



KOMPOZİT EĞRİ ÇUBUKLARIN DOĞAL FREKANS VE BURKULMA YÜKÜ ANALİZİ

(*NATURAL FREQUENCY AND BUCKLING ANALYSIS OF LAMINATED CURVED BEAMS*)

Ali GÜNYAR¹, Hasan ÖZTÜRK¹, Mustafa SABUNCU¹

ÖZET/ABSTRACT

Bu çalışmada, düzlem içerisinde belirli bir eğriliğe sahip tabakalı kompozit dairesel bir yay parçasının merkez açısının, eğrilik yarıçapının değişiminin ve tabakalardaki fiber açılarının doğal frekans ve burkulma yüküne etkileri sonlu elemanlar metodu kullanılarak araştırılmıştır. Bu analizde kullanılan sonlu eleman modelinin oluşturulması için Sabir ve Ashwell'in yer değiştirme fonksiyonları kullanılmıştır. Geliştirilen modellerle elde edilen sonuçlar ANSYS programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

In this study, the effects of variations of subtended angle, curvature of a laminated curved beam and orientation angle, having an in-plane curvature, on the natural frequencies and buckling load have been investigated by using the Finite Element Method. Sabir and Ashwell's displacement functions have been used to develop a finite element model to employ in this study. The results obtained with the present element are compared with the results obtained from ANSYS program.

ANAHTAR KELİMELELER/KEYWORDS

Tabakalı kompozit eğri çubuk, Burkulma, Titreşim, Sonlu elemanlar
Laminated curved beam, Buckling, Vibration, Finite elements

¹ DEÜ, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 35397 Buca, İZMİR

1. GİRİŞ

Yüksek teknoloji uygulamalarındaki eğri çubukların kullanımı, özellikle türbin kanatlarında, köprülerde ve uzay sanayinde elastik kararsızlığı önemli bir problem haline getirmiştir. Kompozit malzemelerin ortaya çıkışı ile de bunların kullanımı giderek artmıştır. Bu alanlarda ortaya çıkan dinamik ve statik kararlılık problemleri kompozit malzemelerin bu alanda kullanımıyla, bu malzemeler üzerindeki araştırma yapmayı ilginç hale getirmiştir. Eğri çubuklar ile ilgili bir çok araştırma bulunmaktadır. Bu çalışmalardan bazılarını özetlersek: Sabuncu, değişik yer değiştirme fonksiyonları için eğrisel çubukların doğal frekans analizini incelemiştir (Sabuncu, 1978). Sabir ve Ashwel, seçtikleri dört değişik yer değiştirme fonksiyonu için doğal frekans analizi yapmışlardır (Sabir ve Ashwel, 1971). Petyt ve Fleischer, değişik sınır şartlarında eğrisel çubuğun serbest titreşimlerini incelemiştir (Petyt ve Fleischer, 1971). Bazant ve Cedolin, eğri çubukların burkulma analizini analitik ve enerji metodlarını kullanarak yapmışlardır (Bazant ve Cedolin, 1991). Timoshenko ve Gere, iki ucu mafsallı Bernoulli-Euler eğrisel çubuğunun burkulmasını analitik metotla incelemiştir (Timoshenko ve Gere, 1961). Yoo vd., sonlu elemanlar metodu kullanarak eğri çubukların burkulma analizini araştırmışlardır (Yoo vd., 1996). Öztürk vd., izotropik üniform olmayan bir eğri çubuğun, burkulma, serbest titreşim ve dinamik kararlılığı üzerine çalışmışlardır (Öztürk vd., 2006). Karaagac vd., eğri bir çubuktaki çatlağın, dinamik yük altındaki dinamik kararlılığına olan etkisini incelemiştir (Karaagac vd., 2011).

Kompozit çubukların elastik kararlılıkları üzerine yapılan çalışmalarda kısaca özetlenir ise: Loja vd., isotropik olmayan tabakalı kompozit çubuğun lineer burkulma davranışını yüksek dereceli kesme deformasyonu teorisi kullanarak sonlu elemanlar metodu ile incelemiştir (Loja vd., 1997). Ayrıca çalışmada çubuğu oluşturan plaklar simetrik ve asimetric olarak ele alınmıştır. Tseng vd., dinamik rijitlik analizi ile değişken eğrilikli kompozit eğri çubukların düzlem içi titreşimlerini incelemiştir (Tseng vd., 2000). Qatu, ince ve modellenmiş kalın tabakalı kompozit eğri çubuklar için kesme deformasyonu, atalet momenti, eğrilik ve kalınlık oranları ve malzeme özelliklerinin doğal frekanslar üzerindeki etkisini çalışmıştır (Qatu, 1993).

Bu çalışmada, düzlem içerisinde belirli bir eğriliğe sahip tabakalı kompozit dairesel bir yay parçasının merkez açısının, eğrilik yarıçapının değişiminin ve tabakalardaki fiber açılarının doğal frekans ve burkulma yüküne etkileri sonlu elemanlar metodu kullanılarak araştırılmıştır. Burkulma yükü için eğri çubuğa yayılı bir yük uygulandığı düşünülmüştür. Çubuk, Sonlu Elemanlar Metodu ile modellenmiştir. Elde edilen sonuçlar grafikler halinde verilmiş ve sonlu eleman metodu kullanan ANSYS paket programı ile karşılaştırılmıştır.

2. ELASTİSİTE MODÜLÜ YAKLAŞIMI

Klasik tabakalı plak teorisine göre simetrik tabakalı çubuğun düzlem içi yer değiştirmelerin ve düzlem içi kuvvetlerin sıfır olduğu düşünüldüğü zaman birim uzunluktaki Moment denklemi (1) elde edilir (Reddy, 1997).

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Eşitlik 1'in tersini yazarsak

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

elde edilir. Burada $D_{ij}^* = D^{-1}_{ij}$ eşittir.

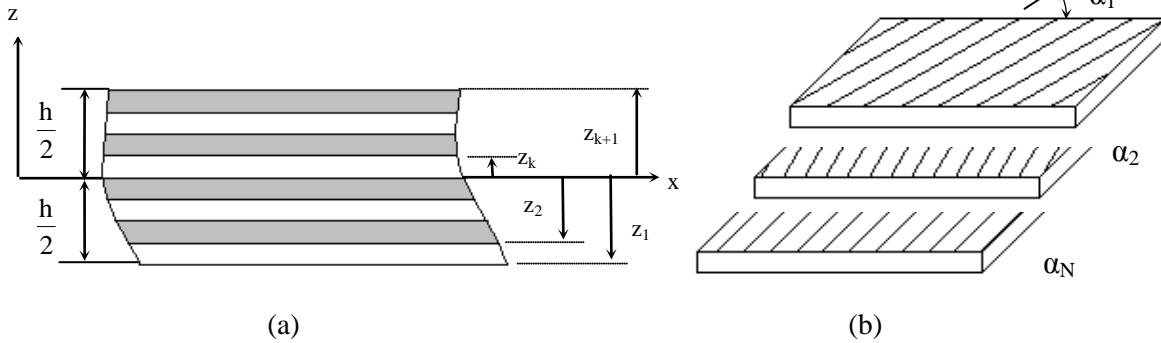
Tabakalı çubuk teorisinde $M_{yy} = M_{xy} = 0$ olarak kabul edersek Eşitlik 2'den

$$\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} = -D_{11}^* M_{xx}, \quad \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} = -D_{12}^* M_{xx}, \quad 2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} = -D_{16}^* M_{xx} \quad (3)$$

elde edilir. Eşitlik 3'te dikkat edilirse ω_0 yer değiştirmesi, Poisson etkisi (D_{12}^*) ve anizotropik kesme kuvvet çifti (D_{16}^*) sebebiyle y koordinatından bağımsız değildir. Eğer çubuk boyu ile çubuk genişliği arasındaki oran büyük ise yukarıdaki etkileri ihmal edebiliriz. Böylece Eşitlik 3'ten sadece $\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} = -D_{11}^* M_{xx}$ denklemini göz önüne alırız. Bu eşitlik ile Euler çubuk teorisinde bilinen $M(x)$ moment denklemi kullanarak, tabakalı kompozit bir çubuk için yaklaşık bir elastisite modülü:

$$M = b M_{xx} \rightarrow E_{xx}^b = \frac{12}{h^3 D_{11}^*} \quad (4)$$

olarak elde edilir. Burada b genişlik, h ise tabaka kalınlığıdır.



Şekil 1. Çubuğu oluşturan tabakalar

Eğilme rijitlik matrisi olarak adlandırılan D_{ij} matrisi şekil 1-b' de gösterilen her tabaka için hesaplanır (Her tabaka için \bar{Q}_{ij} Ek-1'de verilmiştir).

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (5)$$

Burada tabakalar Şekil 1a'da görüldüğü gibi x eksenini boyunca kalınlıkları aynı olacak şekilde sayı bakımından simetrik yerleştirilmiştir.

3. ÇUBUĞUN SONLU ELEMANLAR İLE MODELLENMESİ

Bu çalışmada incelenecek olan ve belirli bir eğrilik açısına (θ) sahip eğri çubuk Şekil 2-a'da gösterilmiştir. Burkulma analizi için yük şekilde gösterildiği gibi yayılı yük kabul edilmiştir. Tabakalı kompozit eğri çubuğun sonlu elemanlarla incelenmesinde Şekil 2b'de gösterilen model kullanılmıştır. Elemanın her düğüm noktasındaki radyal ve eksenel yer değiştirmeler sırasıyla w, v dönme ise i ile gösterilmiştir. Yer değiştirme fonksiyonları (Sabır ve Ashwell, 1971);

$$w = a_1 \cdot \cos \phi + a_2 \cdot \sin \phi + a_4 - a_6 \cdot \phi \quad (6)$$

$$v = -a_1 \cdot \sin \phi + a_2 \cdot \cos \phi + a_3 + a_5 \cdot \phi + a_6 \phi^2 / 2 \quad (7)$$

$$i = \frac{dw}{dy} - \frac{v}{R} \quad (8)$$

şeklinde tanımlanabilir. R yarıçap, ϕ açısal değişimi gösterir. Şekil 2b'deki eğri çubuğu sonlu eleman olarak düşündüğümüzde 1 ve 2 ile gösterilen noktadaki yer değiştirmeler aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$[q]^T = [v_1 \ w_1 \ i_1 \ v_2 \ w_2 \ i_2] \quad (9)$$

Burada, $\{q\}$ çubuğun genelleştirilmiş koordinatlarıdır.

4. ENERJİ DENKLEMLERİ VE HAREKET DENKLEMİ

Sistemin hareket denklemi çıkarmak için sonlu eğri çubuğun enerji ifadeleri kullanılacaktır.

Elastik Potansiyel Enerji,

$$U = \frac{1}{2} \left(\int_0^d (\ddot{w} - \frac{\dot{v}}{R})^2 EI_{xx} + \left(\frac{w}{R} + \dot{v} \right)^2 EA \right) dy \quad (10)$$

E elastisite modülünü, I_{xx} çubuğun x eksenine göre alan atalet momentini, A kesit alanını ve d sonlu eğri çubuk elemanın uzunluğunu gösterir.

Kinetik Enerji,

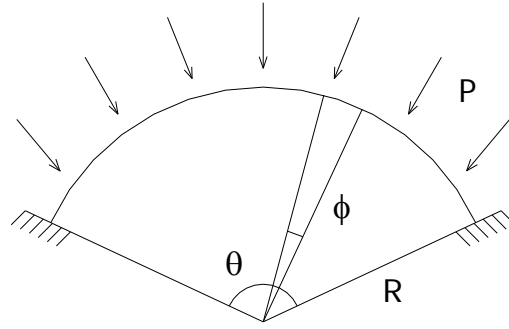
$$T = \frac{1}{2} \left[\int_0^d \rho A (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) dy \right] \quad (11)$$

Burada ρ yoğunluğu verir.

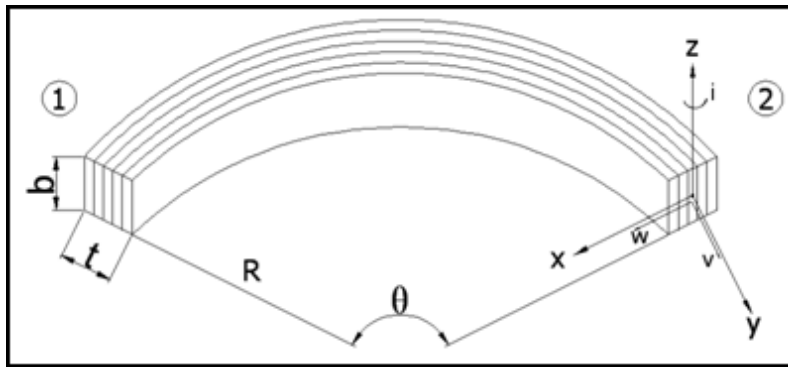
Eksenel kuvvetin yaptığı iş,

$$V = \int_0^d PR \left(\frac{dw}{dy} - \frac{v}{R} \right)^2 dy \quad (12)$$

P eğri çubuğa etki eden yayılı yükü gösterir.



(a)



(b)

Şekil 2. a) Yayılı yük altındaki eğrisel çubuk, b) Tabakalı kompozit eğri çubuk

Eşitlik 6-9 arasındaki terimleri enerji ifadeleri olan Eşitlik 10, Eşitlik 11 ve Eşitlik 12'de yerine konursa, bir eleman için $[k_e]$ direngenlik matrisini, $[k_{ge}]$ geometrik matrisini ve $[m_e]$ kütle matrisini elde edebiliriz. Tüm çubuğa ait elastik, geometrik ve kütle matrisleri sonlu elemanlar algoritmasına göre oluşturulup; Lagrange denkleminde, enerji ifadelerinin kullanımı ile hareket eşitliği:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} - P[K_{ge}]\{q\} = 0 \quad (13)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitlik 13'e bakıldığında, eğri çubuğun serbest titreşimi için $P=0$, burkulma (statik kararlılık) için ise kütle matrisi sıfır alınarak analiz yapılır.

5. SAYISAL UYGULAMA

Kabul edilen modelin doğruluğu için Ansys programı ile tabakalı kompozit eğri çubuğun statik ve serbest titreşim analizleri yapılmıştır. Eğri çubuk dört tabakadan meydana geldiği kabul edilmiştir. Yapılan çalışmada elde edilen sonuçlar, Ansys programından elde edilen değerlerle karşılaştırılarak kullanılan modelin uygunluğu Çizelgelerde gösterilmiştir. Çalışmadaki sonlu eleman analizi için, tüm çalışmalarda eleman sayısı 30 alınmıştır.

Çizelge 1'den görüleceği gibi seçilen $[0\ 0\ 0\ 0]$ fiber açılarında tabakalı kompozit çubukta eleman sayısı arttırıldıkça daha doğru sonuca ulaşıldığı görülmektedir. Çizelge 2 ve Çizelge 3'de ise yapılan çalışma ile Ansys programından elde edilen doğal frekans ve kritik burkulma

yükü parametreleri karşılaştırılmış ve mevcut çalışmanın Ansys programından elde edilen sonuçlarla iyi bir yaklaşım yaptığı görülmüştür.

Ayrıca Çizelge 2 ve Çizelge 3'e bakıldığında, [90 0 0 90] fiber açılı eğri çubuğunun; sonlu elemanlar modelinden elde edilen doğal frekans ve burkulma değerlerinin, ANSYS programından elde edilen değerlerden en fazla sapmaya sahip olduğu görülür. Bu durum elastik modülü yaklaşımında, fiber açılarının oryantasyonun oldukça etkili olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte hata payı oldukça düşüktür.

Çizelge 1. [0 0 0 0] fiber açısına sahip, tabakalı kompozit eğri çubuk için Sonlu Elemanlar Metodunda elde edilen kritik burkulma yükünün ve birinci doğal frekansın eleman sayısına göre değişimi (E1=129.207 GPa, E2=E3=9.42512 GPa 25, G12=5.15658 GPa, G13=4.3053 GPa, G23=2.5414 GPa, $\nu_{12}=0.3$, $\nu_{21}=\nu_{12}$. E2/E1, b=0.0254 m, t =0.004 m, $\rho=1550.0666$ kg/m³, $\theta=120^\circ$)

Eleman sayısı	f_1 (rad/s)	P_1 (N/m)
2	427,8223	32112,9207
4	321,0542	22606,403
8	318,2143	21992,287
10	318,0944	21962,5695
14	318,0322	21946,7881
16	318,023	21944,4385
20	318,0153	21942,4561

Çizelge 2. Tabakalı kompozit eğri çubuk için Sonlu Elemanlar Metodunda elde edilen ilk dört doğal frekans değerinin Ansys programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması (E1=129.207 GPa, E2=E3=9.42512 GPa 25, G12=5.15658 GPa, G13=4.3053 GPa, G23=2.5414 GPa, $\nu_{12}=0.3$, $\nu_{21}=\nu_{12}$. E2/E1, b=0.0254 m, t =0.004 m, $\rho=1550.0666$ kg/m³, $\theta=120^\circ$)

Fiber açısı	Doğal Frekanslar (rad/s)							
	f_1 Ansys	f_1 Çalışma	f_2 Ansys	f_2 Çalışma	f_3 Ansys	f_3 Çalışma	f_4 Ansys	f_4 Çalışma
[0 0 0 0]	315.13	318.01	622.83	632.851	1126.5	1152.306	1663.4	1714.957
[90 90 90 90]	85.816	85.889	170.70	170.923	310.91	311.22	463.16	463.184
[0 90 90 0]	296.32	297.514	584.64	592.062	1057.3	1078.037	1555.7	1604.424
[90 0 0 90]	138.17	133.931	274.87	266.528	499.78	485.299	745.33	722.262
[0 45 -45 0]	298.17	295.120	588.89	587.297	1065.8	1069.362	1571.6	1591.512
[0 60 -60 0]	296.51	294.172	585.32	585.412	1059.0	1065.929	1559.7	1586.404

Çizelge 3. Tabakalı kompozit eğri çubuk için Sonlu Elemanlar Metodunda elde edilen kritik burkulma yükünün Ansys programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması (E1=129.207 GPa, E2=E3=9.42512 GPa 25, G12=5.15658 GPa, G13=4.3053 GPa, G23=2.5414 GPa, $\nu_{12}=0.3$, $\nu_{21}=\nu_{12}$. E2/E1, b=0.0254 m, t =0.004 m, $\rho=1550.0666$ kg/m³, $\theta=120^\circ$)

Fiber açısı	P_1 (N/m) (Ansys)	P_1 (N/m) (Çalışma)	% hata
[0 0 0 0]	21647,15	21941,341	-1.34
[90 90 90 90]	1599,3618	1600,53	-0.072
[0 90 90 0]	19166,586	19204,142	-0.195
[90 0 0 90]	4146,296	3891,768	6.54
[0 45 -45 0]	19329,4	18896,296	2.292
[0 60 -60 0]	19164,554	18775,190	2.073

6. DOĞAL FREKANS-BURKULMA ANALİZİ VE SONUÇ

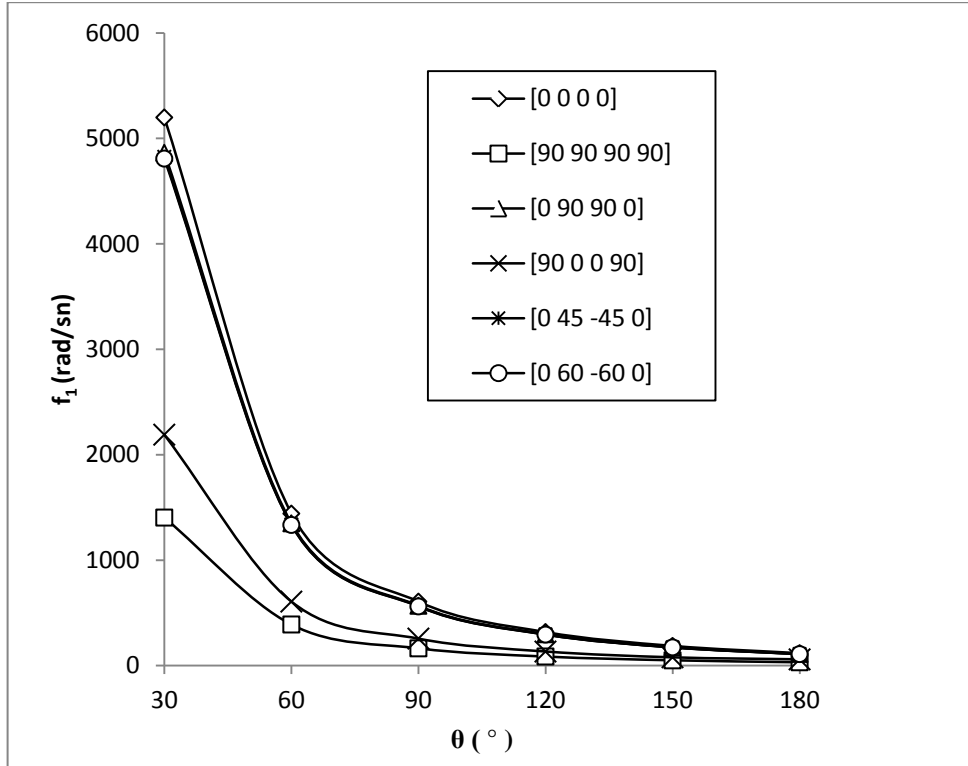
Elde edilen sonuçların açıklanması kolaylığı açısından incelenen tabakalı kompozit eğri çubukları aşağıdaki kısaltmalar ile ifade edeceğiz.

$$\begin{aligned} C1 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ C2 &= [90 \ 90 \ 90 \ 90], \\ C3 &= [0 \ 90 \ 90 \ 0] \\ C4 &= [90 \ 0 \ 0 \ 90], \\ C5 &= [0 \ 45 \ -45 \ 0], \\ C6 &= [0 \ 60 \ -60 \ 0] \end{aligned}$$

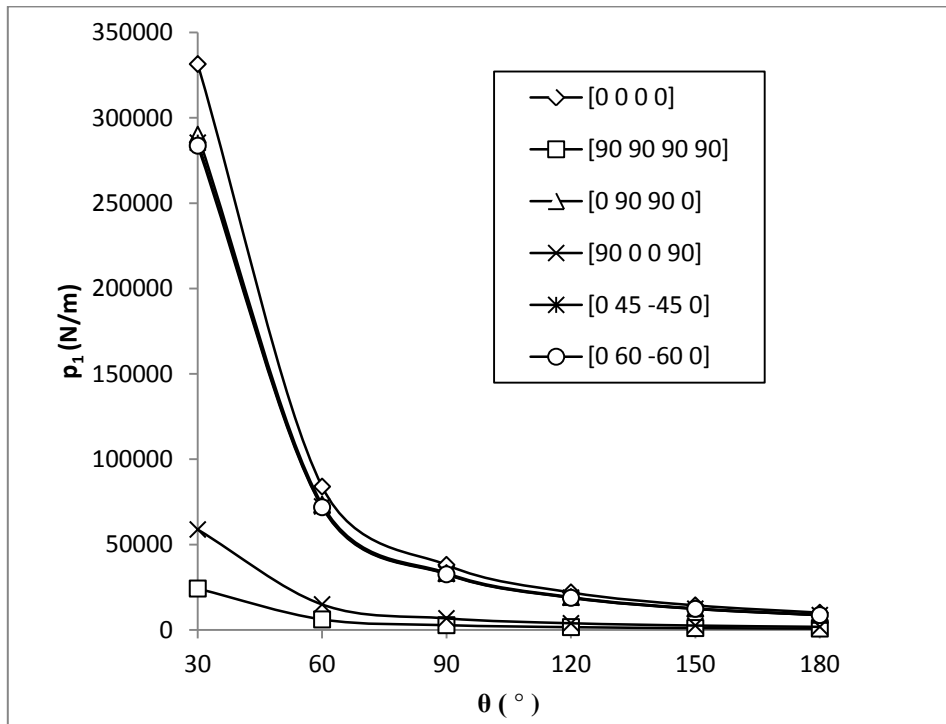
Şekil 3'te görüldüğü gibi, eğrilik yarıçapı arttıkça çubukların rijitliği azaldığı için birinci doğal frekansları beklendiği üzere azalmaktadır. Ayrıca, doğal frekans değeri büyükten küçüğe doğru C1, C5, C6, C4 ve C2 fiber oryantasyon açılarına göre sıralanmaktadır. Şekil 4 incelenecek olursa, Şekil 3'te olduğu gibi eğrilik yarıçapı arttıkça çubukların rijitliği azaldığı için kritik burkulma yükü beklendiği üzere azalmaktadır. C1 çubuğunun kritik burkulma yükü en büyük olduğu için statik kararlılık yönünden diğer çubuklara göre daha kararlı diyebiliriz. C3, C5 ve C6 çubuklarının kritik burkulma yükleri şekilde de görüldüğü gibi oldukça birbirine yakındır. C2 çubuğunun da en düşük burkulma yüküne sahip olduğu gözlenmektedir.

Eğri çubukların birinci doğal frekanslarının yarıçap uzunluğuna göre değişimi incelenmiş, Şekil 5'te görüleceği üzere yarıçap uzunluğu arttıkça çubukların birinci doğal frekanslarının düştüğü görülmektedir. Benzer durum Şekil 6'da gösterilen, burkulma yükünün eğrilik yarıçapına göre değişiminde söz konusudur. Şekil 5 ve Şekil 6'daki sıralama büyükten küçüğe doğru C1, C5, C6, C4 ve C2 fiber oryantasyon açıları şeklindedir. Diğer bir husus ise Şekil 3'ten Şekil 6'ya kadar görüleceği üzere C2 ve C4 eğri çubukların burkulma ve birinci doğal frekans değerlerinin birbirine yakın olmasıdır. Benzer durum C3, C5 ve C6 fiber açılı eğri çubukların burkulma ve frekans değerleri içinde söz konusudur.

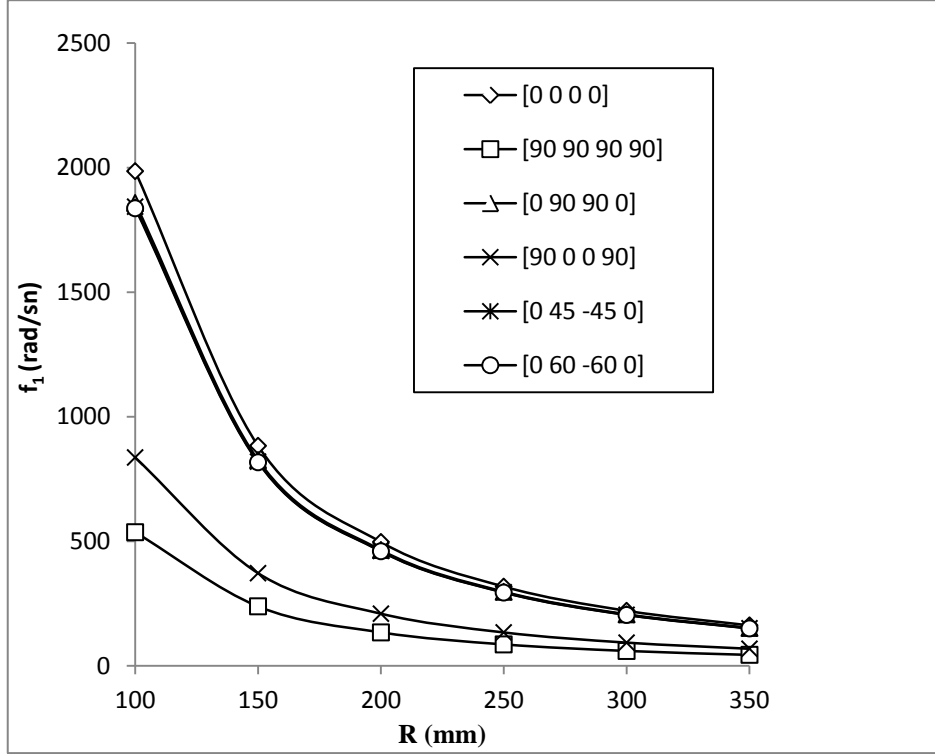
Eğri çubukların kullanılacakları yere bağlı olarak fiber oryantasyon açılarının önemi oldukça büyüktür. Uygun fiber açısı seçilerek hem burkulma yükünü arttırılması hem de doğal frekanslarının çalışma frekansından uzak tutulması sağlanabilir. Kompozit malzemelerin hafifliği çelik malzemelere göre oldukça fazladır. Bu çalışmada modellenen eğri çubuğa yarıçap doğrultusunda açılacak delikler, bu çubuğu daha hafif hale getirecektir. Delik sayısının ve çapının burkulma yükü ve doğal frekans üzerindeki etkisinin araştırılması bundan sonraki çalışma olarak düşünülmelidir.



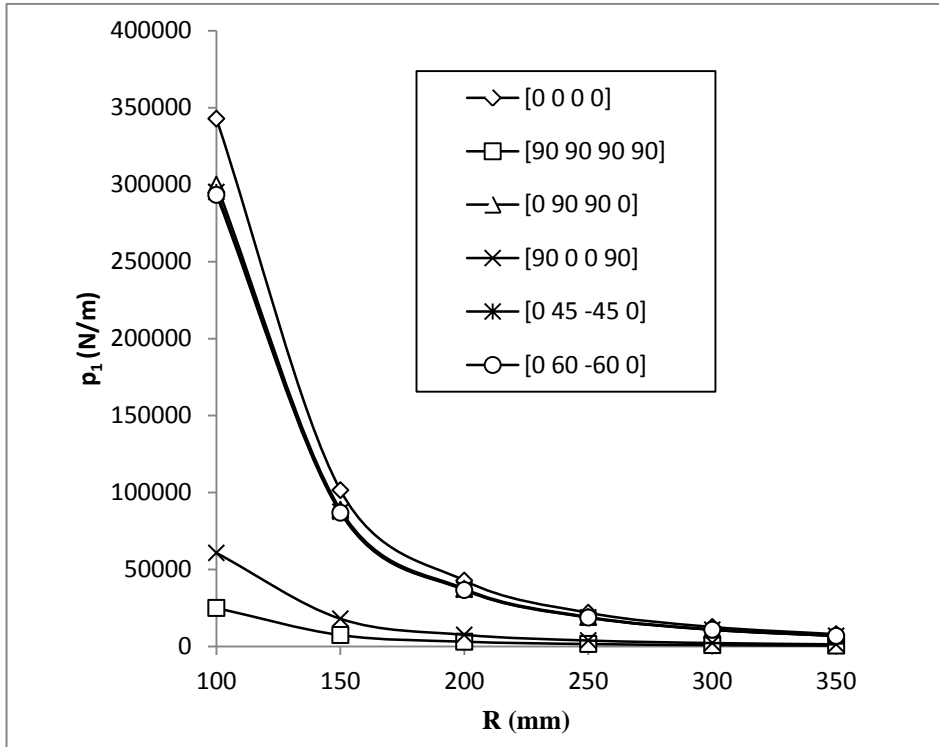
Şekil 3. Tabakalı kompozit eğri çubuğun eğrilik açısı değişiminin birinci doğal frekansına etkisi ($E_1=129.207$ GPa, $E_2=E_3=9.42512$ GPa, $G_{12}=5.15658$ GPa, $G_{13}=4.3053$ GPa, $G_{23}=2.5414$ GPa, $\nu_{12}=0.3$, $\nu_{21}=\nu_{12}$, E_2/E_1 , $b=0.0254$ m, $t=0.004$ m, $\rho=1550.0666$ kg/m³, $R=0.25$ m)



Şekil 4. Tabakalı kompozit eğri çubuğun eğrilik açısı değişiminin kritik burkulma yüküne etkisi ($E_1=129.207$ GPa, $E_2=E_3=9.42512$ GPa, $G_{12}=5.15658$ GPa, $G_{13}=4.3053$ GPa, $G_{23}=2.5414$ GPa, $\nu_{12}=0.3$, $\nu_{21}=\nu_{12}$, E_2/E_1 , $b=0.0254$ m, $t=0.004$ m, $\rho=1550.0666$ kg/m³, $R=0.25$ m)



Şekil 5. Tabakalı kompozit eğri çubuğun yarıçap değişiminin birinci doğal frekansına etkisi ($E_1=129.207$ GPa, $E_2=E_3=9.42512$ GPa, $G_{12}=5.15658$ GPa, $G_{13}=4.3053$ GPa, $G_{23}=2.5414$ GPa, $\nu_{12}=0.3$, $\nu_{21}=\nu_{12}$, E_2/E_1 , $b=0.0254$ m, $t=0.004$ m, $\rho=1550.0666$ kg/m³, $\theta=120^\circ$)



Şekil 6. Tabakalı kompozit eğri çubuğun yarıçap değişiminin kritik burkulma yüküne etkisi ($E_1=129.207$ GPa, $E_2=E_3=9.42512$ GPa, $G_{12}=5.15658$ GPa, $G_{13}=4.3053$ GPa, $G_{23}=2.5414$ GPa, $\nu_{12}=0.3$, $\nu_{21}=\nu_{12}$, E_2/E_1 , $b=0.0254$ m, $t=0.004$ m, $\rho=1550.0666$ kg/m³, $\theta=120^\circ$)

KAYNAKLAR

- Bazant Z. P., Cedolin L. (1991): “Stability of Structures”, Oxford University Press, New York, s.1056.
- Karaağaç C., Öztürk H., Sabuncu M. (2011): “Crack Effects on the In-plane Static and Dynamic Stabilities of a Curved Beam with an Edge Crack”, Journal of Sound and Vibration, Cilt 330, s.1718-1736.
- Loja M. A. R., Barbosa J. I., Soares C. M. M. (1997): “Buckling Behaviour of Laminated Beam Structures Using a Higher-order Discrete Model”, Composite Structures, Cilt 38, s.119-131.
- Öztürk H., Yeşilyurt İ., Sabuncu M. (2006): “In-Plane Stability Analysis of Non-Uniform Cross-Sectioned Curved Beams”, Journal of Sound and Vibration, Cilt 296, s.277–291.
- Petyt M., Fleischer C. C. (1971): “Free Vibration of a Curved Beam”, Journal of Sound and Vibration, Cilt 18, s.17-30.
- Qatu M. S. (1993): “Theories and Analyses of Thin and Moderately Thick Laminated Composite Curved Beams”, International Journal of Solids and Structures, Cilt 30, s.2743-2756.
- Reddy J. N. (1997): “Mechanics of Laminated Composite Plates Theory and Analysis”, CRS Press, New York, s.856.
- Sabır A. B., Ashwell D. G. (1971): “A Comparasion of Curved Beam Finite Elements when Used in Vibration Problem”, Journal of Sound and Vibration, Cilt 18, s.555-563.
- Sabuncu M. (1978): “Vibration Characteristics of Rotating Aerofoil Cross Section Bladed Disc Assembly”, University of Surrey, Ph.D Thesis, s.548.
- Timoshenko S. P., Gere J. M. (1961): “Theory of Elastic Systems” , McGraw-Hill Book Company, s.560.
- Tseng Y. P., Huang C. S., Kao M. S. (2000): “In-Plane Vibration of Laminated Curved Beams with Variable Curvature by Dynamic Stiffness Analysis, Composite Structures, Cilt 50, s.103-114.
- Yoo H. C., Kang Y. J., Davidson J. S. (1996): “Buckling Analysis of Curved Beams by Finite-Element Discretization”, Journal of Engineering Mechanis, Cilt 122, s.762-770.

EK 1:

$c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$, α : Fiber açısı

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})s^2c^2 + Q_{22}s^4$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{33})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})s^2c^2 + Q_{22}c^4$$

$$\bar{Q}_{13} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33})s^3c$$

$$\bar{Q}_{23} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33})sc^3$$

$$\bar{Q}_{33} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{33})s^2c^2 + Q_{33}(s^4 + c^4);$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}$$