



Kollektif Risk Modellemesinde Panjér Yöntemi

Pervin BAYLAN İRVEN¹

Güçkan YAPAR²

Özet

Hayat dışı sigortalarda, kollektif risk modellemesiyle toplam hasar değişkeninin dağılımının bulunması önemlidir. Bu dağılımların belirlenmesinde, toplam hasar sayıları için önerilen en önemli dağılımları iki parametrelili bir sınıf olan $(a, b, 0)$ sınıfı üyeliğindeki dağılımlar oluşturmaktadır. Hasar miktarları için ise, bir çok sürekli dağılım önerilebilir, fakat bir çok hasar miktarları dağılımı için toplam hasar miktarının dağılımını tam olarak elde etmek oldukça zordur. Çalışmamızda, karşılaşılan bu zorluklar Panjér yöntemine başvurularak aşılmaya çalışılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Hasar miktarı, toplam hasar sayısı, toplam hasar değişkeni, Erlang modeli, Panjér yöntemi, gamma dağılımı, $(a, b, 0)$ dağılımlar sınıfı.

JEL Sınıflandırma Kodları: C16, G22

Panjér's Method In The Collective Risk Modelling

Abstract

It is important to find the distribution of the total loss variable using the collective risk model in the non-life insurances. Determining these distributions, the most important distributions that are proposed for the number of aggregate claim are the distributions which are the members of $(a, b, 0)$ class that have two parameters. Many continuous distributions can be suggested for the amounts of claim, but it is quite difficult to identify exact distribution of the amount of aggregate claim for many distributions of the amounts of claim. In our study, it is aimed to outcome these difficulties by using Panjér's method.

Keywords: Amount of claim, number of aggregate claim, total loss variable, Erlang model, Panjér's method, gamma distribution, $(a, b, 0)$ class of distributions.

JEL Classification Codes: C16, G22

¹ Araş. Gör., Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, pervin.baylan@deu.edu.tr

² Doç. Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, guckan.yapar@deu.edu.tr

1. Giriş

Hayat dışı sigortalarda, belirli bir portföy için belirli bir zaman aralığındaki toplam hasar değişkeninin dağılımının bulunması önemlidir. Toplam hasarın dağılımının bulunması için öne çıkan yöntemlerden biri olan kolektif risk modellemesinde, poliçelerin oluşturduğu bir portföy için hasarları meydana getiren rasgele bir süreç varsayılır ki bu süreç, portföyü içerdiği bireysel poliçelerden ziyade bir bütün olarak tanımlamaktadır (Bowers, 1997: 367). Dolayısıyla kolektif risk modellemesi matematiksel olarak

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_K = \sum_{k=1}^K X_k \quad (1)$$

şeklinde ifade edilmektedir (Straub, 1988: 29). Bu ifade de S , belirli bir zaman aralığında portföy tarafından meydana getirilen toplam hasarı, X_k herbir hasar miktarını ve K ise verilen bir zaman aralığında bir portföydeki poliçelerin meydana getirdiği toplam hasar sayısını göstermektedir. Bu durumda, rassal değişken olan hasarların sayısı K hasar frekansı ile ilişkilendirilirken, X_1, X_2, \dots rassal değişkenleri de hasarların miktarlarını ölçmek ile ilgilidir. Bu modelin işlenebilir olması için de, K, X_1, X_2, \dots rassal değişkenlerinin birbirinden tam bağımsız olduğu, bütün X_k 'lerin ise aynı dağılıma sahip olduğu şeklinde iki temel varsayım yapılmaktadır. Sabit bir zaman aralığındaki toplam hasarın dağılımı ise, toplam hasar sayısının ve hasar miktarlarının dağılımından elde edilmektedir. Bu durumda, rassal toplam olarak adlandırılan toplam hasar değişkeni S 'nin dağılımının bulunmasında izlenecek yaklaşım

- verilere dayanan K için bir dağılım önermek,
- verilere dayanan X_k 'lar için bir dağılım önermek,
- bu iki dağılımı kullanarak, S 'nin dağılımını bulmak için gerekli hesaplamaları elde etmek

şeklinde sıralanabilir.

2. Toplam Hasar Değişkeninin Dağılımı

Olasılık teorisinde, toplam hasar değişkeninin dağılımının belirlenmesinde kullanılan toplam hasar sayısının dağılımına birincil dağılım, hasar miktarlarının ortak dağılımına da ikincil dağılım adı verilmektedir. Sabit bir

zaman aralığındaki toplam hasarın dağılımı, toplam hasar sayısının ve hasar miktarlarının dağılımına bağlı olduğu için olasılık teorisine göre, toplam hasar miktarı birleşik dağılıma sahiptir. Nitekim aktüeryal bilimin içeriğinde de birleşik dağılım, kollektif risk modeli olarak adlandırılmaktadır.

Toplam hasar S , denklem (1)'e göre tanımlanan birleşik dağılıma sahipse, S 'nin moment çıkarıcı fonksiyonu, toplam hasar sayısı K ve hasar miktarları X 'in moment çıkarıcı fonksiyonlarının bir fonksiyonu olarak ifade edilebilmektedir. Bu durumda $P(x)$, bağımsız ve aynı dağılıma sahip olan X_k 'lerin ortak dağılım fonksiyonu ise ve X , bu dağılım fonksiyonunda bir rassal değişken ise i 'nci moment

$$p_i = E[X^i] \quad (2)$$

olarak ifade edilmektedir ve X 'in moment çıkarıcı fonksiyonu da

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad (3)$$

olarak gösterilmektedir. Ayrıca, toplam hasar sayısının moment çıkarıcı fonksiyonu

$$M_K(t) = E[e^{tK}] \quad (4)$$

olarak belirtilirse toplam hasarın moment çıkarıcı fonksiyonunu

$$M_S(t) = E[e^{tS}] \quad (5)$$

olarak ifade etmek mümkündür (Bowers, 1997: 368).

Toplam hasar değişkeni olan S 'nin beklenen değeri ve varyansı da temel varsayımlar altında koşullu beklenen değer teoremi kullanılarak elde edilmektedir. $E[X]$, K rassal değişkeni ile ilişkili bir sabit olduğundan S 'nin beklenen değeri

$$E[S] = E_K[E[S | K]] = E[X]E[K] \quad (6)$$

olarak bulunurken, $E[X]$ ile $Var(X)$ 'in her ikisinin de K rassal değişkeni ile ilişkili sabitler olmasından dolayı S 'nin varyansı da

$$\begin{aligned} Var(S) &= E_K[Var(S | K)] + Var_K(E[S | K]) \\ &= E[K]Var(X) + (E[X])^2 Var(K) \end{aligned} \quad (7)$$

olarak ifade edilmektedir (Cunningham, vd., 2005: 46). Bu durumda denilebilir

ki, toplam hasarın beklenen değeri, beklenen hasar miktarı ile beklenen toplam hasar sayısının bir ürünüdür. Toplam hasarın varyansı ise, hasar miktarlarının değişkenliği ile toplam hasar sayısının değişkenliğini veren iki bileşenin toplamı olarak yorumlanmaktadır. S 'nin moment çıkarıcı fonksiyonu da, koşullu beklenen değer teoremi aracılığıyla

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E[e^{tS}] = E[E[e^{tS} | K]] \\ &= M_K[\log M_X(t)] \end{aligned} \quad (8)$$

olarak elde edilmektedir (Bowers, 1997: 369). Ayrıca, S 'nin olasılık çıkarıcı fonksiyonu ise, k sabit, X_k 'lar bağımsız olmak üzere

$$P_S(t) = P_K[P_X(t)] \quad (9)$$

şeklinde ifade edilmektedir (Klugman, vd., 2004: 88).

3. Erlang Modeli

20. yüzyılın başlarında telefon santrali ile ilgili kuyruk problemleri üzerine araştırma yapan Danimarkalı matematikçi Erlang, bir telefon görüşmesinin süresi ile ard arda gelen iki çağrı arasında geçen sürenin üstel dağıldığı bir model üzerinde çalışmıştır. Erlang modeli adı verilen bu model, hayat dışı sigortalarda kullanılan bütün modeller arasında matematiksel olarak en kullanışlı olan modeldir. Bu modelin en önemli avantajı, t uzunluğundaki bir zaman aralığında meydana gelen toplam hasar sayısının dağılımını kolaylıkla hesaplayabilmesidir (Straub, 1988: 11-12).

Erlang modeline göre toplam hasar değişkeni S 'nin dağılımı bulunurken, toplam hasar sayısının Poisson, hasar miktarlarının ise üstel dağıldığı varsayılmaktadır. Bu varsayım altında toplam hasarın dağılımı, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ değerleri için gamma ve Poisson'a göre olasılıklar bulunup her bir k için bulunan gamma ve Poisson olasılığı kendi aralarında çarpılıp toplanarak

$G_0(x) \equiv 1$ ve $n > 1$ için $G_n(x) \equiv 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$ ile

$$P[S \leq x] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} G_n\left(\frac{x}{\mu}\right), \quad x > 0 \quad (10)$$

olarak elde edilir ki burada $G_n\left(\frac{x}{\mu}\right)$, k ve μ parametrelili gamma dağılımını

göstermektedir (Straub, 1988: 31).

Hasar miktarlarının gamma dağılıması, toplam hasar sayısının ise $(a, b, 0)$ dağılımlar sınıfı üyeliğinde olması durumunda, toplam hasar miktarının dağılımını Erlang modeli ile elde etmek mümkün olmamakla birlikte, bu şartlar altında toplam hasar miktarının dağılımını tam olarak elde etmek oldukça zordur. Bu sorun, Panjér yöntemine başvurularak yaklaşık bir dağılım elde edilmesiyle aşılabacaktır.

4. Panjér Yöntemi

Verilen bir bağımsız değişkenin dağılımının değerlerinin hasar olasılıklarını hesaplamada birçok farklı yol mevcuttur. Risk teorisinin ilk zamanlarında fazla bir yaklaşım yöntemi olmamasına rağmen, mevcut olan yöntemler arasında en iyi bilinen iki yöntem Esscher'in yaklaşımı ve normal etkili seriler yaklaşımıydı. Son zamanlarda ise Panjér tarafından keşfedilen yaklaşım, hasar olasılıklarını hesaplamak için revaçta olan bir yöntem olmuştur. Çünkü bu yaklaşım, şimdiye kadar olan yaklaşımlardan çok daha üstün ve gerçekçi bir alternatiftir ve programlanması da kolaydır (Straub, 1988: 33).

Hayat dışı sigortalarda kollektif risk modellemesiyle toplam hasar değişkeninin dağılımının belirlenmesinde, toplam hasar sayısı olan K 'nın dağılımına ilişkin öne çıkan en önemli dağılımları $(a, b, 0)$ sınıfı üyeliğinde olan dağılımlar oluşturmaktadır. Frekans dağılımı olan p_k , kesikli bir rassal değişkenin olasılık fonksiyonu olup

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (11)$$

ifadesine göre a ve b sabitlerinin var olmasını sağlayan iki parametrelili $(a, b, 0)$ dağılımlar sınıfının bir üyesidir (Klugman, *vd.*, 2004: 81). Bu dağılım sınıfına ait özyinelemeli için başlangıç değeri p_0 olup, denklem (11)'deki özyineleme formülü, varsayılan dağılımdaki başarı olasılıklarının büyüklüğünü tanımlamaktadır. Bu özyineleme formülünü sağlayan olası dağılımlar ise, Poisson dağılımı, binom dağılımı, negatif binom dağılımı ve geometrik dağılım olup bu dağılımlar $(a, b, 0)$ sınıfının bir üyesidir. Özyinelemenin sol tarafına Poisson, binom ve negatif binom dağılımlarının herbiri için olasılık fonksiyonu yerleştirilerek a ve b değerleri Tablo 1'deki gibi elde edilmektedir. Tabloda yer alan geometrik dağılım ise, negatif binom dağılımının $(r = 1)$ koşulu altında tek parametrelili özel bir durumudur (Klugman, *vd.*, 2004: 81). Ayrıca, toplam hasar

değişkeni olan S 'nin moment çıkarıcı fonksiyonu üzerinden ikincil dağılımın sıfır değerinde aldığı f_0 olasılığı sıfır kabul edilerek birinci türev yardımıyla $M'_S(t) = aM'_S(t)M'_X(t) + (a+b)M_S(t)M'_X(t)$ denkleminin bileşenleri bulunmaktadır. Bu bileşenler yerine konup uygun katsayılar karşılaştırıldığında

$$kg_k = a \sum_{j=0}^{k-1} jg_j f_{k-j} + (a+b) \sum_{j=0}^{k-1} (k-j)g_j f_{k-j} \quad (12)$$

ifadesi elde edilmektedir (Straub, 1988: 34). Bu özyineleme formülü, birincil dağılımın $(a, b, 0)$ sınıfının üyesi olması durumunda

$$g_k = \frac{1}{1 - af_0} \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k} \right) f_j g_{k-j}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

şeklini almaktadır. Özyinelemeliler için başlangıç değeri olan g_0 ise, her dağılım için farklı olup, toplam hasar sayısı olan K 'nin dağılımı için belirlenmektedir (Klugman, vd., 2004: 91). Bu durumda $g_0 = P(S=0) = P_K[P_X(0)] = P_K(f_0)$ olup, birleşik bir dağılım için $P_K(t)$, birincil dağılımın olasılık çıkarıcı fonksiyonunu ve f_0 , ikincil dağılımın sıfır değerinde aldığı olasılığı göstermektedir (Klugman, vd., 2004: 93). Dolayısıyla, $(a, b, 0)$ sınıfındaki dağılımlar için a ve b değerleri ile başlangıç değeri Tablo 1'deki gibi ifade edilebilmektedir.

Tablo 1. $(a, b, 0)$ Sınıfındaki Dağılımlar İçin a, b ve Başlangıç Değerleri.

| Dağılım | a | b | g_0 |
|-------------------------------------|-------------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| Poisson (λ) | 0 | λ | $\exp[\lambda(f_0 - 1)]$ |
| Binom (m, q) | $-\left(\frac{q}{1-q}\right)$ | $(m+1)\frac{q}{1-q}$ | $[1 + q(f_0 - 1)]^m$ |
| Negatif Binom (r, β) | $\frac{\beta}{1+\beta}$ | $(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$ | $[1 + \beta(1 - f_0)]^{-r}$ |
| Geometrik (β) | $\frac{\beta}{1+\beta}$ | 0 | $[1 + \beta(1 - f_0)]^{-1}$ |

(Klugman, vd., 2004: 81, 654)

Panjér yöntemi, hayat dışı aktüeryal gerçek yaşamda görünen hasar

olasılıklarının bütün parametrik versiyonlarının X_k 'ların dağılımının yaklaşık olarak kesikli hale getirilerek özyineli olarak hesaplanabilmesi esasına dayanmaktadır. X_k 'ların dağılımı sürekli bir dağılım olduğunda, bu dağılım kesikli hale getirilmelidir ki bunun için en kolay yaklaşım, dağılım açıklığı olan uygun bir h ölçüm birimi üzerinden yuvarlama yöntemi uygulayarak kesikli hasar miktarı dağılımını oluşturmaktır. Yuvarlama yöntemi, $(j+1)h$ ile jh arasındaki olasılığı bölüp, en yakın uygun olan dağılım açıklığına bütün miktarları yuvarlamaktadır (Klugman, *vd.*, 2004: 167). Nitekim bu yöntem aracılığıyla, sürekli olan hasar miktarı dağılımı, belirli aralıklar dahilinde

$$\begin{aligned} f_0 &= P\left(X < \frac{h}{2}\right) = F_X\left(\frac{h}{2} - 0\right) \\ f_j &= P\left(jh - \frac{h}{2} \leq X < jh + \frac{h}{2}\right) \\ &= F_X\left(jh + \frac{h}{2} - 0\right) - F_X\left(jh - \frac{h}{2} - 0\right), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

olacak şekilde kesikli hale getirilerek $j = 0, 1, 2, \dots$ için jh 'de yer alan f_j olasılıkları bulunmaktadır (Klugman, *vd.*, 2004: 167).

Panjér yönteminde, başlangıç değeri olan g_0 'ın ve yuvarlama yöntemiyle elde edilen f_j olasılıklarının yardımıyla, denklem (13)'e $k = 1, 2, 3, \dots$ değerleri verilmektedir. Böylece, birikimli model yeniden incelenerek hasar olasılıklarının özyineleme değerleri olan g_k 'lar bulunmuş olur. g_k 'lara bakılarak genel bir dağılım tanımlanır ki bu tanımlanan dağılım, kesikleştirilmiş hasar miktarları üzerinden toplam hasarın kesikleştirilmiş dağılımını vermektedir.

5. Uygulama

Hasar miktarı X_k 'lar için birçok sürekli dağılım önerilebilir, fakat birçok hasar miktarı dağılımı için S 'nin dağılımını bulmak oldukça zordur. Gamma dağılımı sahip olduğu parametrelerden dolayı elverişli bir dağılım olup, gamma rassal değişkeni aynı dağılıma sahip bağımsız üstel rassal değişkenlerin toplamı olduğundan, hasar miktarı X_k 'lar için gamma dağılımının kullanılması çoğu hasar verisi için üstel dağılımdan daha avantajlıdır. Dolayısıyla, bu çalışmada hasar miktarlarının $\alpha = 2$ ve $\theta = 500$ parametreleri ile $E[X] = 1.000$ ve

$Var(X) = 500.000$ olan bir gamma dağılımına sahip olduğu varsayılarak $t = \frac{x}{\theta}$

koşulu altında $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, $\alpha > 0$ ile

$$\Gamma(\alpha; x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0, \quad x > 0 \quad (15)$$

olasılık fonksiyonu kullanılmıştır (Klugman, vd., 2004: 627). Ayrıca, toplam hasar sayılarının da

- Poisson (λ) ~ Poisson (1)
- Binom (m, q) ~ Binom (100, 0,01)
- Negatif Binom (r, β) ~ Negatif Binom (10, 0,1)
- Geometrik (β) ~ Geometrik (1)

dağıldığı varsayılmıştır. Bu varsayımlar altında herbir hasara, 4.000 hasar limiti ve 250 olağan muafiyet uygulanırsa, toplam hasar miktarının dağılımı EXCEL yardımıyla aşağıdaki adımlar takip edilerek bulunmaktadır.

- **Hasar başına düşen toplam ödemelerin beklenen değerinin ve varyansının belirlenmesi**

Hasarların birikimli dağılım fonksiyonu, α pozitif tamsayısı için

$$\Gamma(\alpha; x) = 1 - \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{x^j e^{-x}}{j!} \quad (16)$$

olarak değerlendirilen tamamlanmamış gamma fonksiyonu kullanılarak elde edilmektedir (Klugman, vd., 2004: 628). Bu dağılım fonksiyonu,

$F_X(x) = \Gamma\left(\alpha; \frac{x}{\theta}\right)$ eşitliği olarak bulunup, bu eşitlik kullanılarak,

$$E[(X \wedge x)^k] = \frac{\theta^k \Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha + k; \frac{x}{\theta}\right) + x^k \left[1 - \Gamma\left(\alpha; \frac{x}{\theta}\right)\right], \quad k > -\alpha \quad (17)$$

ifadesinden $E[(X \wedge 4.000)]$ ve $E[(X \wedge 250)]$ değerleri elde edilmiştir (Klugman, vd., 2004: 636). Bu iki beklenen değer farkı alınarak, hasar başına

düşen ödeme miktarlarının beklenen değeri olan $E[(Y^L)]$ belirlenmiştir. Daha sonra denklem (17) kullanılarak $E[(X \wedge 4.000)^2]$ ve $E[(X \wedge 250)^2]$ değerleri bulunur ki bu iki beklenen değer yardımıyla $u^* = \frac{u}{1+r}$ ve $d^* = \frac{d}{1+r}$ olacak şekilde

$$E[(Y^L)^2] = \alpha^2 (1+r)^2 \left\{ E[(X \wedge u^*)^2] - E[(X \wedge d^*)^2] - 2d^* E(X \wedge u^*) + 2d^* E(X \wedge d^*) \right\} \quad (18)$$

ifadesinden hasar başına düşen ödeme miktarlarının ikinci momenti olan $E[(Y^L)^2]$ elde edilmiştir (Klugman, vd., 2004: 127). Birinci ve ikinci momentler kullanılarak da, hasar başına düşen ödeme miktarlarının varyansı belirlenmektedir.

Hasar sayıları K^L için ise, Tablo 2'deki dağılımlara göre K^L 'nin beklenen değeri ve varyansı bulunmaktadır.

Tablo 2. Dağılımlara Göre Hasar Sayılarının Beklenen Değeri ve Varyansı.

| Dağılım | $E[K^L]$ | $Var(K^L)$ |
|------------------------------|-----------------|-----------------------------------|
| Poisson (λ) | λ | λ |
| Binom (m, q) | $m \cdot q$ | $m \cdot q \cdot (1 - q)$ |
| Negatif Binom (r, β) | $r \cdot \beta$ | $r \cdot \beta \cdot (1 + \beta)$ |
| Geometrik (β) | β | $\beta \cdot (1 + \beta)$ |

(Klugman, vd., 2004: 73, 77, 80)

Dolayısıyla denklem (6) ve (7) kullanılarak, hasar başına düşen ödeme miktarlarının beklenen değeri ve varyansı ile hasar sayılarının beklenen değeri ve varyansı aracılığıyla hasar başına düşen toplam ödemelerin beklenen değeri ve varyansı belirlenmiştir.

- Ödeme sayılarının dağılımının belirlenmesi

Ödeme sayıları K^P ile hasar sayıları K^L aynı parametrik aileden olup sadece K^P için parametreler Tablo 3'teki gibi elde edilmektedir. Bu durumda, olasılık çıkarıcı fonksiyonlar aşağıdaki ilişkilerle üretilmektedir.

Tablo 3. Frekans Düzeltmeleri.

| K^L | K^P için parametreler |
|------------------------------|--|
| Poisson (λ) | $\lambda^* = (1 - F_X(d)).\lambda$ |
| Binom (m, q) | $q^* = (1 - F_X(d)).q$ |
| Negatif Binom (r, β) | $\beta^* = (1 - F_X(d)).\beta$, $r^* = r$ |
| Geometrik (β) | $\beta^* = (1 - F_X(d)).\beta$, $r^* = 1$ |

(Klugman, vd., 2004: 652)

- **Bir ödeme yapıldığında verilen Y^P ödeme miktarının birikimli dağılım fonksiyonunun belirlenmesi**

Maksimum ödeme miktarı 3.750 olacağından Y^P 'nin birikimli dağılım fonksiyonu

$$F_{Y^P}(y) = \begin{cases} 1 & y \geq 3.750 \\ 1 - \frac{P(X > y + 250)}{P(X > 250)} & y < 3.750 \end{cases} \quad (19)$$

ifadesine göre elde edilmektedir.

- **Hasar miktarı dağılımının kesikleştirilmesi**

$h=1.000$ dağılım açıklığı alınarak ve yuvarlama yöntemi kullanılarak bir önceki adımda elde edilen Y^P 'nin birikimli dağılım fonksiyonundan $j = 0,1,2, \dots$ için f_j olasılıkları denklem (14) aracılığıyla belirlenmektedir. Böylece sürekli bir dağılım olan gamma dağılımı kesikli hale getirilmiş olmaktadır.

- **Toplam ödemelerin kesikleştirilmiş dağılımının hesaplanması**

Kesikleştirilmiş ödeme miktarı 3.150'ye kadar toplam ödemelerin kesikleştirilmiş dağılımı elde edilmek istendiğinde, bu dağılım özyineleme formülü kullanılarak belirlenmektedir. Tablo 3'teki düzeltilmiş parametrelere göre, denklem (13) ve Tablo 1 temel alınarak ($a, b, 0$) sınıfında olan dağılımlar için a ve b değerleri ile başlangıç değeri elde edilmektedir. $j = 0,1,2, \dots$ için bulunan ikincil dağılımın f_j olasılıkları ile birincil dağılım için bulunan a ve b değerlerinin ve başlangıç değerinin yardımıyla hasar miktarlarının gamma, toplam hasar sayılarının ise Tablo 4'teki gibi dağıldığı varsayımı altında birleşik dağılımın g_k hasar olasılıkları aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

Tablo 4. $(a, b, 0)$ Sınıfının Üyesi Olan Dağılımlar İçin Hasar Olasılıkları

| $g_k = P(S = k)$ $= P_K(f_k)$ | Poisson (λ) | Binom (m, q) | Negatif Binom (r, β) | Geometrik (β) |
|----------------------------------|-------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|
| $g_1 = P_K(f_1)$ | 0,2415390 | 0,2425149 | 0,2322355 | 0,1738642 |
| $g_2 = P_K(f_2)$ | 0,1135401 | 0,1137713 | 0,1112187 | 0,0921395 |
| $g_3 = P_K(f_3)$ | 0,0991184 | 0,0992945 | 0,0973681 | 0,0829932 |

Dolayısıyla, hasar miktarının gamma, toplam hasar sayısının $(a, b, 0)$ dağılım sınıfında olması durumunda elde edilen g_k 'lar, kesikleştirilmiş ödeme miktarı 3.150'ye kadar olan kesikleştirilmiş hasar miktarları aracılığıyla elde edilen toplam hasarın kesikleştirilmiş dağılımını vermektedir.

6. Sonuç

Gamma dağılımı sahip olduğu parametrelerden dolayı elverişli bir dağılım olmasına rağmen, hasar miktarlarının gamma dağıldığı ve toplam hasar sayılarının $(a, b, 0)$ dağılımlar sınıfı üyeliğinde olduğu varsayıldığında, bu sınıftaki dağılımların gamma dağılımı ile bir arada olması halinde bir çok zorlukla karşılaşmak mümkündür. Bu zorluklar, Panjér yöntemi kullanılarak aşılmış ve her bir $(a, b, 0)$ sınıfındaki dağılımın gamma dağılımı ile bir arada olması varsayımına karşılık, yaklaşık bir dağılım elde edilmiştir.

Kaynakça

Bowers, N.L., D. A. Jones, H. U. Gerber, C. J. Nesbitt ve J. C. Hickman (1997), *Actuarial Mathematics*, ACTEX.

Cunningham, R., T. Herzog ve R.L. London (2005), *Models for Quantifying Risk*, ACTEX Publications Inc.

Klugman, S. A., H. H. Panjer ve G. E. Willmot (2004), *Loss Models: From Data To Decisions*, 2nd edition, Wiley.

Straub, E. (1988), *Non-Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag.