NORMAL DAĞILIM

Yard.Doç.Dr.Mustafa GÜVENDİ

D.E.Ü.Buca Eğitim Fakültesi

Eğitim Bilimleri Bölümü

ÖZET

İstatistik ve eğitimde normal dağılımdan sözedilmekte, verilerin yorumlanmasında çoğu kez normal dağılım ölçüt olarak kullanılmaktadır.

Bu yazıda normal dağılım tanımlanmakta, formüllerle açıklanmakta, özellikleri ve kullanıldığı yerler hakkında bilgi verilmektedir.

SUMMARY

Normal distribution is mentioned in statistics and education, and is usually made use of as criteria in the process of interpreting data.

In this article, normal distribution has been defined and explained with formulas, and information has been given on its characteristics and on the situations in which it is used.

GİRİŞ

Olasılık dağılımları arasında en önemlisi ve ençok sözü edileni "Normal Dağılım"dır. Normal dağılımın bu denli önemli oluşunun temel nedeni, doğada yapacağımız pekçok gözlem sonucunun normal dağılım vermesi ve ayrıca, birçok seçkisiz olayın normal dağılımları açıklanmasıdır (Arıcı, 1972).

dağılım eğrisi, gerçek ölçülere dayanan dağılımları kıyaslama ve değerlendirmede bir ölçüt vazifesi görür. Eğitsel ölçmeler sonunda elde edilen ham puanlar veya sayısal veriler, dağılımın meydana getirdiği eğri, normal dağılım eğrisi ile karşılaştırılarak test sonucu hakkında hükme varılır (Taymaz, 1970).

Bir normal dağılım eğrisinin tanımı şöyle yapılabilir. Normal eğri, herbir noktadaki yüksekliği, o noktanın ortalamadan olan uzaklığı -ki standart kayma birimleri ile ölçülür- karesinin yarısının antilogaritmasıyle ters orantılı olan bir frekans eğrisidir (Lindquist, 1975).

Normal dağılım eğrisinin genel bir metametiksel eşitliği vardır. Bunu, şu formülle gösterebiliriz.

$$Y = \frac{N}{\sigma \sqrt{2x}} e^{-(x-M)^2 / 2\sigma^2}$$

Formülde kullanılan işaretlerin anlamları.

Y= Alınan noktanın X eksenine göre ordinatı.

N= Gözlenen ölçüm sayısı.

M= Dağılımın ortalaması.

σ = Dağılımın standart kayması.

x= Pi sayısı (3.1416).

X= Gözlenen ölçümlerin herhangi birisi.

e= Tabii logaritma sisteminin tabanı (2.7183).

Formülde gösterilen (e) ve (x) sabit olduğundan, normal dağılım (M) ve (σ) tarafından belirlenir. (M) ve (σ) yerine, bunların tahmini olarak kullandığımız (X) ve (S) değerlerini koyarsak formülü şöyle yazabiliriz.

$$Y = \frac{N}{S \sqrt{2x}} e^{-(x-x)^2 / 2S^2}$$

Formülü bu son duruma göre yeniden yazabiliriz.

$$Y = \frac{N}{S \sqrt{2x}} e^{-x^2/2S^2}$$

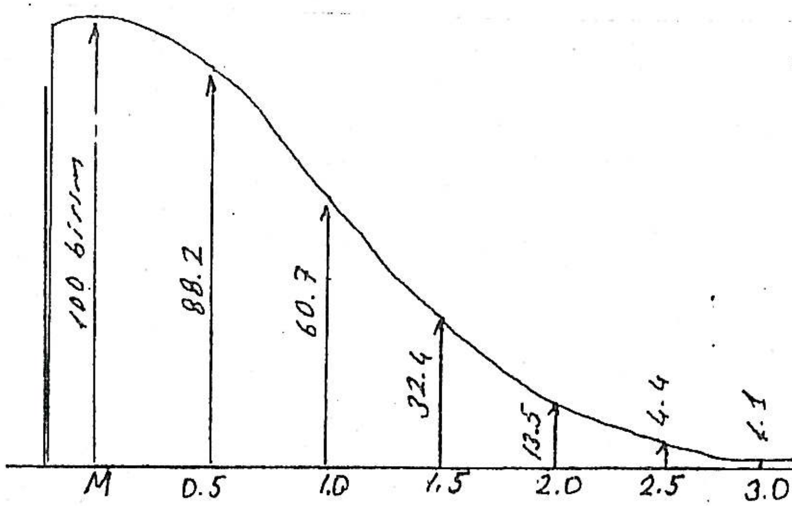
Yukarıda, formüllerde geçen işaretlerin anlamlarını yazarken N'i gözlenen ölçüm sayısı olarak tanımlamıştık. Bu tanıma göre, N' aynı zamanda dağılımın alanı da olmaktadır. Normal dağılımın alanına birim (N=1) dersek ve "Z" puanları hatırlarsak, $\left(\frac{X}{S} = Z\right)$ buna göre, $\left(\frac{X^2}{S^2} = Z^2\right)$ diyebiliriz. O zaman normal dağılımın matematiksel eşitliğini de aşağıda olduğu gibi yazabiliriz.

$$Y = \frac{1}{S \sqrt{2x}} e^{-Z^2/2}$$

Bu formülle gösterilen, dağılıma istatistikte "Birim Normal Dağılım" denir. Birim normal dağılım, ortalaması sıfır (M=0) ve standart kayması bir ($\sigma = 1$) olan kuramsal bir dağılımdır. Normal dağılım, ortalama ve standart kayma tarafından belirlendiğinden, her ortalama ve standart kayma çifti için ayrı bir normal dağılım elde edebiliriz. Ancak, parametreleri M=O ve $\sigma = 1$ şeklinde saptanık olduğundan, bir tane birim normal dağılım vardır. Normal dağılım dendiği zaman çoğu kez birim normal dağılım anlaşılır. Farklı bir normal dağılımdan sözedilmek istendiği zaman, bu dağılımın ortalama ve standart kayması belirtilir (Arıcı, 1972).

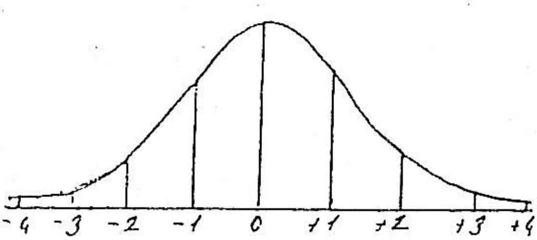
Birim normal dağılım eşitliğinde yer alan Z'ye, ters puanlarından sözedilirken standart puan, diğer türden ölçümlerden sözedilirken de, duruma göre, bağıl kayma, normal kayma ya da normalleştirilmiş ölçüm denir. Z'ye verilen ad, ne olursa olsun bu değer daima, ölçümlerin ortalamadan olan farklarının ya da ortalamaya olan uzaklıklarının standart kaymaya oranını gösterir. Birim normal dağılımda M=O ve $\sigma = 1$ olduğundan, $1z = 1\sigma$ ya da 1S, 2σ =2S v.b. olur. Bu nedenle birim normal dağılım üzerinde ortalamadan olan uzaklıkların ölçüsü olarak Z' değeri alınır (Arıcı, 1972).

Normal eğri, çan şeklinde simetrik bir frekans eğrisidir. Bu eğrinin, ortalama noktasından çıkan ordinantı ile, ortalamadan herhangibir sigma uzaklıkta olan noktaların ordinatları arasında belli bir eğriye has bazı ilişkiler vardır.

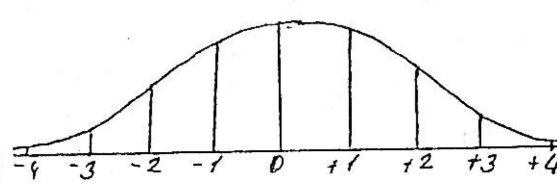


Şekil: 1 Eğri altında kalan ordinatlar

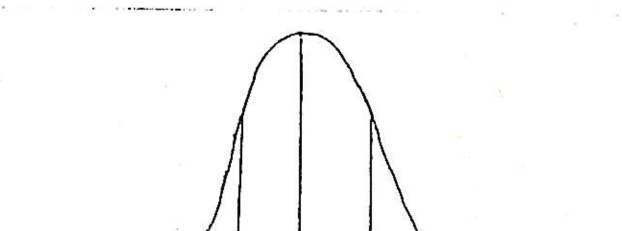
Normal eğri, ordinatı istenen herhangi bir yükseklikte alınarak çizilebilir. Eğrinin şekli de, eğri çiziminde kullanılan ölçü birimlerine göre belirgin şekilde fark göstermektedir. Aşağıda verilen şekiller incelenirse, eğrilerin hepsinin normal eğri olduğu görülecektir.



Şekil:2 Normal Eğri



Şekil:3 Basık Eğri



Şekil:4 Sivri Eğri

Bu eğrilerin görünüş olarak sivrilik ve yayvanlıkları birbirinden farklıdır. Eğrilerin çizilişindeki bu değişmelerin tesiri, bakarak bir eğrinin normal olup olmadığını söyleme işini çok güçleştirmektedir (Lindquist, 1975). Bu dağılımları sivrilik ve yayvanlık durumlarına göre şöyle sıralayabiliriz (Taymaz, 1970).

1.Normal Eğri: Ham puanlar dağılımında Y=0.3989 ise (Arıcı, 1972, s.243 teki tablodan), eğri sivrilik bakımından normaldir. Bu eğriye mesokurtik denir. Mesokurtik eğri tepenin sivri veya basık olmadığı anlamına gelir. Şekil:2.

2.Basık Eğri: Ham puanlar dağılımında Y<0.3989 ise, eğri sivri olur. Bu eğriye platikurtuk denir. Platikurtik eğri, tepesinin basık olduğu anlamına gelir. Şekil:3.

3.Sivri Eğri: Ham puanlar dağılımında Y>0.3989 ise, eğri sivri olur. Bu eğriye leptokurtik denir. Leptokurtik eğri, tepesinin sivri olduğu anlamına gelir. Şekil:4.

Normal Dağılım Eğrisinin Özellikleri

1.Normal dağılım eğrisi, çan şeklinde, düzgün ve tam bir frekans eğrisidir.

2.Normal bir dağılım eğrisi veren ham puanlar veya diğer sayısal veriler dağılımında ortalama, ortanca ve mod değerleri birbirine eşittir.

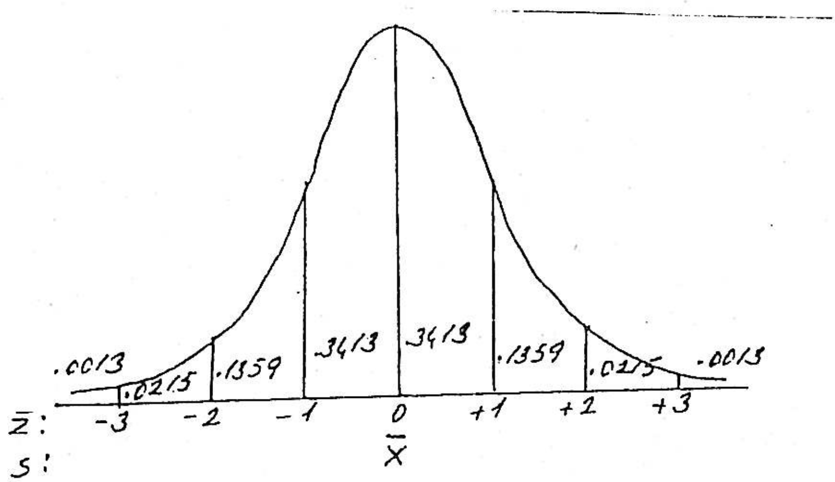
3.Normal bir dağılımda, merkezi eğilim ölçüleri aynı noktada bulunur ve bu nokta simetri ekseninin başlangıcı olan sıfır noktasıdır.

4.Normal bir dağılım eğrisini veren ham puanlar veya diğer sayısal veriler, sıfır noktasının altında ve üstünde simetrik olarak yayılmıştır.

5.Normal bir dağılım eğrisinde, dağılım alanı sekiz standart sapma ünitesine bölünmüştür. Sıfır noktasının sağındaki alanlar (+) ve solundaki alanlar (-) standart ölçüleri ile bölünür (Taymaz, 1970).

Normal Bir Dağılım Üzerinde Alanın Bölünmesi

Normal dağılım üzerindeki alanların bölünmesi belirli bir düzen izler. Şekil:5'te görüldüğü gibi, ortalamadan 1S (aynı zamanda 1Z) uzaklıktaki nokta ile ortalama arasındaki mesafe alanın .3413'ü, ortalama ile, ortalamadan -1S. uzaklıktaki noktalar arasındaki alan .6826 olmaktadır.



Şekil:5. Normal Dağılım Üzerinde Alanın Bölünmesi.

Birim normal dağılım üzerindeki ordinat değerleri alana oranla daha az kullanılır (Arıcı, 1972). Yararlanılan kaynaklarda da ordinatların hesaplanmasına ilişkin örnek işlemler bulunamamıştır. Ancak, ordinatların, tablo yardımıyla bulunmasını gösteren örnekler vardır. Halbuki, ordinatlar arası alanın gösterilmesiyle ilgili örnek işlemler vardır. Oranlarla ilgili iki örnek gösterelim.

Örnek: 1. Ortalamadan itibaren $\pm$1.8 Z uzaklıktaki ordinatlar arasında alanın yüzde kaçı kalmaktadır?

Çözüm: Tablodan önce Z=1.8 değeri ve bunun karşısındaki alan bulunur. Sonra, istenen-1.8 Z noktaları arası olduğundan ve dağılım simetrik olduğu için, bulunan alanın iki katı oluşu, tabloya bakılınca, ortalama ile +1.8 Z arasındaki alan .4641'dir. -1.8 Z arasındaki alan, .4641 x 2 = .9282 olur.

Örnek:2. Elimizde normal bir dağılım var. M=60, standart sapma (S)=8 ve N=80. Bu durumda 76'nın üstünde kalan puanların oranını bulmamız istenirse.

Çözüm: Verilen bu ölçü, ortalamanın 76-60=16 puan üstündedir. Standart sapma 8 olduğuna göre $\frac{16}{8}=2$ sigma puanı üstündedir. Tabloya bakıldığında, puanların .4772 si bu nokta ile ortalama arasında olacaktır. Dağılım simetrik olduğuna göre, ortalamanın % 50'si ortalamanın üstünde kalmaktadır. O halde .5000-.4772=.0228= % 2.28'i 76 puanın üzerinde alacaktır.

Normal Dağılım Eğrisinin Kullanıldığı Yerler (Lindquist, 1975).

1.Bir normal dağılımda ölçekte verilen bir noktanın altında veya üstünde kalan puanlarının sayısını, oranlarını veya yüzdesini bulmakta kullanılır.

2.Ölçek üzerinde verilen, herhangi iki nokta arasındaki, puanların sayısını, oranlarını veya yüzdesini bulmakta kullanılır.

3.Verilen bir puan sayısının, oranın veya yüzdenin ölçekte hangi noktanın üstünde veya altında olduğunu bulmakta kullanılır.

4.Ortalamanın her iki tarafından belli bir puan sayısını, orantısını veya yüzdesini kapsayan mesafeyi bulmakta kullanılır.

5.Bir dağılımda rastgele seçilmiş bir puanın, ölçek boyunca verilmiş, herhangi bir noktanın üstünde veya altında bulunma olasılığını hesaplamakta kullanılır.

6.Rastgele seçilen tek bir puanın, verilen bir olasılık değerine göre altta veya üstte bulunduğu noktayı bulmakta kullanılır.

7.Rastgele seçilmiş bir puanın, verilen iki nokta arasında bulunma olasılığını tesbit etmekte kullanılır.

8.Rastgele seçilmiş tek bir puanın, verilen bir olasılık değerine göre, olasılıktan çok mu yoksa az mı bir kayma gösterdiğini bulmakta kullanılır.

Dağılım Eğrisinde Çarpıklık

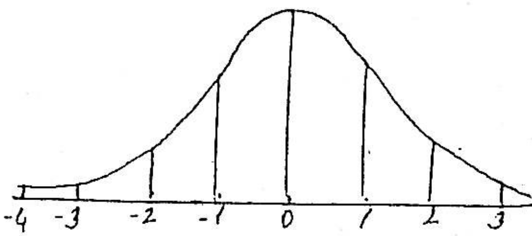
Ölçüm sonucu elde edilen dağılımların, frekans dağılım eğrileri çizilebilir. Bu çizimlerde, dağılımların meydana getirdiği eğriler, diktörtgen, U şeklinde, J şeklinde, çift mod'lu, düzensiz, çarpık veya sivri dağılım eğrilerini meydana getirir (Taymaz, 1970).

Çarpıklık: Bir frekans dağılımının, simetriyi bozma veya simetriden ayrılma derecesidir. Bir dağılımda merkezi eğilim ölçüleri "ortalama, ortanca, mod" aynı ise dağılım eğrisi normal olur. Merkezi eğilim ölçüleri farklı ise, dağılım sağa veya sola doğru çarpık olur. Ham puanlar arasındaki fark, çarpıklık derecesi olarak kullanılabilir (Taymaz, 1970).

Dağılım eğrileri, çarpıklık derecesine göre, üç şekilde ele alınabilir.

1.Normal eğri: Ham puanlar dağılımında merkezi eğilim ölçüleri birbirine eşit ise, aralarındaki fark sıfır ve dolayısıyle, esneklik derecesi de sıfır olacaktır.

$$ÇK= \frac{M\text{-}Mod}{S}$$



Örnek:

M=45

Md=45

Mod=45

S=8

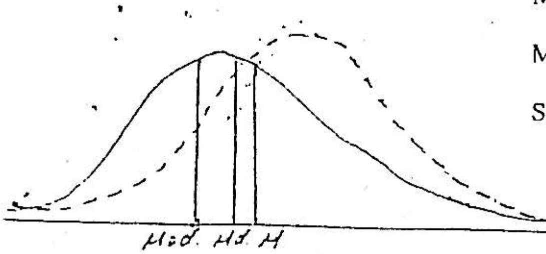
$$ÇK= \frac{45\text{-}45}{8} \; 0$$

$$ÇK= \frac{(M\text{-}Md)}{S}$$

$$ÇK= \frac{(45\text{-}45)}{8} \; 0$$

Şekil:6 Normal Dağılım Eğrisi

2.Sola çarpık eğri: Ham puanlar dağılımında, aritmetik ortalamanın değeri mod değerinden fazla ise, katsayı değeri pozitif ve eğri sola yığıntılı olur.



Örnek:

M=50

Md=49

Mod=45

S=8

$$ÇK= \frac{M\text{-}Mod}{S} = \frac{50\text{-}45}{8}$$

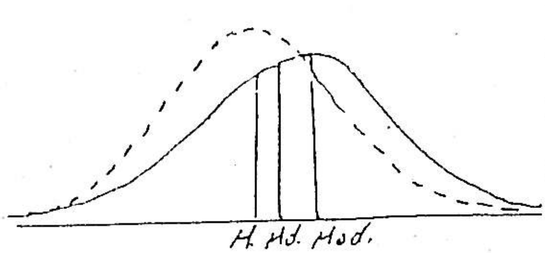
$$ÇK= \frac{5}{8} = 0.625$$

$$ÇK= \frac{3(M\text{-}MD)}{S} = \frac{3(50\text{-}49)}{8}$$

$$ÇK= \frac{3}{8} = 0.375$$

Şekil:7 Sola Yığıntılı Pozitif Çarpık Dağılım Eğrisi

3.Sağa Çarpık Eğri: Ham puanlar dağılımında, aritmetik ortalamanın değeri, mod değerinden azsa, katsayı değeri negatif ve eğri sağa yığıntılı olur.



Örnek:

M=40

Md=41

Mod=45

S=8

$$ÇK= \frac{M\text{-}Mod}{S} = \frac{40\text{-}45}{8}$$

$$ÇK= \frac{-5}{8} = 0.625$$

$$ÇK= \frac{3(M\text{-}MD)}{S} = \frac{3(40\text{-}41)}{8}$$

$$ÇK= \frac{3}{8} = 0.375$$

Şekil:8 Sağa Yığıntılı Negatif Çarpık Dağılım Eğrisi

KAYNAKÇA

Arıcı, Hüsnü. **İstatistik Yöntemler ve Uygulama**, Hacettepe Üniversitesi Basımevi, Ankara, 1972.

Akhun, İlhan. **İstatistiksel Formüller ve Tablolar,** Ankara Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Ankara, 1978.

Çağlar, Doğan. **Başarının Ölçülmesi ve İstatistik Metodlarla Değerlendirme,** Ayyıldız Matbaası, Ankara, 1974.

Guilford, J.P. **Fundamental Statistics in Psychology,** And Education, Tosho Printingco, Ltd. Tokyo-Japan, 1978.

Gümüş, Burhan. **Eğitimde Ölçme ve Değerlendinme,** Kalite Matbaası, Ankara, 1977.

Lindquists, E,F. **İstatistiğe Giriş**, Çev.Hasan Tan ve Tuğrul Taner. Milli Eğitim Basımevi, 1975.

Quinn, McNemar, **Psychological Statistics**, Fourth Edition, Tokyo, 1969.

Şenis, B.Fethi. **İstatistik.** Çeviri. Anadolu Üniversitesi Açık Öğretim Fakültesi Yayını, Ankara, 1986.

Taymaz, Haydar. **Eğitimde Faydalanılan İstatistik Metodları,** Ankara Üniversitesi Eğitim Fakültesi Yayını, Ankara, 1970.

Tekin, Halil. **Eğitimde Ölçme ve Değerlendinme Metodları.** Saydam Matbaacılık, Ankara, 1984.