D.E.Ü.İ.İ.B.F.Dergisi
Cilt:13, Sayı:II, Yıl:1998, ss:173-184

PLANLI BAKIM SİSTEMLERİ İÇİN BAZI STOKASTİK YENİLEME MODELLERİ

Abdullah EROĞLU(*)

ÖZET

Bir sistem ve sistemi oluşturan elemanların arızalanmaları rassaldır. Dolayısıyla sistemi meydana getiren elemanların ömürleri rassal değişkenlerdir. Arızalarla doğrudan ilgisi nedeniyle bakım da rassal nitelik taşır. Bu nedenle bakım planlamasında stokastik yenileme modellerinin önemli bir yeri vardır. Bu çalışmada stokastik yenileme modellerinden yaş yenileme (age raplacement), blok yenileme (block replacement) ve küçük tamirli yenileme (replacement with minimal repair at failure) modellerinin tanıtılması amaçlanmıştır. Arıza verilerinin artan arıza oranına sahip sürekli tekdüze ve Weibull dağılımına uygun olması durumunda söz konusu modeller için çözüm sonuçları verilmiştir.

1. GİRİŞ

Üretimin planlandığı gibi gerçekleştirilebilmesi makine ve tesislerden oluşan üretim sisteminin düzenli bir biçimde çalışmasına bağlıdır. Öte yandan sistemin düzenli çalışması ise planlı bakımla mümkündür. Bir sistem veya sistemi oluşturan elemanlar kullanımla yıpranmakta ve zamanla fonksiyonunu tam olarak yerine getirememektedirler. Bunun yanı sıra beklenmedik zamanlardaki arızalanmalar sistemin diğer elemanlarına zarar vermekte ve daha kötü sonuçların ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Bundan dolayı sistemi arızalanıncaya kadar kullanmak ekonomik olmamaktadır. Bazı durumlarda sistemin veya elamanlarının arızalanmadan önce yenilenmesi daha uygun olmaktadır. Bir sistemin arızalanmadan önce yenilenmesine "koruyucu yenileme" adı verilir. Koruyucu yenilemenin yapılması aşağıdaki koşullarda uygundur.

a) Bir sistemin koruyucu yenileme maliyeti arızalandıktan sonra yenilenmesi maliyetinden daha az olmalıdır.

b) Sistemin arızalanma oranı (failure rate) artan olmalıdır. (Jardine, A.K.S., 1973)

Stokastik yenileme modellerinde sistemin arızalanma davranışının belirli bir dağılıma uyduğu varsayılır. Arızalanma dağılımı, arıza verilerinden elde edilir. En çok kullanılan arıza dağılımları; weibull, normal ve gamma dağılımlarıdır. Yenileme modellerinde amaç toplam yenileme maliyetini veya toplam duruş süresini minimum yapan yenileme zamanının belirlenmesidir. Bu

---

(*) Yrd. Doç. Dr., S.D.Ü. İ.İ.B.F., İşletme Bölümü

çalışmada yalnızca toplam yenileme maliyetlerini minimum yapmayı amaçlayan bazı stokastik yenileme modelleri tanıtılacaktır.

Notasyonlar

C_f : Sistemi arızalandıktan sonra yenileme maliyeti,

C_p : Koruyucu yenileme maliyeti,

C_r : Küçük tamir maliyeti,

f (t) : Sistemin arıza olasılık yoğunluk fonksiyonu,

F (t) : $\int_o^t f(t)\,dt$: Birikimli arıza dağılım fonksiyonu
(Sistemin t den önce arızalanma olasılığı),

$\overline{F}(t) = 1 - F(t)$: Güvenilirlik fonksiyonu (sistemin en az t zamanına kadar arızalanmama olasılığı) ,

$r(t) : \dfrac{f(t)}{\overline{F}(t)}$: Arızalanma oranı fonksiyonu,

$\mu : \int_o^\infty t\,f(t)\,dt$: Sistemin ortalama ömrü,

N (t) : (0 , t) aralığındaki arızalanma sayısı,

S_n : n tane arızanın meydana gelmesi için geçen zaman,

$F_n(t) : P\{S_n \le t\}$: S_n nin birikimli dağılım fonksiyonu,

$M(t) = E\left(N(t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$: (0,t) aralığındaki beklenen arıza sayısı,

$M^*(s) : \dfrac{f^*(s)}{s\left(1 - f^*(s)\right)}$: M (t) nin Laplace dönüşümü,

$f^*(s)$: f (t) nin Laplace dönüşümü,

$m(t) : \dfrac{dM(t)}{dt}$: Yenileme yoğunluğu fonksiyonu
(renewal density function),

2. Yaş Yenileme Modeli

Bu modelde sistem ya arızalandığında ya da t_P zamanında (hangisi önce olursa) değiştirilir (yenilenir). $C_1(t_P)$; birim zamanda toplam beklenen yenileme maliyeti;

$$C_1(t_P) = \frac{\begin{pmatrix}\text{Toplam beklenen}\\ \text{yenileme maliyeti}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{Beklenen yenileme}\\ \text{çevrimi u zunluğu}\end{pmatrix}} = \frac{C_f F(t_P) + C_P \bar{F}(t_P)}{\int_o^{t_P} tf(t)dt + t_P \bar{F}(t_P)} \qquad (1)$$

şeklindedir (Özkaya, G., 1977, Barlow, R.E. ve diğerleri, 1965). Amaç $C_1(t_p)$ yi minimum yapan t_P^* yenileme zamanının belirlenmesidir. Bunun için (1) denkleminin t_p'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{dC_1(t_p)}{dt_p} = \Big\{\big[C_f f(t_P^*) - C_p f(t_P^*)\big]\left[\int_0^{t_p^*} tf(t)dt + t_p^*.\bar{F}(t_p^*)\right]$$
$$-\big[t_p^* f(t_p^*) + \bar{F}(t_p^*) - t_p^* f(t_p^*)\big]\big[C_f F(t_p^*) + C_p \bar{F}(t_p^*)\big]\Big\}$$
$$/\left[\int_0^{t_p^*} tf(t)dt + t_p^*.\bar{F}(t_p^*)\right]^2 = 0$$

olur. Buradan;

$$(C_f - C_p) f(t_p^*)\left[\int_0^{t_p^*} tf(t)dt + t_p^* \bar{F}(t_p^*)\right] - \bar{F}(t_p^*)\big[(C_f - C_p) F(t_p^*) + C_p\big] = 0$$

$$(C_f - C_p)\left\{f(t_p^*)\left[\int_0^{t_p^*} tf(t)dt + t_p^* \bar{F}(t_p^*)\right] - \bar{F}(t_p^*) F(t_p^*)\right\} = \bar{F}(t_p^*)\, C_p$$

$$\left\{f(t_p^*)\left[\int_0^{t_p^*} tf(t)dt + t_p^* \bar{F}(t_p^*)\right] - \bar{F}(t_p^*) F(t_p^*)\right\} / \bar{F}(t_p^*) = \frac{C_p}{C_f - C_p}$$

$$r(t_P) = f(t_P) / \bar{F}(t_P)$$

olduğundan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$r(t_p^*)\int_0^{t_p^*} tf(t)\,dt + t_p^* f(t_p^*) - \overline{F}(t_p^*) = C_p / (C_f - C_p) \tag{2}$$

denklemi elde edilir. Arıza oranı fonksiyonunun [r (t)]; sürekli ve artan olduğu varsayılırsa, (2) denkleminin ya $t_p = t_p^*$ gibi tek bir çözümü vardır, ya da çözümü yoktur. Çözümü olmaması $t_p = \infty$ olması anlamına gelir, bu da sistem arızalandığında değiştirilecektir demektir (Glasser, G.J., 1967). (2) nin $t_p = t_p^*$ gibi tek bir çözümü olması halinde minimum maliyeti bulmak için (2)denkleminden C_p nin eşiti (1) denkleminde yerine yazılırsa.

$$C_1(t_p^*) = \frac{(C_f - C_p)F(t_p^*) + (C_f - C_p)\left\{ r(t_p^*)\int_0^{t_p^*} tf(t)dt + t_p^* f(t_p^*) - F(t_p^*) \right\}}{\int_0^{t_p^*} tf(t)dt + t_p^* \overline{F}(t_p^*)}$$

$$= \frac{(C_f - C_p)\left\{ r(t_p^*)\int_0^{t_p^*} tf(t)dt + t_p^* f(t_p^*) \right\}}{\int_0^{t_p^*} tf(t)dt + t_p^* \overline{F}(t_p^*)}$$

$$= \frac{(C_f - C_p)\left\{ r(t_p^*)\int_0^{t_p^*} tf(t)dt + t_p^* r(t_p^*)\overline{F}(t_p^*) \right\}}{\int_0^{t_p^*} tf(t)dt + t_p^* \overline{F}(t_p^*)}$$

$$= \frac{(C_f - C_p)\, r(t_p^*)\left\{ \int_0^{t_p^*} tf(t)dt + t_p^* \overline{F}(t_p^*) \right\}}{\int_0^{t_p^*} tf(t)dt + t_p^* \overline{F}(t_p^*)}$$

$$C_1(t_p^*) = (C_f - C_p)\, r(t_p^*) \tag{3}$$

bulunur. $t_p = \infty$ olması durumunda söz konusu maliyet;

$$F(\infty) = 1, \quad \overline{F}(\infty) = 0 \quad , \quad \int_0^\infty tf(t)dt = \mu \quad \text{ve} \quad \lim_{t_P \to \infty} t_p \overline{F}(t_p) = 0$$

olduğundan

$$C_1(\infty) = \frac{C_f}{\mu} \tag{4}$$

elde edilir.

2.1. Arıza Verilerinin Sürekli Tekdüze Dağılıma Uyması Durumu

Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu; (Law, A.M., and Kelton, W.D., 1982)

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad a \le t \le b \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{t - a}{b-a} & , \quad a \le t \le b \\ 1 & , \quad b < t \end{cases}$$

ve arıza oranı fonksiyonu,

$$r(t) = \frac{1}{b-t}$$

biçimindedir. $k = C_f - C_p$ ve $m = b - a$ olarak alınırsa (1) denklemi

$$C_1(t_P) = \frac{(kt_P / m) + C_P}{\left[t_P^2 / (2m)\right] + t_P\left[1 - (t_P / m)\right]}$$

ve (2) denklemi,

$$\frac{t_P^{*2}}{2m(b - t_P^*)} + \frac{a}{m} = \frac{C_p}{k}$$

olur. Buradan

$$t_P^* = a - \frac{mC_p}{k} + \sqrt{\left(\frac{mC_P}{k} - a\right)\left(\frac{mC_P}{k} + m + b\right)}$$

elde edilir. (3) denkleminden minimum maliyet;

$$C_1(t_P^*) = \frac{k}{b - t_P^*} = \frac{C_f - C_P}{b - t_P^*}$$

olur.

2.2. Arıza Verilerinin Weibull Dağılımına Uyması Durumu

Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t) = \begin{cases} \alpha\,\beta^{-\alpha}\, t^{\alpha-1}\, e^{-(t/\beta)^{\alpha}} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(t/\beta)^{\alpha}} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

ve arıza oranı fonksiyonu,

$$r(t) = \alpha\,\beta^{-\alpha}\, t^{\alpha-1}$$

dır.

Söz konusu dağılım için (2) denklemi

$$\alpha\,\beta^{-\alpha}(t_p^*)^{\alpha-1}\int_0^{t_p^*} \alpha\,\beta^{-\alpha}\, t^{\alpha}\, e^{-(t/\beta)^{\alpha}}\,dt + (\alpha\,\beta^{-\alpha}(t_p^*)^{\alpha} + 1)\, e^{-(t_p^*/\beta)^{\alpha}}$$

$$= \frac{C_p}{C_f - C_p} + 1 \tag{5}$$

Olur. (5) denkleminin t_p^* için analitik çözümü bulunmadığından nümerik metotlarla çözüm elde edilebilir. Minimum maliyet ise (3) denklemine göre

$$C_1(t_p^*) = (C_f - C_p)\,\alpha\,\beta^{-\alpha}\,(t_p^*)^{\alpha-1}$$

olur.

3. Blok Yenileme Modeli

Bu modelde sistem periyodik kt_P (k=1,2,...) zamanlarında değiştirilir. Bu arada sistem t_P zamanından önceki arızalanmalarda da değiştirilir. (0, t_P) aralığındaki arızalanmalar bir yenileme süreci (renewal process) oluşturur (Ross, S.M., 1989). C_2 (t_P); birim zamanda beklenen toplam yenileme maliyeti olsun.

$$C_2\,(t_p) = \frac{\begin{bmatrix}\text{(0,}t_p\text{) aralığındaki arıza-}\\ \text{lardan dolayı beklenen}\\ \text{yenileme maliyeti}\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} t_p\text{ zamanındaki}\\ \text{yenileme}\\ \text{maliyeti}\end{bmatrix}}{\text{Periyod Süresi}}$$

$$= \frac{C_f M(t_P) + C_P}{t_P} \qquad (6)$$

şeklinde ifade edilir (Kelle, P., ve diğerleri, 1994). Amaç $C_2(t_p)$ yi minimum yapan yenileme periyodunun (t_p^*) bulunmasıdır. (6) denkleminin t_P ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{dC_2(t_p)}{dt_p} = \left[C_f\ m(t_p)\,t_p - (C_f M(t_p) + C_p)\right] / \,t_p^2 = 0$$

$$t_p^*\ m(t_p^*) - M(t_p^*) = C_p / C_f \qquad (7)$$

elde edilir. (7) denkleminden t_p^* nin eşiti (6) denkleminde yerine yazılırsa minimum maliyet;

$$C_2(t_p^*) = C_f\, m(t_p^*) \qquad (8)$$

bulunur.

$M(t_P)$; kesikli yaklaşım olarak bilinen M(0)=0 olmak üzere

$$M(t_P) = \sum_{i=0}^{t_P-1} \left[1 + M(t_P - i - 1)\right] \int_i^{i+1} f(t_P)dt_P \qquad , \quad t_P \geq 1$$

denkleminden nümerik olarak elde edilebilir (Jardine, A.K.S., 1973).

4. Küçük Tamirli Yenileme Modeli

Sistem periyodik kt_P (k=1,2,...) zamanlarında değiştirilir ve bu arada meydana gelen arızalanmalar küçük tamirle giderilir. Sistem tamir edilmek suretiyle fonksiyonunu yerine getiriyor ve arızalanma oranı değişmiyorsa bu tamire küçük tamir adı verilmektedir (Beichelt, F., Fischer, K., 1980, Jayabalan, V., Chaudhuri, D., 1995).

Birim zamanda toplam beklenen maliyet,

$$C_3\,(t_p) = \frac{\begin{bmatrix}\text{(0,}t_p\text{) aralığındaki arıza-}\\ \text{lardan dolayı beklenen}\\ \text{yenileme maliyeti}\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}t_p\text{ zamanındaki}\\ \text{yenileme}\\ \text{maliyeti}\end{bmatrix}}{\text{Periyod Süresi}}$$

$$= \left[(C_r \int_0^{t_p} r\,(t)dt) \;+ C_p \right] / \, t_P \tag{9}$$

şeklindedir (Barlow, R.E., Proschan, F., 1965). Minimum maliyeti bulmak için (9) denkleminin t_P 'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$(C_r r(t_p).t_p - (C_r \int_0^{t_p} r\,(t)dt \; + C_p)) / t_p^2 = 0$$

$$t_p^* r(t_p^*) - \int_0^{t_p^*} r\,(t)dt \; = C_p \,/\, C_r \tag{10}$$

elde edilir. Minimum maliyet ise

$$C_3\,(t_p^*) = C_r r(t_p^*) \tag{11}$$

olur.

4.1. Arıza Verilerinin Sürekli Tekdüze Dağılıma Uyması Durumu

İlgili dağılım için (10) denkleminden

$$\frac{t_p^*}{b - t_p^*} + \ln(1 - t_p^*/b) = C_p/C_r \tag{12}$$

eşitliği elde edilir. t_p^* değeri nümerik yöntemle bulunarak minimum maliyet

$$C_3(t_p^*) = C_r/(b - t_p^*) \tag{13}$$

eşitliğinden bulunur.

4.2. Arıza Verilerinin Weibull Dağılımına Uyması Durumu

İlgili dağılım için (9) denkleminden,

$$\begin{aligned} C_3(t_p) &= \left\{ C_r \int_0^{t_p} \alpha\beta^{-\alpha} t^{\alpha-1} dt + C_p \right\} / t_p \\ &= C_r\beta^{-\alpha} t_p^{\alpha} + C_p)/t_p \end{aligned} \tag{14}$$

elde edilir. (14) denkleminin t_P ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{dC_3(t_p)}{dt_p} = (C_r\alpha\beta^{-\alpha} t_P^{\alpha-1} t_p - C_r\beta^{-\alpha} t_p^{\alpha} - C_p) / t_p^2 = 0$$

$$t_p^* = \beta\left(\frac{C_p}{C_r(\alpha - 1)}\right)^{1/\alpha} \quad , \quad \alpha > 1 \tag{15}$$

bulunur. Minimum maliyet ; (11) denkleminden

$$C_3(t_p^*) = C_r\alpha\beta^{-\alpha}(t_P^*)^{\alpha-1} = \frac{\alpha C_p}{\beta(\alpha - 1)\left(\frac{C_p}{C_r(\alpha - 1)}\right)^{1/\alpha}}$$

elde edilir.

5. Örnek

$C_P = 400$, $C_f = 700$, $C_r = 15$, $b = 1900$, $a = 0$, $\alpha = 1{,}02$, $\beta = 1{,}6$ verileri için daha önce anlatılan modellerin çözüm sonuçları aşağıda verilmiştir.

Tekdüze $\rightarrow$ $t_p^* = 1472{,}22$, $C_1(t_p^*) = 0{,}70129$

Tekdüze $\rightarrow M(t_p^*) = 1.246248$, $t_p^* = 1538$, $C_2(t_p^*) = 0{,}82729$

Tekdüze $\rightarrow$ $t_p^* = 1838{,}9$, $C_3(t_p^*) = 0{,}24556$

Weibull $\rightarrow$ $t_p^* = 1852{,}62$, $C_3(t_p^*) = 11{,}01146$

6. SONUÇ

Stokastik yenileme modellerinden yaş yenileme modelinde $C_1(t_P)$ yenileme maliyetini minimum yapan

$$r(t_P^*)\int_0^{t_P^*} tf(t)\,dt + t_P^* f(t_P^*) - F(t_P^*) = C_P / (C_f - C_P)$$

eşitliğinin analitik çözümü çoğu dağılımlar için yoktur. Ancak nümerik çözümler elde edilebilmektedir. Model için en iyi yenileme zamanı t_p^*, dağılımın parametreleri verildiğinde, C_P / $(C_f - C_P)$ oranının bir fonksiyonu olmaktadır. C_P sabit tutulup C_f artırıldığında t_p^* azalmaktadır. Bunun anlamı arızalanma sonucu yenilemenin maliyeti arttıkça koruyucu yenileme periyodu azalmaktadır.

Blok yenileme modelinde yenileme maliyeti $C_2(t_P)$'yi minimum yapan

$$t_p^*\, m(t_p^*) - M(t_p^*) = C_P / C_f$$

eşitliğinden t_p^* nin analitik çözümü güç hatta imkansızdır. Bu nedenle $M(t_p^*)$; kesikli yaklaşım olarak bilinen nümerik yöntemle bulunabilir ve t_p^* belirlenebilir.

Küçük tamirli yenileme modelinde yenileme maliyeti C_3 (t_P)'yi minimum yapan

$$t_p^*\, r(t_p^*) - \int_0^{t_p^*} r(t)\,dt = C_P / C_r$$

eşitliğinden Weibull dağılımı ($\alpha > 1$) için analitik çözümü

$$t_P^* = \beta\left(\frac{C_P}{C_r(\alpha-1)}\right)^{1/\alpha}$$

dır. Sürekli tekdüze dağılım için t_p^* nümerik yöntemle bulunabilir.

Modellerin uygulanabilirliği büyük ölçüde arızalanmalara ilişkin güvenilir istatistik verilerin bulunmasına bağlıdır. Güvenilir istatistik verileri ise düzenli kayıtların tutulması ile elde edilebilir. Söz konusu arıza kayıtlarından arıza olasılık yoğunluk fonksiyonları belirlenebildiğinde yaş yenileme, blok yenileme ve küçük tamirli yenileme modelleri kurulabilir ve çözüm sonuçları elde edilebilir.

ABSTRACT

Since the failure of the components which establish a system is random, the life of these components is a random variable. Since the maintenance has a direct connection with failure, it also has random characteristics. For that reason, stochastic replacement models have an important place in maintenance planning. The aim of this study is to introduce stochastic replacement models which are age replacement, block replacement and replacement with minimal repair at failure.

KAYNAKÇA

BARLOW, R.E., PROSCHAN ve F., HUNTER, L.C.,(1965); *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley and Sons., New York.

BEİCHELT, F. ve FİSCHER, K.,(1980); “General Failure Model Applied to Preventive Maintenance Policies”, *IEEE Transaction on Reliability*, R-29, No:1.

GLASSER, G.J.,(1967); “The Age Replacement Problem”, *Technometrics*, Vol. 9, No:1.

JARDİNE, A.K.S., (1973); *Maintenance, Replacemenet and Reliability*, John Wiley and Sons., New York.

JAYABALAN, V. ve CHAUDHURİ, D., (1995); “Replacement Policies: a near optimal algorithm” *IEE Transaction*, 27, 784-788.

KELLE, P., SİLVER, E.A. ve MURPHY, G.F., (1994); “Cost Analysis and Extension of a Simple Maintenence – Scheduling Heuristic”, *Naval Research Logistics*, Vol.41, pp.945-958, LAW, A.M. ve KELTON, W.D., (1982); *Simulation Modelling and Analysis*, McGraw – Hill, Inc..

ÖZKAYA, G., (1977); *Kantitatif Bakım Planlaması ve Dinamik Bir Sistem Yenileme Modeli*, Doçentlik Tezi, İTÜ, İstanbul.

ROSS, S.M., (1989); *Probability Models*, Academic Press, Inc., 4.baskı.