X_{t+1}^{i_t} - C_{t+1} > 0 \Rightarrow i_t + X_{t+1}^{i_t} - C_{t+1} \\ i_t + X_{t+1}^{i_t} - C_{t+1} \leq 0 \Rightarrow 0 \end{cases} \\ G \leq i_t < K \Rightarrow \max \begin{cases} i_t + X_{t+1}^{i_t} - C_{t+1} > 0 \Rightarrow i_t + X_{t+1}^{i_t} - C_{t+1} \\ i_t + X_{t+1}^{i_t} - C_{t+1} \leq 0 \Rightarrow 0 \end{cases} \\ i_t \geq K \Rightarrow \max \begin{cases} i_t - C_{t+1} > 0 \Rightarrow i_t - C_{t+1} \\ i_t - C_{t+1} \leq 0 \Rightarrow 0 \end{cases} \end{cases} \quad (7)
$$

Modelde yer alan değişkenler aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır:

i_{t+1} : *t+1.* dönem sonundaki envanter miktarı,

i_t : *t.* dönem sonundaki envanter miktarı,

$X_{t+1}^{i_t}$: i_t dönem başı envanter miktarına göre *t+1.* dönemde gerçekleştirilmesi gereken toplam üretim miktarı,

C_{t+1} : *t+1.* dönemdeki talep miktarı,

I : Firmanın günde 12 saatlik üretime başlamasını gerektiren minimum envanter miktarı,

G : Güvenlik stok miktarı,

K : Firmanın bir sonraki ayda üretimi durdurma kararı vermesini sağlayan dönem sonu envanter düzeyi,

t : 1 ay.

3.2. Firma Verileri, Varsayımları ve Kısıtları

PVC masa örtüsü üreticileri sektöründe ithalat ve ihracat firması olarak üretim yapan firmanın yöneticileri, gelen siparişleri zamanında karşılayabilmek için 1 yıl boyunca ay sonu envanter düzeylerindeki değişimi ve bu 1 yıllık süre boyunca hangi ayların firma için riskli olabileceğini yani firmanın hangi aylarda stoksuz kalabileceğini belirlemek istemektedir. Risk unsurunu da içeren stokastik yapıdaki bu tahminleme sorununun modellenmesinde literatürde Markov zincirleri kullanılmaktadır. Masa örtüsü üreten firmanın 2003 yılı satışlarına göre üç ana ürün grubu içinde en çok talep edilen ürün, elyaflı masa örtüleridir. Bu nedenle, firmanın envanter miktarlarında değişimin belirlenmesinde bu ürüne ilişkin envanter ve üretim politikaları ele alınmaktadır.

Elyaflı masa örtüleri hazır masa örtüleri olarak belirli ölçülerde kesilerek paketlenebilmektedir. Ayrıca yurtdışına ihraç edilen bu ürün grubu, 20metre$\times$140santimetre ölçülerindeki 1000 rulodan oluşan konteynırlar biçiminde de paketlenerek müşterilere gönderilmektedir. Firmanın satışlarında ihraç edilen bu ürün grubunun en yüksek paya sahip olmasından dolayı problemde 1000'er rulodan oluşan konteynırlar ele alınmaktadır.

Firmanın her ay sonunda bulundurabildiği envanter düzeyleri kesikli parametreye sahip Markov zincirleri ile modellenebilmektedir. Firma her ayın sonunda maksimum 19 konteynır envanter bulundurabilmektedir. Buna göre ele alınan stokastik süreç i_t, 20 durumdan oluşan kesikli Markov zinciri ile tanımlanmaktadır. Buna göre firmanın aysonu envanter miktarlarına ilişkin durum uzayı $S = \{0,1,2,\ldots,19\}$ kümesi olmaktadır. Firmanın herhangi bir ayın sonunda elinde bulundurduğu envanter miktarı sadece bir önceki ayın sonundaki envanter miktarına bağlı olmaktadır. Durumlar yani ay sonu envanter miktarları arasındaki değişimi gösteren geçiş olasılıkları matrisinde yer alan olasılık değerleri ise, *t.* ayın sonunda envanter miktarı j iken *(t+1).* ayın sonundaki envanter miktarının k olması olasılığını göstermektedir. Diğer bir ifadeyle geçiş olasılığı, $j,k \in S$ olmak üzere $P(i_{t+1} = k \mid i_t = j) = p_{j,k}$ koşullu olasılık değerini ifade etmektedir. Bu tanımlamaya göre ele alınan stokastik süreç aşağıda yer alan 20×20 geçiş olasılıkları matrisi ile ifade edilmektedir.

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & p_{0,19} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,19} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{19,0} & p_{19,1} & \cdots & p_{19,19} \end{bmatrix}$$

Aşağıda yer alan veriler sadece elyaflı olan ve konteynırlar halindeki (1konteynır = 1000rulo) ürün grubu için geçerli olmaktadır.

- ✓ Firma günde 8 veya 12 saat ve ayda maksimum 22 gün çalışmaktadır.
- ✓ Saatte 45 ($x = 45$) rulo masa örtüsü üretilmektedir.
- ✓ Firmanın bir dönem yani ay boyunca her gün kaçar saat ve bir ayda kaç gün çalışarak üretim yapacağı bir önceki ayın sonunda kalan envanter miktarına bağlı olmaktadır.
- ✓ Firmanın *t.* ayın sonundaki envanter miktarının 6 ($I = 6$) konteynırdan az olması durumunda bir sonraki ay günde 12 saatlik ($d_ç = 12$) çalışma ile 22 gün ($t_d = 22$) üretim yapması gerekmektedir.
- ✓ *t.* ayın sonundaki envanter miktarının 6'ya eşit ya da fazla olması ve 8'den ($G = 8$) az olması durumunda ise firma günde 8 saat ($d_ç = 8$) ve ayda 22 gün ($t_d = 22$) çalışarak bir sonraki ayın üretimini gerçekleştirmelidir.
- ✓ Ay sonundaki envanter miktarının 8'den fazla ya da eşit ve 14'den ($K = 14$) az olması halinde firma bir sonraki ay, günde 8 saat ($d_ç = 8$) olmak üzere toplam 16 gün ($t_d = 16$) üretim yapmak durumundadır.
- ✓ Firma politikalarına göre ay sonu envanter düzeyi 14 konteynıra ulaştığında bir sonraki ay üretim yapılmamakta ve gelen talep stoklardan karşılanmaktadır.

- ✓ *t.* ayın dönem sonu yani *(t+1).* ayın dönem başı envanter düzeyine bağlı olarak *(t+1).* ayda gerçekleştirilen toplam üretim miktarı; saatte üretilen üretim miktarı, 1 günde gerçekleştirilen çalışma saati ve o ayda çalışılan gün sayısının çarpımına eşit olmaktadır. Diğer bir ifadeyle $X_{t+1}^{i_t} = x.d_ç.t_d$ rulodur.
- ✓ Üretimi tamamlanan masa örtüleri 1000'er rulodan oluşan konteynırlar halinde stoklandığı ve satıldığı için hesaplanan aylık toplam üretim miktarları konteynır olarak ifade edilmelidir. Bu nedenle hesaplanan rulo sayılarının konteynır adeti olarak ifade edilebilmesi için, $X_{t+1}^{i_t} = (x.d_ç.t_d)/1000$ formülü ile bulunan konteynır sayısı için tamsayılı değerler kullanılmaktadır.
- ✓ 2003 yılı Ocak ayında firma elyaflı masa örtülerinin üretimine yeni başlamış olduğundan Ocak ayının başında firmanın elinde bu ürüne ilişkin stok bulunmamaktadır.
- ✓ 2003 yılı sipariş verilerine göre elyaflı masa örtülerine olan aylık talep miktarı (C_{t+1}), $\lambda = 9000$ rulo = 9 konteynır ile Poisson dağılımlıdır. Yapılan X^2 uyum testi ile satış verilerinin Poisson dağılıma uyduğu belirlenmiştir.
- ✓ Firmanın herhangi bir ayda talebi karşılayamaması durumunda satışların kaybedileceği varsayılmaktadır.

Firma verileri, varsayımları ve kısıtlarına göre (7)'de ortaya konan model revize edildiğinde,

$$
i_{t+1} = \begin{cases}
i_t < I \Rightarrow \max \begin{cases} i_t + (x.d_ç.t_d/1000) - C_{t+1} > 0 \Rightarrow i_t + (x.d_ç.t_d/1000) - C_{t+1} \\ i_t + (x.d_ç.t_d/1000) - C_{t+1} \le 0 \Rightarrow 0 \end{cases} \\
I \le i_t < G \Rightarrow \max \begin{cases} i_t + (x.d_ç.t_d/1000) - C_{t+1} > 0 \Rightarrow i_t + (x.d_ç.t_d/1000) - C_{t+1} \\ i_t + (x.d_ç.t_d/1000) - C_{t+1} \le 0 \Rightarrow 0 \end{cases} \\
G \le i_t < K \Rightarrow \max \begin{cases} i_t + (x.d_ç.t_d/1000) - C_{t+1} > 0 \Rightarrow i_t + (x.d_ç.t_d/1000) - C_{t+1} \\ i_t + (x.d_ç.t_d/1000) - C_{t+1} \le 0 \Rightarrow 0 \end{cases} \\
i_t \ge K \Rightarrow \max \begin{cases} i_t - C_{t+1} > 0 \Rightarrow i_t - C_{t+1} \\ i_t - C_{t+1} \le 0 \Rightarrow 0 \end{cases}
\end{cases}
$$

ifadesine ulaşılırken elde edilen bu modelde $I = 6$, $G = 8$ ve $K = 14$ değerleri ve bu değerlere bağlı olarak hesaplanan üretim miktarları yerine konduğunda ise aşağıdaki ifadeye ulaşılmaktadır.

$$
i_{t+1} = \begin{cases} i_t < 6 \Rightarrow \max \begin{cases} i_t + (45.12.22/1000) - C_{t+1} > 0 \Rightarrow i_t + 12 - C_{t+1} \\ i_t + 12 - C_{t+1} \leq 0 \Rightarrow 0 \end{cases} \\ 6 \leq i_t < 8 \Rightarrow \max \begin{cases} i_t + (45.8.22/1000) - C_{t+1} > 0 \Rightarrow i_t + 8 - C_{t+1} \\ i_t + 8 - C_{t+1} \leq 0 \Rightarrow 0 \end{cases} \\ 8 \leq i_t < 14 \Rightarrow \max \begin{cases} i_t + (45.8.16/1000) - C_{t+1} > 0 \Rightarrow i_t + 6 - C_{t+1} \\ i_t + 6 - C_{t+1} \leq 0 \Rightarrow 0 \end{cases} \\ i_t \geq 14 \Rightarrow \max \begin{cases} i_t - C_{t+1} > 0 \Rightarrow i_t - C_{t+1} \\ i_t - C_{t+1} \leq 0 \Rightarrow 0 \end{cases} \end{cases}
$$

3.3. Geçiş Olasılıkları Matrisinin Oluşturulması

Firma verilerine ve envanter miktarları arasındaki ilişkiyi belirleyen modele göre geçiş olasılıkları matrisinin oluşturulması gerekmektedir. Matriste yer alan geçiş olasılıkları değerleri farklı dönem sonu stok miktarlarına ve de talep dağılımına bağlı olarak hesaplanmaktadır.

$p_{0,0}$ olasılığı *(t-1).* ayın sonunda stokta 0 konteynır varken *t.* ayın sonunda da stok olmaması olasılığını ifade eden $P(i_t = 0 | i_{t-1} = 0)$ koşullu olasılık değerine eşit olmaktadır. $i_{t-1} = 0$ olması halinde firma, ay sonu envanter miktarı 6 konteynırdan daha az olduğu için bir sonraki ay günde 12 saat ve ayda 22 gün çalışarak $X_{t+1}^{i_t<6} = (x.d_ç.t_d)/1000 = (45.12.22)/1000 \cong 12$ konteynırlık masa örtüsü üretimi gerçekleştirmektedir. Bu durumda $i_{t-1} + 12 - C_t = i_t = 0$ olabilmesi için önceki ayın dönem sonu envanter miktarı 0 iken *t.* aya ilişkin talebin 12 veya daha fazla olması gerekmektedir. Bu nedenle $p_{0,0} = P\{C_t \geq 12\}$ olmaktadır. Aylık talep miktarlarının $\lambda = 9$ ile Poisson dağılımlı olduğu dikkate alındığında $p_{0,0}$ değeri Poisson dağılımına ilişkin kümülatif olasılık değerleri kullanılarak hesaplanmaktadır. SPSS for Windows programı ile $\lambda t = 9$ değeri için hesaplanan olasılık değerlerine göre $p_{0,0}$ geçiş olasılığı değeri $p_{0,0} = P\{C_t \geq 12\} = 1 - P\{C_t \leq 11\} = 1 - 0{,}8030 = 0{,}1970$ olarak bulunmaktadır. Benzer şekilde $p_{6,0}$ olasılığının hesaplanabilmesi için stok miktarı 6 olduğu için firmanın bir sonraki ayda gerçekleştirmesi gereken üretim miktarı 8 konteynır olarak bulunmaktadır. Dönem sonu stoğu 6 iken sonraki ayda 8 birimlik üretim gerçekleştirildiğinde firmanın bir sonraki ayda stoksuz kalması için talebin 14 veya daha fazla olması gerekmekte ve bu durumda $p_{6,0} = P\{C_t \geq 14\} = 1 - P\{C_t \leq 13\} = 1 - 0{,}9261 = 0{,}0739$ olmaktadır.

Bir ayın sonunda stok düzeyi $0,1,\ldots,19$ iken sonraki ayın sonu itibariyle stok miktarının 0'dan farklı bir değer almasına ilişkin geçiş olasılıklarının hesaplanmasında ise kesikli olasılık değerlerinin bulunması gerekmektedir.

Örneğin $p_{9,2}$ olasılığının hesaplanması için ay sonu envanter miktarı 8'den büyük olduğu için bir sonraki ayın üretim miktarı 6 olmakta ve bu durumda $9+6-C_t=2$ için yani bir sonraki ayın sonundaki envanter miktarının tam 2 birim olabilmesi için talebin $C_t = 13$ olması gerekmektedir. Bu nedenle $p_{9,2} = P\{C_t = 13\}$ olmakta ve $P\{C_t = 13\} = P\{C_t \leq 13\} - P\{C_t \leq 12\} = 0{,}0504$ olarak bulunmaktadır.

Geçiş olasılıkları matrisi oluşturulurken dikkat edilmesi gereken bir diğer nokta modelde envanter miktarlarının yerine konması sonucunda talebin negatif değerler almasıdır. Bu özelliği taşıyan durumlar için geçiş olasılıkları değerlerinin 0'a eşit olarak alınması gerekmektedir. Örneğin, *(t-1).* ayın sonunda stokta 15 konteynırlık ürün varken *t*. ayın sonunda 18 konteynır stok olması olasılığını ifade eden $p_{15,18}$ değerinin hesaplanmasında, $i_{t-1} = 15$ olması halinde firma, ay sonu envanter miktarı 14 konteynırın üzerinde olduğu için bir sonraki ayda hiç üretim yapmayacaktır. Bu durumda $i_{t-1} - C_t = i_t = 18$ olabilmesi için önceki ayın dönem sonu envanter miktarı 15 iken *t*. aya ilişkin talebin -3 olması gerekmektedir. Böyle bir durum söz konusu olamayacağı için $p_{15,18} = 0$ olmaktadır. Diğer bir ifadeyle bir önceki ayın dönem sonu envanteri 15 konteynırken bir sonraki aysonu envanter düzeyinin 18 birim olma olasılığı yoktur. Matrisin son kolonlarında yer alan 0 değerlerinin de nedeni aynıdır. Durumlar arası geçişleri ifade eden ve yukarıdaki hesaplamalara benzer şekilde bulunan 20×20 boyutundaki geçiş olasılıkları matrisi Tablo 2'de verilmektedir.

Tablo 2. Geçiş Olasılıkları Matrisi

$$P=\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
0{,}1970 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}1242 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0739 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0415 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0220 & 0{,}0194 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0111 & 0{,}0109 & 0{,}0194 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 \\
0{,}0739 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0415 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0739 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0415 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0220 & 0{,}0194 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0111 & 0{,}0109 & 0{,}0194 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 \\
0{,}0053 & 0{,}0058 & 0{,}0109 & 0{,}0194 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 \\
0{,}0024 & 0{,}0029 & 0{,}0058 & 0{,}0109 & 0{,}0194 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 \\
0{,}0739 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0415 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0220 & 0{,}0194 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0111 & 0{,}0109 & 0{,}0194 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 & 0 \\
0{,}0053 & 0{,}0058 & 0{,}0109 & 0{,}0194 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001 & 0 \\
0{,}0024 & 0{,}0029 & 0{,}0058 & 0{,}0109 & 0{,}0194 & 0{,}0324 & 0{,}0504 & 0{,}0728 & 0{,}0970 & 0{,}1186 & 0{,}1318 & 0{,}1318 & 0{,}1171 & 0{,}0911 & 0{,}0607 & 0{,}0337 & 0{,}0150 & 0{,}0050 & 0{,}0011 & 0{,}0001
\end{array}\right]$$

Bir aşamalı geçiş olasılıklarını veren matris, 1 ay içinde envanter düzeylerindeki değişimleri ve bu değişimlere ilişkin olasılık değerlerini içermektedir. Yukarıda yer alan geçiş olasılıkları matrisinin oluşturulması için Excel programı kullanılmıştır.

Geçiş olasılıkları matrisinin durumları ele alındığında matriste yer alan durumların hepsinin yinelenen olduğu görülmektedir. Diğer bir ifadeyle Markov zinciri ile modellenen sürecin herhangi bir durumundan başka bir duruma geçiş olduğunda ilk çıkılan duruma geri dönülebilmektedir. Bu özellik sürecin tüm durumları için geçerli olduğu için tüm durumları yinelenendir. Sonlu durum uzayına sahip olan bir stokastik süreçteki yinelenen durumlar için herhangi bir durumdan başlandığında tekrar o duruma gelebilmek için geçen süre sonlu olmaktadır. Süreçte yer alan herhangi bir j durumu için $p_{jj} = 1$ olmadığından durumların hiçbiri yutucu durum özelliği taşımamaktadır. Süreçte yer alan durumların bir diğer özelliği periyodik olmamalarıdır. Bu durum özellikleri ile ele alınan sürecin ergodik bir Markov zinciri olduğu da ortaya konmaktadır. Tüm durumları yinelenen ve periyodik olmayan bu zincir ergodik olma özelliği ile denge durumunun oluşabileceğini de göstermektedir. Böylece firmanın denge durumuna ulaştığında mevcut ay sonu envanter miktarlarından bağımsız olarak, ay sonu envanter miktarlarının yüzdesel dağılımının nasıl olacağı hesaplanabilmektedir.

DS for Windows programı kullanılarak 1.ayın sonunda firmanın elinde j, $j \in S$, konteynırlık stok varken $n.$ ayın $(n = 1,2,\ldots)$ sonunda k, $k \in S$, konteynırlık stok olması olasılığı hesaplanmaktadır. Firmanın tahminleme sorunu 2003 yılı verileri kullanılarak Markov zincirleri ile modellendiğinden çalışmada firmanın 1 yıllık yani 12 aylık değişim miktarları ele alınmaktadır. Bu nedenle, yukarıda oluşturulan geçiş olasılıkları matrisi ile $n = 1,2,\ldots,11$ için geçiş olasılıkları hesaplanmakta ve sonuçları incelenmektedir. $n = 1$ için $P^n = P$ olmakta ve 1 aylık geçiş olasılıklarını göstermektedir. Diğer bir ifadeyle oluşturulan P matrisi Ocak ayı sonu envanter miktarlarına göre firmanın Şubat ayı sonu itibariyle karşılaşabileceği envanter durumlarını ve bu durumlara geçiş olasılıklarını göstermektedir.

$n = 2$ için hesaplanan P^2 matrisinde yer alan geçiş olasılıkları ise, Ocak ayı sonunda firmanın stokunda j konteynırlık stok varken 2. ayın yani Mart ayının sonunda k konteynırlık stok olması olasılığını belirtmektedir. Ocak ayının sonunda firmanın hiç stoku yokken Mart ayının sonunda da firmanın stoksuz kalma olasılığı P^2 matrisinin 11. elemanına eşit olmaktadır. Diğer bir ifadeyle $p_{0,0}(2) = 0{,}0818$'dir. Matrisin birinci kolonundaki olasılık değerleri yani Ocak ayı sonundaki farklı envanter düzeylerine göre Mart ayı sonunda firmanın stoksuz kalma olasılıkları incelendiğinde bu kolondoki en yüksek değerin 0,0818 olduğu görülmektedir. Diğer bir ifadeyle bu değer, firmanın Ocak ayı sonunda hiç stoku yokken Mart ayı sonunda da stoksuz kalma olasılığıdır.

Firmanın Ocak ayı sonu envanter düzeyi 0'dan farklı ise Mart ayı sonunda stoksuz kalma riski daha düşük olmaktadır. Bu geçişlere ilişkin olasılık değerleri Tablo 3'de verilmektedir.

Tablo 3. Mart Ayı Sonu Envanter Miktarının 0 Olmasına İlişkin Olasılık Değerleri

Ocak Ayı Sonu Envanter Miktarı	**Mart Ayı Sonu Envanter Miktarı**	**Olasılık Değerleri**
0	0	$p_{0,0}(2) = 0{,}0818$
1	0	$p_{1,0}(2) = 0{,}0687$
2	0	$p_{2,0}(2) = 0{,}0591$
3	0	$p_{3,0}(2) = 0{,}0519$
4	0	$p_{4,0}(2) = 0{,}0461$
5	0	$p_{5,0}(2) = 0{,}0409$
6	0	$p_{6,0}(2) = 0{,}0591$
7	0	$p_{7,0}(2) = 0{,}0519$
8	0	$p_{8,0}(2) = 0{,}0591$
9	0	$p_{9,0}(2) = 0{,}0519$
10	0	$p_{10,0}(2) = 0{,}0461$
11	0	$p_{11,0}(2) = 0{,}0409$
12	0	$p_{12,0}(2) = 0{,}0364$
13	0	$p_{13,0}(2) = 0{,}0328$
14	0	$p_{14,0}(2) = 0{,}0591$
15	0	$p_{15,0}(2) = 0{,}0519$
16	0	$p_{16,0}(2) = 0{,}0461$
17	0	$p_{17,0}(2) = 0{,}0409$
18	0	$p_{18,0}(2) = 0{,}0364$
19	0	$p_{19,0}(2) = 0{,}0328$

Firmanın Ocak ayı sonu itibariyle envanter miktarı 0 iken Mart ayı sonundaki envanter miktarının $0,1,\ldots,19$ olması olasılıkları diğer bir ifadeyle matrisin 1.satırı incelendiğinde ise, en yüksek olasılığa sahip geçişlerin Mart ayı sonunda envanter miktarının 4, 5, 6 veya 7 konteynır olması olduğu görülmektedir. Çünkü P^2 matrisinin 1. satırındaki en yüksek olasılık değerleri, $p_{0,4}(2) = 0{,}1037;\ p_{0,5}(2) = 0{,}1144;\ p_{0,6}(2) = 0{,}1164;\ p_{0,7}(2) = 0{,}1087$'dir. Ayrıca firmanın Ocak ayı sonunda 0 stoka sahipken Mart ayı sonu itibariyle 17, 18 veya 19 konteynırlık stoka ulaşması imkansızdır çünkü $p_{0,17}(2) = p_{0,18}(2) = p_{0,19}(2) = 0$ olmaktadır. Bu nedenle firma Nisan ayında talebin fazla olması durumunda Mart ayının dönem sonu envanteri bu düzeylere ulaşamayacağı için üretimini arttırma kararı vermelidir.

Matristeki her elemanın tek tek incelenmesi yerine her satırdaki en yüksek olasılık değerine sahip geçişler ele alınmaktadır. Firmanın Ocak ayı sonu envanteri 1 konteynır iken Mart ayı sonunda envanter miktarının 6 olması olasılığı $p_{1,6}(2) = 0{,}1189$ olmaktadır ve bu olasılık 2. satırdaki en yüksek olasılık değeridir. Benzer biçimde P^2 matrisinin tüm satırları incelendiğinde elde edilen en yüksek olasılık değerleri Tablo 4'de gösterilmektedir.

Tablo 4. 2 Aşamalı Geçişlere İlişkin Olasılık Değerleri

Ocak Ayı Sonu Envanter Miktarı	Mart Ayı Sonu Envanter Miktarı	Olasılık Değerleri
0	6	$p_{0,6}(2) = 0{,}1164$
1	6	$p_{1,6}(2) = 0{,}1189$
2	6	$p_{2,6}(2) = 0{,}1206$
3	6	$p_{3,6}(2) = 0{,}1210$
4	7	$p_{4,7}(2) = 0{,}1211$
5	7	$p_{5,7}(2) = 0{,}1204$
6	6	$p_{6,6}(2) = 0{,}1206$
7	6	$p_{7,6}(2) = 0{,}1210$
8	6	$p_{8,6}(2) = 0{,}1206$
9	6	$p_{9,6}(2) = 0{,}1210$
10	7	$p_{10,7}(2) = 0{,}1211$
11	7	$p_{11,7}(2) = 0{,}1204$
12	7	$p_{12,7}(2) = 0{,}1187$
13	7	$p_{13,7}(2) = 0{,}1166$
14	6	$p_{14,6}(2) = 0{,}1206$
15	6	$p_{15,6}(2) = 0{,}1210$
16	7	$p_{16,7}(2) = 0{,}1211$
17	7	$p_{17,7}(2) = 0{,}1204$
18	7	$p_{18,7}(2) = 0{,}1187$
19	7	$p_{19,7}(2) = 0{,}1166$

Tabloda yer alan olasılık değerlerine göre firmanın Ocak ayı sonundaki farklı envanter miktarlarına göre Mart ayı dönem sonu envanterinin alabileceği değerler yani firmanın karşılaşabileceği en olası durumlar 7. ve 8. durumlar olan 6 ve 7 konteynırlık dönem sonu envanteridir. Firma bu olası durumlara göre Nisan ayında talebin daha yüksek olmasına karşı günlük çalışma saatlerini arttırarak üretim miktarını arttırma kararı vermelidir. Böylece gelen siparişler kaybedilmeyecek ve firmanın karlılığı düşmeyecektir. Firmanın stokunda Ocak ayı sonunda $0,1,\ldots,19$ konteynırlık masa örtüsü olması durumunda Mart ayı sonunda 19 konteynır stok olması olasılığı ise 0 olmaktadır çünkü $p_{j,19}(2)=0$ 'dır. Diğer bir ifadeyle firma Mart ayı sonunda başlangıç durumu ne olursa olsun 19 birimlik stok seviyesine ulaşamayacaktır. Firmanın üretim politikalarına göre herhangi bir ayda gerçekleştirebileceği maksimum üretim miktarı bir önceki ay sonu envanter düzeyi 6 birimin altında olması halinde ayda 22 gün ve günde 12 saatlik çalışma ile 12 birimdir. Bu nedenle firmanın bir önceki ay sonunda bu miktarda stoku varken Mart ayında 12 birimlik üretim gerçekleştirdiğinde ve bu ayın talebini karşıladığında ay sonunda 19 birimlik stokunun kalması da imkansız olmaktadır.

DS for Windows programı ile *n=3,4,5,6,7,8* için aynı şekilde *n*-aşamalı geçiş olasılıkları matrisleri oluşturulmuştur. P^3 matrisi incelendiğinde Ocak ayı dönem sonu envanterinin alabildiği farklı değerlere göre firmanın Nisan ayı sonunda karşılaşabileceği en olası durumların 7. ve 8. durumlar olduğu görülmektedir ve bu özelliği ile bir önceki ay ile aynı olmaktadır. *n=4,5,6,7,8* için P^n matrisleri hesaplandığında ise Ocak ayı sonundaki farklı envanter miktarlarına göre Mayıs, Haziran, Temmuz, Ağustos ve Eylül aylarının sonunda karşılaşılabilecek en yüksek olasılığa sahip durumun 7. durum yani yani 6 konteynırlık dönem sonu envanteri olduğu görülmektedir.

Firmanın Ocak ayı sonundaki dönem sonu stok miktarlarına bağlı olarak Ekim ayı sonunda karşılaşabileceği durumlara ilişkin geçiş olasılıklarından oluşan P^9 matrisi hesaplandığında bir önceki aşamada olduğu gibi bu aşama da Ocak ayı 0 stok ile sona erdiğinde Ekim ayı sonunda stok olmaması olasılığının $p_{0,0}(9)=0,0530$ olduğu görülmektedir. Ayrıca firmanın Ekim ayı sonunda envanter düzeyinin kaç birim olabileceğine ilişkin en olası durum 7. durum yani 6 birimlik stoktur ve $j=0,1,\ldots,19$ için $p_{j,6}(8)=0,1195$ olmaktadır. Ancak 9 aşamalı geçiş olasılıkları matrisi P^9 incelendiğinde matrisin tüm satırlarının aynı olduğu görülmektedir. Diğer bir ifadeyle firmanın Ocak ayı dönem sonu envanteri kaç birim olursa olsun Ekim ayı sonunda firmanın envanter miktarının kaç birim olabileceğine ilişkin olasılık değerleri aynıdır.

Daha önce de belirtildiği gibi, ele alınan süreç ergodik zincir olmasından dolayı denge durumuna ulaşabilir bir süreçtir. 9 aşamalı geçiş olasılıkları matrisinde görüldüğü gibi 20×20 matrisin her satırı birbiriyle aynı değerlere sahiptir. Diğer bir ifadeyle matris bir vektör biçimine dönüşmüştür. Bu aşama firmanın denge durumuna ulaştığı aşama olmaktadır. Bundan sonraki aylarda geçiş olasılıkları değişmeyecek ve Ocak ayı sonu envanter miktarlarından yani başlangıç durumundan bağımsız olarak $j=0,1,\ldots,19$ için aynı olacaktır. Ulaşılan denge durumu envanter miktarlarının uzun dönemli özelliklerini gösterdiğinden firmanın envanter politikalarında önem taşımaktadır. Firmanın Kasım ve Aralık aylarının sonundaki envanter miktarlarına ilişkin olasılık değerleri Ocak ayı sonu envanter miktarlarından bağımsız ve aşağıda verilen denge vektöründe yer alan olasılıklara eşit olacaktır. Denge vektörü π , Tablo 5'de gösterilmektedir.

Tablo 5. Denge Durumu Olasılıkları

k	**Denge Olasılığı**	***k***	**Denge Olasılığı**
0	0,0530	10	0,0643
1	0,0361	11	0,0417
2	0,0531	12	0,0238
3	0,0729	13	0,0117
4	0,0930	14	0,0049
5	0,1098	15	0,0017
6	0,1195	16	0,0005
7	0,1189	17	0,0001
8	0,1076	18	0
9	0,0879	19	0

Sürecin denge durumuna ulaşması sürecin bir durumda sabit olacağı anlamına gelmemektedir. Süreç durumlar arasında geçiş yapmaya devam edecektir fakat herhangi bir durumda olma olasılığı denge durumuna ulaşılan bu aşamadan sonraki periyodlar için aynı olacaktır. Denge durumu olasılıkları ile firmanın Aralık ayı sonu itibariyle beklenen dönem sonu envanter miktarı da belirlenebilmektedir. Olası envanter miktarları denge vektöründe yer alan olasılık değerleri ile ağırlıklandırıldığında Aralık ayı sonundaki beklenen envanter miktarı 6,1246 konteynır yani yaklaşık 6 birim olarak bulunmaktadır. *n* aşamalı geçiş olasılıkları incelenirken firmaların Ocak ayı dönem sonu envanter miktarına göre her aşamada karşılaşabildiği en olası durum da 7. durum yani 6 birimlik dönem sonu envanteri olarak belirlenmişti. Firmanın üretim ve envanter politikalarına göre ay sonu envanter miktarı bu düzeyde olmaktadır.

Denge durumu olasılıkları ile sürecin durumlarına ilişkin yinelenme süreleri de elde edilebilmektedir. Herhangi bir durumun yinelenme süresi, Ocak ayı sonunda sürecin o durumda iken tekrar aynı durumda olması için geçmesi beklenen zaman süresini belirtmektedir. $\mu_{kk} = 1/\pi_k$ formülü ile hesaplanan yinelenme süreleri Tablo 6'da yer almaktadır.

TABLO 6. Durumların Yinelenme Süreleri

k	**Yinelenme Süresi (Ay)**	***k***	**Yinelenme Süresi (Ay)**
0	18,87	10	15,55
1	27,70	11	23,98
2	18,83	12	42,02
3	13,72	13	85,47
4	10,75	14	204,08
5	9,11	15	588,24
6	8,37	16	2000,00
7	8,41	17	10000,00
8	9,29	18	---

9	11,38	19	---

Firmanın Ocak ayı sonunda 0 stoku varken tekrar stoksuz kalması için yaklaşık olarak 18,8 ay yani 1 yıldan fazla süre geçmesi beklenmektedir. Firmanın Ocak ayında 4 birimlik dönem sonu envanteri varken tekrar 4 birimlik dönem sonu envanter miktarına ulaşması için yaklaşık 10,8 aylık sürenin geçmesi beklenmektedir. 5, 6, 7, 8 ve 9 birimlik dönem sonu envanter miktarlarını gösteren durumlar için yinelenme süreleri 1 yıldan az olurken diğer durumlar için bu süre çok daha uzun olmaktadır.

Sonuç

İncelenen sürecin zaman içindeki değişimleri ele alınmış ve sürecin stokastik yapısı ortaya konmaya çalışılmıştır. Hesaplanan *n*-aşamalı geçiş olasılıkları matrislerine göre firmanın Ocak ayı dönem sonu envanter miktarlarına bağlı olarak *n* ay sonra envanter miktarlarının ne düzeyde olabileceği belirlenmiştir. Firmanın karşılaşabileceği en olası durum pek çok ay için aynıdır ve 6 birimlik dönem sonu envanterini gösteren 7. durumdur. Firmanın herhangi bir ayın sonunda 19 birim stok düzeyine ulaşması olası değildir. Geçiş olasılıkları matrisi ergodik zincir olma özelliği ile denge durumuna ulaşabilen bir süreci göstermektedir. Hesaplanan 9 aşamalı geçiş olasılıkları matrisi ile firmanın envanter miktarlarının denge durumuna ulaştığı belirlenmiştir. Firmanın denge durumuna ulaştığı bu periyoddan sonra yani Ekim ayı sonu itibariyle envanter miktarlarındaki değişimleri gösteren olasılık değerleri değişmeyecektir. Sürecin bu özelliğinden faydalanılarak 1 yılın sonundaki beklenen envanter miktarı 6,1246 konteynır yani yaklaşık 6 birim olarak bulunmuştur. *n* aşamalı geçiş olasılıkları incelenirken de firmanın karşılaşabileceği en olası durum olarak 6 birimlik stok düzeyi belirlenmiştir. Firma gelen siparişleri zamanında karşılayabilmek için üretimi arttırma kararı vermek durumundadır. Ayrıca denge durumu olasılıkları ile hesaplanan yinelenme süreleri de firmanın envanter kararlarında etkili olabilmektedir. Örneğin, firmanın Ocak ayı dönem sonu envanteri 4 birimken tekrar 4 birimlik stok düzeyine ulaşması için yaklaşık 10,8 ay geçmesi gerekmektedir. Firma bu süreden önce tekrar bu miktarda dönem sonu envanterine sahip olamayacaktır. Firma belirli miktarda stoka ulaşmayı hedeflediğinde bu süreleri dikkate almalıdır.

Markov zincirleri analizi ile işletmelerin karar verme süreçlerinde karşılaştıkları sorunların stokastik yapıları incelenebilmektedir. Ele alınan soruna ilişkin kısa ve uzun dönemli tahminler geliştirilmesinde karar verme sürecine önemli bir girdi sağlayan Markov zincirleri karar vericilere risk altında verilmesi gereken kararlarda yardımcı olan bir yönetim bilimi tekniğidir. Ele alınan sürecin yapısı ve özelliklerine göre oluşturulan ve sürecin durumları arasındaki geçişleri içeren geçiş olasılıkları matrisi ile sürecin hem kısa hem de uzun dönemli stokastik yapısı hakkında bilgiler elde edilebilmektedir. Ancak oluşturulan geçiş olasılıkları matrisinin zaman içinde değişmediği varsayılmaktadır yani bu geçiş özellikleri durağan nitelik taşımaktadır. Bu nedenle Markov zincirleri ele alınan sürece ilişkin olasılık yapısını belirli deterministik varsayımlar altında ortaya koymaktadır. Deterministik nitelikte olmaması ile değişen koşullar ve risk altında avantaj sağlayabilen Markov zincirleri ile geleceğe yönelik olasılık dağılımları diğer bir ifadeyle olası değişimler ortaya konmakta fakat nokta tahminleri yapılamamaktadır. Bu özelliği tekniğin stokastik yapısından kaynaklanmaktadır.

Markov zincirleri analizi sadece belirli özel karakteristiklere sahip problemlere uygulanabilmesi açısından sınırlayıcı bir tekniktir. Markov zincirleri ile karar sorunlarının modellenmesinde, diğer pek çok yönetim bilimi tekniğinde olduğu gibi belirgin bir amaç fonksiyonu olmamakla birlikte sorunun yapısına bağlı olarak modeller geliştirilebilmekte, durumlar ve geçiş olasılıkları belirlenebilmektedir. Sınırlayıcı niteliklerine karşın ele alınan sorunun stokastik yapısı hakkında geleceğe yönelik önemli bilgiler sağlayan Markov zincirleri, günümüzde artan risk ve rekabet altındaki işletme sorunlarının çözümü için finans, üretim, pazarlama, işgücü planlaması gibi pek çok alanda uygulanma olanağına sahip olmaktadır.

Kaynaklar

1. Abboud, N. E. (2001). A Discrete-Time Markov Production-Inventory Model with Machine Breakdowns, *Computers and Industrial Engineering*, 39.

2. Austin, Larry M., Burns, James R. (1985). *Management Science: An Aid for Managerial Decision Making*. Macmillan Publishing Company: New York.

3. Barnett, Raymond A., Ziegler, Michael R. (2003). *Applied Mathematics*: Prentice Hall: New Jersey.

4. Betancourt, Luis. (1999). Using Markov Chains to Estimate Losses from a Portfolio of Mortgages, *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 12(3).

5. Bonacich, Phillip., Liggett, Thomas M. (2003). Asymptotics of a Matrix Valued Markov Chain Arising in Sociology, *Stochastic Processes and their Applications*, 104.

6. Buffa, Elwood S., Dyer, James S. (1977). *Management Science/Operations Research-Model Formulation and Solution Methods*. John Wiley and Sons Inc.:USA.

7. Ching, Wai-Ki., Fung, Eric S., Ng, Michael K. (2002). A Multivariate Markov Chain Model for Categorical Data Sequences and its Applications in Demand Predictions, *Journal of Management Mathematics*, 13.

8. Ching, Wai Ki., Loh, Anthony W. (2003). Iterative Methods for Flexible Manufacturing Systems, *Applied Mathematics and Computations*, 141.

9. Collins, Lyndhurst. (1970). *Markov Chains and Industrial Migration: Forecasting Aspects of Industrial Activity in Ontorio Towns*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, University of Toronto: School of Graduate Studies, Toronto.

10. Demir, M. Hulusi. (1974). *Dinamik Programlama Modelleri Yardımıyla Üretim Kararlarında Minimum Maliyet Giderlerinin Hesaplanması*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Ege Üniversitesi: İ.İ.B.F, İzmir.

11. Fingleton, Bernard. (1997). Specification and Testing of Markov Chain Models: An Application to Convergence in the European Union, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 59(3).

12. Hastings, N. A. J. (1973). *Dynamic Programming with Management Applications*. Butterworth Publishers: London.
13. Hillier, Frederick S., Lieberman, Gerald J. (1990). *Introduction to Stochastic Models in Operations Research*. McGraw-Hill Publishing Company: USA.
14. Hillier, Frederick S., Lieberman, Gerald J. (1995). *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill Book Company: Singapore.
15. Israel, Robert B., Rosenthal, Jeffrey S., Wei, Jason. (2001). Finding Generators for Markov Chains via Empirical Transition Matrices, with Applications to Credit Ratings, *Mathematical Finance*, 11(2).
16. Kijima, Masaaki. (1998). Monotonicities in a Markov Chain Model for Valuing Corporate Bonds Subject to Credit Risk, *Mathematical Finance*, 8(3).
17. Lanaspa, Luia., Pueyo, Fernando., Sanz, Fernando. (2003). The Evolution of Spanish Urban Structure During the Twentieth Century, *Urban Studies*, 40(3).
18. Los, Cornelis A. (1998). Nonparametric Efficiency Testing of Asian Stock Markets Using Weekly Data, *Centre for Research in Financial Services, Working Paper*, No.99-01.
19. Parzen, Emanuel. (1962). *Stochastic Processes*. Holden-Day Inc.: USA.
20. Ravindran, A., Phillips, Don T., Solberg, James J. (1987). *Operations Research-Principles and Practice*. John Wiley and Sons Inc., Second Ed: USA.
21. Render, Barry., Stair, Ralph M. (2000). *Quantitative Analysis for Management*. Prentice-Hall Inc., Seventh Ed: USA.
22. Saatçioğlu, Ömer. (1978). Birimler Arası Personel Geçişlerinin Kestiriminde Markov Zinciri Yaklaşımı, *Yöneylem Araştırması 4. Ulusal Kongresi Bildiriler Kitabı*.
23. Sastri, Tep., Feiring, Bruce., Mongkolwana, Piamsak. (2000). Markov Chain Approach to Failure Cost Estimation in Batch Manufacturing, *Quality Engineering*, 13(1).
24. Shamblin, James E., Stevens, G.T. (1974). *Operations Research-A Fundamental Approach*. McGraw-Hill Book Company: New York.
25. Stevenson, William J. (1989). *Introduction to Management Science*. Irwin Inc.:USA.
26. Şahinoğlu, Mehmet. (1992). *Applied Stochastic Processes*. Set Ofset: Ankara.
27. Taha, Hamdy A. (1997). *Operations Research: An Introduction*. Prentice-Hall Inc., Sixth Edition: USA.
28. Takacs, Lajos. (1960). *Stochastic Processes-Problems and Solutions*. Chapman and Hall Ltd.: London.
29. Thomas, L. C., Ho, J., Scherer, W. T. (2001). Time will Tell: Behavioural Scoring and Consumer Credit Assessment, *Journal of Management Mathematics*, 12.
30. Tsantas, N. (2001). Ergodic Behavior of a Markov Chain Model in a Stochastic Environment, *Mathematical Methods of Operations Research*, 54.
31. Tütek, Hülya., Gümüşoğlu, Şevkinaz. (2000). *Sayısal Yöntemler: Yönetsel Yaklaşım*. Beta Basım Yayım, 3. Baskı: İstanbul.
32. Wang, Chih-Hsiung., Sheu, S. H. (2003). Determining the Optimal Production-Maintenance Policy with Inspection Errors: Using a Markov Chain, *Computers and Operations Research*, 30.
33. Winston, Wayne L. (2004). *Operations Research-Applications and Algorithms.* Brooks/Cole, Fourth Ed: USA.

34. Yin, G., Zhang, Q., Yin, K. (2003). Constrained Stochastic Estimation Algoritms or a Class of Hybrid Stock Market Models, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 118(1).