



## ZAMAN-FREKANS DÜZLEMİNDE SİNYAL BİLEŞENİ ÇIKARIMI İÇİN YENİ BİR YÖNTEM

(A NOVEL METHOD FOR SIGNAL COMPONENT INCISION IN THE  
TIME-FREQUENCY PLANE)

Yaşar Kemal ALP\*, Orhan ARIKAN\*, Umut ÖZERTEM\*\*

### ÖZET/ABSTRACT

Zaman-frekans düzleminde örtüşmeyen, tıkHz bileşenlere sahip sinyallerin bileşenlerini tespit eden ve ayrıştıran yeni bir zaman-frekans sinyal analizi tekniğı geliştirilmiştir. Geliştirilen tekniğın oldukça yüksek gürültü seviyelerinde bile sinyallerin ayrıştırılmasında başarılı olduğı gözlemlenmiştir. Önerilen teknik, 1) Sinyal bileşenlerinin tespiti, 2) Tespit edilen bileşenlerin anlık frekanslarının kestirimi, 3) Zaman-frekans düzleminde filtreleme basamaklarından oluşmaktadır. Bu kuram, döngüsel olup, her bir döngüde bir sinyal bileşeni tespit edilip ayrıştırılmaktadır. Ölçüm sinyalindeki bileşenlerin tespiti ve anlık frekans kestirimi için, zaman-frekans dağılımları kullanılmıştır. Anlık frekans kestirimi, gürültüye karşı hassasiyeti oldukça gürbüz olan, *ana eğri izdüşümleri* ile elde edilmiştir. Zaman-frekans düzleminde filitreleme *frekans bükme* ile sağlanmıştır. Önerilen tekniğın başarımı sentetik sinyaller üzerinde çeşitli gürültü seviyelerinde incelenmiştir.

*A new time-frequency signal analysis technique for detection and extraction of signal components, which have non-overlapping compact support in the time-frequency plane, is developed. Proposed technique is observed to be successful even under high noise levels. The method is composed of three main steps: 1) detection of signal components, 2) estimation of instantaneous frequencies of the detected components 3) filtering in the time-frequency plane. By construction, it is an iterative algorithm which detects and extracts one component at a time. Time-frequency distributions are utilized for signal component detection and instantaneous frequency estimation. Principle curve projections, which is very robust to noise, is used for instantaneous frequency estimation. Filtering in the time-frequency plane is accomplished by frequency warping. The performance of the proposed algorithm is analyzed on synthetic data sets for different noise levels.*

### ANAHTAR KELİMELELER/KEYWORDS

Sinyal bileşeni, Zaman-frekans dağılımı, Anlık frekans, Ana eğri izdüşümleri

*Signal component, Time-frequency distribution, Instantaneous-frequency, Principle curve projections*

---

\* Bilkent Ün., Elektrik-Elektronik Müh.Bölümü, Bilkent, ANKARA

\*\* Yahoo Inc., Santa Clara, CALIFORNIA

## 1. GİRİŞ

Sinyal bileşenlerinin tespit edilmesi ve ölçüm sinyalinin bileşenlerine ayrıştırılması önemli bir sinyal işleme uygulamasıdır. Birçok uygulamada sinyal bileşenlerinin bir vektör uzayının alt uzayında yer aldığı ve uzayı geren taban vektörler cinsinden tanımlanabileceği varsayımı ile ölçüm sinyali bileşenlerine ayrıştırılır. Bu çalışmada, sinyal bileşenlerinin zaman-frekans düzlemindeki destek bölgelerinin örtüşmeyen adacıklar halinde olduğu varsayımı ile yeni bir sinyal analiz tekniği önerilmektedir. Bu varsayımın uyan sinyaller elektronik harp uygulamaları, beyin sinyal analizi ve aşınan makine parçalarının tespiti gibi oldukça farklı uygulamalarda gözlemlenmektedir.

Ölçüm sinyallerini bileşenlerine ayıran bir çok yöntem vardır. Bütün bu yöntemlerin ortak özelliği, sinyal bileşenlerini parametrik bir zaman fonksiyonunun farklı parametreler için değerleri olarak tanımlamaktır. Fourier dönüşümünde, ölçüm sinyali farklı frekanslara sahip sinüsler cinsinden ayrıştırılmaktadır. Bu dönüşüme göre farklı frekansa sahip olan her bir sinüs bir sinyal bileşenidir. Dalgacık dönüşümünde ise ölçüm sinyali ana dalgacığın farklı zaman ve frekans ölçeklerindeki halleri cinsinden yazılmaktadır (Daubechies, 1990). Burada farklı zaman ve frekans ölçeğine sahip her dalgacık bir sinyal bileşenidir. Fourier dönüşümü ile zaman eksenine paralel, frekans eksenine dik olan doğrularla ayrıştırılan zaman-frekans düzlemi, dalgacık dönüşümü ile büyüklüğü dalgacığın zaman ve frekans ölçeğine göre değişen dikdörtgenel alanlara ayrıştırılmıştır. Gabor ve chirplet dönüşümünde ise, zaman merkezi, frekans merkezi, zaman-frekans düzlemindeki yayılımı(varyansı) ve chirp hızı gibi parametrelere sahip parametrik bir fonksiyon tanımlanmış olup, ölçüm sinyali bu fonksiyonun farklı parametreler için aldığı değerler cinsinden ayrıştırılmaktadır (Qian ve Chen, 1993; Mann ve Haykin, 1995). Bütün bu yöntemlerde sinyal bileşenleri, parametrik bir fonksiyonun farklı parametrelerdeki halleri olarak tanımlanmıştır.

Sinyal bileşenlerinin parametrik olarak tanımlanmasının önemli avantajı, herhangi bir ölçüm sinyalinin, parametre uzayından yeteri sıklıkta örnek alındığında, bu örneklerle karşılık gelen bileşenler cinsinden hassas bir şekilde temsil edilebilir olmasıdır. Dezavantajı ise, incelenen sinyal bu bileşenlere tam olarak uyumlu değil ise başarımın önemli derecede düşmesidir. Örneğin, basit bir Gauss fonksiyonu dalgacık dönüşümü ile ayrıştırıldığında, tek bileşeni olan ölçüm sinyali bir çok dalgacık bileşenine ayrışır. Bu bakımdan parametrik bileşen ayrıştırma yöntemleri, genellikle ölçüm sinyalini gürültüden arındırmak için kullanılır.

Zaman-frekans dağılımları, sinyalin frekans içeriğinin zamana göre nasıl değiştiğini gösteren birleşik zaman-frekans fonksiyonlarıdır (Cohen, 1989). Zaman-frekans düzleminde yoğunlaşmış tıkHz destek alanına sahip olan bir sinyal, hem zaman tanım kümesinde hem de frekans tanım kümesinde (Fourier tanım kümesinde) tıkHz bir destek alanına sahip olacaktır. Bu bakımdan, sezgisel olarak, sinyal bileşenleri zaman-frekans düzleminde tanım alanı tıkHz olan, yoğunlaşmış enerji olarak tanımlanabilir (Cohen, 1992).

Bu çalışmada, zaman-frekans düzleminde tıkHz destek alanlı bileşenlere sahip sinyallerin, yüksek gürültü altında kaydedilmiş ölçümlerinden bileşen ayrıştırımı yapan yeni bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntem Özdemir'in çalışmasının devamı niteliğinde olup literatürdeki benzerlerinden sinyal bileşenleri üzerinde hiç bir parametrik yapı varsaymaması ile ayrılmaktadır (Özdemir, 2003).

2. Bölümde ölçüm sinyali modeli ve problemin matematiksel tanımı verilmiştir. 3. Bölümde tek bileşenli, gürültülü sinyallerin analizi ve önerilen bileşen çıkarma yöntemi anlatılmıştır. 4. Bölümde anlık frekans kestirim yöntemi verilmiştir. 5. Bölümde kesirsel Fourier dönüşümün zaman-frekans düzlemi üzerindeki rotasyon etkisi ve bu dönüşümün hangi durumlarda anlık frekans kestiriminde kullanıldığı açıklanmıştır. Çok bileşenli

sinyallerin önerilen yöntemle analizi 6. Bölümde detaylandırılmış olup 7. Bölüm sonuçlara ayrılmıştır.

## 2. SİNYAL MODELİ VE PROBLEM TANIMI

Bu bölümde çok bileşenli, gürültü altında kaydedilmiş ölçüm sinyali için kurulan model ve bileşen ayrıştırma probleminin matematiksel tanımı anlatılmıştır. Sonraki bölümlerde sıkça kullanılacak olan *analitik denk* ve *anlık frekans* terimleri açıklanmıştır.

$N_b$  tane bileşenden oluşan çok bileşenli bir sinyalin gürültü altındaki kaydı

$$s(t) = \sum_{i=1}^{N_b} b_i(t) + n(t) \quad (1)$$

olarak modellenir. Burada  $b_i(t)$   $i$ . bileşeni,  $n(t)$  ise beyaz Gauss gürültüsünü belirtmektedir. Çözmeye çalıştığımız problem, sadece ölçüm sinyali  $s(t)$  verildiğinde, bileşen kestirimleri  $\tilde{b}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_b$  'nin çıkarımıdır. Eşitlik 1'de verilen problem formülizasyonuna bakıldığında, ölçüm sinyali  $s(t)$  'nin sonsuz değişik yolla  $N_b$  tane bileşene ayrıştırılabilir olduğu açıktır. Bu noktada, sinyal bileşenleri üzerinde yapılan, *sinyal bileşenlerinin zaman-frekans düzleminde tıkHz destek alanlarına sahip örtüşmeyen sinyal parçacıklarıdır* varsayımı, Eşitlik 1'de verilen problemin tek bir çözümünün olmasını sağlamaktadır. Ölçüm sinyali içindeki bileşenlerin sayısı ve zaman-frekans destek bölgeleri,  $s(t)$  'nin zaman-frekans dağılımı gözlemlenerek belirlenecektir.

Herhangi bir gerçek  $b(t)$  sinyalinin analitik dengi

$$\hat{b}(t) = b(t) + j\bar{b}(t) \quad (2)$$

ile hesaplanır. Burada  $j = \sqrt{-1}$  'dir ve  $\bar{b}(t)$ ,  $b(t)$  sinyalinin

$$\bar{b}(t) = b(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (3)$$

ile tanımlı Hilbert dönüşümüdür (Cizek, 1970). Verilen herhangi bir  $b(t)$  sinyali için hesaplanabilen analitik denk  $\hat{b}(t)$

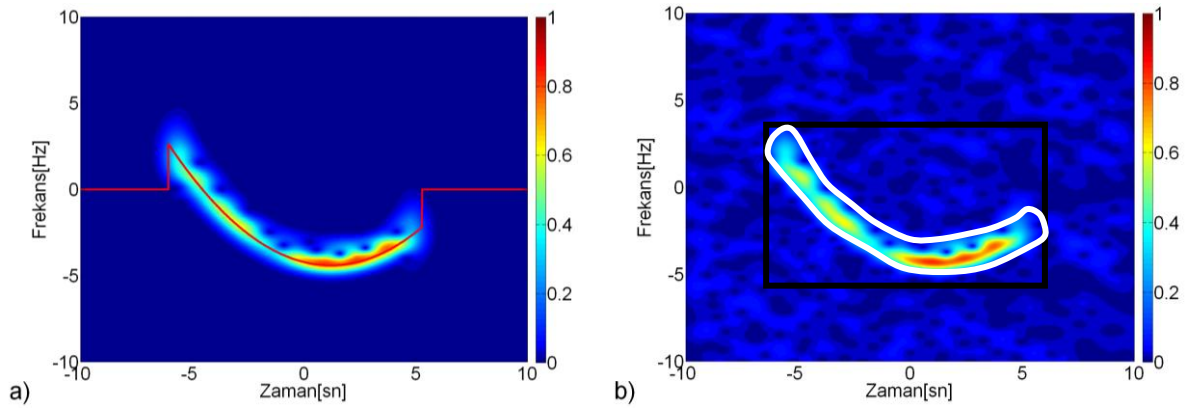
$$\hat{b}(t) = A(t) \exp\{j2\pi\phi(t)\} \quad (4)$$

yapısındadır. Eğer sinyal sadece tek bir bileşenden oluşuyorsa,  $\phi(t)$  sinyalin anlık fazını verir. Anlık frekans  $f(t)$  ile anlık faz  $\phi(t)$  arasında

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (5)$$

bağıntısı vardır. Hilbert dönüşümü doğrusal bir operatör olduğundan, Eşitlik 1’de verilen çok bileşenli sinyalin analitik dengi

$$\begin{aligned}
 \hat{s}(t) &= \sum_{i=1}^{N_b} b_i(t) + \sum_{i=1}^{N_b} \bar{b}_i(t) + n(t) + \bar{n}(t) \\
 &= \sum_{i=1}^{N_b} \hat{b}_i(t) + \hat{n}(t) \\
 &= \sum_{i=1}^{N_b} A_i(t) \exp\{j2\pi\phi_i(t)\} + \hat{n}(t)
 \end{aligned} \tag{6}$$



Şekil 1. (a) Bileşenin zaman-frekans dağılımı ve anlık frekansı, (b) ölçüm sinyali üzerinde optimal olmayıp gerçekleştirilebilen süzgeç (siyah çizgi) ile optimal olup gerçekleştirilemeyen süzgeçin (beyaz çizgi) zaman-frekans düzleminde gösterimi

yapısındadır. Burada  $\phi_i(t)$ ,  $i$ 'inci bileşenin anlık fazı,  $\hat{n}(t)$  ise gürültünün analitik dengidir. Bir sonraki bölümde, süzgeçleme aşamalarını kolaylıkla ifade edebilmek amacıyla, tek bileşenli ölçüm sinyalinin analizi ve sinyal bileşeninin gürültüden arındırılması detaylandırılmıştır. Sonraki bölümlerde çok bileşenli durum detaylandırılacaktır.

### 3. TEK BİLEŞENLİ, GÜRÜLTÜLÜ BİR SİNYALİN ANALİZİ VE BİLEŞEN ÇIKARIMI

Tek bileşenli sinyaller için, bileşen çıkarımı problemi, aslında bir gürültüden arındırma problemidir. Bu bölümde, tek bileşenli sinyallerde, sinyal bileşenlerinin en iyi şekilde gürültüden arındırılması anlatılmıştır.

Tek bileşenden oluşan sinyalin gürültü altındaki kaydı

$$s(t) = b(t) + n(t) \tag{7}$$

olarak yazılsın. Şekil 1a, karesel anlık frekansa sahip, sentetik olarak oluşturulan bir bileşenin zaman-frekans dağılımını göstermektedir. Kırmızı çizgi bu bileşenin anlık frekansını belirtmektedir. Şekil 1b’de ise, bu bileşen üzerine sinyal-gürültü oranı (SGO), 5 dB olacak şekilde gürültü eklenerek oluşturulan ölçüm sinyalinin zaman-frekans dağılımı verilmiştir. Bu bileşenin gürültüden arındırılması için doğrudan ölçüm sinyali üzerinde yapılacak olan süzgeçleme ve zamanda kesme, Şekil 1b’de siyah çizgilerle gösterilen alanın zaman-frekans

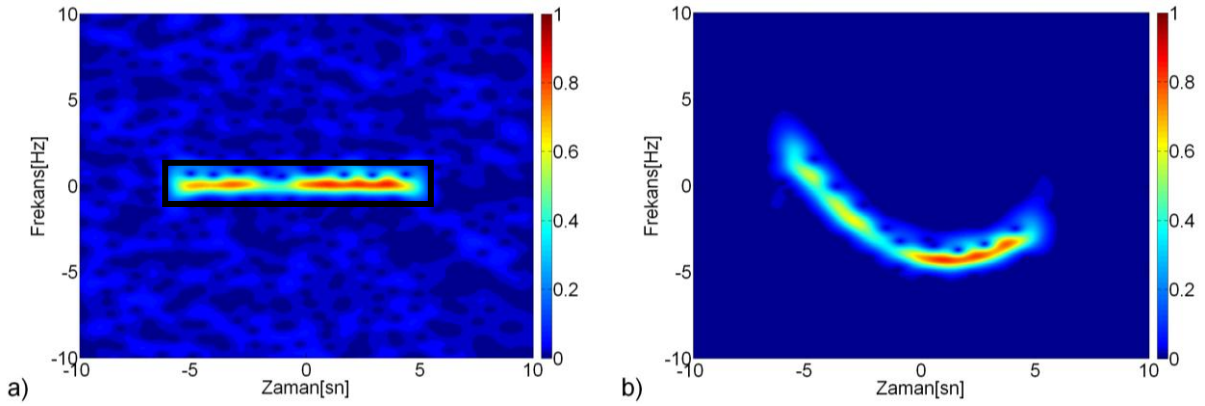
düzleminde kesilip çıkarılmasına karşılık gelmektedir. Ancak bu işlem sonucunda bileşenin yanısıra dikdörtgen içine düşen gürültü de çıkarılmış olacaktır. Yapmak istediğimiz, yine aynı şekil üzerinde beyaz eğri ile belirtilen sinyalin destek alanını kapsayan bölgenin zaman-frekans düzleminde kesilip çıkartılmasıdır.

Ölçüm sinyali  $s(t)$  'nin analitik dengi hesaplandığında

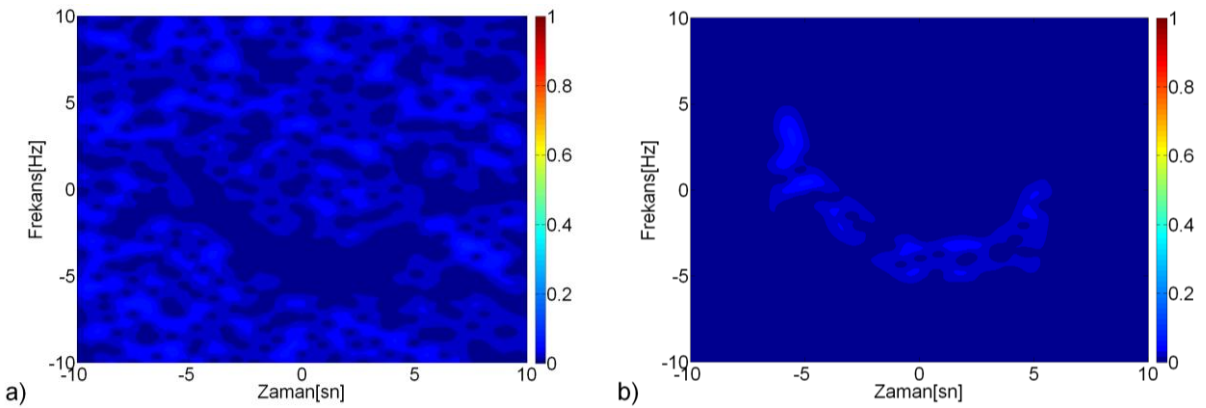
$$\begin{aligned}\hat{s}(t) &= \hat{b}(t) + \hat{n}(t) \\ &= A(t) \exp\{j2\pi\phi(t)\} + \hat{n}(t)\end{aligned}\quad (8)$$

elde edilir. Varsayalım ki, sinyal bileşeninin anlık frekansı  $f(t)$  biliniyor. Bileşenin anlık fazı  $\phi(t)$ , Eşitlik 5'de verilen bağıntı ile hesaplanabilir. Eşitlik 8'de verilen eşitliğin her iki tarafı  $\exp\{-j2\pi\phi(t)\}$  ifadesi ile çarpıldığında,  $\hat{s}(t)$  'nin alçak frekanslı eşleniği olan  $\hat{s}_l(t)$  elde edilir.

$$\hat{s}_l(t) = A(t) + \hat{n}_l(t) \quad (9)$$



Şekil 2. (a) Belkemiği düzeltilmiş sinyal ve optimale oldukça yakın, gerçekleştirilebilen süzgecin (siyah çizgi) zaman-frekans düzleminde gösterimi, (b) bahsedilen işlemler sonucunda çıkarılan sinyal bileşeninin zaman-frekans dağılımı



Şekil 3. (a) Ölçüm sinyali ile çıkarılan bileşen arasındaki farkın,  $s(t) - \tilde{b}(t)$ , zaman-frekans dağılımı, (b) bileşen çıkarım hatası  $e(t) = b(t) - \tilde{b}(t)$  'nin zaman-frekans dağılımı

Burada  $\hat{s}_l(t) = \hat{s}(t) \exp\{-j2\pi\phi(t)\}$  ve  $\hat{n}_l(t) = \hat{n}(t) \exp\{-j2\pi\phi(t)\}$  olup  $\hat{s}_l(t)$  artık alçak frekanslı bir sinyaldir. Bahsedilen işlem Şekil 1b'de gösterilen tek bileşenli gürültülü sinyale uygulandığında elde edilen alçak frekanslı sinyal dengi  $\hat{s}_l(t)$ 'nin zaman-frekans dağılımı Şekil 2a'da verilmiştir. Görüldüğü üzere, bileşenin anlık frekansı bükülerek *belkemiği* düzleştirilmiş, süzgeçleme işlemi için en uygun hale getirilmiştir. Belkemiği düzleştirilen sinyalin, siyah dikdörtgenle belirtilen zaman ve frekans aralıklarında kesilmesi ve süzgeçlenmesi sonucu elde edilen temiz sinyal,  $\exp\{j2\pi\phi(t)\}$  ifadesi ile çarpılarak eski frekans destek alanına oturtulur. Sonuçta çıkarılan bileşenin zaman-frekans dağılımı Şekil 2b'de verilmiştir. Görüldüğü üzere, Şekil 2b'deki çıkarılan bileşenin zaman-frekans dağılımı Şekil 1a'da verilen bileşenin zaman-frekans dağılımına oldukça benzemektedir. Şekil 3a'da, ölçüm sinyali ile çıkarılan bileşen arasındaki farkın,  $s(t) - \tilde{b}(t)$ , zaman-frekans dağılımı verilmiştir. Sinyal bileşeninin destek alanı dışında kalan gürültü hiç bir şekilde çıkarılan bileşene dahil edilmemiştir. Şekil 3b'de ise, gerçek bileşen ile çıkarılan bileşen arasındaki hatanın,  $e(t) = b(t) - \tilde{b}(t)$ , zaman-frekans dağılımı görülmektedir. Hata, sadece bileşenin destek alanı üzerindedir ki bu hatayı yok etmenin hiçbir yolu yoktur.

Anlatılan yöntemde bileşenin anlık frekansının bilindiği varsayılmıştır. Ancak sadece ölçüm sinyali bilindiğinden, bileşenin anlık frekansı ölçüm sinyali üzerinden kestirilmelidir. Sıradaki bölümde anlık frekans kestirim yöntemi anlatılmıştır.

#### 4. ANLIK FREKANS KESTİRİMİ

Literatürde anlık frekans kestirimi yapan birçok algoritma vardır (Boashash, 1992<sup>1</sup>; Boashash, 1992<sup>2</sup>). En temel anlık frekans kestiricisi Hilbert dönüşümüdür (Picinbono, 1997). Eğer sinyal tek bir bileşen içeriyorsa, Eşitlik 4'de verilen analitik denk üzerinden anlık frekans kestirimi yapılabilir.

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (\arg \hat{b}(t)) \quad (10)$$

Ancak, eğer sinyal birden çok bileşen içeriyorsa, Eşitlik 10'da verilen anlık frekans kestirimi doğru olmayacaktır. Çok bileşenli sinyallerde, genellikle sinyalin zaman-frekans dağılımı üzerinden anlık frekans kestirimi yapılmaktadır. Bu çalışmada kısa zaman önce önerilen *temel eğri izdüşümleri* yöntemi kullanılmıştır (Erdoğan ve Özerdem, 2007). Bu yöntem verilen bir resim üzerindeki ana eğrileri belirlemektedir. Yöntem, zaman-frekans dağılımlarına uygulandığında, dağılım üzerindeki tepeliklerden geçen eğrileri bulmaktadır. Bu eğriler, sinyalin anlık frekansının başarılı kestirimleridir. Temel eğri izdüşümleri yöntemi gürültüye karşı çok gürbüz olup çok düşük SGO'larda bile başarılı anlık frekans kestirimi yapabilmektedir.

Ölçüm sinyali  $s(t)$ 'nin zaman-frekans dağılımı  $C_s(\mathbf{x})$  olsun. Burada  $\mathbf{x} = (t, f)$  olup, dağılımın değeri ayrık  $\mathbf{x}_{ij} = (t_i, f_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_t$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_f$  noktalarında hesaplanmış olsun.  $C_s(\mathbf{x})$  verildiğinde aşağıdaki parametrik zaman-frekans yüzeyi  $K(\mathbf{x})$ 'i düşünelim.

$$K(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_t N_f} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_f} C_s(\mathbf{x}_{ij}) G_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ij}) \quad (11)$$

Burada  $G_\sigma(\cdot)$  band genişliği  $\sigma$  olan iki boyutlu Gauss fonksiyonudur.  $K(\mathbf{x})$  yüzeyinin gradyan vektörü  $g(\mathbf{x})$  ve hessiyan matrisi  $H(\mathbf{x})$

$$g(\mathbf{x}) = -\frac{1}{N_t N_f \sigma^2} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_f} C_s(\mathbf{x}_{ij}) G_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ij}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ij}) \quad (12)$$

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_t N_f \sigma^2} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_f} \left[ \frac{1}{\sigma^2} C_s(\mathbf{x}_{ij})^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ij}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ij})^T - \mathbf{I} \right] G_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ij}) \quad (13)$$

olarak hesaplanabilir. Zaman-frekans yüzeyi  $K(\mathbf{x})$  üzerindeki herhangi bir  $\mathbf{x}$  noktasındaki yerel ortak değişinti matrisi  $\Sigma_x$ , o noktadaki gradyan ve hessiyan cinsinden yazılabilir.

$$\Sigma_x = -K(\mathbf{x})^{-1} H(\mathbf{x}) + K(\mathbf{x})^{-2} g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})^T \quad (14)$$

Yine, zaman-frekans yüzeyi üzerindeki herhangi bir  $\mathbf{x}$  noktasındaki ortalama kaydırma güncellemesi

$$m(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_f} C_s(\mathbf{x}_{ij}) \mathbf{x}_{ij} G_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ij})}{\sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_f} C_s(\mathbf{x}_{ij}) G_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ij})} \quad (15)$$

ifadesi ile bulunur.  $\{(\gamma_1^x, \nu_1^x), (\gamma_2^x, \nu_2^x)\}$ , yerel ortak değişinti matrisi  $\Sigma_x$ 'nin, küçükten büyüğe, özdeğer-özvektör ikilileri olsun. Alt uzay kısıtlanmalı ortalama kaydırma güncellemesi, ortalama kaydırma güncellemesi  $m(\mathbf{x})$ 'in,  $\Sigma_x$ 'in en büyük özdeğerine karşılık gelen özvektörü üzerine izdüşümü ile bulunur.

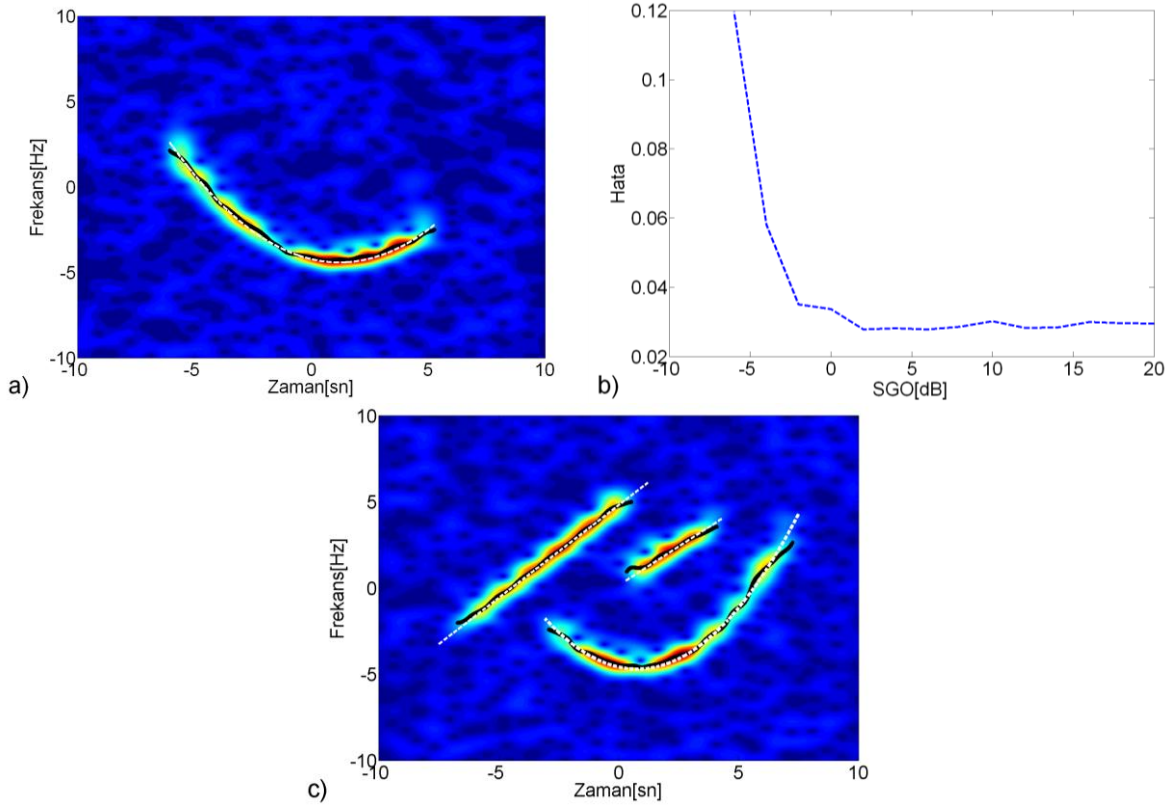
$$\mathbf{x}_{n+1} \leftarrow \nu_2^{x_n} \left( \nu_2^{x_n} \right)^T m(\mathbf{x}_n) \quad (16)$$

Eğer ardışık iki yineleme arasındaki hata  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}\|$  belirli bir eşik  $\zeta$ 'nin altında ise,  $\mathbf{x}$  noktası temel eğri üzerindedir.  $\mathbf{x}_n = (t_n, f_n)$  olduğu hatırlanarak, 'ölçüm sinyali  $s(t)$ 'nin anlık frekans kestiriminin  $t = t_n$  anındaki değeri  $\tilde{f}(t_n) = f_n$ 'dir' denir.

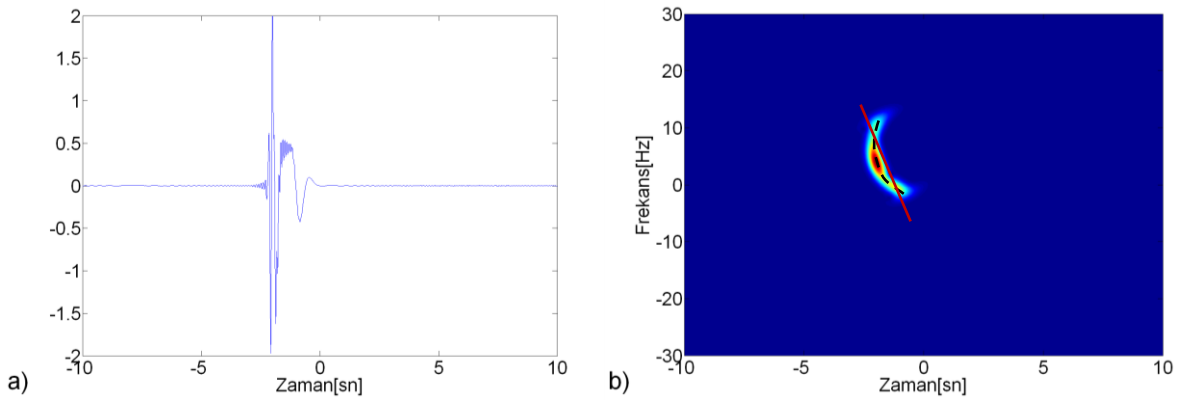
Şekil 4a'da, SGO'nun 0 dB olduğu, sentetik olarak oluşturulan tek bileşenli sinyalin zaman-frekans dağılımı, kestirilen anlık frekans (siyah eğri) ve sinyalin asıl anlık frekansı (beyaz eğri) verilmiştir. Ana eğri izdüşümleri tekniği ile kestirilen anlık frekans, asıl anlık frekans eğrisine oldukça yakınsamaktadır. Şekil 4b'de ise bu sinyalin farklı SGO değerlerindeki anlık frekans kestirim hatası görülmektedir. Kestirim hatası

$$Hata = \frac{\|f(t) - \tilde{f}(t)\|^2}{\|f(t)\|^2} \quad (17)$$

olarak tanımlanmıştır. Görüldüğü üzere bu yöntem çok düşük SGO'lar da bile başarılı anlık frekans kestirimleri yapabilmektedir. Şekil 4c'de ise sentetik olarak oluşturulan çok bileşenli sinyalde, tekniğin anlık frekans kestirim başarımı gösterilmiştir. Bu şekilden anlaşılacağı üzere, ana eğri izdüşümleri çok bileşenli sinyallerde de oldukça başarılı anlık frekans kestirimleri yapabilmektedir.



Şekil 4. (a) 0 dB SGO altında, tek bileşenli sentetik sinyalin zaman-frekans dağılımı, anlık frekansı (beyaz eğri) ve kestirilen anlık frekans (siyah eğri), (b) anlık frekans kestirim hatasının SGO'ya bağlı değişimi, (c) çok bileşenli sentetik sinyalin zaman-frekans dağılımı, bileşenlerin anlık frekansları (beyaz eğri), kestirilen anlık frekanslar (siyah eğri)



Şekil 5. (a) Anlık frekansı birebir olmayan, sentetik olarak oluşturulan bir sinyalin gerçek kısmı, (b) bu sinyalin zaman-frekans dağılımı, anlık frekansı (siyah eğri) ve anlık frekansa oturtulan en iyi doğru (kırmızı doğru)



## 5. KESİRSSEL FOURİER DÖNÜŞÜMÜ İLE ZAMAN-FREKANS DÜZLEMİNDE ROTASYON

Tek bileşenli sinyallerden bileşen çıkarımı, daha önceki bölümlerde anlatıldığı üzere, bileşenin anlık frekansı  $f(t)$ 'nin ana eğri izdüşümleri tekniği ile kestirimi, bileşenin anlık fazı  $\phi(t)$ 'nin Eşitlik 5 ile hesaplanması ve ölçüm sinyalinin  $\exp\{-j2\pi\phi(t)\}$  ifadesi ile çarpılarak belkemiğinin düzleştirilmesi basamaklarından oluşmaktadır. Son olarak, bileşen, belkemiği düzleştirilen sinyalden alçak geçiren filtre ile optimale yakın bir şekilde çıkarılmaktadır. Bu işlemler uygulanırken, ölçüm sinyalinin zaman-frekans dağılımından kestirilen bazı bileşenlerin anlık frekansları, birebir fonksiyon olmayabilir. Bu durumda anlık faz hesaplanamayacağından, önerilen yöntem uygulanamayacaktır. Şekil 5a'da, anlık frekansı birebir fonksiyon olmayan, sentetik olarak oluşturulan bir sinyalin gerçek kısmı verilmiştir. Şekil 5b'de ise bu sinyalin zaman-frekans dağılımı gösterilmiştir. Sinyalin zaman-frekans dağılımına bakıldığında, zaman eksenine dik, frekans eksenine paralel olarak çizilen bazı doğrular, sinyalin anlık frekansını birden çok noktada kesmektedir. Bu bakımdan bu sinyalin anlık frekansı birebir fonksiyon değildir. Bu durumda Eşitlik 5'deki ifade ile anlık faz hesaplanamayacağından, daha önceki bölümlerde anlatılan belkemiği düzleştirme işlemi uygulanamayacaktır. Şekil 5b'ye göz önüne alınarak, bu sinyalin zaman-frekans dağılımı yeteri miktarda döndürülürse, bileşenin anlık frekansı birebir fonksiyon haline getirilebilir. Bu döndürme ölçüm sinyalinin kesirsel Fourier dönüşümü ile sağlanabilir (Almeida, 1994).

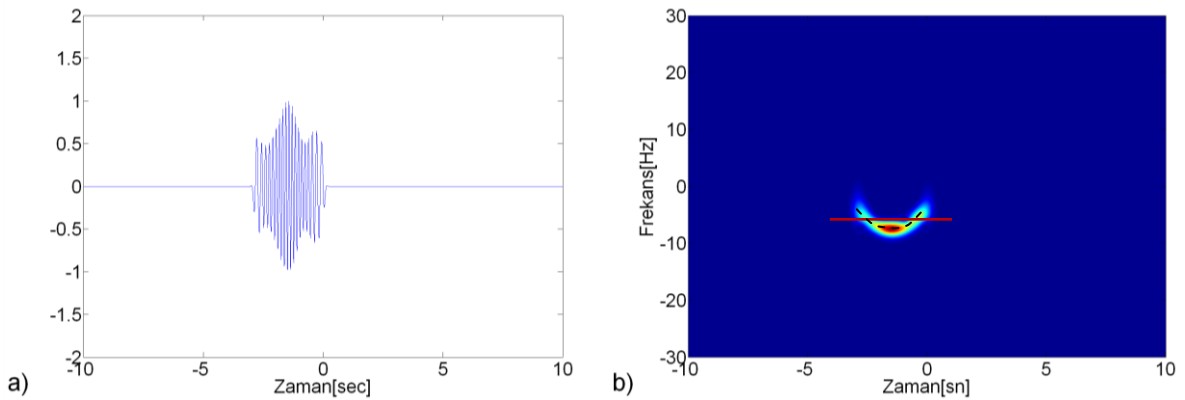
Herhangi bir  $s(t)$  sinyalinin  $\alpha$ . dereceden,  $-2 \leq \alpha \leq 2$ , kesirsel Fourier dönüşümü

$$s_{\alpha}(t) = F^{\alpha} \{s(t)\} = \int B_{\alpha}(t, t') s(t') dt',$$

$$B_{\alpha}(t, t') = A_{\theta} \exp \{ j\pi(t^2 \cot \theta - 2tt' \csc \theta + t'^2 \cot \theta) \},$$

$$A_{\theta} = \frac{\exp \{ -j\pi \operatorname{sgn}(\sin \theta) / 4 + j\theta / 2 \}}{|\sin \theta|^{0.5}},$$

$$\theta = \pi\alpha / 2,$$
(18)



Şekil 6. (a) Şekil 5a'da verilen sinyalin kesirsel Fourier dönüşümü alınmış hali, (b) bu sinyalin zaman-frekans dağılımı, anlık frekansı (siyah eğri) ve anlık frekansa en iyi oturtulan doğru (kırmızı doğru)

ile tanımlıdır. Bu dönüşüm,  $s(t)$  sinyalinin zaman frekans dağılımını,  $\theta = \pi\alpha / 2$  radyan döndürmektedir. Dönüşüm derecesi  $\alpha = 0$  sinyalin kendisini,  $\alpha = 1$  ise sinyalin Fourier

dönüşümünü vermektedir. Şekil 6a'da, Şekil 5a'daki sinyalin  $\alpha$ . dereceden kesirsel Fourier dönüşümünün gerçek kısmı, Şekil 6b'de ise zaman-frekans dağılımı gösterilmiştir. Dönüşüm derecesi  $\alpha$  öyle seçilmiştir ki, Şekil 5b'de anlık frekansa oturtulan doğru, Şekil 6b'de zaman eksenine paralel hale gelmiştir. Görüldüğü üzere, bileşenin anlık frekansı artık birebir fonksiyondur ve önerilen yöntem artık uygulanabilir. Bileşen çıkarıldıktan sonra ters kesirli Fourier dönüşümü alınarak ( $-\alpha$ . derecen kesirsel Fourier dönüşümü) sinyal eski haline getirilir.

## 6. ÇOK BİLEŞENLİ, GÜRÜLTÜLÜ SİNYALLERİN ANALİZİ VE BİLEŞEN ÇIKARIMI

Yukarıda anlatılan tek bileşenli sinyallerin analizi ve bileşen çıkarımı bu bölümde çok bileşenli sinyaller için geliştirilmiştir. Çok bileşenli, gürültülü sinyallerin analizi ve bileşen çıkarımı için döngülü bir yöntem önerilmektedir. Önerilen yöntemde, herbir döngüde tek bir bileşen çıkarılmaktadır.

Gürültü altında kaydedilmiş,  $N_b$  tane bileşen içeren bir sinyal düşünelim.

$$s(t) = b_1(t) + b_2(t) + \dots + b_{N_b}(t) + n(t). \quad (19)$$

Bu sinyalin analitik dengi

$$\hat{s}(t) = A_1(t) \exp\{j2\pi\phi_1(t)\} + A_2(t) \exp\{j2\pi\phi_2(t)\} + \dots + A_{N_b}(t) \exp\{j2\pi\phi_{N_b}(t)\} + \hat{n}(t) \quad (20)$$

yapısındadır. Analitik denk  $\hat{s}(t)$ 'nin zaman-frekans dağılımı üzerinden ana eğzi izdüşümleri ile bileşenlerin anlık frekansları  $\tilde{f}_1(t), \tilde{f}_2(t), \dots, \tilde{f}_{N_b}(t)$  kestirilebilir, anlık fazlar  $\tilde{\phi}_1(t), \tilde{\phi}_2(t), \dots, \tilde{\phi}_{N_b}(t)$  Eşitlik 5 ile hesaplanabilir.  $N_b$  tane bileşen içinden,  $k$ . bileşeni çıkarmak için, Eşitlik 20'de verilen ifade  $\exp\{-j2\pi\tilde{\phi}_k(t)\}$  ile çarpıldığında

$$\begin{aligned} \hat{s}_k(t) &= \hat{s}(t) \exp\{-j2\pi\tilde{\phi}_k(t)\} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N_b} A_i(t) \exp\{j2\pi(\phi_i(t) - \tilde{\phi}_k(t))\} + A_k(t) \exp\{j2\pi(\phi_k(t) - \tilde{\phi}_k(t))\} \\ &\quad + \hat{n}(t) \exp\{-j2\pi\tilde{\phi}_k(t)\} \end{aligned} \quad (21)$$

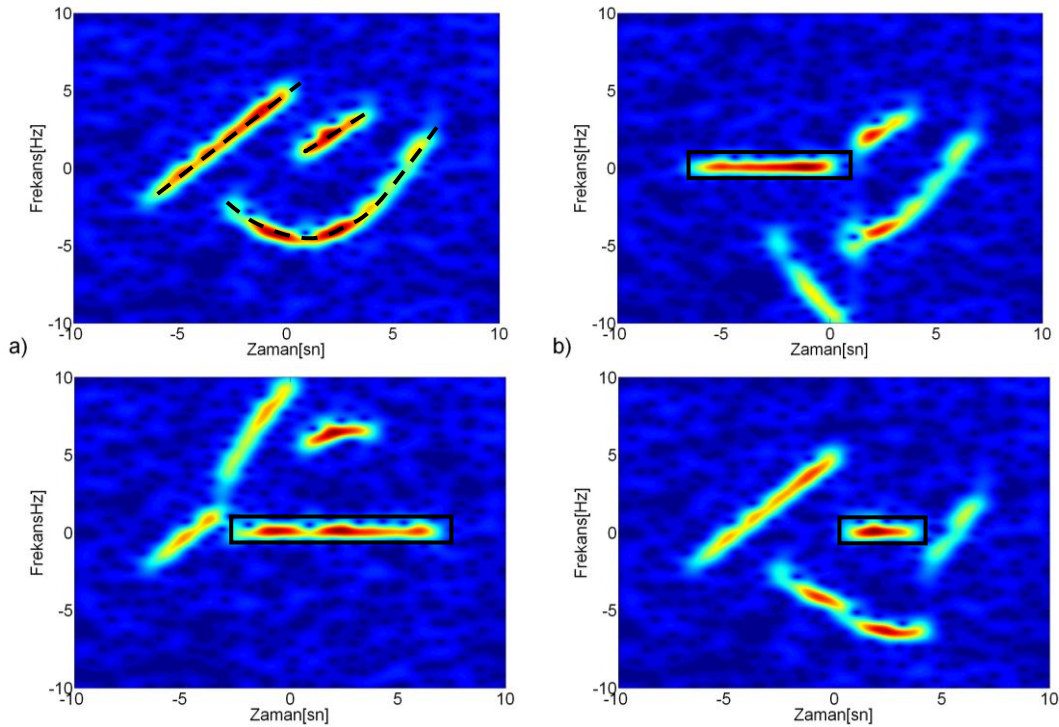
elde edilir. Bu bileşenin anlık frekansı ne kadar iyi kestirilmişse  $\exp\{-j2\pi(\phi_k(t) - \tilde{\phi}_k(t))\}$  ifadesi 1'e o kadar yakındır. Bu bileşenin anlık frekansının hatasız olarak kestirildiği ideal durumda, Eşitlik 21'deki ifade

$$\hat{s}_k(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N_b} A_i(t) \exp\{j2\pi(\phi_i(t) - \tilde{\phi}_k(t))\} + A_k(t) + \hat{n}(t) \exp\{-j2\pi\tilde{\phi}_k(t)\} \quad (22)$$

halini alır. Artık  $k$ . bileşenin belkemiği düzleştirilmiş olup, 3. bölümde anlatılan, alçak geçiren süzgeçleme için en uygun hale getirilmiş olur. Elde edilen  $\hat{s}_k(t)$  sinyaline Şekil 2a'da siyah dikdörtgenle gösterilen zaman-frekans süzgeci uygulanır, çıkarılan bileşen  $\exp\{j2\pi\tilde{\phi}_k(t)\}$  ile çarpılıp eski frekans destek alanına oturtturularak  $k$ . bileşeni çıkarılmış olur.

$$\tilde{b}_k(t) = TF_k \{ \hat{s}_k(t) \} \exp \{ j2\pi\tilde{\phi}_k(t) \} \quad (23)$$

Burada  $\tilde{b}_k(t)$  çıkarılan  $k$ . bileşeni,  $TF_k\{.\}$  belkemiği düzleştirilmiş bileşene uygulanacak olan zaman-frekans süzgecini belirtmektedir. Bu işlem her bileşen için tekrarlanarak, her bileşen başarıyla çıkarılabilir.  $TF_k\{.\}$  zaman-frekans süzgecinin zaman ve frekans kesim değerleri,  $\hat{s}_k(t)$  'nin zaman-frekans dağılımı gözlemlenerek bulunabilir.



Şekil 7. (a) Sentetik olarak oluşturulan çok bileşenli, gürültülü bir sinyalin zaman-frekans dağılımı ve bileşenlerin anlık frekansları (siyah eğriler), (b,c,d) her bileşen için, belkemiği düzleştirme işlemi sonucunda elde edilen sinyallerin zaman-frekans dağılımları ile bileşen çıkarımını sağlayan zaman-frekans süzgeçleri (siyah dikdörtgenler)

Şekil 7a'da sentetik olarak üretilen üç bileşenli, gürültülü ölçüm sinyalinin zaman-frekans dağılımı ve bileşenlerin anlık frekansları verilmiştir. Yukarıda anlatılan işlem her bileşen için uygulandığında, Eşitlik 22'de verilen  $\hat{s}_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$  sinyalinin zaman-frekans dağılımı, Şekil 7a, b, c'de gösterilmiştir. Görüldüğü üzere, her bileşen için, anlatılan belkemiği düzleştirme işlemi, her bileşeni 0 Hz frekans bandı etrafında düzleştirmiş, zaman-frekans düzleminde kolayca süzgeçlenebilir hale getirirken, diğer bileşenleri farklı bölgelere kaydırmıştır. Dikkat edilirse, başlangıçta birbirinden hiçbir basit süzgeç ile ayrıştırılamayan bileşenler, belkemiği düzleştirme işlemi sonucunda ayrıştırılabilir hale gelmiştir.

Şekil7a'da gösterilen sinyal oluşturulurken bileşenlerinin genlikleri aynı büyüklükte seçilmiştir. Dolayısıyla, ölçüm sinyalinin zaman-frekans dağılımında bütün bileşenler aynı belirginliktedir. Oysaki, bileşen genliklerinin farklı olduğu durumlarda, ölçüm sinyalinin zaman-frekans dağılımında, genliği en büyük olan bileşen en belirgin olacaktır ve küçük genlikli bileşenlerin anlık frekansları direk ölçüm sinyali üzerinden başarılı bir şekilde kestirilemeyebilir. Bu bakımdan, ölçüm sinyali üzerinden bütün bileşenlerin anlık frekanslarını aynı anda kestirmek yerine, döngülü bir şekilde, önce en belirgin bileşenin anlık frekansının kestirilip bu bileşenin çıkarılması, daha sonra kalan sinyal üzerinde daha az belirgin bileşene aynı işlemlerin uygulanıp çıkarılması ve bu işlemlerin tüm bileşenler için her döngüde kalan sinyal üzerinden uygulanması daha başarılı olacaktır. Algoritmanın durma kriteri, kalan sinyalin herhangi bir kesirsel Fourier tanım kümesinde bir biçimli dağılıma sahip olması olarak tanımlanabilir. Hiç bir bileşen kalmadığında, kalan sinyalin herhangi bir Fourier tanım kümesinde dağılımı bir biçimli olacaktır. Önerilen döngülü bileşen çıkarma algoritmasının basamakları Çizelge 1'de verilmiştir.

Önerilen yöntemin çok bileşenli sinyaller üzerindeki başarımını test etmek için, SGO'su 0 dB olan, Şekil 8a'da gösterilen sentetik sinyal oluşturulmuştur. Bu sinyalin zaman-frekans dağılımı Şekil 7a'da görülmektedir. Şekil 8b, c, d'de, gerçek bileşenler  $b_1(t), b_2(t), b_3(t)$  (mavi), önerdilen yöntemle çıkarılan bileşenler  $\tilde{b}_1(t), \tilde{b}_2(t), \tilde{b}_3(t)$  (kırmızı) ve çıkarım hataları  $e_i(t) = b_i(t) - \tilde{b}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  (yeşil) verilmiştir. Görüldüğü üzere önerilen yöntem, 0 dB'lik oldukça düşük SGO'da bile oldukça başarılı çalışmıştır. Her bileşen için tanımlanan hata

$$e_i = 10 \log_{10} \frac{\|b_i(t) - \tilde{b}_i(t)\|^2}{\|b_i(t)\|^2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (24)$$

$e_1 = -19.43$  dB,  $e_2 = -19.99$  dB,  $e_3 = -18.54$  dB olarak hesaplanmıştır.

## 7. SONUÇLAR

Bu çalışmada, sinyal bileşenlerinin belirleyici özelliklerini ölçüm sinyalinin zaman-frekans dağılımı üzerinden kestirerek, bu bileşenleri ayırıştırarak döngülü bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntem bileşenler üzerinde hiçbir parametrik yapı varsaymamaktadır. Bu bakımdan zaman-frekans düzleminde tıkHz destek alanına sahip bileşenlerden oluşan bir sinyalin gürültü altındaki kaydı önerilen yöntem ile bileşenlerine başarı ile ayırıştırılabilir.

Önerdilen yöntem;

- 1) bileşenlerin zaman-frekans düzleminde tespiti,
- 2) anlık frekanslarının kestirimi ve,
- 3) zaman-frekans düzleminde süzgeçleme basamaklarından oluşmaktadır.

Bileşen tespiti için kısa zamanlı Fourier dönüşümü kullanılmıştır. Bileşenlerin anlık frekansları gürültüye karşı oldukça gürbüz olan ana eğri izdüşümleri tekniği ile kestirilmiştir. Bileşenler, zaman-frekans düzleminde belkemiği düzleştirme işlemi ile süzgeçleme için en uygun hale getirilmiştir.

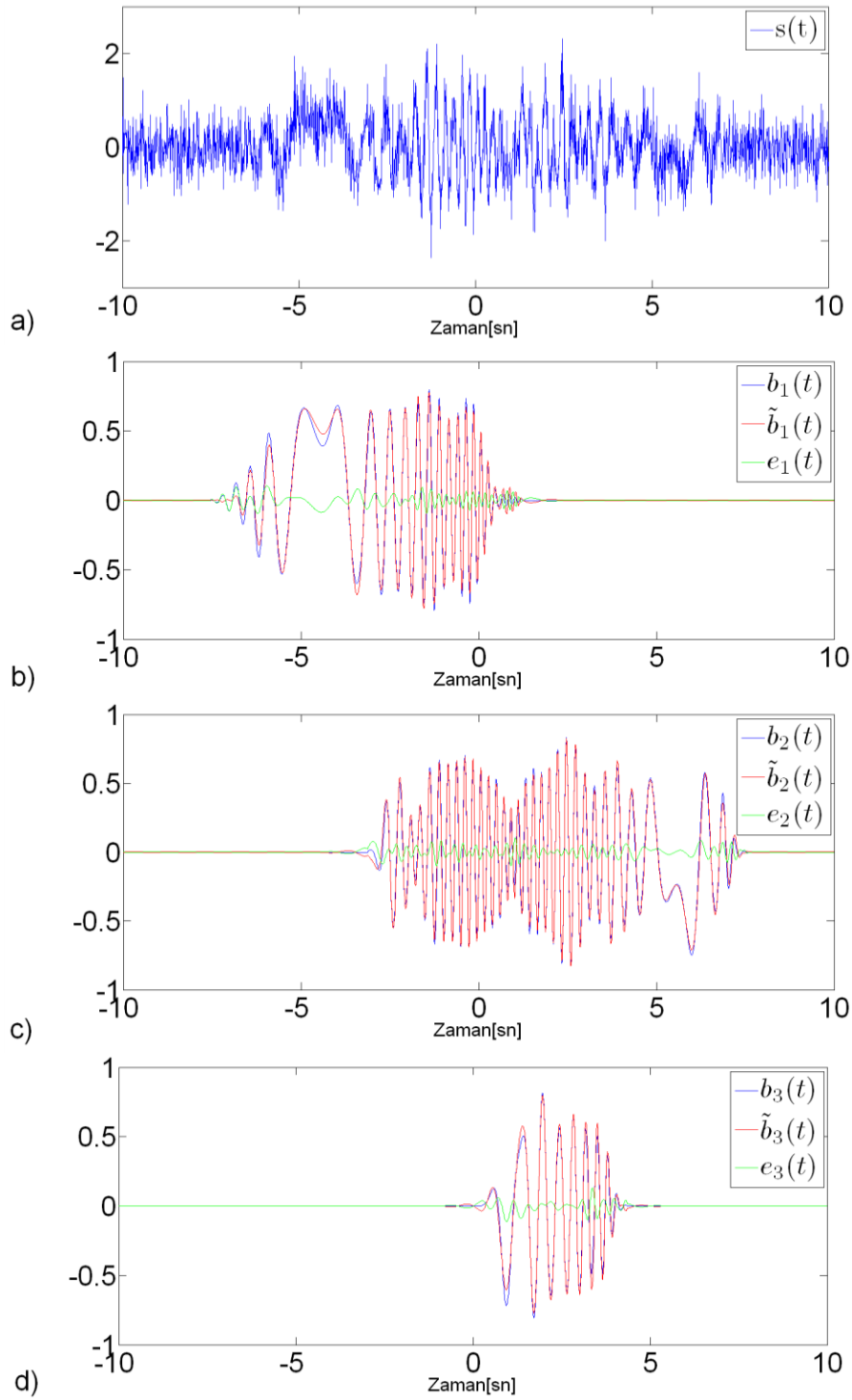
Bu çalışmada, bileşenler üzerindeki tek varsayılan, bileşenlerin zaman-frekans düzleminde örtüşmemesidir. Önerilen yöntemin devamı olarak, zaman-frekans düzleminde örtüşen bileşenlerin tespiti ve çıkarımı üzerinde çalışılması planlanmaktadır.

**KAYNAKLAR**

- Almeida L. B. (1994): "The Fractional Fourier Transform and Time-Frequency Representations", IEEE Transactions on Signal Processing, Cilt 42, No. 11, s. 3084-3091.
- Boashash B. (1992<sup>1</sup>): "Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal- Part I: Fundamentals", Proceedings of IEEE, Cilt 80, No. 4, s. 520-538.
- Boashash B. (1992<sup>2</sup>): "Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal- Part II: Algorithms and Applications", Proceedings of IEEE, Cilt 80, No. 4, s. 540-568.
- Cizek V. (1970): "Discrete Hilbert Transform", IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, Cilt 18, No. 4, s. 340-343.
- Cohen L. (1989): "Time-Frequency Distribution- a Review", Proceedings of IEEE, Cilt 77, No 7, s. 941-981.
- Cohen L. (1992): "What is a Multi-Component Signal", IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing-ICASSP'1992, Cilt 5, s. 113-1116.
- Daubechies I. (1990): "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis", IEEE Transactions on Information Theory, Cilt. 36, No. 5, s. 961-1005.
- Erdoğan D., Özertem U. (2007): "Self-Consisted Locally Defined Principle Surfaces", IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing-ICASSP'2007, Cilt 2, s. 549-552.
- Mann S., Haykin S. (1995): "The Chirplet Transform: Physical Considerations", IEEE Transactions on Signal Processing, Cilt 43, No. 11, s. 2745-2761.
- Özdemir A. K. (2003): "Time-Frequency Component Analyzer", Bilkent University Faculty of Engineering PhD Dissertation.
- Picinbono B. (1993): "On Instantaneous Amplitude and Phase of Signals", IEEE Transactions on Signal Processing, Cilt 45, No. 3, s. 552-560.
- Qian S., Chen D. (1993): "Discrete Gabor Transform", IEEE Transactions on Signal Processing, Cilt 41, No. 7, s. 2249-2438.

Çizelge 1. Çok bileşenli ölçüm sinyallerinin analizi ve bileşen çıkarımı için önerilen yöntemin basamakları

- Ölçüm sinyali  $s(t)$ 'nin analitik dengi  $\hat{s}(t)$  olarak hesaplanmış olsun. Döngü sayısını ve kalan sinyali  $k=1$ ,  $r^k(t) = \hat{s}(t)$  olarak ilklendir.
1.  $r^k(t)$ 'nin zaman-frekans dağılımı üzerinden,  $k$ . bileşen  $b_k(t)$ 'nin anlık frekansını birebir fonksiyon yapan bir rotasyon derecesi  $\alpha_k$  seç.
  2.  $r^k(t)$ 'nin  $\alpha_k$ . dereceden kesirsel Fourier dönüşümü  $r_{\alpha}^k(t) = FRFT_{\alpha_k} \{r^k(t)\}$ 'nin zaman-frekans dağılımı üzerinden  $k$ . bileşenin anlık frekansı  $f_k(t)$ 'yi kestir.
  3. Bileşenin anlık fazını  $\phi_k(t) = \int_{-\infty}^t f_k(\tau) d\tau$  ile hesapla.
  4. Düşük frekanslı analitik dengi  $r_{\alpha,l}^k(t) = r_{\alpha}^k(t) \exp\{-j2\pi\phi_k(t)\}$  ile hesapla.
  5. Belkemiği bükülmüş bileşeni  $TF_k\{\cdot\}$  zaman-frekans süzgeci ile süz.
 
$$\hat{b}_k^{l,\alpha}(t) = TF_k \{r_{\alpha,l}^k(t)\}$$
  6. Çıkarılan bileşeni eski zaman-frekans destek alanına oturt.
 
$$\hat{b}_k^{\alpha}(t) = \hat{b}_k^{l,\alpha}(t) \exp\{j2\pi\phi_k(t)\}$$
  7. Çıkarılan bileşenin  $-\alpha_k$ . dereceden kesirsel Fourier dönüşümünü hesapla.
 
$$b_k(t) = FRFT_{-\alpha_k} \{\hat{b}_k^{\alpha}(t)\}$$
  8. Kalan sinyal  $r^{k+1}(t) = r^k(t) - b_k(t)$  içinde hala bileşen varsa,
    1. basamağa geri dön, döngü sayısını güncelle  $k \leftarrow k + 1$
    - Yoksa,
    - Döngüyü bitir.



Şekil 8. (a) Üç bileşenli, SGO'su 0 dB olan sentetik olarak oluşturulan ölçüm sinyali; (b,c,d) asıl bileşenler  $b_1(t), b_2(t), b_3(t)$  (mavi), önerilen yöntem ile çıkarılan bileşenler  $\tilde{b}_1(t), \tilde{b}_2(t), \tilde{b}_3(t)$  (kırmızı) ve çıkarım hataları  $e_i(t) = b_i(t) - \tilde{b}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  (yeşil)