

Sonsuz Kümelerin Karşılaştırılması: Öğrencilerin Kullandıkları Yöntemler

Bülent GÜVEN*, İlhan KARATAŞ**

ÖZET

Öğrencilerin güçlü bir matematik bilgisine sahip olabilmeleri, karşılaştıkları yeni kavramlar karşısında yeni adaptasyonları başarı ile yapmalarına bağlıdır. Bu çalışmanın amacı öğrencilerin sonsuz kümeleri karşılaştırmada kullandıkları yöntemlerin belirlenmesidir. Bu yöntemlerin belirlenmesi ile öğrencilerin sonlu kümelerden sonsuz kümelerle geçişte yaşadıkları problemlerin nedenleri de belirlenmiş olacaktır. Bu amaç kapsamında sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili iki bölümden oluşan bir test hazırlanmıştır. Testin birinci bölümünde sonsuz küme kavramı ile ilgili 2 tane, ikinci bölümde ise, sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili 5 tane açık uçlu soru yer almaktadır. Hazırlanan test 20 lise 3, 20 ilköğretim matematik öğretmenliği-2, 20 ilköğretim matematik öğretmenliği-4 olmak üzere toplam 60 öğrenciye uygulanmıştır. Araştırma sonucunda, öğrencilerin sonlu kümelerin karşılaştırılmasında kullandıkları yöntemleri sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında da kullanmaya yöneldikleri, sonsuz kümelerin karşılaştırılması için kullanılması gereken birebir eşlemeyi çok az düzeylerde kullandıkları ve tek sonsuz yönteminin sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında öğrencilerin en sık kullandıkları yöntem olduğu sonuçlarına varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Matematik eğitimi, sonsuz kümeler, birebir eşleme.

ABSTRACT

To achieve powerful mathematical knowledge, students have to make new adaptations against the new concepts. The aim of this study is to determine methods used by students for comparing infinite sets. By determining these methods we achieve student's problems comparing infinite sets. In order to achieve this aim, a test with two sections was developed. In the first part of the test there were two open-ended questions about infinite set concept. In the second part there were five open-ended question about comparing infinite sets. The test was implemented to a sample of 60 students, which consist of 20 lycee-3, 20 prospective elementary mathematics teachers (university-2), 20 prospective elementary mathematics teachers (university-4.) From the collected data; They were found that; Students incline to use comparing methods that were valid in comparing finite but invalid comparing infinite sets, students use one to one correspondence at a little level and single infinity is the most used method by students.

Keywords: Mathematics education, infinite sets, one-to-one correspondence.

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi okul matematiğinin yıldan yıla genişleyen bir yapısı vardır. Matematiksel bilginin bu yapısı, öğrencileri, karşılaştıkları yeni kavramlara karşısında yeni adaptasyonlar yapmaya zorlamaktadır. Piaget'in bahsettiği bu adaptasyon, basit anlamda yeni kavramların eski kavramların üzerine inşa edilmesi değil, var olan bütün eski kavramların sorgulanarak; kavramların

yeniden düzenlenmesine ve dengenin kurulmasına dayanmaktadır. Gilbert ve Watts kavramlara hareketli (actional) bakış açısını temsil eden bu görüşü:

- Bütün bilişsel öğrenmeler bir miktar var olan bilgilerimizi yeniden kavramsallaştırmaya dayanır.
- Kavramlar detaylardaki her değişim sonucunda yeniden kurulur.

* Bülent Güven, Arş.Gör., KTÜ Fatih Eğitim Fakültesi, Trabzon. bguven@ktu.edu.tr

** İlhan Karataş, Arş.Gör., KTÜ Fatih Eğitim Fakültesi, Trabzon. ilhan@risc01.ktu.edu.tr

şeklinde özetlemektedirler [1]. Yani öğrencinin karşılaştığı her yeni kavram eski kavramlarda da bir takım adaptasyonları beraberinde getirmektedir. Örneğin; matematiğin temel konusu olan sayılar, Öğrenciler okulun ilk yıllarından itibaren doğal sayılar ($N=\{0,1,2,3,4,\dots\}$) ile tanışır ve bu sayı kümesi üzerinde yapıya uygun biçimde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini yaparlar. Sürekli olarak doğal sayılar kümesi üzerinde yapıya uygun işlem yapan öğrenciler, toplama, çıkarma ve çarpma işlemi ile ilgili olarak;

'Verilen iki sayı toplandığında daha büyük bir sayı elde edilir (Çünkü $5+3=8$ 'dir)'

'Verilen iki sayı çıkarıldığında daha küçük bir sayı elde edilir (Çünkü $8-5=3$ 'dür)'

'Verilen iki sayı çarpıldığında daha büyük bir sayı elde edilir (Çünkü $3 \times 8=24$ 'dür)'

şeklinde genellemeler(kavramsallaştırmalar) yapabilirler [2]. İlerleyen yıllarda öğrenciler tamsayılar kümesi ile karşılaşırlar ve bu küme üzerinde işlem yaparken, toplama ve çıkarma işlemi ile ilgili yaptıkları kavramsallaştırmaların, yeni yapıya uymadıklarını görürler. Öğrencilerin bu esnada yeni duruma karşı gösterecekleri tepki matematik öğrenme düzeylerini de belirleyeceklerdir. Öğrenciler bu esnada yeni durumla ilgili olarak aşağıdaki yolları takip edebilirler:

1. Yeni kavramı göz ardı edebilirler.
2. Yeni kavramı var olan kavramlarına hiç dokunmadan kendilerine göre yorumlaya- bilirler.
3. Öğrenciler yeni değişimi fark ederler ve kavramlarını bu yeni duruma göre düzenlemeye yani kendilerini yeni duruma adapte etmeye çalışırlar [3,4].

Kavram yanlışlarından uzak bir kavramlar çatısı için, öğrencilerin 3. yolu tercih etmeleri gerekmektedir. Ancak yapılan araştırmalar öğrencilerin var olan kavramlarını değiştirmenin (eski kavramların yenileri ile değiştirilmesi) hiç de kolay olmadığını, öğrencilerin bu yeniliğe karşı direnç gösterdiklerini ortaya koymaktadır [1].

Yukarıda kısaca bahsettiğimiz yeni durumu fark etme ve bu yeni duruma kendini adapte etme anlamında ortaya çıkan kavram yanlışları sonlu kümelerden sonsuz kümelere geçişte kendini çok sıkça göstermektedir. Yapılan araştırmalar sonlu kümeler üzerinde işlem yapmaya alışmış olan öğrencilerin, sonlu kümelerde yaptıkları tüm işlemleri sonsuz kümelerde de yapabileceklerini düşündüklerini ve bunun sonucu olarak da kavram yanlışları oluştuğunu ortaya koymaktadır. Bu kavram yanlışları, özellikle kümelerin eleman sayıları yönünden karşılaştırılmasında kendini göstermektedir [5,6,7,8].

Sonsuz kavramının ve sonsuz kümelerin matematik tarihi içerisindeki gelişimi de incelendiğinde kavramlar üzerinde uzlaşmaların sağlanabilmesi için 19. yüzyılın beklenmesi gerektiği görülür [9]. O güne kadar en basit anlamda sonsuz küme için; 'Sonlu olmayan kümelerdir' tanımı yapılmış olsa da 19. yüzyılda yaşamış olan Alman matematikçi Cantor sonsuz kümelerle ilgili tartışmalara son noktayı koymuş ve sonsuz kümelerle ilgili olarak aşağıdaki tanımı yapmıştır.

'Uygun bir alt kümesi ile aralarında birebir eşleme yapılabilen kümeler sonsuz kümeler denir' [10].

Bu tanım gereği, doğal sayılar sonsuzdur, çünkü $N=\{1,2,3,\dots\}$ kümesi kendisinin bir alt kümesi olan $\{2,4,6,8,\dots\}$ kümesi ile birebir eşlenebilir. Bu eşlemede, doğal sayılar kümesindeki her n , çift sayılar kümesindeki $2n$ ile eşlenebilir. Yani Cantor'un ortaya koyduğu bu teori ile birlikte sonsuz iki kümenin karşılaştırılmasında birebir eşleme mantığı devreye girmiş ve bunun sonucu olarak da kendisinin bir alt kümesi ile aralarında birebir bir fonksiyon tanımlanabilen kümeler sonsuz kümeler denmiştir.

Bu çalışma ile öğrencilerin yaşlarına bağlı olarak sonsuz küme kavramları ve sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili bilgilerinin bir resminin çekilmesi amaçlanmıştır. Böylece öğrencilerin sonlu kümelerden sonsuz kümelerle geçişte yaşadıkları sorunlar tespit edilerek sonsuz kümelerin öğretimi için öneriler belirlenecektir.

2. YÖNTEM VE ÖRNEKLEM

Çalışmanın amacına uygun olarak, sonsuz küme kavramı ve sonsuz kümelerin karşılaştırılması konuları ile ilgili öğrenci düşüncelerini belirlemek amacıyla 7 açık uçlu sorudan oluşan bir sonsuz küme testi geliştirilmiştir. Geçerli ve güvenilir bir ölçek elde edebilmek için testin geliştirilmesi sırasında;

- Mevcut literatür taranmış ve test literatürle desteklenmiştir.
- Geliştirilen test, iki konu alanı uzmanının görüşleri doğrultusunda yeniden düzenlenmiş ve son şekli verilmiştir.

Geliştirilen test iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sonsuz küme kavramı ile ilgili 2 tane ikinci bölümde ise sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili 5 tane açık uçlu soru bulunmaktadır. Geliştirilen bu ölçek Lise-3, İlköğretim Matematik Öğretmenliği-2 ve İlköğretim Matematik Öğretmenliği-4,

seviyelerinden 20'şer olmak üzere toplam 60 öğrenciye uygulanarak veri elde edilmiştir. Lise öğrencileri, Trabzon ilinde görev yapan bir

matematik öğretmenin görüşleri doğrultusunda düşük, orta ve yüksek matematik başarısına sahip öğrencilerden seçilmiştir. Üniversite öğrencileri ise ilköğretim matematik

	Cantor		Kabul Edilebilir (Basit Tanım)		Örnek Vererek Açıklama		Kabul Edilemez	
	f	%	f	%	f	%	f	%
Lise-3	-	0	2	10	5	25	13	65
Üniver-2	-	0	5	25	6	30	9	45
Üniver-4	-	0	6	30	5	25	9	45
Toplam	-	0	13	21.7	18	26.7	31	51.6

öğretmenliği bölümünden rasgele seçilmiştir.

Elde edilen veriler kategorilere ayrılarak analiz edilmiştir. Sonsuz kümelerle ilgili olarak geliştirilen testten elde edilen cevaplar kategorilere ayrılırken;

- Birinci bölüm kategorileri uzman görüşleri doğrultusunda,
- İkinci bölüm kategorileri literatür desteği ile belirlenmiştir.

3. BULGULAR

Öğrencilerden elde edilen bulgular genel olarak 2 başlık altında incelenecektir:

1. Sonsuz Küme Kavramı ve Sonsuz Kümeleri Tanıma.
2. Sonsuz Kümeleri Karşılaştırma.

3.1. Sonsuz Küme Kavramı ve Sonsuz Kümeleri Tanıma

Testte yer alan soruların ilk ikisi öğrencilerin genel olarak sonsuz küme hakkındaki mevcut bilgilerini ortaya koymaya amaçlamıştır.

SORU.1

Sonsuz küme kavramını tanımlayıp örneklerle açıklayınız?

Bu aşamada öğrencilerden sonsuz kümeyi **Cantor'un** tanımıyla "Bir alt kümesi ile aralarında birebir eşleme yapılabilen kümedir" şeklinde tanımlamaları beklenirken; öğrencilerin bu tanım yerine sonsuz kümeler için çok daha basit bir tanım olan "Sonu olmayan kümelerdir" tanımını yapmaları da kabul edilebilir bir cevap olarak düşünülmüştür.

Bu soru için öğrencilerden elde edilen cevaplar aşağıdaki kategoriler yardımıyla incelenmiştir.

1. **Cantor** : Bir alt kümesi ile aralarında birebir eşleme yapılabilen kümelerdir.

2. **Kabul Edilebilir Tanım**: Sonlu olmayan kümelerdir şeklindeki açıklamalar.
3. **Örnek Vererek Açıklama**: Öğrencilerin bildikleri sonsuz kümelerden yararlanarak sonsuz kümeleri açıklamaya çalışmaları.
4. **Kabul Edilemez**: Öğrencilerin yaptıkları tanımların matematiksel olarak bir geçerliliğinin olmaması ya da sorunun boş bırakılması.

Öğrencilerden elde edilen cevapların kategorilenmesi sonucunda aşağıdaki veriler elde edilmiştir.

Tablo 1. Öğrencilerin 1. soruya verdikleri cevapların yüzdesi

Tabloda da görüldüğü gibi öğrencilerin % 51.6'sı sonsuz kümeyi tanımlayamazken, sonsuz kümelerde bir çığır açan Cantor'un tanımı ise hiçbir öğrenci tarafından ifade edilememiştir. Bu durum Lise öğrencileri için normal sayılabilecekken soyut matematik dersi kapsamında bu konuları gören üniversite öğrencilerinin sonsuz küme için uygun tanımlar yapamamaları üzerinde düşünmeyi gerektirmektedir. Öğrenciler yukarıda tabloda verilen kategoriler içerisinde genel olarak aşağıdaki gibi tanımlar yapmışlardır.

Kabul Edilebilir Öğrenci tanımları:

"Sonu olmayan kümeye sonsuz küme denir."

"Sınırsız sayıda elemanı olan küme."

"Eleman sayısı sonsuz olan kümedir."

Örnek Vererek Açıklama:

"{0,1,2,3,4,.....} gibi kümelerdir."

"Örneğin doğal sayılar kümesi"

"R sayılar gibi kümelerdir."

"Örneğin 1' den başlayıp ardışık olarak devam eden tek sayılar kümesi."

Kabul Edilemez:

"Başlangıcı belli olup ta sonu hiç belli olmayan kümelerdir."

Bu cevap kabul edilemez çünkü öğrenciler sonsuz kümeyi; alttan sınırlı fakat üstten sınırlı olmayan kümeler olarak kavramsallaştırmaktadırlar. Fakat tamsayılar kümesi sonsuz bir kümedir ve alttan ya da üstten sınırlı değildir.

"Aklımıza gelebilecek kümelerin hepsini kapsayan kümedir"

"Bir kümenin elemanları sayılabiliyorsa o küme sonlu kümedir. Sayılamıyorsa sonsuz kümedir."

Bu tanımda öğrenciler sayılabilirlik ile sonsuzluk kavramlarını karıştırmakta ve sayılabilir sonsuz kümelerinde var olabileceğini düşünmemektedirler.

2. SORU:

Aşağıdaki kümelerin hangileri sonlu hangileri sonsuz elemana sahiptir. Karşılarına yazınız.

- {Bugüne kadar dünya üzerinde yaşamış tüm insanlar}
- {Bugüne kadar söylenmiş olan tüm şarkılar}
- {2 ile bölünebilen sayılar}
- {3234 ile bölünebilen sayılar}
- {Karadeniz'deki suyun doldurulabileceği bardakların sayısı}
- {1 mm uzunluğundaki doğru parçasını oluşturan noktalar}

Yukarıda da görüldüğü gibi öğrencilere örnek sonlu ve sonsuz kümeler verilerek bu kümelerin hangilerinin sonlu hangilerinin sonsuz olduklarını belirlemeleri istenmiştir. Üniversite öğrencilerinin tamamı bu kümeleri rahatlıkla tanıyabilirken Lise-3 öğrencilerinden 5 tanesi kümeleri belirlemede hata yapmıştır. Bu öğrenciler genel olarak aşağıdaki maddelerde hata yapmışlardır.

{Bugüne kadar dünya üzerinde yaşamış tüm insanlar}

2 öğrenci bugüne kadar dünya üzerinde yaşamış olan insan sayısının sonsuz olduğunu belirtmiştir.

{Bugüne kadar söylenmiş olan tüm şarkılar}

Yukarıdaki soruda hata yapan aynı iki öğrenci bu soruya 'Sonsuz' cevabını vermiştir.

{1 mm uzunluğundaki doğru parçasını oluşturan noktalar}

3 öğrenci de 1mm uzunluğundaki doğru parçasını oluşturan noktaların kümesinin sonlu olduğunu belirtmiştir.

3.2. Sonsuz Kümelerin Karşılaştırılması

Öğrencilerin sonsuz kümeleri karşılaştırırken kullandıkları metotlar aşağıdaki kategorilere ayrılmıştır.

Tek Sonsuz: Eleman sayısı sonsuz olan tüm kümeler eleman sayısı yönünden eşittir ($\infty = \infty$). Bu yöntem sonsuz kümelerin karşılaştırılması için uygun olmayan bir yöntemdir.

Eksik Elemanları Belirleme: Verilen kümelerle bakarak kümelere birinde olan ancak diğerinde olmayan elemanları tespit etme ve bu sayede eleman sayıları arasında bir karşılaştırma yapma. Örneğin; $N=\{0,1,2,3,4,5,\dots\}$ ve $S=\{3,4,5,\dots\}$ kümeleri verildiğinde S kümesinde N kümesinde bulunan 0,1,2 elemanları olmadığından N'nin eleman sayısının S'den fazla olduğunu belirtme. Sonlu kümeler için geçerli olan bu karşılaştırma yöntemi sonsuz kümeler için geçerli bir yöntem değildir.

Kapsama: Eksik elemanları belirleme yöntemine benzeyen bu yöntem, öğrencilerin, kümelere birinin diğerini kapsadığını bu nedenle kapsayan kümenin eleman sayısının daha fazla olduğunu belirtmeleridir. Örneğin; $N=\{0,1,2,3,4,6,\dots\}$ ve $\zeta=\{0,2,4,6,8,\dots\}$ verildiğinde $\zeta \subset N$ olduğundan $s(N) > s(\zeta)$ olduğunu söyleme. Sonlu kümelerin karşılaştırılması için geçerli olan bu yöntem sonsuz kümelerin karşılaştırılması için geçerli değildir.

Birebir Eşleme: Cantor'un kümeler teorisine uygun olarak iki küme arasında birebir eşleme araştırma. Örneğin; $A=\{1,2,3,4,\dots\}$ ve $B=\{4,8,12,16,\dots\}$ kümeleri denktir. Çünkü A kümesinden B kümesine tanımlanan $n \rightarrow 4n$ bağıntısı birebir bir eşlemedir.

Belirlenemez(Bilmiyorum): Sonsuz kümeler arasında karşılaştırma yapılamayacağını belirtme, soruyu boş bırakma veya bilmiyorum şeklindeki ifadeler bu kategoriye dahil edilmiştir.

Bu kategoriler dahilinde öğrencilerden elde edilen veriler aşağıdaki gibidir:

3. SORU:

Aşağıdaki kümeleri eleman sayıları yönünden karşılaştırınız? Ulaştığınız sonucu nedenleri ile birlikte açıklayınız.

$$N=\{0,1,2,3,4,\dots\}$$

$$\zeta=\{0,2,4,6,8,10,\dots\}$$

Tablo 2. Öğrencilerin 3. soruya verdikleri cevapların yüzdesi

	Tek Sonsuz		Eksik elemanları belirleme		Kapsama		Birebir Eşleme		Belirlenemez	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
L-3	2	10	5	25	10	50	-	0	3	15
Ü-2	8	40	2	10	6	30	-	0	4	20
Ü-4	9	45	1	5	5	25	-	0	5	25
TPLM	19	31.7	8	13.3	21	35		0	12	20

Tabloda da görüldüğü gibi 60 öğrencinin hiç biri Cantor'un kümeler teorisine uygun bir karşılaştırma yapamamıştır. Lise-3 öğrencileri doğal sayılar kümesi ile çift sayılar kümesini karşılaştırmak için en çok 'Kapsama' yöntemini kullanırken, Üniversite-2 ve 4 öğrencileri ise en çok 'Tek Sonsuzluk' yöntemini kullanmışlardır. Genel ortalamada ise Kapsama yönteminin en çok kullanılan yöntem olduğu görülmektedir.

Bu soruyla ilgili Öğrencilerden elde edilen nitel verilerden bazıları da aşağıdaki gibidir.

Tek Sonsuz:

'İkisinin de sonsuz tane elemanı var o halde eleman sayıları eşittir.'

'A ve B kümeleri sonsuz elemana sahip olduklarından eleman sayıları eşittir.'

Kural: Eleman sayıları önemli olmaksızın her iki küme de sonsuz elemanlı ise eleman sayıları eşittir.'

' $S(N) = \infty$

$S(\mathcal{C}) = \infty$ olduğundan $s(N) = s(\mathcal{C})$ dir.'

Eksik Elemanları Belirleme:

' \mathcal{C} 'de 1,3,5 gibi tek sayılar yok, o halde N'nin eleman sayısı \mathcal{C} 'den daha fazladır.'

'Tek sayılar \mathcal{C} kümesinde olmadığından N'nin eleman sayısı daha fazladır.'

Kapsama:

'N kümesi daha fazla. Çünkü N bütün doğal sayıları (çiftlerde dahil) \mathcal{C} ise sadece çift sayıları kapsıyor.'

' $\mathcal{C} \subset N$ olduğundan $s(N) > s(\mathcal{C})$ dir.'

'N kümesi \mathcal{C} 'yi kapsadığından N'in eleman sayısı daha fazladır.'

Belirlenemez:

'Her ikisi de sonsuz elemanlı olduğundan eleman sayıları hakkında bir yorum yapılamaz.'

'Sonsuz kümeler hakkında kıyaslama yapılamaz.'

'Sonsuz kavramı ile ilgili büyüklük düşünemiyorum'

4. SORU:

Aşağıda doğal sayılar kümesini görmekteyiz.

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Bu küme içerisinde 2'den büyük sayıları alarak yeni bir küme oluşturunuz.

$$S = \{$$

Oluşturmuş olduğunuz bu S kümesi ile N kümesini karşılaştırınız. Hangi kümenin eleman sayısı daha fazladır. Nedenleri ile birlikte aşağıya açıklayınız.

Tablo 3. Öğrencilerin 4. soruya verdikleri cevapların yüzdesi

	Tek Sonsuz		Eksik Elemanları Belirleme		Kapsama		Birebir Eşleme		Belirlenemez	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
L-3	3	15	12	60	2	10	-	0	3	15
Ü-2	8	40	6	30	2	10	-	0	4	20
Ü-4	8	40	6	30	3	15	-	0	3	15
TPLM	19	31.7	24	40	7	11.7	-	0	10	16.6

Tabloda da görüldüğü gibi bu soruda, Lise-3 öğrencilerinin en çok kullandığı yöntem 'Eksik Elemanları Belirle' yöntemi (%60) iken Üniversite-2 ve Üniversite-4 öğrencilerinin en çok kullandıkları yöntem bir önceki soruda olduğu gibi, yine 'Tek Sonsuz' yöntemidir. Genelde ise öğrencilerin bu soru için en çok kullandıkları yöntem 'Eksik Elemanları Belirleme' yöntemidir. Görüldüğü gibi öğrencilerin hiç biri bu soru da da 'Birebir Eşleme' yöntemini kullanmamışlardır.

Bu soruyla ilgili öğrencilerden elde edilen nitel verilerden bazıları da aşağıdaki gibidir.

Tek Sonsuz:

'Her ikisinin de eleman sayıları sonsuz olduğundan eşittir. Her nereden başlanırsa başlansın sonsuz sonsuzdur.'

'Görünürde N nin eleman sayısı S'den fazlaymış gibi gözüküyor. Ancak bunların üstten sınırları olmadığı için ikisinin de eleman sayıları sonsuzdur. Yani eşittir.'

'Bütün sonsuz kümelerin eleman sayıları eşit olduğunda $s(S) = s(N)$ dir.'

Eksik Elemanları Belirleme:

'N kümesinin eleman sayısı daha fazladır. Çünkü N'da fazladan {0,1,2} elemanları vardır.'

'0,1,2 elemanları S de yok N'nin eleman sayısı S'den 3 tane daha fazladır.'

'Her ikisi de sonsuza gider. Fakat S kümesi daima 3 eleman eksik gittiği için $s(N) > s(S)$ dir.'

'N'nin eleman sayısı daha fazladır. Çünkü 0,1,2 S'nin elemanı değildir.'

'N'nin eleman sayısı daha fazladır. Çünkü S kümesi 2'den büyük sayılardan oluşmuştur.'

'N'nin eleman sayısı daha fazladır. Çünkü onda 0,1,2 elemanları da vardır.'

Kapsama:

' $s(N) > s(S)$ dir. Çünkü; $\{0,1,2\} \cup \{3,4,5,\dots\} = \{0,1,2,3,4,5,\dots\}$ dir. $S(\{0,1,2\} + s\{3,4,5,6,\dots\}) = s(N)$ dir. $3 + s(S) = s(N)$ dir.'

'İki kümede sonsuza gidiyor. Ama aynı sayıdan başlamıyorlar. $S \subset N$ olduğundan S nin eleman sayısı daha fazla.'

'Sonsuz kümelerin tüm alt kümeleri de sonsuz olduğundan eleman sayıları eşittir.'

Belirlenemez:

'Eleman sayıları eşit değildir. Ancak nedenini bilmiyorum.'

'İkisi de sonsuz sayıda elemana sahip olduğu için bir yorum yapılamaz.'

5. SORU

Aşağıda iki küme görmektesiniz.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

$$B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$$

Sizce bu kümelerden hangisi daha fazla elemana sahiptir. Cevabınızı aşağıya nedenleri ile birlikte yazınız.

Tablo 4. Öğrencilerin 5. soruya verdikleri cevapların yüzdesi

	Tek Sonsuz		Eksik Elemanları Belirleme		Kapsama		Birebir Eşleme		Belirlenemez	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
L-3	2	10	8	40	6	30	-	0	4	20
Ü-2	6	30	3	15	3	15	1	5	7	35
Ü-4	10	50	3	15	3	15	2	10	2	10
TPLM	18	30	14	23.3	12	20	3	5	13	21.7

Görüldüğü gibi Lise-3 öğrencileri bu soruda en çok 'Eksik Elemanları Belirleme' yöntemini kullanırken, üniversite-2 öğrencileri daha çok bu kümeler arasında kıyaslama yapılamayacağını belirtmişler, Üniversite-4 öğrencileri ise daha önceki sorularda olduğu gibi en çok 'Tek Sonsuz' yöntemini kullanmışlardır. Genelde ise en sık kullanılan yöntem 'Tek Sonsuz' olmuştur. Bu soruda dikkat çeken en önemli nokta ise Üniversite2 ve 4 öğrencilerinden bazıları ilk kez Cantor'un kümeler teorisine uygun, mantıklı olarak Birebir Eşleme yöntemini kullanmaya başlamışları olmuştur.

Bu soruyla ilgili öğrencilerden elde edilen nitel verilerden bazıları da aşağıdaki gibidir.

Tek Sonsuz:

' $S(A)=s(B)$ olur. Çünkü hem A hem de B kümesi sonsuz elemanlıdır. Bu yüzden eleman sayıları eşittir'.

'Diğer cevaplarda da söylediğim gibi $\infty = \infty$ dir.'

'A'nın eleman sayısı daha fazlaymiş gibi gözüküyor ancak şöyle bir düşündüğümüzde

ikisinin de eleman sayısı ∞ olduğunda eleman sayıları eşittir denilebilir.'

Eksik Elemanları Belirleme:

'A'nın eleman sayısı daha fazladır. B kümesinde bulunan elemanlar A kümesinde de var ve ayrıyetten A kümesinde fazlalık olarak 2,3,5,6 gibi elemanlar da var.'

'Bence B kümesinin eleman sayısı daha azdır. Çünkü her iki eleman arasında A'da olup B'de olmayan 3 eleman vardır.'

Kapsama:

' $S(A) > s(B)$ dir. Çünkü B'nin elemanları A'nın içinde de var.'

'A B'yi kapsadığından dolayı (Çünkü B'nin tüm elemanları A'da vardır) A'nın eleman sayısı daha fazladır.'

'A kümesi daha genel bir ifade B kümesi ise daha daraltılmış bir ifade olduğundan A kümesinin eleman sayısı daha fazladır.'

'A'nın eleman sayısı daha fazladır. Çünkü B kümesi A kümesinin alt kümesidir.'

'A kümesinin elemanları B kümesinin elemanlarından fazladır. Çünkü A kümesi B kümesini kapsamaktadır.'

' $S(A) > s(B)$ Çünkü $A \subset B$ dir.'

Birebir Eşleme:

'Birebir eşleme yapıldığında A'daki her elemana B'de karşılık gelen bir eleman olduğundan eleman sayıları aynıdır.'

'Eleman sayıları eşittir. Çünkü birebir eşleme yaptığımızda her sayıya karşı o sayının karesi geliyor.'

'A'daki her elemanın karşılığında B'de o elemanın karesi bulunabilmektedir. Bu nedenle eleman sayıları eşittir.'

Belirlenemez kısmında daha önceki cevaplara benzer cevaplar alındığından bu kısım bundan sonra yazılmayacaktır.

6. SORU

Aşağıda ise yine iki küme görmektesiniz. Bu kümeleri eleman sayıları yönünden karşılaştırarak cevabınızı nedenleri ile birlikte belirtiniz.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

$$B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, \dots\}$$

Tablo 5. Öğrencilerin 6. soruya verdikleri cevapların yüzdesi

	Tek Sonsuz		Eksik Elemanları Belirleme		Kapsama		Birebir Eşleme		Belirlenemez	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
L-3	7	35	2	10	4	20	-	0	7	35
Ü-2	10	50	-	0	-	0	4	20	6	30
Ü-4	9	45	-	0	-	0	7	35	4	20
TPLM	26	43.3	2	3.3	4	6.7	13	21.7	15	25

Tabloda da görüldüğü gibi Lise-3 öğrencileri ilk kez 'Tek Sonsuz' yöntemini bu kadar çok kullanmışlardır. Üniversite-2 ve üniversite-4 öğrencileri daha önceki soruların bir kısmında da olduğu gibi en çok 'Tek Sonsuz' yöntemini kullanmışlardır ve 'Tek sonsuz' yöntemi de genelde ilk kez bu kadar sık kullanılmıştır. Cevaplarda göze çarpan en önemli nokta ise 'Birebir Eşleme Yöntemi'ndeki artış olmuştur. Zaten bu sorunun sorulma amacı da öğrencileri bir önceki sorudan yola çıkartarak birebir eşleme mantığına doğru sevk etmek ve bilişsel olarak yetersizliklerini görmelerini sağlamaktır. Çünkü bir önceki sorudaki $\{1,4,9,16,\dots\}$ kümesi ile bu sorudaki $\{1^2,2^2,3^2,4^2,\dots\}$ kümesi aynı kümenin farklı yazılı şekilleridir. Ancak bu soruda birebir eşleme çok daha rahat bir şekilde görülmektedir.

Bu soruyla ilgili öğrencilerden elde edilen nitel verilerden bazıları da aşağıdaki gibidir.

Bu bölümdeki öğrenci cevapları daha önceki bölümler ile paralellik gösterdiğinden sadece birebir eşleme ile ilgili öğrenci cevapları sunulacaktır.

Birebir Eşleme:

'A'daki her elemanın karşılığında B'de o elemanın karesi bulunabilmektedir. Bu nedenle eleman sayıları eşittir.'

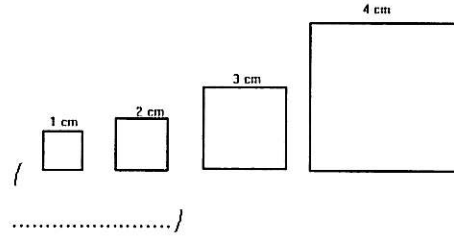
'A kümesinden B kümesine $a \rightarrow a^2$ şeklinde bir fonksiyon tanımlarsak eleman sayıları eşit olur.'

'A $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ve B $\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots\}$

kümeleri arasında tanımlanan fonksiyon 1-1 ve örten olacağından eleman sayıları eşittir.'

'A kümesinin elemanları sayma sayılarının kümesidir. B kümesinin elemanları ise bu sayıların karelerinin elemanlarıdır. O halde eleman sayıları eşittir.'

7. SORU



Yukarıda kenar uzunlukları 1'den başlayıp 1'er cm olarak büyüyen kareler görmektesiniz. Bu kümenin elemanlarının kenar uzunluklarını A kümesi, çevrelerini gösteren kümeyi de B ile gösterelim.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$$B = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$$

A ile B kümesini eleman sayıları yönünden karşılaştırdık. Ulaştığımız sonucu nedenleri ile birlikte aşağıya yazınız.

Bu soruda amaç, sayısal olarak verilen sonsuz kümeler arasında birebir eşlemeyi belirleyemeyen öğrencilerin karelerin kenarı ile çevresi arasında bir ilişki belirleyerek bu ilişkiyi sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında kullanılmasını sağlamaktır.

Tablo 6. Öğrencilerin 7. soruya verdikleri cevapların yüzdesi

	Tek Sonsuz		Eksik Elemanları Belirleme		Kapsama		Birebir Eşleme		Belirlenemez (Bilmiyorum)	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
L-S	3	15	12	60	2	10	-	0	3	15
Ü-2	9	45	5	25	2	10	-	0	4	20
Ü-4	8	40	2	10	2	10	5	25	3	15
TPLM	20	33.3	19	31.7	6	10	5	8.3	10	16.7

Bu soru ile öğrencilerden sorunun geometrik özelliği nedeniyle birebir eşlemeye doğru yönelim beklenirken tablodan da görüldüğü gibi Üniversite-2 öğrencilerinin hiç biri bu yönetime cevap vermemişler, Üniversite - 4 öğrencilerinde ise bir önceki soruya göre 'Birebir Eşleme' yöntemini kullanmada bir azalma olmuştur. Bu soruda da Üniversite-2 ve 4 öğrencileri en çok 'Tek Sonsuz' yöntemini kullanırken, Lise-3 öğrencileri ise 'Eksik

Elemanları Belirleme' yöntemini kullanmışlardır.

Bu soruyla ilgili öğrencilerden 'Birebir Eşleme' yöntemi ile ilgili elde edilen nitel veriler aşağıdaki gibidir:

'Kenar uzunluğu ile çevre arasında; A kümesinin elemanlarının dört katı B kümesinin elemanlarına eşleniyor. Bu kümeler birebir eşlendiğinden açıkta eleman kalmayacaktır. Bunlar denktir. O halde eleman sayıları eşittir.'

'Karenin çevresini bulmak istesek A kümesinin elemanını 4 ile çarpabiliriz ve B kümesinin elemanının buluruz. A kümesinin her elemanı için B kümesinde bir çevre bulacağımız için bunların eleman sayıları eşittir.'

'B kümesinin her bir elemanını çevre=4. kenar olarak tanımlayabiliriz. Bir kenara bir çevre geleceği için eleman sayıları eşittir.'

Testin ikinci bölümünü oluşturan bu 5 soruyu temsilen genel bir tablo aşağıda sunulmuştur:

Tablo 7. Öğrencilerin testin ikinci bölümündeki 5 soruya verdikleri cevapların genel yüzdeleri

	Tek Sonsuz		Eksik Elemanları Belirleme		Kapsama		Birebir Eşleme		Belirlenemez	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
L-3	17	17	41	41	22	22	0	0	20	20
Ü-2	41	41	16	16	13	13	5	5	25	25
Ü-4	44	44	12	12	13	13	14	14	17	17
TPLM	102	34	69	23	48	16	19	6.3	62	20.7

Tablo incelendiğinde:

- ✓ Lise-3 öğrencileri en sık 'Eksik Elemanları Belirleme' Yöntemini kullanmaktadır.
- ✓ Üniversite-2 ve 4 öğrencileri en sık 'Tek Sonsuz' yöntemini kullanmaktadır.
- ✓ Genel olarak tüm öğrenciler en sık 'Tek Sonsuz' yöntemini kullanmaktadır.
- ✓ Matematiksel geçerliği olan 'Birebir Eşleme' yöntemi öğrenciler tarafından en az kullanılan yöntemdir.
- ✓ Öğrenciler sonsuz kümeyi tanıyabilmekte ancak tanımlayamamaktadırlar.
- ✓ Sınıf derecesi arttıkça 'Birebir Eşleme' yöntemini kullanma yüzdesi de

artmakta ancak yine de çok yetersiz bir seviyede kalmaktadır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER:

Elde edilen veriler göz önüne alındığında; öğrencilerin sezgisel olarak sonlu kümeleri sonsuz kümelerden ayırt edebildikleri ancak sonsuz kümeler için matematiksel bir tanımlı yapamadıkları tespit edilmiştir. Lise-3 öğrencileri için normal olarak gözükebilecek bu durum, hiçte beklenmedik bir şekilde soyut matematik dersi almış öğrencilerde de görülmektedir. İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümü öğrencilerinin hiçbiri sonsuz kümeler için beklenen Cantor'un tanımını yapamamıştır. Tanımlar kavramların yansıtıcısı olarak düşünüldüğünde, öğrencilerde sonsuz küme kavramının kavramsal bir formda gelişmediği, sahip oldukları sonsuz küme kavramının sezgisel bir yapıya sahip olduğu görülmektedir. Matematikğin önemli bir kısmının kümeler teorisi üzerinde kurulduğu göz önüne alındığında, öğrencilerin bu anlamda sergilemiş oldukları performans tatmin edici değildir. Özellikle bu konuları derslerinde işleyen öğretim elemanlarının Cantor'un kümeler teorisine vurgu yapmaları gerekmektedir.

Öğrenciler, sonsuz kümeleri eleman yönünden karşılaştırmada, sonlu kümeler için geçerli olan ancak sonsuz kümeler için geçerli olmayan 'Eksik Elemanları Belirleme' ve 'Kapsama' yöntemlerini çok sıkça kullanmışlardır. Bu ise öğrencilerin sonlu kümelerden sonsuz kümelere geçişte sorunlar yaşadıklarını ve bilişsel bir dengeyi kuramadıklarını göstermektedir. Öğretmenler ve öğretim elemanları bu dengesizliği çok iyi kavrayıp kullanmalıdırlar. Çünkü anlamlı öğrenmeler, dengesizlikten dengeye geçişte oluşmaktadır.

'Tek Sonsuz' yöntemi öğrenciler tarafından en çok kullanılan yöntem olmuştur. Daha önce dünyada yapılan çalışmalarda öğrencilerin bu yöntemi sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında kullandıkları tespit edilmişti. Ancak bu çalışmaların hiçbirinde 'Tek Sonsuz' yöntemi öğrenciler tarafından ülkemizdeki kadar sık kullanılmamıştı. Bu yöntemin karşılaştırma yöntemleri içerisinde en sezgisel olanı olduğu göz önüne alındığından, öğrencilerin büyük bir kısmının sonsuz kümeler hakkındaki bilgilerinin çok sezgisel olduğu ve hiçbir matematiksel gerçekliğe dayanmadığı görülür. Tek sonsuz yöntemi doğrudan sonsuz kavramını bir sayıya atfetmek ile ortaya çıkmaktadır. Bu ise önemli bir kavram yanılgısıdır. Gerekirse kavramsal değişim metinleri de kullanılarak

öğrencilerde sonsuz kavramının anlamlı bir şekilde gelişmesi sağlanmalıdır.

Cantor'un kümeler teorisine göre sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında kullanılması gereken 'Birebir Eşleme' ise öğrenciler tarafından en az kullanılan yöntem olmuştur.

Ayrıca, nitel veriler göz önüne alındığında, öğrencilerin sayılabilirlik-sayılamazlık ve sonsuzluk kavramlarını da tam olarak geliştiremediklerini ve bu kavramları birbirlerinin yerine kullanmaya yöneldikleri belirlenmiştir.

Sınıf seviyesi yükseldikçe öğrencilerde sonsuz küme kavramının geliştiği görülmesine rağmen bu gelişme çok alt düzeylerde kalmakta, öğrencilerin bu kavramı kullanarak sonsuz kümeleri karşılaştıramadıkları gözlenmektedir.

Öğrencilerin matematiğin temel konularından biri olan kümeler teorisi ile ilgili kavram yanlışlarına sahip oldukları görülmektedir. Bu yanlışların ortadan kaldırılabilmesi için üniversite düzeyinde ayrı bir ders olarak kümeler teorisine yer verilmelidir. Ayrıca insanların hayatları boyunca üzerinde en çok düşündükleri kavramlardan biri olan 'Sonsuzluk' kavramının diğer bir çok ülkede olduğu gibi müfredata adapte edilmelidir.

5. KAYNAKLAR

1. Lilbert, J. K, Watts D. M. (1983). Concepts, Misconcepts and Alternative Conceptions: Changing Perspectives in Science Education. *Studies in Science Education*, 10: [61-98].
2. Tsamir, P. (1999). The Transition, from Comparison of Finite to the Comparison of Infinite Sets: Teaching Prospective Teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 38: [209-234].
3. Baki, A. Güven B. & Karataş İ. (2001). Dinamik Geometri Programı Cabri ile Yapısal Öğrenme Ortamlarının Tasarımı, I. Uluslararası Eğitim Teknolojileri Sempozyumu ve Fuarı, Kasım 2001, Sakarya.
4. Baki, A. ve Bell, A. (1997). Ortaöğretim Matematik Öğretimi. YÖK/Dünya Bankası Milli Eğitimi Geliştirme Projesi, Ankara.
5. Tsamir, P. Tommy D. (2002). Comparing Infinite Sets – A Process of Abstraction: The Case of Ben. *Journal of Mathematical Behavior*, 21: [1-23].
6. Tirosh, D. (1999). Finite and Infinite Sets: Definitions and Intuitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30 (3): [341-349].
7. Tsamir, P. (2002). Intuitive Structures: The Case of Comparisons of Infinite Sets. *European Research in Mathematics Education II (CARME study)*, [112-121].
8. Tsamir, P. (2001). When 'the Same' is not Perceived as Such: The Case of Infinite Sets, *Educational Studies in Mathematics*, 48: [289-307].
9. Tall, D. (2001). A Child Thinking About Infinity. *Journal of Mathematical Behavior*, 20: [7-19].
10. Lipschutz, S. (1964). Set Theory and Related Topics. Schaum Publishing. New York, 1964.