



**YERBİLİMLERİNDE ISI TRANSFERİ MODELLEMESİ:  
KARARLI-HAL KONDÜKTİF ISI İLETİMİ**

**(HEAT TRANSFER MODELING IN EARTH SCIENCES:  
STEADY-STATE CONDUCTIVE HEAT TRANSFER)**

**Gökhan GÖKTÜRKLER\***

**ÖZET/ABSTRACT**

Sayısal modelleme bilim ve mühendisliğin pek çok alanında yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır. Bu çalışmada da iki boyutlu kararlı-hal kondüktif ısı transferi problemlerinin yerbilimleri disiplini içindeki uygulamalarının temelleri üzerinde durulmuş ve örnekler verilmiştir. Problemler sonlu farklar yaklaşımıyla relaksasyon (successive overrelaxation) yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Modellemelerde ısı üreten kaynakların yer içinde üstel olarak azaldığı kabul edilmiştir. Örnekler varsayımsal bir kabuk modelindeki ısı transferi ile graben türü bir yapıdaki ısı transferi problemlerini içermektedir. Sayısal modelleme yerbilimlerindeki problemlerin çözümünde ve yer içindeki fiziksel olayların nasıl geliştiğinin anlaşılmasında önemli katkılar sağlayacak bir araç olarak gözükmektedir.

*Numerical modeling has been widely used in the fields of science and engineering. This study outlines the use of two dimensional steady-state conductive heat transfer modeling in earth sciences and gives some examples. The problems were solved by the successive over relaxation method of finite differences. Exponential decrease with depth in heat sources in the crust was assumed as heat production model. Examples include heat transfer problems in a hypothetical crust and graben models. It seems that numerical modeling is a useful tool for solving problems in earth sciences and understanding mechanisms of physical processes inside the earth.*

**ANAHTAR KELİMELELER/KEYWORDS**

Sayısal modelleme, Kondüktif ısı transferi, Sonlu farklar, Yerbilimleri  
*Numerical modeling, Conductive heat transfer, Finite difference, Earth sciences*

---

\*DEÜ, Müh. Fak. Jeofizik Müh. Böl., Kaynaklar, 35160 Buca, İZMİR

## 1. GİRİŞ

Katıların reolojisi sıcaklığın bir fonksiyonudur. Bu nedenle yerkabuğunun mekanik davranışlarının anlaşılabilmesi için ısı yapısının (thermal state) bilinmesi gerekmektedir (Turcotte ve Schubert, 1982). Yerkabuğunun mekanik davranış özellikleri de onun tektoniğini ve deprenselliğini belirler. Dolayısıyla sıcaklık yer içindeki en önemli fiziksel parametrelerden biri haline gelmektedir. Böyle olmasına rağmen yerin ısı yapısına ait bilgilerimiz yeterli değildir. Uygulaması zor ve pahalı olan sıcaklık ölçümleri genellikle sığ derinliklerde yapılmakta ve yeraltı suyu hareketleri, iklim koşulları, topoğrafya ve yerel jeolojinin etkileri altında kalmaktadır (Mayhew, 1982). Ölçümler üzerindeki bu etkiler sebebiyle yerkabuğunun derin kısımlarındaki sıcaklık dağılımlarına ait güvenli bilgiler elde etmek çok güçtür. Bu nedenle çeşitli matematiksel bağıntılar kullanarak yerin derin kısımlarındaki sıcaklıklar hesaplanmaya (kestirilmeye) çalışılır. Bu bağıntılar sıcaklığın derinlikle değişimini veren grafiklerin (geotherm) elde edilmesini sağlar fakat sıcaklığın yanal değişimi konusunda bilgi vermez.

Ancak bilgisayar teknolojisindeki ve sayısal hesaplama yöntemlerindeki gelişmelere bağlı olarak iki boyutlu (2B) veya üç boyutlu (3B) sıcaklık alanı hesaplamaları diğer bir değişle ısı transferi modellemeleri olanaklı hale gelmiştir. Doğaldır ki 2B ve 3B çözümler daha gerçekçi sonuçlar üretecektir. Bu tip modellemelerin esasını bir diferansiyel denklem olan ısı iletim denkleminin (heat diffusion equation) sonlu farklar (finite differences) veya sonlu elemanlar (finite elements) yaklaşımları kullanılarak çeşitli sınır ve başlangıç koşulları altında çözülmesi oluşturur. Yerbilimlerinde bilinen bir yer altı yapısı ve belirli sınır ve başlangıç koşullarından hareketle yer içindeki sıcaklık veya başka bir fiziksel parametrenin hesaplanmasına düz çözüm (forward modeling) adı verilir ve bu yeraltına ait parametrelerin belirlenmesinde kullanılan değerlendirme yöntemlerinden biridir. Yukarıda bahsi geçen yaklaşımların kendilerine özgü avantaj ve dezavantajları mevcuttur. Örneğin sonlu farklar algoritması ile çözüm nispeten basit iken uygulaması daha zor olan sonlu elemanlar ile yüzey ve arayüzey topoğrafyaları çok kolay bir şekilde modellemeye dahil edilebilmektedir.

Bu yayının amacı sonlu farklar ile iki boyutlu kararlı-hal ısı transferi modellemesinin (simülasyonunun) yerbilimlerdeki uygulamasının temel ilkelerini göstermek ve örnekler vermektir. İzleyen sayfalarda da görülebileceği gibi bu çalışma aynı zamanda yerküredeki ısı transferi mekanizmaları, kayaçların ısı iletkenliği ve karalarda ısı üretimi ile ısı akışı gibi jeotermiğin ilgi alanına giren ve ısı transferi modellemelerinde ihtiyaç duyulan temel bilgileri de içermektedir. Ayrıca bu tarz modelleme çalışmalarının, ülkemiz için önemi günden güne artan jeotermal enerji amaçlı uygulamalara da katkı sağlayacağı açıktır.

## 2. YERKÜREDE ISI TRANSFERİ MEKANİZMALARI

Termodinamikte, ısı bir sistem ile çevresi arasındaki sıcaklık farkından dolayı sistemin sınırında geçen enerji olarak tanımlanır (Yüncü ve Kakaç, 1999). Fiziksel açıdan çok karmaşık olan ısı transferi için üç tür mekanizma tanımlanır. Bunlar:

1. Kondüksiyon (iletim),
2. Konveksiyon (taşınım),
3. Işınım (termal radyasyon)' dır.

Kondüksiyon ile ısı transferi aynı bir ortamın (katı, sıvı ve gaz) farklı bölgeleri veya birbiri ile fizikî kontak halinde bulunan farklı ortamlar arasında moleküllerin doğrudan teması ile sağlanır. Ancak burada fark edilebilir bir molekül hareketi söz konusu değildir. Bilindiği gibi bir ortamın sıcaklığı ile o ortamı oluşturan moleküllerin ortalama kinetik enerjileri doğru orantılıdır. Dolayısıyla bir ortamın içinde, sıcaklığı yüksek olan bir bölgedeki moleküllerin

ortalama kinetik enerjileri de yüksektir. Bu moleküller enerjilerinin bir miktarını komşu bölgedeki düşük enerjili moleküllere iletirler. Bu sayede ortam içinde ısı enerjisinin yayılımı gerçekleşir. Isının iletimi katılarda yüksek sıcaklıktan düşük sıcaklığa serbest elektron sürüklenmesi veya maddeyi oluşturan kafes sisteminin titreşimi ile gerçekleşir. Genellikle katılarda ısı iletiminin elektron sürüklenmesi ile gerçekleştiği varsayılır. Sıvı ve gazlarda ise bu işlem moleküllerin ardışık çarpışmaları ile sağlanır (Yüncü ve Kakaç, 1999).

Bir ortamda ısı enerjisinin artması sonucunda sıcaklık yükselir ve sıcaklığın yükseldiği bölgelerde hacimce genleşme meydana gelir. Hacimce genleşme ise maddenin ortalama yoğunluğunun azalmasına neden olur. Ortalama yoğunluğu azalan madde ortam içinde yükselmeye başlar ve onun boşalttığı yeri göreceli olarak sıcaklığı düşük dolayısıyla ortalama yoğunluğu yüksek olan madde doldurur. Isınmış madde yükseldikçe soğur ve yoğunluğu artar. Artan yoğunluk çekim etkisinde artmasına sebep olur ve madde ortam içinde alçalmaya başlar. Bu arada yükselen maddenin yerini alan nispeten daha soğuk madde de ısınmaya başlar ve benzeri olaylar tekrarlanır. Isı enerjisinin ortam içinde neden olduğu bu yer değiştirme hareketine konveksiyon hareketi denir. Konveksiyon yapan madde beraberinde ısı enerjisi de taşır. İşte konveksiyon hareketi sonucunda ısı enerjisinin ortam içinde bizzat maddenin kendisi tarafından taşınmasına termal konveksiyon ile ısı transferi denir. Konvektif hareketler gaz ortamlarda en hızlı; katı ortamlarda ise en yavaştır. Termal konveksiyonun meydana geldiği ortamlarda iletim ve ışınlama ısı transferi var olmakla birlikte ihmal edilebilecek düzeydedir. Zaten madde aldığı ısı enerjisini iletim ve/veya ışınlama hızlı bir şekilde komşu bölgelere yayabilse konveksiyon hareketi meydana gelmeyecektir (Sanver, 1983).

Isı enerjisinin elektromanyetik dalgalar vasıtası ile iletildiği ısı transferi mekanizmasına ışınlama ya da termal radyasyon adı verilir. Burada ışınlama ile anlatılmak istenen bir cismin sıcaklığından dolayı oluşan ısıl (termal) ışınlama. Bilindiği gibi cisimler yüksek sıcaklıklarda ısı enerjisi yayınlıyorlar ve bu enerji elektromanyetik dalgalar ile aktarılır. Bu nedenle iletim ve taşınımında olduğu gibi enerjinin transferinde bir ortama ihtiyaç duyulmaz (Yüncü ve Kakaç, 1999). Güneşten dünyaya ulaşan ısı enerjisi ışınlama en iyi örnektir.

Yukarıda kısaca açıklanan konveksiyon ve konveksiyon yer içindeki ısı transferinde etkin mekanizmalardır. Kıtasal kabuk ve litosferdeki sıcaklık dağılımı; kabuk içindeki radyojenik ısı (kabuk içindeki radyoaktif elementlerin parçalanması sonucunda ortaya çıkan ısı) ile mantodan kabuğa aktarılan ısının konvektif yolla transferinin bir sonucudur. Ayrıca okyanusal kabuk ve litosferde de ısı transferi büyük oranda konvektif yolla olmaktadır. Ancak okyanus içi sirtlara yakın yerlerde deniz suyunun kayalar içindeki dolaşımı nedeniyle konveksiyon ile ısı transferi önemli hale gelmektedir. Konveksiyon özellikle mantonun derin kesimlerindeki ısı transferi mekanizmasıdır (Turcotte ve Schubert, 1982). Isıl ışınlama ise alt kabuk ve mantoda sıcaklığın yaklaşık 800 °C' ı aştığı yerlerde oluşur (Kukkonen ve Jöeleth, 1996). Ancak ışınlama ile ısı transferinin yer içinde küçük ölçekli bir etkisi vardır ve bu etki genellikle ısı iletim katsayısı içinde ifade edilir. Diğer yandan yer kabuğu içindeki magmatik sokulumların soğuması hem konvektif ve hemde yeraltı suyu dolaşımı nedeniyle konvektif yolla gerçekleşmektedir (Turcotte ve Schubert, 1982).

### 3. YERKABUĞUNDA ISI ÜRETİMİ VE KARALARDA ISI AKISI

Yerkabuğundaki mevcut ısı enerjisinin iki bileşeni söz konusudur. Bunlar mantodan kabuğa iletilen ısı enerjisi ile kabuktaki radyoaktif elementlerin bozunması ile açığa çıkan ısı enerjisidir. Yerkürenin oluşumundan günümüze kadar olan dönem boyunca geçirdiği ısıl evrimdeki en etkili kaynağın radyoaktif bozunma olduğu konusunda pek çok araştırmacı fikir birliğindedir. Buna neden olan radyoaktif elementler kısa ve uzun yarı ömürlü izotoplar

olmak üzere iki gruba ayrılmaktadır. Kısa yarı ömürlü radyoaktif izotoplar  $Al^{26}$ ,  $Cl^{26}$  ve  $Fe^{60}$  ve uzun yarı ömürlü izotoplar ise  $U^{235}$ ,  $U^{238}$ ,  $Th^{232}$  ve  $K^{40}$  dir. Kısa yarı ömürlü izotoplar yerkürenin oluşumunun ilk dönemlerindeki ısı enerjisinin üretiminde etkili olmuşlardır. Uzun yarı ömürlü olanlar ise ilk dönemlerden günümüze kadar olan süreçte üretilen ısı enerjisinden sorumludurlar. Radyoaktif izotoplar yer içini oluşturan maddeler içinde hemen hemen hiç bir zaman kendi başlarına mineral oluşturacak kadar büyük bir bağlı bolluğa sahip olamazlar. Söz konusu izotoplar, bazı mineraller ağırlıklı olmak üzere, mineraller içinde "kirlilik" düzeyinde bulunurlar.

Bilindiği gibi radyoaktif elementlerin bozunması ile birlikte ortamda  $\alpha$  ve  $\beta$  partikülleri salınımı ve elektromanyetik dalga yayınına meydana gelir. Gerek elektromanyetik dalgaların ortamdaki diğer atomlar tarafından emilmesi ve gerekse ortamdaki diğer atomların  $\alpha$  ve  $\beta$  partikülleri ile çarpışması sonucu bu atomların kinetik enerjilerinde bir artış meydana gelir ve dolayısı ile ortamın ortalama kinetik enerjisi yani sıcaklığı artar.

Karalarda ölçülen ısı akısı ( $q_s$ ) ile yüzeye yakın kayalara ait hacim başına radyojenik ısı üretimi ( $A_o$ ) arasında doğrusal bir ilişki vardır ve bu ilişki,

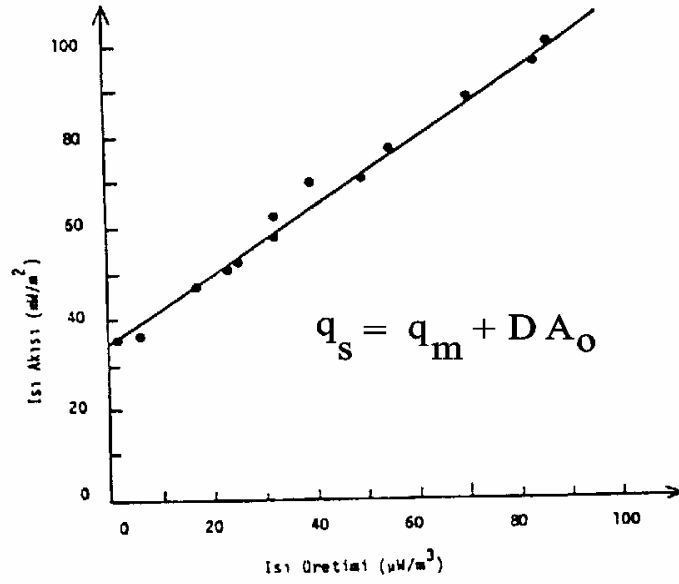
$$q_s = q_m + A_o D \quad (1)$$

olarak ifade edilir. Burada  $q_m$  indirgenmiş ısı akısı (reduced heat flow) ve  $D$  ise karakteristik derinlik (characteristic depth) olarak adlandırılır. Şekil 1'den de anlaşılacağı gibi  $q_m$  kabuktaki radyojenik kökenli ısı enerjisinin sıfır olması durumunda elde edilen ısı akısı değeri olup genelde mantodan kabuğa iletilen ısı akısı olarak düşünülür;  $D$  ise doğrunun eğimidir ve radyoaktif minerallerce zengin üst kabuk tabakasının kalınlığı olarak düşünülür ve yerküre genelinde 4 ile 14 km arasında değişir (Condie, 1970).

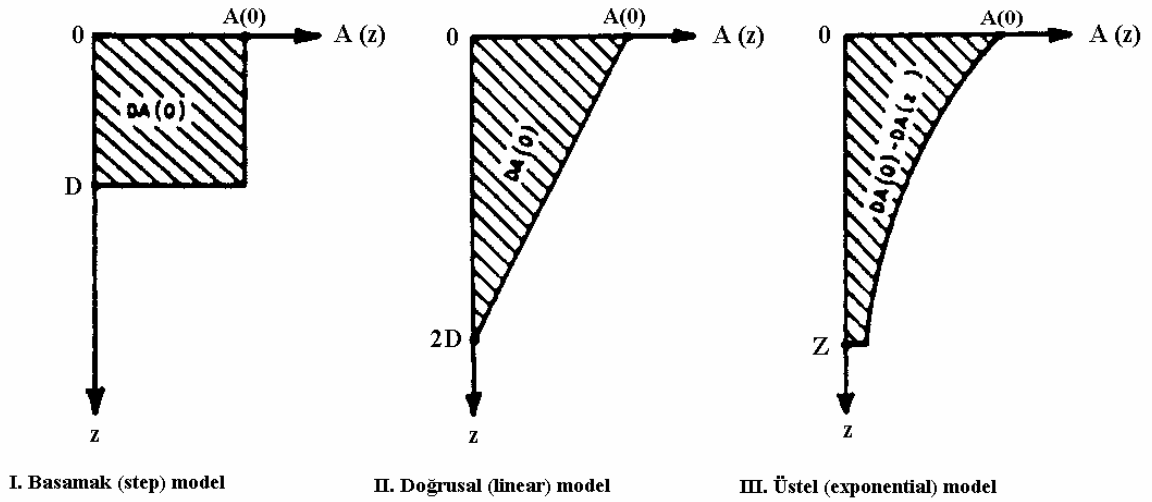
Kabuktaki radyojenik ısı kaynaklarının dağılımı ile ilgili olarak üç farklı model göz önünde bulundurulmaktadır. Bunlar basamak (step), doğrusal (linear) ve üstel (exponential) ısı üretim modelleri olarak adlandırılırlar ve bu modellerin hepsi yukarıda bahsi geçen doğrusal ısı akısı-ısı üretimi ilişkisini sağlarlar (Şekil 2). Basamak modelde  $D$  kalınlığına sahip radyojenik zone içinde sabit bir değerde hacim başına ısı üretimi söz konusudur. Doğrusal modelde hacim başına ısı üretimi kabuk içinde lineer olarak azalmaktadır. Üstel modelde ise radyojenik ısı üretimi aşağıda ifade edildiği şekilde derinlik ile eksponensiyel olarak azalır,

$$A = A_o \exp(-z / D) \quad (2)$$

Burada " $A_o$ " yüzeye yakın veya yüzeydeki hacim başına ısı üretimi; " $A$ " ise herhangi bir  $z$  derinliğindeki ısı üretimidir. Bu modeller içinde üstel modelin tabiattaki durumu en iyi yansıtan model olduğu konusunda araştırmacılar arasında bir fikir birliği vardır. Ayrıca derin sondaj kuyularında yapılan radyojenik ölçümler bu modeli destekleyen niteliktedir (Condie, 1970). Yerküre üzerinde yapılan ısı akısı ölçümleri göstermiştir ki aktif tektonik rejim altında bulunmayan kıtasal kabuktaki ortalama ısı akısı ile kabuk kalınlığı arasında ters orantılı bir ilişki vardır. Yani ısı akısı değeri azaldıkça kabuk kalınlığı artmaktadır. Ayrıca gerek kıtasal ve gerekse okyanusal alanlardaki ortalama ısı akısı, kabuğu oluşturan kayaların ortalama yaşı arttıkça azalmaktadır.



Şekil 1. Doğrusal ısı akısı – ısı üretimi ilişkisine, A. B. D.' nin doğusundan bir örnek



Şekil 2. Yeriçinde ısı üreten kaynakların derinlikle değişimine ait modeller. (Bu modellerin üçü de doğrusal ısı akısı – ısı üretimi ilişkisini sağlamaktadır) (Lachenbruch, 1970)

#### 4. KAYAÇLARIN ISI İLETİM KATSAYILARI

Maddelerin ısı enerjisini iletme yeteneklerini belirten parametreye ısı iletim katsayısı adı verilir. Yerkabuğunu oluşturan kayalarda kendilerine özgü ısı iletim katsayılarına sahiptirler. Kayaçlara ait ısı iletim katsayısı ( $k$ )

$$k = k_s + k_r \quad (3)$$

ile tanımlanır. Burada “ $k_s$ ” kondüktif ısı transferine ait ısı iletim katsayısını; “ $k_r$ ” ise ısıl ışıma ile ısı transferine ait katsayıyı gösterir. Yaklaşık 500°C’ den düşük sıcaklıklarda  $k_s$  daha etkin iken; 500°C’nin üstündeki sıcaklıklarda  $k_s$  ’nin etkinliği azalır ve ısıl ışımaya ait iletim katsayısı ( $k_r$ ) etkin hale gelmeye başlar.  $k_s$  hem sıcaklığa ve hem de basınca bağlı olarak değişmektedir.  $k_s$  ’nin sıcaklıkla olan değişimi aşağıdaki bağıntı ile ifade edilir.

$$k_s = k_o / (1 + bT) \quad (4)$$

Burada “ $k_o$ ” oda sıcaklığındaki (20°C) ısı iletim katsayısı; “ $T$ ” sıcaklık ve “ $b$ ” ise deneysel yolla saptanan bir sabittir. Bu bağıntıdan da görülebileceği gibi sıcaklık arttıkça iletim katsayısının değeri küçülür (Sanver, 1983).  $k_s$  ’nin basınç ile olan değişimi ise

$$k_s = k_o (1 + \alpha P) \quad (5)$$

olarak tanımlanır. Burada  $k_o$  yine oda sıcaklığındaki (20°C) ısı iletim katsayısı; “ $P$ ” basınç ve “ $\alpha$ ” ise deneysel olarak belirlenen basınç katsayısıdır (Hänel, 1976). Bu ifadeye göre basınç arttıkça  $k_s$  ’de artmaktadır. Genellikle  $k_s$  ’nin basınçla değişimi sıcaklıkla değişiminin yanında ihmal edilir ve  $k_s$  sadece sıcaklığın bir fonksiyonu olarak düşünülür. Ayrıca  $k_s$  ’nin basınç ile değişimi yeteri kadar belgelenmemiştir (Sams ve Thomas-Betts, 1988). Kayaçların ısı iletim katsayıları ayrıca porozitelerine (gözeneklilik) bağlı olarak da değişmektedir. Gözeneklilik özellikle sedimanter kayaçlar için önemlidir. Bu tip kayaçlarda gözenekler genellikle formasyon sıvısı ile doludur. Formasyon sıvısı su veya petrol olabileceği gibi bunların karışımı da olabilir. Hatta bazı durumlarda gözenekler gaz, gaz-su veya gaz-petrol karışımı ile dolu olabilir. Gözenekleri dolduran bu maddelerin ısı iletim katsayıları kayacı oluşturan minerallere (matrix mineralleri) göre çok düşüktür. Bu nedenle kayacın ısıl iletkenliği üzerinde önemli etkileri vardır. Bu durumda kayaçların efektif (bulk) ısıl iletkenliğinden söz edilir.

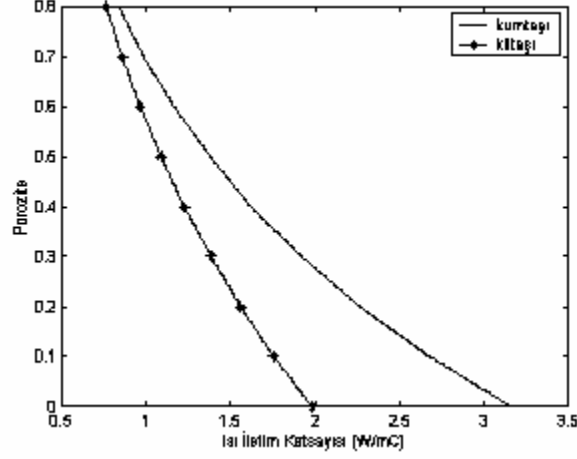
Aşağıda Lewis ve Rose, (1970) tarafından verilen ampirik bağıntı kayaçların ısı iletim katsayısı ile poroziteleri arasındaki ilişkiyi göstermektedir (Lewis ve Rose, 1970).

$$k = k_m (k_w / k_m)^\phi \quad (6)$$

Burada “ $k$ ” kayacı oluşturan mineraller ile gözenekleri dolduran akışkandan (genellikle formasyon suyu) oluşan sistemin ısı iletim katsayısı (W/m°C); “ $k_w$ ” formasyon suyunun ısı iletim katsayısı; “ $k_m$ ” kayacı oluşturan minerallerin ısı iletim katsayısı ve “ $\phi$ ” ise gözenekliliktir (Yalçın vd., 1997; Yalçın, 1990). Eşitlik 6,  $k_w / k_m$  oranı çok küçük veya çok büyük olduğu durumlarda geçerli değildir (Palciauskas 1986; Ungerer vd., 1990).

Şekil 3, iki farklı sedimanter kayaç türü için ısı iletim katsayısının porozite ile değişimini

göstermektedir. Burada  $k_m$  kumtaşı için  $3.16 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ , kil taşı için  $1.98 \text{ W/m}^\circ\text{C}$  ve  $k_w$  ise  $0.60 \text{ W/m}^\circ\text{C}$  olarak alınmıştır (Yalçın vd., 1997).



Şekil 3. Isı iletim katsayısının poroziteye bağlı değişimi.

Herhangi bir kayaç için ışıma ile ısı transferine ait iletim katsayısı aşağıdaki bağıntı yardımıyla hesaplanabilir.

$$k_r = 16 T^3 n^2 s / 3e \quad (7)$$

Burada "T" sıcaklık, "n" kırılma indisi, "s" Stefan-Boltzman sabiti ( $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Jul/m}^2 \text{ s derece}$ ) ve "e" ise opaklıktır. Her ne kadar yukarıdaki bağıntıda  $k_r$  'nin sıcaklığın kübü ile arttığı ifade edilse bile deneysel çalışmalar  $500\text{-}1800 \text{ K}$  arasındaki sıcaklıklarda  $k_r$  'nin sıcaklık ile doğrusal olarak arttığını göstermektedir (Sanver, 1983).

Tüm bunların ışığında yerkabuğunu oluşturan kayaçlara ait ısı iletim katsayısı (k) sıcaklığın bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$k = [k_0 / (1+bT)] + c(T+273.15)^3 \quad (8)$$

Burada ilk terim  $k_s$  'nin sıcaklık ile olan değişimini ikinci terim ise ışıma ile olan ısı transferinin etkisini ifade eder; "c" ise deneysel sabittir. Daha öncede belirtildiği gibi alt kabuk ve mantoda sıcaklığın yaklaşık  $800^\circ\text{C}$ ' ı aştığı yerlerde ışıma ile ısı transferi etkin hale gelmektedir (Kukkonen ve Jöeleth, 1996). Buna göre ısı iletim katsayısı sıcaklık  $800^\circ\text{C}$ ' a ulaşıncaya kadar sıcaklık ile azalır bundan sonra ise ısı iletim katsayısının etkin hale gelmesiyle bir artış trendine girer ve sıcaklık ile artmaya başlar (Kukkonen ve Jöeleth, 1996). Global ölçekte kıtasal ve okyanusal kabuk için ısı iletim katsayısı  $2.5 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ , kıtasal kabuk altındaki Moho süreksizliği için  $2.8 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  ve okyanusal kabuk altındaki Moho süreksizliği için  $3.4 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  olarak alınır (Sanver, 1983).

## 5. YÖNTEM

Isı transferinde kararlı (steady) ve kararsız (unsteady) olmak üzere iki farklı hal söz konusudur. Kararlı halde ortamdaki ısı transferi zamandan bağımsızdır. Yani ortamdaki sıcaklıklar zamana bağlı olarak değişmez. Kararsız halde ise ortamdaki ısı transferi zamanın bir fonksiyonudur diğer bir ifade ile ortamdaki sıcaklıklar zamana bağlı olarak değişir. Bu tip ısı transferinde yeterli bir süre geçtikten sonra ısı iletimi kararlı hale gelir. Yerkabuğunun yaşı göz önüne alındığında kabuktaki ısı transferinin kararlı olduğunu düşünmek belirli sınırlar içinde kabul edilebilecek bir varsayımdır. Yukarıda da belirtildiği gibi yer içindeki ısı transferi için kondüksiyon, konveksiyon ve ışınım olmak üzere üç tür mekanizma söz konusudur. Kıtasal kabuk ve litosferdeki sıcaklık dağılımında kondüksiyon en etkin ısı transferi mekanizmasıdır ve bu çalışma kapsamında kabuk içindeki sıcaklık dağılımının hesaplanması gibi geniş ölçekli problemler üzerinde durulacağı için izleyen satırlarda kondüktif yolla olan kararlı-hal ısı iletiminin sayısal çözümü incelenecektir.

İki boyutlu heterojen bir ortamda kararlı-hal kondüktif ısı iletimi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + A = 0 \quad (9)$$

Burada  $k(x,z)$  ısı iletim katsayısı,  $T(x,z)$  sıcaklık alanı,  $A(x,z)$  birim hacim başına ısı üretimi,  $x$  ve  $z$  ise yatay ve düşey koordinatlarıdır (Čermák vd., 1991). Yukarıda da belirtildiği gibi ısı iletim katsayısı ( $k$ ) yalnızca uzay koordinatlarının değil aynı zamanda sıcaklığın da bir fonksiyonudur. Dolayısıyla bu çalışma kapsamındaki örneklerde ısı iletim katsayısının sıcaklık ile değişimi; ışınım ile ısı transferini de içerecek biçimde Eşitlik 8 kullanılarak modellenen çalışmaları dahil edilmiştir. Bu bağıntıda birer deneysel sabit olan  $b$  ve  $c$  için sırasıyla  $0.0015 \text{ K}^{-1}$  ve  $1 \cdot 10^{-10} \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-4}$  değerleri atanmıştır (Schatz ve Simmons, 1972).  $b$  sabiti için atanan bu değer  $1000 - 1200 \text{ }^\circ\text{C}$ ' dan düşük sıcaklıklarda yaygın kayaç türlerinin kondüktif ısı iletim katsayılarının sıcaklıkla değişimine ait bir sabittir (Zoth ve Haenel, 1988). Isı üretim modeli olarak radyoaktif ısı kaynaklarının derinlik ile üstel olarak azaldığı eksponensiyel model kullanılmıştır. Burada yüzeye yakın kaynakların hacim başına ortalama ısı üretimi ( $A_0$ )  $3.73 \mu\text{Wm}^{-3}$  ve karakteristik derinlik ( $D$ )  $10 \text{ km}$  olarak alınmıştır.

Eşitlik 9, aşağıda belirtilen sınır koşulları altında çözülmüştür. Bunlar:

- Modelin üst kenarı yani yüzey ( $z=0$ ) boyunca ilk örnek için  $T(x,0) = 10^\circ\text{C}$  ve ikinci örnek için  $T(x,0) = 15^\circ\text{C}$  olarak alınmıştır. Yüzey boyunca olan bu sıcaklık değerleri o bölgedeki yıllık ortalama yüzey sıcaklıkları olarak düşünülmelidir.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

- Modelin düşey kenarlarında ( $x=0$  ve  $x=L$ )  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  dir. Bu düşey kenarların yalıtılmış olduğu yani düşey kenarlar boyunca yatay yönde ısı akısı olmadığı anlamına gelir. Burada  $L$  modelin yatay doğrultudaki uzunluğudur.

- Modelin tabanı boyunca atanacak sınır koşulu o derinlikteki sıcaklık veya ısı akısı olabilir. Ancak bu tür modellemede genellikle bu sınır koşulu ısı akısı olarak tercih edilir. Yer içinde yatay yöndeki ısı akısı düşey yöndeki ısı akısına oranla ihmal edilebilir düzeydedir. Bu nedenle bu sınır boyunca atanacak sınır koşulu düşey yöndeki ısı akısı olarak düşünülmelidir. Buradaki örneklerin ilkinde bu sınır koşulu  $30 \text{ km}$  derinlikte sabit  $30 \text{ mWm}^{-2}$  lik düşey ısı akısı ve ikinci örnekte  $5 \text{ km}$  derinlikte sabit  $80 \text{ mWm}^{-2}$  lik düşey ısı akısı olarak alınmıştır.



Gridin içinde yer alan düğüm (node) noktalarındaki sıcaklık değerlerini 0°C veya herhangi bir sıcaklık değeri olarak atamak başlangıç koşulu için yeterli olmaktadır. Isı iletim denkleminin yukarıda belirtilen başlangıç ve sınır koşulları altında çözülebilmesi için öncelikle belirli bir yeraltı modeline ve bu modelde yer alan jeolojik birimlere ait ısıl parametrelerin (ısı iletim katsayısı, hacim başına ısı üretimi, vb.) belirlenmesine ihtiyaç vardır. Bunlar genellikle yerbilimleri içindeki farklı disiplinlerin kendilerine özgü yöntemleri kullanarak yapacakları ortak çalışmalarla belirlenmektedir.

Sonlu farklar yöntemi ile ısı transferi modellemesinin ilk aşaması eldeki yeraltı modelinin belirlenecek grid aralıklarıyla yatay ve düşey yönlerde ayrıklaştırılarak sonlu farklar gridinin oluşturulmasıdır. Yatay ( $\Delta x$ ) ve düşey ( $\Delta z$ ) yöndeki grid aralıklarının seçiminde dikkat edilmesi gereken nokta bunların modeldeki değişimleri doğru şekilde ifade edebilmesidir. Bilindiği gibi grid aralığı ne kadar küçük ise sonlu farklarla hesaplanan sayısal türevlerdeki hata miktarları da o oranda küçük olur. Ancak küçük grid aralığı sonlu farklar gridindeki düğüm (node) sayısını artıracığından çözüm için daha fazla bilgisayar zamanına (CPU time) ihtiyaç duyulacaktır. Bu nedenle modelin yatay ve düşey yöndeki uzanımları (model boyutları) ve yukarıda belirtilen hususlar göz önünde bulundurularak en uygun (optimum) grid aralıkları belirlenmelidir. Sonlu farklar yöntemi yatay ve düşey yönde farklı grid aralıklarının kullanımına imkan vermesine rağmen bunlar birbirine eşit olarak da alınabilir.

Sonlu farklar algoritmasında grid içinde herhangi bir ( $i, j$ ) noktasındaki sıcaklık değeri bu noktaya komşu olan ( $i+1, j$ ), ( $i-1, j$ ), ( $i, j+1$ ) ve ( $i, j-1$ ) noktalarındaki sıcaklık değerleri kullanılarak hesaplanır. Aşağıda kartezyen koordinat sisteminde herhangi bir ( $i, j$ ) noktasındaki sıcaklık değeri  $T(i, j)$ ' yi veren sonlu farklar ifadesi yer almaktadır,

$$T_{i,j} = \{(\Delta x^2 \Delta z^2) / [\Delta z^2 (K_1 + K_2) + \Delta x^2 (K_3 + K_4)]\} \{[(K_1 T_{m+1, n} + K_2 T_{m-1, n}) / \Delta x^2] + [(K_3 T_{m, n+1} + K_4 T_{m, n-1}) / \Delta z^2] + A\}. \quad (10)$$

Burada,

$$K_1 = K_{m+1/2, n} = 0.5(K_{m+1, n} + K_{m, n}),$$

$$K_2 = K_{m-1/2, n} = 0.5(K_{m-1, n} + K_{m, n}),$$

$$K_3 = K_{m, n+1/2} = 0.5(K_{m, n+1} + K_{m, n}),$$

$$K_4 = K_{m, n-1/2} = 0.5(K_{m, n-1} + K_{m, n})$$

ve  $\Delta x$  ile  $\Delta z$  yatay ve düşey grid aralıkları olup, "A" hacim başına ısı üretimidir ve "K" ısı iletim katsayısını temsil etmektedir (Reiter ve Clarkson, 1983). Eşitlik 10'da yer alan sonlu farklar ifadesi ile grid içindeki düğüm noktalarında sıcaklıkların hesaplanması ve sınır koşullarını kullanarak modelin sınırları boyunca yer alan noktalarındaki sıcaklık değerlerinin belirlenmesi ısı transferi modellemesinin esasını oluşturur. Matematiksel anlamda bu bir sınır değer (boundary-value) problemi çözümdür. Matematiksel fizikte sıklıkla karşılaşılan sınır-değer problemlerinin çözümünde çeşitli algoritmalar kullanılmaktadır. Bunlar içinde en çok tercih edilenleri relaksasyon (relaxation) yöntemleridir. Bu yöntemlerin temelini sınır ve başlangıç koşullarından hareketle yinelemeli (iterative) çözümlerle sonuca ulaşmak oluşturur. Okur bu konudaki daha detaylı bilgileri standart sayısal analiz kitaplarında bulabilir (Press vd., 1986). Bu çalışmada ele alınan problemler relaksasyon yöntemlerinden olan "successive overrelaxation" metodu kullanılarak çözülmüştür. On iterasyonda bir tüm grid noktalarındaki sıcaklıkların toplamı ile on iterasyon önceki toplam arasındaki fark 10°C den küçük olduğu zaman iterasyon durdurularak çözüm tamamlanmıştır.

Gridin tüm noktalarındaki sıcaklıkların hesaplanmış olması ve modeli oluşturan birimlere ait ısı iletim katsayılarının biliniyor olması modelin yüzeyi boyunca açığa çıkan ısı akısının hesaplanmasına olanak verir. Bu, yüzey boyunca olan noktalardaki sıcaklıklar ile yüzeyin hemen altındaki noktalardaki sıcaklıklar kullanılarak hesaplanan gradyan ile yüzey boyunca olan birimlere ait ısı iletim katsayıları kullanılarak kolaylıkla hesaplanabilir (Reiter ve Clarkson, 1983). Yine aynı yaklaşımla modelin herhangi bir noktasındaki ısı akısını da hesaplamak mümkündür.

## 6. ÖRNEKLER

Bu bölümde yukarıda ana hatlarıyla açıklanan yöntemin yerbilimlerinde karşılaşılan bazı problemler üzerindeki uygulamasına yer verilecektir. Bu amaçla iki problem göz önüne alınmıştır. Bunlardan ilki varsayımsal (hypothetic) bir kıtasal kabukta ısı transferi diğeri ise özellikle batı Anadolu'daki temel jeolojik yapılardan olan bir grabendeki ısı transferi problemidir. Ancak bu uygulamada basit bir graben yapısı kullanılmıştır.

### 6.1. Kıtasal Kabukta Isı Transferi Modellemesi

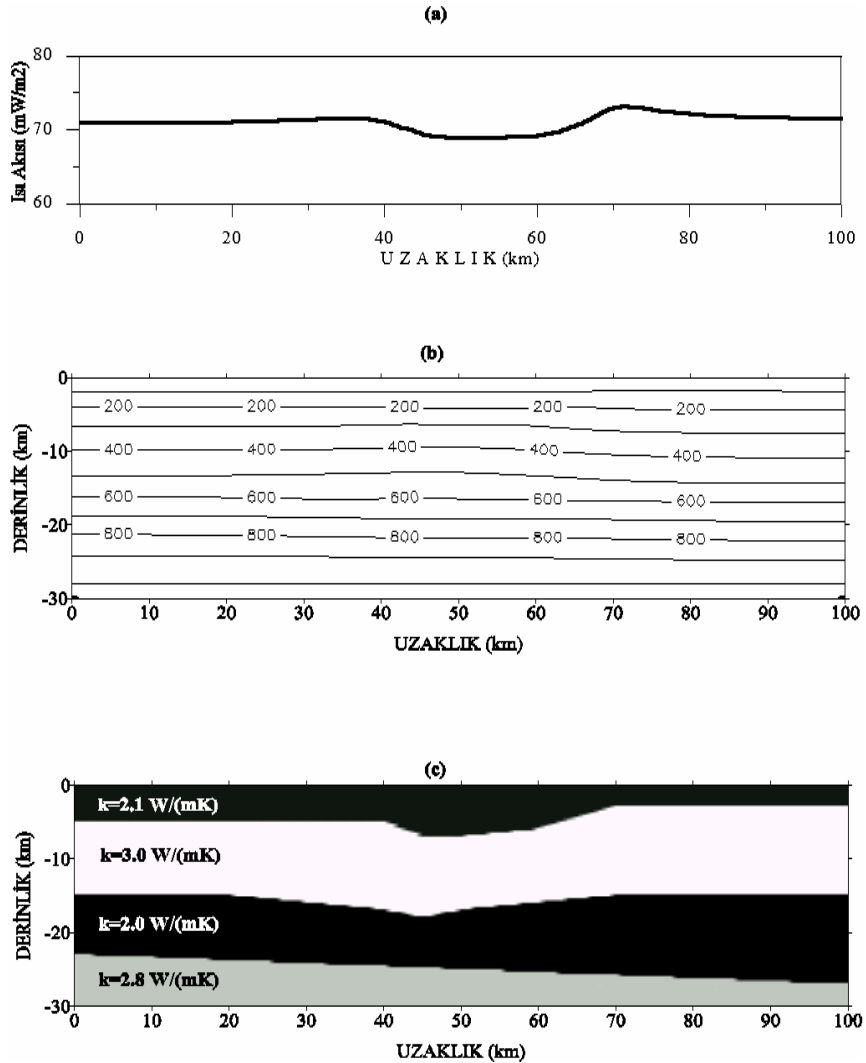
Şekil 4c bu problemde kullanılan kabuk modelini göstermektedir. Model farklı ısı iletim katsayılarına sahip (her bir birime ait ısı iletim katsayıları şekil üzerinde belirtilmiştir) dört birimden (katmandan) oluşmaktadır. Model boyutları yatayda 100 km ve düşeyde 30 km (kıtasal kabuk için kabul edilen ortalama kalınlık değeri) dir. Yatay ve düşey yöndeki grid aralıkları sırası ile 1000 m ve 300 m olarak alınmıştır. Sınır koşulları ise, yüzeyde sıcaklık sabit ve 10°C; model tabanında düşey yöndeki ısı akısı sabit ve 30 mWm<sup>-2</sup> ve de yanal yönde ısı akısı söz konusu değil; modelin düşey kenarları yanal yöndeki ısı akısı için yalıtkan yani bu kenarlar boyunca yatay yöndeki sıcaklık gradyanı sıfır.

Isı transferi simülasyonu (modellemesi) neticesinde elde edilen sonuçlar Şekil 4a ve Şekil 4b'de yer almaktadır. Şekil 4b modeldeki sıcaklık dağılımı ve Şekil 4a ise model yüzeyi boyunca hesaplanan ısı akısı profilini göstermektedir. Şekil 4b incelendiğinde izotermilerin (eşsıcaklık eğrilerinin) hemen hemen düz ve yavaş değiştikleri gözlenmektedir. Bunun nedeni modelin alt ve üst kenarları boyunca olan sınır koşullarının sabit bir değerde olup uzaklık ile değişim göstermemesidir. Ayrıca modeldeki arayüzeylerin ani değişen topoğrafyaya sahip olmaması da bunda etkindir. Sıcaklıklar 10 km derinlikte 400°C, 20 km derinlikte 800°C ve model tabanında (30 km derinlikte) yaklaşık 1100°C' ye ulaşmaktadır. Şekilde üzerinde kontur değeri bulunmayan izoterm 1000°C sıcaklığa karşılık gelmektedir. Yüzey boyunca olan ısı akısı profili incelendiğinde çok fazla değişim göstermeyen ve ortalama 70 mWm<sup>-2</sup> lik bir değere sahip ısı akısı ile karşılaşmaktayız (Şekil 4a). Ancak okur yüzey boyunca olan ısı akısı profilinin, modelde yüzeye en yakın birimin arayüzey topoğrafyasının bir fonksiyonu olarak değiştiğine dikkat etmelidir.

### 6.2. Grabende Isı Transferi Modellemesi

Grabenler kenarları düşey yada eğimli normal faylarla sınırlanmış ve sedimanla dolmuş çöküntü alanlarıdır. Özellikle batı Anadolu, bu bölgede hüküm süren aktif tektonizmanın bir sonucu olarak horst-graben sistemleriyle karakterize olan bir bölgedir. Aynı zamanda bölgedeki grabenler kabuktaki termal rejimin de etkisiyle önemli bir jeotermal enerji potansiyeline sahiptirler. Bu nedenle graben türü bir yapıda ısı iletiminin en temel hali olan konduktif ısı iletiminin incelenmesi faydalı olacaktır.

Şekil 5c, bu modellemede göz önüne alınan graben modelini göstermektedir. Model ısı iletim katsayıları bir birinden farklı iki birimden oluşmaktadır. Bunlardan ilki  $2.1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  lik ısı iletim katsayısına sahip sediman dolgu diğeri ise  $3.0 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  lik ısı iletim katsayısına sahip temel olarak düşünülen birimdir. Model yatayda 15 km ve düşeyde 5 km'lik uzanımına sahiptir. Grabenin maksimum derinliği 2 km olup eğimli normal faylarla sınırlanmış bir geometriye sahiptir. Yatay ve düşey yöndeki grid aralıkları sırasıyla 150 m ve 50 m olarak alınmıştır. Sınır koşulları bir önceki örnekle aynı türde olup model tabanındaki düşey ısı akısı  $80 \text{ mWm}^{-2}$  ve model yüzeyindeki sıcaklık  $15^\circ\text{C}$  olarak alınmıştır. Sedimanlar diğeri kayaç türlerine (magmatik ve metamorfik kayaçlar) göre ihmal edilebilecek düzeyde radyoaktif mineral içerdiklerinden, graben içinde radyojenik kökenli ısı üretiminin olmadığı varsayılmıştır. Şekil 5b ve Şekil 5a simülasyon neticesinde elde edilen sonuçları göstermektedir. Model içindeki sıcaklık dağılımı incelendiğinde (Şekil 5b) 2.5 km derinlikte yaklaşık  $150^\circ\text{C}$  ve modelin tabanında yani 5 km derinlikte ise yaklaşık  $250^\circ\text{C}$  sıcaklık değerlerine ulaşıldığı görülmektedir (Şekilde üzerinde kontur değeri bulunmayan izoterm  $250^\circ\text{C}$ 'ye karşılık gelmektedir). Ayrıca izotermeler ani değişimler göstermeden yavaş bir şekilde değişmektedir. Ancak grabenin içinde ve altındaki bölgelerde izotermelerin yüzeye yaklaştığı görülmektedir.



Şekil 4. Varsayımsal bir kabuk modeli kullanılarak gerçekleştirilmiş ısı transferi modellemesi (a) Yüzeyde hesaplanan ısı akısı (b) modeldeki sıcaklık dağılımı ( $^\circ\text{C}$ ) ve (c) simülasyonda kullanılan kabuk modeli

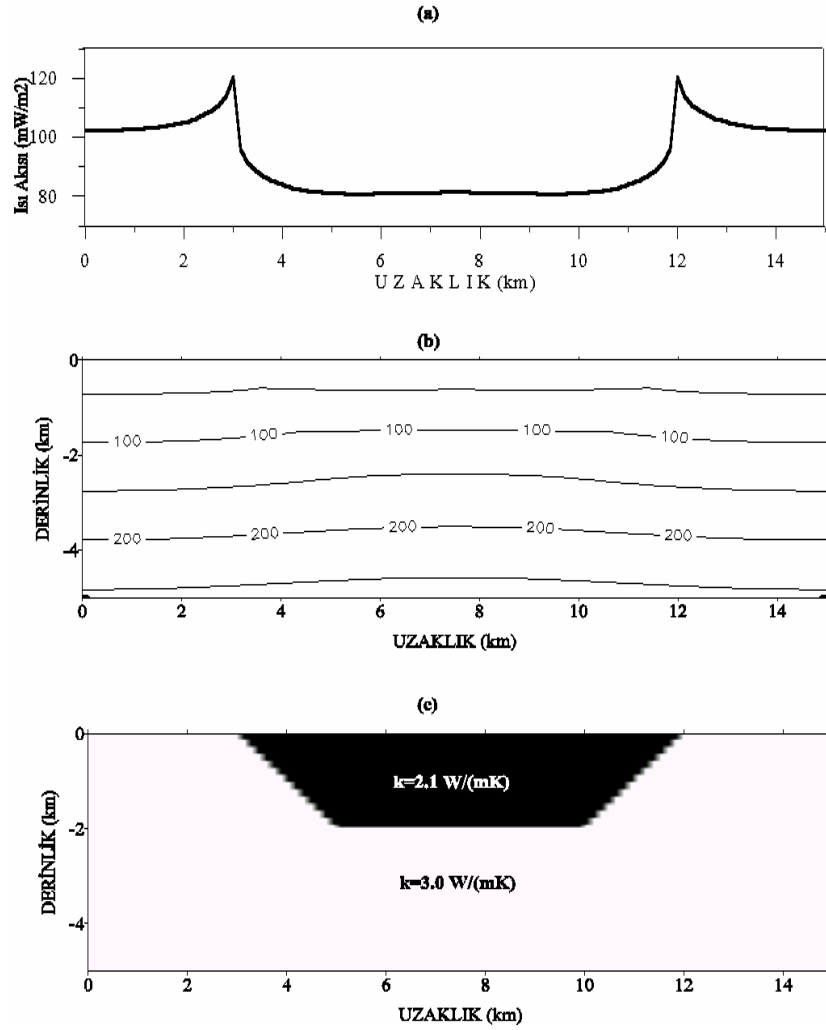
Bu da grabenin ve graben altındaki bölgelerin çevre ortama göre daha sıcak olduğunu ifade etmektedir. Bu olguyu şu şekilde açıklayabiliriz. Bilindiği graben ısı iletim katsayısı değeri düşük olan sedimanla doludur. Isı iletim katsayısı düşük olan malzeme ısı enerjisini yavaş bir şekilde iletir. Bu nedenle grabene giren enerji yüzeye yavaş bir şekilde iletilir. Bu da grabenin ve graben altındaki bölgelerin çevre ortama göre daha yavaş soğumasına yani daha sıcak olarak kalmasına sebep olur.

Şekil 5a yüzeyde hesaplanan ısı akısı profilini göstermektedir. Isı akısı profili simetrik bir değişime sahiptir. Profil yaklaşık  $100 \text{ mWm}^{-2}$  lik bir değerden başlamakta ve grabene yaklaştıkça artmakta ve tam graben sınırında ( $\sim 3 \text{ km}$ )  $120 \text{ mWm}^{-2}$  lik maksimum değerine ulaşmakta ve bu noktadan sonra ani bir düşüş ile  $80 \text{ mWm}^{-2}$  lik bir değere inmektedir. Isı akısı graben boyunca bu değerde kalmakta ve yine graben sınırında ( $\sim 12 \text{ km}$ )  $120 \text{ mWm}^{-2}$  lik değere çıkmakta ve graben dışında yavaş yavaş azalarak  $100 \text{ mWm}^{-2}$  lik değere ulaşmaktadır. Bu haliyle graben boyunca olan ısı akısı ilginç bir değişim sergilemektedir. Bu duruma sebep olan olgular yüzeye yakın bölgedeki sıcaklık gradyanı ve ısı iletim katsayısındaki ani yanal değişimlerdir. Bu basit modelleme çalışması göstermektedir ki sadece kondüktif yolla olan ısı iletim mekanizması göz önüne alındığında grabenler göreceli olarak düşük ısı akısı ile karakterize olmaktadır.

## 7. SONUÇLAR

Sıcaklık yer içindeki en önemli parametrelerden biridir. Yerkabuğunun ısıl yapısı ile onun tektoniği ve deprenselliği ilişkilidir çünkü yer içinin reolojisi sıcaklığın bir fonksiyonudur. Yer içindeki sıcaklık dolayısıyla ısı akısı ölçümleri oldukça zordur ve çeşitli unsurların etkisi altındadır. Bu nedenle yer içinde sıcaklığın yanal ve düşey doğrultularda nasıl değiştiğinin anlaşılabilmesi için 2B ve 3B sayısal modelleme çalışmaları yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu yöntemlerin esasını bir sınır değer problemi olan kararlı-hal kondüktif ısı transferi denkleminin sayısal olarak çözülmesi oluşturur. Bu sayede model içindeki herhangi bir noktada sıcaklık ve ısı akısı hesaplanabilmektedir. Programlanabilme kolaylığı açısından sonlu farklar yaklaşımı ısı transferi problemlerinin çözümünde en fazla tercih edilen yöntemdir. Bu çalışmada sonlu farklar algoritması 2B ısı transferi problemlerinin çözümünde başarılı bir şekilde kullanılmıştır. Ayrıca 2B' dan 3B modellemeye kolayca geçilebilir.

Burada incelenen örnekler varsayımsal bir kıtasal kabuk ve graben türü yapıdaki kararlı-hal kondüktif ısı transferi problemlerinden oluşmaktadır. Kıtasal kabuk modelinde model tabanındaki sınır koşulunun sabit değerdeki ısı akısından oluşması ve model ara yüzeylerinin çok hızlı değişmeyen bir topoğrafyaya sahip olmasından dolayı oldukça düz ve yavaş değişen izotermeler elde edilmiştir. Maksimum sıcaklık kabuğun tabanında  $1100^\circ\text{C}$  olarak hesaplanmıştır. Yüzey boyunca hesaplanan ısı akısı değişimi ise tıpkı gravite çalışmalarında elde edilen anomaliler gibi yüzeye en yakın birimin taban topoğrafyasının bir fonksiyonu olarak değişmektedir. Yüzey boyunca olan ısı akısı değerleri  $70$  ile  $80 \text{ mWm}^{-2}$  arasında değişmektedir. Graben örneğinde ise en dikkat çekici nokta ısı iletim katsayısı düşük olan sedimanla dolu bulunan grabenin çevre ortama göre daha yüksek sıcaklığa sahip olmasıdır. Bu örnekte grabenin içindeki sıcaklıklar çevre ortama göre yaklaşık  $15\text{-}20^\circ\text{C}$  daha sıcak olarak elde edilmiştir. Ancak graben boyunca olan ısı akısı ise çevre ortama kıyasla daha düşük olarak hesaplanmıştır. Burada verilen örneklerde görüldüğü gibi sayısal modelleme yer içinde meydana gelen fiziksel olayların incelenmesinde önemli bir araçtır. Bilimdeki bu yeni paradigma bilgisayar teknolojisi ve sayısal hesaplama yöntemlerindeki ilerlemelere bağlı olarak yüksek bir ivme ile gelişmekte; endüstriyel ve akademik çevreler tarafından da giderek daha yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.



Şekil 5. Graben türü bir yapı kullanılarak gerçekleştirilmiş ısı transferi modellenmesi (a)Yüzeyde hesaplanan ısı akısı (b) modeldeki sıcaklık dağılımı ( $^{\circ}\text{C}$ ) ve (c) simülasyonda kullanılan yer altı modeli

## 8. KAYNAKLAR

- Condie K.C. (1970): "Plate tectonics and crustal evolution", Pergaman Press Inc., New York.
- Čermak, V., Bodrı L., Schultz R., Tanner, B. (1991): "Crustal temperatures along the central segment of the European Geotraverse", Tectonics, v. 195, p. 241-251.
- Hänel R. (1976): "Geothermic investigations", Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, p. 32-39.
- Kukkonen I.T., Jöeleht A. (1996): "Geothermal Modelling of the Lithosphere in the Central Baltic Shield and its Southern Slope", Tectonophysics, v. 255, p. 25-45.
- Lachenbruch A.H. (1970) : "Crustal Temperatures and Heat Production: Implications of the Linear Heat Flow Relationship", J. Geophys. Res. v. 75, p. 3291-3300.
- Lewis C.R., Rose S.C. (1970): "A Theory Relating High Temperatures and Overpressures", Jour. Petroleum Technology, v. 22, p. 11-16.
- Mayhew M.A. (1982): "Application of Satellite Magnatic Anomaly Data to Curie Isoterm Mapping", Jour. Geophys. Res., v. 87, p. 4846-4854.
- Palciauskas V.V. (1986): "Models For Thermal Conductivity and Permeability in Normally

- Compacting Basins”, Paris, Editions Technip, p.323-336.
- Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterlingi W.T. (1986): "Numerical recipes, the art of scientific computing", Cambridge University Press, pp. 818.
- Reiter M., Clarkson G. (1983): "Geothermal studies in the San Juan Basin and the Four Corner area of the Colorado Plateau, II. Steady-state models of the thermal source of the San Juan volcanic field", Tectonophysics, v. 91, p. 253-269.
- Sams M.S., Thomas-Betts A. (1988): "3-D numerical modelling of the conductive heat flow of SW England", Geophys. J., v. 92, p. 323-334.
- Sanver M. (1983): "Yerkürenin ısı evrimi ve günümüzde yerinin sıcaklığı", İstanbul, İstanbul Teknik Üniversitesi, Maden Fakültesi, 798 s.
- Schatz J.F., Simmons G. (1972): "Thermal conductivity of earth materials at high temperatures", Jour. Geophys. Res., v. 77, p. 6966-6983.
- Turcotte D.L., Schubert G. (1982): "Geodynamics -Application of continuum physics to geological problems", New York, Wiley, pp. 705.
- Ungerer P., Burrus J., Doligez B., Chenet P.Y., Bessis F. (1990): " Basin evaluation by integrated two-dimensional modeling of heat transfer, fluid flow, hydrocarbon generation, and migration", AAPG Bull, v. 74, p. 309-335.
- Yalçın M.N. (1990): "Hidrokarbon aramalarında bilgisayar destekli havza modelleri", Ankara, Petrol Jeologları Derneği & Petrol Mühendisleri Odası, Türkiye 8. Petrol Kongresi, s. 228-239 (Engl. abst. p. 228).
- Yalçın M.N, Littke R., Sachsenhofer R. F. (1997): "Thermal history of sedimentary basins", Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, pp. 535.
- Yüncü H., Kakaç S. (1999): " Temel ısı transferi", Ankara, Bilim Yayıncılık, 454 s.
- Zoth G., Haenel R. (1988): "Thermal conductivity", Dordrecht, Kluwer, p. 449-466.