DEÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
FEN ve MÜHENDİSLİK DERGİSİ
Cilt: 3 Sayı: 2 sh. 51-57 Mayıs 2001

DÜZLEMSEL ÜÇ İNDİSLİ DAĞITIM PROBLEMİNİN FORMÜLASYONU VE EŞDEĞER ÖZELLİKLERİ

(THE FORMULATION AND EQUIVALENT CHARACTERIZATIONS OF THE PLANAR THREE INDEX TRANSPORTATION PROBLEM)

Mustafa ÖZEL*

ÖZET/*ABSTRACT*

Bu çalışmada, m çıkışlı, n depolu ve p varışlı düzlemsel üç indisli dağıtım probleminin formülasyonu ve eşdeğer formülasyonları incelenmiştir. Problem ve eşdeğer problemlerin cebirsel özellikleri, katsayılar matrisinin genelleştirilmiş tersleri kullanılarak verilmiştir. Problem ve eşdeğer problemlerin ortak cebirsel özelliklere sahip oldukları görülmüştür.

In this paper, we investigate the equivalent formulations of the planar three index transportation problem, of order mxnxp, using the generalized inverse of its coefficient matrix, and give relations between the equivalent problems. It is then shown that the problem and its equivalent problems have common algebraic characterizations.

ANAHTAR KELİMELER/*KEYWORDS*

Dağıtım problemi, Doğrusal programlama problemi, Genelleştirilmiş tersler

Transportation problem, Linear programming problem, Generalized inverses

*DEÜ Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü, Bornova İZMİR

1. GİRİŞ

Düzlemsel üç indisli dağıtım problemi, Hitchcock-Koopmans dağıtım probleminin bir genellemesidir(Bulut, 1998; Korsnikov, 1989, Vlach, 1986). Bu problem, ilk kez Hitchcock tarafından ortaya atılmış, Koopmans tarafında ayrıntılı olarak ele alınmış ve Dantzig tarafından Simplex yöntemine uygulanmıştır. Daha sonraları, Vlach tarafından çözümlerinin varlık koşulları ve Korsnikov tarafından da boyutu ile ilgili çalışmalar verilmiştir.

Bu çalışmada, düzlemsel üç indisli dağıtım problemi özel bir doğrusal programlama problemi olarak formüle edilerek eşdeğer formülasyonları verilecektir. Problemin çözümü ve bazı özellikleri, eşdeğer formülasyonun $A^T A$ katsayılar matrisinin özdeğer ve özvektörleri cinsinden incelenecektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde problemin eşdeğer formülasyonlarının elde edilmesinde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

$A=[a_{ij}]$, $m x n$ ve $B=[b_{ij}]$, $p x q$ matris olsun. $mp x nq$

$$A \otimes B=[Ab_{ij}] \tag{1}$$

matrisine A ve B nin *Kronecker çarpımı* denir. $mn x mn$

$$A \oplus B=A \otimes I_n+I_m \otimes B \tag{2}$$

matrisine de A ve B nin *Kronecker toplamı* denir. Burada, A ve B sırasıyla $m x m$ ve $n x n$ matrislerdir (Ben-Israel vd., 1974; Graybill, 1969).

Teorem 2.1 A $m x m$ matrisinin λ_i özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler $\mathbf{x}_i$ ve B $n x n$ matrisinin μ_j özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler $\mathbf{y}_j$ ise

$$(A \otimes B)(x_i \otimes y_j) = \lambda_i \mu_j (x_i \otimes y_j) \tag{3}$$

$$(A \oplus B)(x_i \otimes y_j) = (\lambda_i + \mu_j)(x_i \otimes y_j) \tag{4}$$

dir (Brewer, 1978).

Teorem 2.2 A=[B,C] olsun. A nın genelleştirilmiş tersinin

$$A^{+}=\begin{bmatrix} B^{+}-B^{+}CKC^{*}(\mathrm{B}^{+})^{*}B^{+} \\ N^{+}+KC^{*}(\mathrm{B}^{+})^{*}B^{+} \end{bmatrix} \tag{5}$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$N^{+}NC^{*}(\mathrm{B}^{+})^{*}B^{+}C=0 \tag{6}$$

dir. Burada

$$N=(\mathrm{I}-\mathrm{BB}^{+})\mathrm{C} \quad \text{ve} \quad \mathrm{K}=\left(I+C^{*}(\mathrm{B}^{+})^{*}B^{+}C\right)^{-1} \tag{7}$$

dir (Bulut, 1998; Bulut, 1991).

Teorem 2.3 A k*x*k matrisi A=(a-b)I+bJ olsun. A nın tersi

$$A^{-1}=\frac{1}{a-b}\left[I-\frac{b}{a+(k-1)b}J\right] \tag{8}$$

dir. Burada a ≠ b ve a ≠ –(k–1)b ve J tüm elemanları 1 olan k*x*k matristir (Graybill, 1969).

3. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Bu bölümde, m çıkışlı (factories), n depolu (warehouses) ve p varışlı (wholesale outlets) düzlemsel üç indisli dağıtım problemini inceleyeceğiz.

Varsayalım ki, çıkışlar, depolar ve varışlar sırası ile

$$S=\{S_1,S_2,\cdots,\ S_m\},D=\{D_1,D_2,\cdots,\ D_n\} \text{ ve } P=\{P_1,P_2,\cdots,\ P_p\}$$

kümeleri ile verilsin ve

$$G=(SxD,\ SxP,\ DxP,\ SxDxP) \tag{9}$$

ağı (network) tanımlansın. Bu, geometrik olarak; kenarları S, D ve P ve yüzeyleri SxD, SxP ve DxP olan kübik bir yapı gösterir (Bulut, 1998; Korsnikov, 1989; Vlach, 1986). Bu ağda (network) ikili çarpımlar, ağın tepelerini (nodes) ve üçlü çarpım ise, ağın ayrıntılarını (arcs) ifade eder. Eğer S_i den D_j ye ve oradan P_k ya yapılan göndermeleri x_{ijk}, bir birim göndermenin taşıma maliyetlerini c_{ijk} ve ayrıtların kapasitelerini

$$k(S_i x D_j) = a_{ij} > 0 \ , \ k(S_i x P_k) = a_{ij} = b_{ik} > 0 \ , \ k(D_j x P_k) = h_{jk} > 0 \tag{10}$$

ile tanımlarsak; üç indisli dağıtım problemini Eşitlik 9 biçiminde özel bir ağ akışı olarak formüle edebiliriz. Bu şekilde tanımlanan Eşitlik 9 ağına, düzlemsel üç indisli dağıtım problemi denir.

Eşitlik 9 ağını doğrusal programlama problemi olarak formüle edebiliriz. Bunun için

$$\mathbf{x}^T = [\, x_{111}, x_{112}, \cdots, x_{mnp} \,] \ , \ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = [\mathrm{c}_{111}, \mathrm{c}_{112}, \cdots, \mathrm{c}_{\mathrm{mnp}}]$$

$$\mathrm{a}_i^T = [\mathrm{a}_{i1}, \mathrm{a}_{i2}, \cdots, \mathrm{a}_{in}] \ , \ i = 1,2,\cdots,m$$

$$\mathrm{b}_i^T = [\mathrm{b}_{i1}, \mathrm{b}_{i2}, \cdots, \mathrm{b}_{ip}] \ , \ i = 1,2,\cdots,m$$

$$\mathrm{h}_j^T = [\mathrm{h}_{j1}, \mathrm{h}_{j2}, \cdots, \mathrm{h}_{jp}] \ , \ j = 1,2,\cdots,n$$

$$\mathrm{a}^T = [\mathrm{a}_1^T, \mathrm{a}_2^T, \cdots, \mathrm{a}_m^T] \ , \ \mathrm{b}^T = [\, \mathrm{b}_1^T, \mathrm{b}_2^T, \cdots, \mathrm{b}_m^T \,] \ , \ \mathrm{h}^T = [\, \mathrm{h}_1^T, \mathrm{h}_2^T, \cdots, \mathrm{h}_n^T \,]$$

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = [\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \mathbf{h}^T \,]$$

vektörleri ile

$$A = \begin{bmatrix} 1_p^T \otimes & I_n \otimes & I_m \\ I_p \otimes & 1_n^T \otimes & I_m \\ I_p \otimes & I_n \otimes & 1_m^T \end{bmatrix} \tag{11}$$

matrisini ele alalım. Burada, $\mathrm{mnp} - (\mathrm{m}-1)(\mathrm{n}-1)(\mathrm{p}-1)$ ranklı $(\mathrm{mn} + \mathrm{mp} + \mathrm{np})x\,\mathrm{mnp}$ A matrisi Eşitlik 9 ağ akışı probleminin bağlantı matrisi ve 1_m^T tüm elemanları 1 olan 1xm matrisdir.Böylece, Eşitlik 9'da verilen düzlemsel üç indisli dağıtım problemini

$$Min\left\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta},\ 1_{nm}^T \mathbf{a} = 1_{mp}^T \mathbf{b} = 1_{np}^T \mathbf{h},\ \mathbf{x} \geq 0\right\} \tag{12}$$

biçiminde bir doğrusal programlama problemi olarak formüle edebiliriz.

Eşitlik 12, üç indisli düzlemsel dağıtım problemidir. A katsayılar matrisi özel bir matristir. Eğer, A matrisini,

$$A = \begin{bmatrix} 1_p^T \otimes & I_{nm} \\ I_p \otimes & M \end{bmatrix} \ , \ M = \begin{bmatrix} 1_n^T \otimes & I_m \\ I_n \otimes & 1_m^T \end{bmatrix} \tag{13}$$

biçiminde yazarsak, Eşitlik 12 probleminin m çıkış ve n varışlı bir dağıtım problemine bağlı olarak incelenebileceği ortaya çıkar.

Dikkat edilirse; m+n-1 ranklı $(\mathrm{m}+\mathrm{n})x\,\mathrm{mn}$ M matrisi, m çıkış ve n varışlı bir dağıtım probleminin katsayılar matrisi ve

$$G_0 = (S\,, D\,, S \times D)$$

ağının köşe-ayrıt bağlantı matrisidir (Bulut, 1990).

3. PROBLEMİN EŞDEĞER FORMÜLASYONLARI

Eşitlik 12 problemi özel bir doğrusal programlama problemidir. Bu problemi, $A^T A\mathbf{x} = A^T \boldsymbol{\beta}$ ve $A^+ A\mathbf{x} = A^+ \boldsymbol{\beta}$ denklemlerinin eşdeğer özelliklerini kullanarak inceleyebiliriz.

Şimdi, Eşitlik 11 ve 13'de verilen A ve M matrislerini kullanarak $A^T A$ ve $M^T M$ matrislerini bulalım.

$$A^T A = J_p \otimes I_n \otimes I_m + I_p \otimes J_n \otimes I_m + I_p \otimes I_n \otimes J_m = J_p \oplus J_n \oplus J_m \tag{14}$$

$$M^T M = J_n \otimes I_m + I_n \otimes J_m = J_n \oplus J_m \tag{15}$$

Bu sonuçlar, problemin J_p, J_n ve J_m matrislerinin özellikleriyle incelenebileceğini ortaya koyar. Aşağıdaki teorem, $A^T A$ matrisinin özdeğerlerinin J_p, J_n ve J_m matrislerinin özdeğerlerine bağlı olarak hesaplandığını göstermektedir. Teorem 2.1'i kullanarak

$$\det(A^T A - \lambda I) = \lambda^{(\mathrm{p-1})(\mathrm{n-1})(\mathrm{m-1})}(\mathrm{p} - \lambda)^{(\mathrm{n-1})(\mathrm{m-1})}(\mathrm{n} - \lambda)^{(\mathrm{p-1})(\mathrm{m-1})}(\mathrm{m} - \lambda)^{(\mathrm{p-1})(\mathrm{n-1})}(\mathrm{n} + \mathrm{m} - \lambda)^{(\mathrm{p-1})}$$

$$(\mathrm{p} + \mathrm{m} - \lambda)^{(\mathrm{n-1})}(\mathrm{p} + \mathrm{n} - \lambda)^{(\mathrm{m-1})}(\mathrm{p} + \mathrm{n} + \mathrm{m} - \lambda) = 0 \tag{16}$$

elde edilir.

Eğer z_k, y_j ve $\mathbf{x}_i$, sırası ile J_p, J_n ve J_m matrislerinin özvektörleri ise, $A^T A$ nın özvektörlerinin

$$v_t = z_k \otimes y_j \otimes x_i \tag{17}$$

olduğu görülür. Burada, J_p, J_n ve J_m matrislerinin özdenklemleri, sırası ile

$$\det(J_p - \gamma I_p) = \gamma^{p-1}(p-\gamma) = 0$$

$$\det(J_n - \beta I_n) = \beta^{n-1}(n-\beta) = 0$$

$$\det(J_m - \alpha I_m) = \alpha^{m-1}(m-\alpha) = 0$$

olarak hesap edilir.

$A\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}$ denklemi, $A^T A\mathrm{x} = A^T \beta$ denklemine eşdeğerdir. Eşitlik 14 kullanılarak

$$Min\left\{c^T \mathrm{x} \mid (J_p \oplus J_n \oplus J_m)\mathrm{x} = (1_p \otimes 1_m) \circ \mathrm{a} \ + \ \mathrm{b} \circ (1_n \otimes 1_m) + (\mathrm{h} \otimes 1_m) \circ 1_m, \mathrm{x} \geq 0\right\} \tag{18}$$

elde edilir. Bu, Eşitlik 14 problemine eşdeğerdir, burada, $\circ$ Rao çarpımdır. Şimdi de A^+ matrisini hesap edelim. Teorem 2.2 ve 2.3 ü kullanarak

$$A^+ = \frac{1}{p^2(p+n+m)}\Big[1_p \otimes \{p(p+n+m)I_{nm} - (J_n \oplus J_m)((p+n+m)I_{nm} - (J_n \oplus J_m))\},$$

$$\frac{1}{pn(n+m)}(J_p - pI_p) \otimes 1_n \otimes (J_m - (n+m)I_m) - \frac{1}{p+n+m} J_p \otimes 1_n (J_m - (p+m)I_m),$$

$$\frac{1}{pm(n+m)}(J_p - pI_p) \otimes (J_n - (n+m)I_n) \otimes 1_m - \frac{1}{p+n+m} J_p \otimes (J_n - (p+n)I_n) \otimes 1_m\Big] \tag{19}$$

ve dolayısıyla

$$A^+ A = \frac{1}{mnp} J_p \otimes J_n \otimes J_m \tag{20}$$

elde edilir. Bu sonuç da, Eşitlik 12 probleminin $A^{+}A$ matrisinin özdeğer ve özvektörleriyle incelenebileceğini göstermektedir. Böylece

$$Min\left\{c^{T} x \mid \left(J_{p} \otimes J_{n} \otimes J_{m}\right)x = pnm\ A^{+} \beta\ , x \geq 0\right\} \tag{21}$$

yazılır. Bu problem de, Eşitlik 12 ile verilen probleme eşdeğerdir.

Bu sonuç, düzlemsel üç indisli dağıtım probleminin, J_p, J_n ve J_m matrisleriyle incelenebileceğini, problemin çözümünün bu matrislerinin özdeğer ve özvektörlerine bağlı olarak elde edilebileceğini ve problem ile eşdeğer problemlerin ortak cebirsel özelliklere sahip olduklarını göstermektedir.

KAYNAKLAR

Ben-Israel A., Grenville T.N.E. (1974): "Generalized inverses: theory and applications", J.Wiley, New York.

Brewer J.M. (1978): "Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory", IEEE Tran. on Circuits and Systems, Vol cas-25, no.9, 772-781.

Bulut H. (1991): "Algebriac Characterizations of the Singular Value Decompositions in the Transportation problem", J. Math. Anal. Appl., 154, 13-21.

Bulut S.A. (1998): "Construction and Algebraic Characterizations of the Planar and Axial Transportation Problems, J. Math. Anal. Appl., 220, 535-552.

Graybill F.A. (1969): "Introduction to matrices with applications in statistics", Wadsworth, Belmont, Calif.

Korsnikov A.D., Burkard R.E. (1989): "On the Dimension of Polytopes of Planar Three-Index Transportation Problems, Optimization 20, 1 , 107-116.

Vlach M. (1986): "Conditions for the Existence of Solutions of the Three-Dimensional Planar Transportation Problem, Discrete Applied Mathematics 13, 61-78.