



## MÜNFERİT KUVVETLERE MARUZ PLAKLARDA KALINLIK TAYİNİ

*(A PRACTICAL METHOD OF DETERMINING THICKNESS  
OF PLATES SUBJECTED TO INDIVIDUAL END FORCES)*

Emin GÜLLÜ\*, Yaşar PALA\*

### ÖZET/ABSTRACT

Bu çalışmada, dört ucundan ve orta noktasından kuvvetlere maruz bırakılan bir plak halinde kalınlık hesabına dair analitik bir formül geliştirilmektedir. Metod, federli plak halini de ihtiva edecek şekilde genişletilmektedir. Sonuçlar sadece pres gövdelerinin kalınlık tayini için değil, fakat aynı zamanda daha geniş bir kullanım alanı için de geçerlidir.

*In this study, an analytical formula is developed for a plate subjected to four forces at its corners and a force at its middle point. This formula is extended so as to include the case of corrugated plates. The results are valid not only for the thickness determination of presses, but also for a wider range of application.*

### ANAHTAR KELİMELER/KEY WORDS

Münferit kuvvet, Feder, Plak, Kalınlık  
*Force, Colon, Plate, Thickness*

---

\* Uludağ Üniversitesi, Müh-Mim. Fakültesi, Makine Bölümü, Görükle, 16059, BURSA

## 1. GİRİŞ

Çeşitli kuvvet ve momentlere maruz plakların mukavemet yönünden davranışlarının incelenmesi üzerine çok sayıda çalışma mevcuttur. Bilhassa moment etkisiyle basit eğilmeye zorlanan plakların yerdeğiştirme ve iç gerilme dağılımı ile ilgili etkin formüller geliştirilmiştir. (Timoshenko ve Goodier, 1954). Bununla beraber, dikdörtgen şekilli bir plağın, mesela bir presin koç tablası halinde olduğu gibi, uçlarından kuvvetlere maruz bırakılması durumunda iç gerilme ve daha da önemlisi pratik açıdan ehemmiyeti olan kalınlık hesabına dair teorik bir formül mevcut değildir. Bu konudaki çalışmaların çoğu da hesaplamalı teknikler (computational techniques) üzerine kuruludur.

Bu makale pratikte kullanılabilecek böyle bir formülün geliştirilmesi amacına yöneliktir. İlave olarak, pratikte kullanılan plaklarda eğilmeye karşı mukavemetin artırılması maksadıyla tek taraflı feder kullanıldığı bilindiğinden çıkarılan formülün daha geniş bir aralıkta kullanımını sağlayacak ek hesaplamalar da yapılmaktadır.

## 2. ÖN BİLGİ: PLAKLARIN BASİT EĞİLMESİ

Sadece tek ekseninde  $M_x$  momenti ile eğilmeye zorlanan bir plak halinde oluşan gerilme dağılımının basit kirişlerin eğilmesindeki dağılımın aynı olduğu düşünülebilir. Bu halde oluşan gerilme  $\sigma_x = E z / R$  ile verilir. Eğrilik yarıçapının  $1 / R = M_x / E I_y = 12 M_x / E h^3$  şeklinde olduğu hatırlanarak

$$\sigma_x = \frac{12 M_x}{h^3} z \quad (1)$$

bulunur.  $y$  ekseninde etrafında bir  $M_y$  momenti uygulanmış olsa idi, o takdirde

$$\sigma_x = \frac{12 M_y}{h^3} z \quad (2)$$

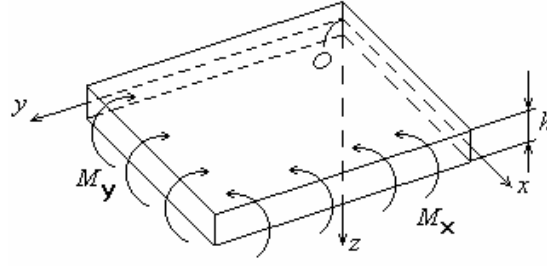
bulunurdu. Şimdi Şekil 1'de gösterildiği gibi, her iki momentin birlikte uygulandığını kabul edip süperpozisyon prensibini kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_x} &= \frac{12}{E h^3} (M_x - \nu M_y) \\ \frac{1}{R_y} &= \frac{12}{E h^3} (M_y - \nu M_x) \end{aligned} \quad (3)$$

elde ederiz (Timoshenko ve Goodier, 1954).

Bu formüllerdeki  $1/R_x$  ve  $1/R_y$ , sırasıyla  $z_x$  ve  $z_y$  koordinat düzlemine paralel düzlemlerdeki eğrilikler olup,  $\nu$  poisson oranıdır. Denklem 3 den  $M_x$  ve  $M_y$  çekilerek

$$M_x = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{R_x} + \nu \frac{1}{R_y} \right) \quad (4)$$



Şekil 1. Plakın çift eksende eğilmesi

$$M_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{R_y} + \nu \frac{1}{R_x} \right) \quad (5)$$

bulunur (Timoshenko ve Goodier, 1954). Küçük çökmeler halinde

$$\frac{1}{R_x} \cong -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \frac{1}{R_y} \cong -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (6)$$

yaklaşımı kullanılarak

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

elde edilir. Burada  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  dir. Diğer yandan,  $\sigma_x$  ve  $\sigma_y$  gerilmelerinin

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{R_x} + \frac{\nu}{R_y} \right) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \nu \right) \quad (8)$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{R_y} + \frac{\nu}{R_x} \right) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \nu \right)$$

şeklinde olduğu kolaylıkla gösterilir (Timoshenko ve Goodier, 1954). Denklem 7'den

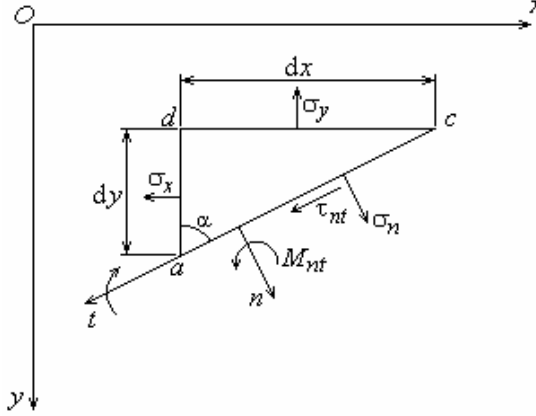
$$\nabla^2 w = -\frac{(M_x + M_y)}{D(1+\nu)} \quad (9)$$

yazılabilir. Bu ise Poisson kısmi diferansiyel denklemdir. Verilen  $M_x$  ve  $M_y$  için Denklem 9'un çözümünden  $w$  çökme miktarı bulunduğundan sonra Denklem 8'den gerilmeler elde edilir.

Şimdi, plakta  $y$  eksenine ile  $\alpha$  açısı yapan bir doğrultudaki gerilmeleri gözönüne alalım. Şekil 2 dikkate alınarak statik denge şartlarından

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha \quad (10)$$

bulunur.



Şekil 2. Plağın herhangi bir kesitindeki gerilme hali

Bileşik yükleme hali için maksimum kayma hipotezini kullanacağız. Bu hipoteze göre akma,  $\tau_{nt}$  nin azami değeri  $\tau_{ak}$  değerine eriştiğinde meydana gelir. Denklem 10'dan  $\tau_{mak}$  için

$$\tau_{mak} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \quad (11)$$

yazıp,  $\sigma_y$  ve  $\sigma_x$ 'in Denklem 1 ve 2'deki ifadelerine müracaat ederek

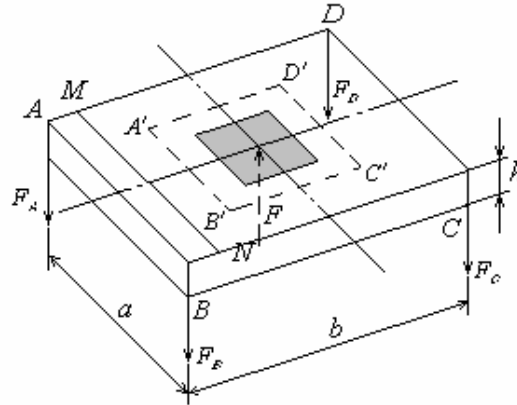
$$\tau_{mak} = \frac{3(M_x - M_y)}{h^2} \quad (12)$$

buluruz. Denklem 11'de  $\sigma_x$  ve  $\sigma_y$ 'nin maksimum değerleri kullanılmıştır.

### 3. UÇLARINDAN DÖRT KUVVETE MARUZ PLAK HALI ( $a \neq b$ )

Şekil 3'deki gibi uçlarından dört  $F_1$  ( $F_1 = F_A = F_B = F_C = F_D$ ) kuvvetinin etkisine maruz bir plak gözönüne alalım. 4  $F_1 = F$  olacak şekilde plak ortasından F kuvveti etkimektedir. Bu haldeki yükleme halinin Şekil 1'deki gibi moment yükleme halinden oldukça farklı olduğu açıktır. Bu durumda Denklem 11 kriterinin doğrudan kullanılma imkanı yoktur. Ancak bu kuvvetlerin, mesela A ve B noktalarına uygulanan kuvvetlerin herhangi bir MN kesitinde oluşturduğu momenti gözönüne alacak.

Olursak, MN boyunca olan bu moment dağılımının AB kesitinden uzaklaştıkça daha da homojenleşeceğini ve giriş ortasında seçilen en büyük momente maruz küçüklikteki A'B'C'D' elemanının A'B' kenarında hemen hemen düzgün dağılıma dönüşeceğini söyleyebiliriz. Diğer yandan plağın orta noktası büyük zorlamaya maruz kaldığından bu nokta gözönüne alınarak kalınlık tayini yapılması gerektiği de açıktır.

Şekil 3. Dikdörtgen plak hali( $a \neq b$ )

A ve B noktalarına etki eden  $F_1$  şiddetli kuvvetlerin orta noktada meydana getirdikleri momentler  $(F/2)(b/2)$  olup, burada A' B' kenarına etki eden birim uzunluk başına düşen moment şiddeti için

$$M_x = \frac{Fb}{4a} \quad (13)$$

elde edilir. Aynı şekilde B ve C noktalarını etkileyen kuvvetlerin B'C' kesitinde meydana getirdikleri birim uzunluk başına moment için

$$M_y = \frac{Fa}{4b} \quad (14)$$

yazabiliriz. A'B'C'D' elemanının yükleme hali bu haliyle Şekil 1'deki yükleme haline benzemektedir. O halde, Denklem 11'i şimdi kullanabiliriz. Denklem 13 ve 14'ü Denklem 11'de yerine koyarak

$$\tau_{mak} = \frac{3F(b^2 - a^2)}{4h^2ab} \quad (15)$$

elde ederiz. Yapının emniyet katsayısı  $s$  olmak üzere,  $\tau_{mak} = \tau_{ak} / s = (0.57 \dots 0.6) \sigma_{ak} / s$  olduğu kabulü altında Denklem 15'ten

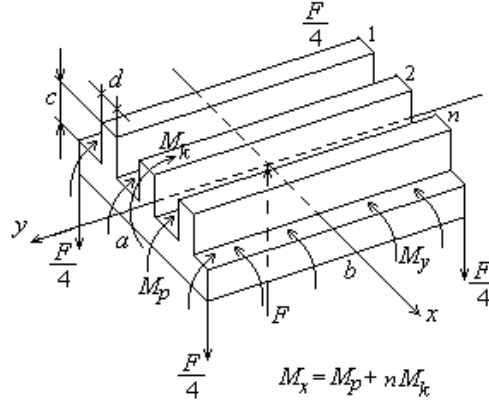
$$h = \sqrt{\frac{3F(b^2 - a^2)s}{4(0.6)\sigma_{ak}(ab)}} \quad (16)$$

elde ederiz.

Denklem 16'nın kullanımına bir örnek olması bakımından  $F = 2.45 \cdot 10^6$  N,  $a, b = 1.1.2 \text{ m}^2$ ,  $s = 1.5$ ,  $\sigma_{ak} = 340 \text{ N/mm}^2$  (St 37 çeliği) alalım. Bu halde  $h = 70.42 \text{ mm}$  elde ederiz. F kuvveti Şekil 3'deki gibi uygulanmaktadır. Bu değer pratikte alınan kalınlığa oldukça yakın bir değerdir.

#### 4. FEDERLİ TABLA (PLAK) HALİ

Tablanın eğilme rijitliğini artırmak amacıyla pratik uygulamalarda çoğu kez feder kullanılır (Şekil 4). Federin sadece y yönünde atıldığını kabul ederek bu hal için kalınlık hesabı yapacağız. n adet feder kullanıldığını düşünelim. Bu taktirde federlerin aldığı momentler ile tablaya gelen moment toplamı, uygulanan toplam  $M_x$  momentine eşit olmalıdır.



Şekil 4. Federli plak hali

$$nM_k + M_p = M_x \quad (17)$$

x eksenini etrafında eğilme halinde her bir federe düşen  $M_k$  momentini

$$\frac{1}{R} = \frac{M_k}{EI_{kx}} \quad (18)$$

eğrilik yarıçapına, bloğa gelen  $M_p$  momentini de

$$\frac{1}{R} = \frac{M_p}{EI_{px}} \quad (19)$$

eğrilik yarıçapına sebep olacaktır. Burada  $I_{ky}$  ve  $I_{py}$  sırasıyla feder ve plağın x eksenine göre olan birim uzunluk başına eylemsizlik momentleridir. Bu iki değer birbirine eşit olduğundan

$$M_k = \frac{I_{kx}}{I_{px}} M_p \quad (20)$$

elde ederiz. Denklem 20'yi Denklem 17'de kullanarak

$$M_p = M_x \frac{I_{kx}}{I_{px} + I_{kx} (n+1)} \quad (21)$$

buluruz.

Şimdi plak için maksimum kayma hipotezini kullanarak

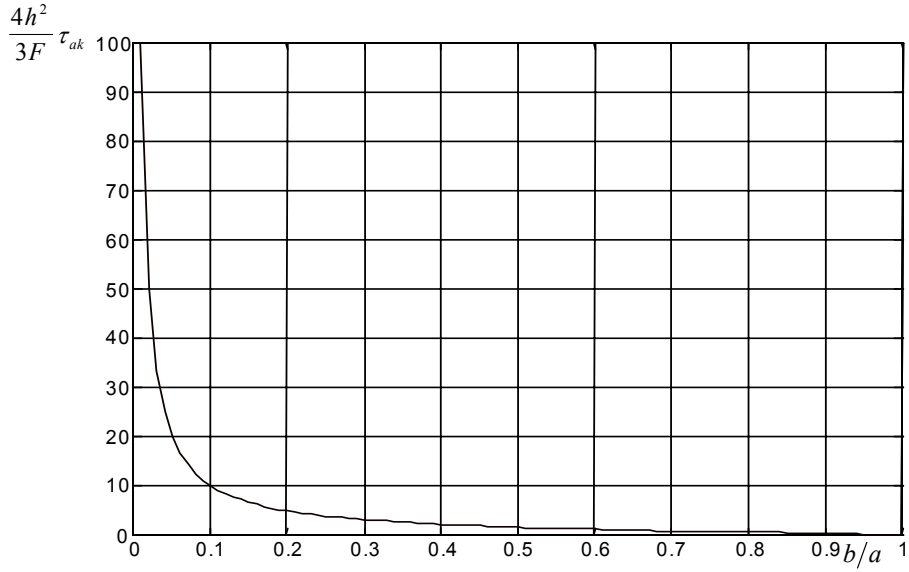
$$\tau_{mak} = \frac{\tau_{ak}}{s} = \frac{3(M_p - M_y)}{h^2} = \frac{3s}{\tau_{ak}} \left[ \frac{Fa}{4a(n+1)(I_{px} + I_{ky})} - \frac{Fa}{4b} \right] \quad (22)$$

ya da,  $I_{px}$  ve  $I_{ky}$ 'in değerleri yazılıp  $h^2$  çekilerek

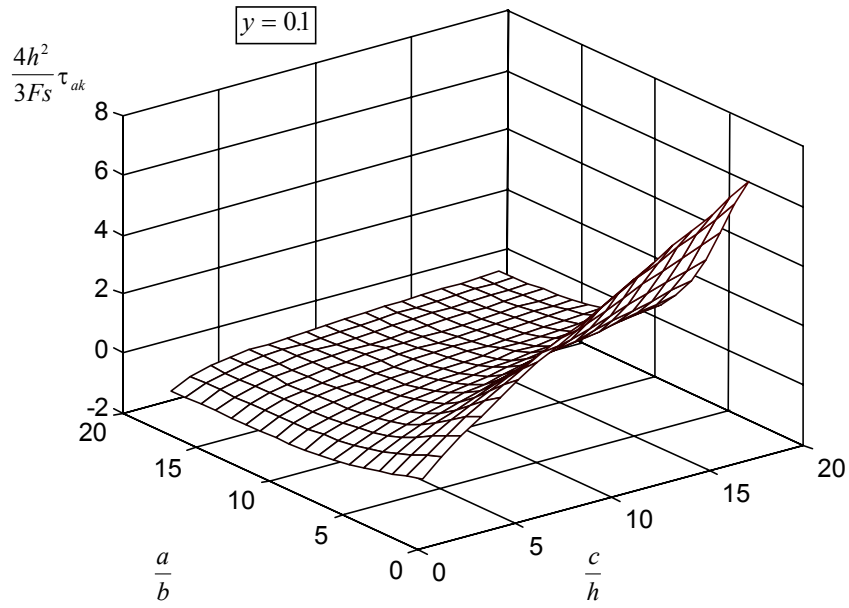
$$h^2 = \frac{3sF}{4\tau_{ak}ab} \left\{ \frac{b^2}{\left[ 1 + \left( \frac{d}{a} \right) \left( \frac{c}{h} \right)^3 \right]} - a^2 \right\} \quad (23)$$

bulunur. Bu ifadede  $c = d = 0$  konulmak suretiyle Denklem 16 derhal elde edilir.

$h$  kalınlığının değişimi dikdörtgen plak halinde Şekil 4'de ve federli plak halinde ise Şekil 5'de verilmiştir.



Şekil 4.  $h$  kalınlığının  $b/a$  oranı ile değişimi

Şekil 5. Federli halde  $h$  kalınlığının değişimi

## 5. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, dört ucundan kuvvete maruz bir plağın kalınlık hesabı için formüller geliştirilmiştir. Geliştirilen Denklem 16 pratikte de kullanılmaya başlanmıştır. Ancak, bunun da bir geçerlilik sınırı vardır. Bu sebeple, Denklem 23 geliştirilmiştir. Denklem 23'ün daha iyi sonuç vereceği muhakkaktır. Diğer yandan, zorunlu olarak çift taraflı feder kullanımı halinde Denklem 23'e benzer bir formülün burada takip olunan yöntemle geliştirilmesi mümkündür. Bunun sebebi, maksimum kayma hipotezinin kullanılıyor olmasıdır. Böyle bir durumda maksimum normal gerilme hipotezi kullanılmalıdır. Buna göre mesela,  $\sigma_x$ 'in en büyük gerilme değeri olduğu kabul edilerek Denklem 1'den  $h^2 = \sigma_{ak}s / 12M_xE$  bulunur.  $b/a$ 'nın 1 ve 0 civarlarında bulunduğu hallerde Denklem 16 yanlış sonuçlar verebileceğinden bu bölgelerde maksimum kayma hipotezine göre hesap yapılmalıdır. Ancak, pratikte bu iki hale çok rastlanmadığından Denklem 16'nın geniş bir kullanım alanına sahip olduğunu söyleyebiliriz. Burada  $s$  emniyet katsayısıdır. Denklem 16'nın aksine Denklem 23 kare kesitler halinde de kullanılabilir. Ancak, yine de küçük  $c$  değeri için kare kesit halinde maksimum normal gerilme hipotezinin kullanılması daha sağlıklı olabilir.

## KAYNAKLAR

- Timoshenko S., Goodier J.N., (1954): "Theory of Elasticity", McGraw Hill Company, s.:258-266.  
 Xu, Zhilun, (1992): "Applied Elasticity", Wiley Eastern Limited, s: 257-286.