

**FİNANSAL VEKTÖREL ZAMAN DİZİLERİNDE  
ÖZDEĞER-ÖZVEKTÖR ANALİZİYLE EŞZAMANLI VE GECİKMELİ  
DOĞRUSAL İLİŞKİLERİN TESBİTİ**

Reşat KASAP<sup>(\*)</sup>

**ÖZET**

*Bu çalışmada, vektörel zaman dizilerinde modelleme aşamasında, dizilerin birbirleriyle ilişkilerini ortaya koyan eşzamanlı ve gecikmeli doğrusal ilişkilerin tesbiti, iki farklı gerçek veri grubu üzerinde gösterilmiştir. Bunlardan birincisi, üç diziden oluşan Ziraat Bankası(TCZB)'nin verdiği kredi dizileridir. Diğeri ise, ABD Doları'nın BP(İngiliz Sterlini), DM(Alman Markı), SF(İsviçre Frangı), ve YEN(Japon Yeni)'e göre değişimlerini veren dört dizidir. Analizler sonucunda vektör AR(1) ile modellenen her iki gruptan; birincisinde doğrusal ilişkilerin her ikisinin de olmadığı, diğer veri grubunda ise her iki ilişkinin de var olduğu görülmüştür.*

**1. GİRİŞ**

Lineer modellerde değişkenlerin birbiriyle ilişkili olması, kabul edilen önemli problemlerden biridir. Benzer durum, zaman dizileri analizi için de söz konusudur. Özellikle çok değişkenli yada vektörel zaman dizileri analizinde bu durum inceleme konusu olmaktadır. Fakat zaman dizilerinde bu problemin iki farklı ayağı vardır. Birincisi eşzamanlı doğrusal ilişki, diğeri ise gecikmelere dayanan doğrusal ilişkidir (Box v.d., 1973: 33-51; Coen, 1969: 133-163). 70'li yıllardan itibaren bu problemler araştırma konusu olmaya devam etmektedir (Ahn ve Reinsel, 1988: 849-856; Bewley ve Yang, 1994: 56; Tse, 1995: 553-563). Özellikle ekonomik zaman dizilerinde bu tür problemlerle oldukça sık karşılaşmaktadır. Modelleme aşamasında, elde edilen modelin anlaşılmasına ve yorumlanmasına katkı sağlaması bakımından, bu konuların incelenmesi önem kazanmaktadır. Bundan dolayı, bu bölümde, çalışmanın amacı belirtildikten sonra genel bilgiler özetlenmiştir. Bölüm 2'de, çok değişkenli zaman dizilerinde özdeğer-özvektör analizi başlığı altında, eşzamanlı ve gecikmeli doğrusal ilişki hakkında bilgiler verilmiştir. Finans verilerini göz önüne alarak doğrusal ilişkinin olup olmadığının incelendiği iki farklı gerçek veri grubu üzerinde uygulama Bölüm 3'de verilmiştir. Son bölümde ise, çalışmayla ilgili genel sonuç ile yorum yapılmıştır.

---

<sup>(\*)</sup> Yrd.Doç.Dr. Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü

Reşat Kasap

k-boyutlu  $\underline{Z}_t$ , ( $\underline{Z}_t = \tilde{\underline{Z}}_t - \underline{\mu}$  olmak üzere) vektörü için; ARMA(p,q) modeli

$$\Phi(B) \underline{Z}_t = \Theta(B) \underline{A}_t \quad (1)$$

olup, burada  $\Phi(B) = I - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \dots - \Phi_p B^p$  ve  $\Theta(B) = I - \Theta_1 B - \Theta_2 B^2 - \dots - \Theta_q B^q$  dir. Ayrıca  $|\Phi(B)| = 0$  ve  $|\Theta(B)| = 0$  polinomlarının kökleri birim çemberin dışındadır. Bunun anlamı ARMA(p,q) modeli durağan ve tersi alınabilir koşullarını sağlamaktadır. Aynı zamanda  $\underline{A}_t$ , ortalaması  $\underline{0}$  ve kovaryans matrisi  $\Sigma_{\underline{A}_t}$  olan, beyaz gürültü vektörüdür (Reinsel, 1995).

Genel olarak ifade etmek gerekirse özdeğerler,

$$D \underline{v} = \lambda \underline{v}, \quad (2)$$

eşitliğinin karakteristik kökleri(özdeğerleri)dir. Burada D simetrik matris ve  $\underline{v}$  ise karakteristik vektör(özvektör)dür. Öyleyse

$$|D - \lambda I| = 0$$

karakteristik denklemi çözülerek,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  özdeğerleri ve bunlara karşılık gelen  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  özvektörler

$$D \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i, i = 1, \dots, k$$

den hareketle elde edilir (Searle, 1982). Daha fazla matris cebiri konularına ayrıntılı girmeksizin, özdeğerler; k-doğrusal eşitliğin setinde, doğrusal bağımlılığın incelenmesi için kullanılır.

## 2. ÇOK DEĞİŞKENLİ ZAMAN DİZİLERİNDE ÖZDEĞER- ÖZVEKTÖR ANALİZİ

Bu çalışmada, çok değişkenli zaman dizilerini analiz etmede yararlı olabilecek özdeğer-özvektör analizleri anlatılmaktadır.  $\underline{Z}_t = \tilde{\underline{Z}}_t - \underline{\mu}$  olmak üzere ve (1) den

$$\underline{Z}_t = \hat{\underline{Z}}_{t-1}(1) + \underline{A}_t \quad (3)$$

formunda yazılır. Burada  $\hat{\underline{Z}}_{t-1}(1)$ , (t-1) anında  $\underline{Z}_t$  nin bir adım ileri kestirimidir. Durağan dizi için

$$\Gamma_{\underline{Z}}(0) = E(\underline{Z}_t \underline{Z}_t')$$

ve

$$\Gamma_{\hat{\underline{Z}}}(0) = E[\hat{\underline{Z}}_{t-1}(1) (\hat{\underline{Z}}_{t-1}(1)']$$

dir. Aşağıdaki matrislerin tahminlerinin özdeğerlerini ve özvektörlerini hesaplamak sıklıkla bilgi verici olabilmektedir;  $\Gamma_{\underline{Z}}(0)$ ,  $\Sigma_{\underline{A}_t}$ ,  $\Gamma_{\underline{Z}}(0)^{-1} \Gamma_{\underline{Z}}(0)$ ,  $\Phi_t$  ve  $\Theta_t$ . Böyle analizler iki temel amaçla yapılır; i) diziler arasında doğrusal ilişkileri tesbit eder, ii) gecikmeli doğrusal ilişkileri tesbit eder, iii) elde edilen modelin anlaşılmasına ve yorumlanmasına yardım ederler. Bundan dolayı, burada eşzamanlı ve gecikmeli doğrusal ilişkiler iki alt başlık halinde özetlenecektir.

### 2.1 Eşzamanlı Doğrusal İlişki

$\Gamma_{\underline{Z}}(0)$  matrisinde, m-sıfır özdeğerin olduğu varsayalım. Bu

$$\underline{c}'_j \underline{Z}_t = 0 \quad (4)$$

formülünde m-bağımsız tam doğrusal ilişkinin varlığı anlamına gelir. Burada  $\underline{c}'_j = [c_{1j}, \dots, c_{kj}]$ ,  $\underline{Z}_t$ ,  $t=1, 2, \dots, T$  'nin elamanları arasında vardır.  $\Gamma(0)$ , (lag) gecikme(0) için dizinin çapraz varyans-kovaryans matrisinde değeri sıfır olan özdeğerin bulunması,  $\underline{Z}_t$  dizileri arasında var olan doğrusal ilişkiye işaret eder. Böyle ilişkiler bir veya daha fazla dizi, diğerlerinin eşzaman değerlerinden hesaplandığı zaman ortaya çıkar. Tecrübeler, bu konudaki incelemeyi, genellikle çok değişkenli verinin modellenmesinin ilk aşamasında yapılmasının faydasına işaret etmektedir (Box v.d., 1973: 33-51). Bu yolla, böyle ilişkilerin formu araştırmacıları dikkatli olmaya zorlamaktadır. Aynı zamanda sıfıra yakın özdeğerler, veride yaklaşık eşzamanlı doğrusal ilişkiyi de uyarabilir.

### 2.2 Gecikmeli Doğrusal İlişki

Artıkların varyans-kovaryans matrisi  $\Sigma_{\underline{A}_t}$  'nın sıfır özdeğerlerinin var olması, modellenen diziler arasında tam gecikmeli doğrusal ilişkinin var olması demektir. Bunun anlamı, k-dizilik modelde, modelin k dan daha az dizi ile yönlendirildiğine denk gelmektedir. Sıfır özdeğerlerin varlığı, diziler arasındaki doğrusal bağımlılığın varlığı konusunda modellemeciye uyarır. Bu sebepten, tekil olmayan çözüm elde etmek için modelden bazı dizilerin çıkarılması gerekebilir.

Bağımlılık ölçüsü olarak özdeğerlerin yorumlanmasında çok dikkatli olmak gerekir. Çünkü çok değişkenli modellemede tamamiyle farklı diziler arasında tam doğrusal ilişkinin varlığında, sıfır özdeğerler için pekçok farklı yorum yapılabilir.

Özellikle ekonomi ve işletme gibi yüksek ilişkili zaman dizilerinin modellenmesi yapıldığında, bağımlılık açısından bir inceleme, iyi bir modellemenin koşulları içerisindedir.

$\Sigma_{\underline{A}_t}$ ,  $\underline{A}_t$  nin kovaryans matrisinde sıfır özdeğerler,

$$\underline{h}'_1 \underline{Z}_t + \underline{h}'_2 \underline{Z}_{t-1} + \dots + \underline{h}'_r \underline{Z}_{t-r} = 0 \quad (5)$$

gibi doğrusal ilişkilerin var olduğu durumda ortaya çıkar. Burada  $\underline{h}$ : $k \times 1$  sabitler vektörü olup, aynı zamanda olmayan dizilerin, elemanları arasında var olur. Buna denk olarak,  $k$ ,  $\{\underline{Z}_t\}$  dizisinin,  $k$  dan daha az yeni dizi ile yönlendirilmesini işaret ederler. Uygulamada,  $\Sigma_{\underline{A}_t}$ , uygun dereceli modelleme ile tahmin edilir. Özel olarak, (5) deki ilişki, yalnızca  $p \geq r$  için tekil olan AR(p) modelinin artıklarının kovaryans matrisi olabilir (Coen, 1969: 133-163).

Şimdi, dört zaman dizisi;  $Z_{1t}$ ,  $Z_{2t}$ ,  $Z_{3t}$ ,  $Z_{4t}$  olsun. buna göre (4) ve (5) in ışığında aşağıda verilecek iki durum söz konusu olabilir;

Durum 1: Değişkenler arasında tam doğrusal ilişki varsa, şöyleki

$$c_1 Z_{1t} + c_2 Z_{2t} + c_3 Z_{3t} + c_4 Z_{4t} = 0$$

ise dizilerin özdeğer-özvektör analizi bu ilişkiyi işaret edebilir.

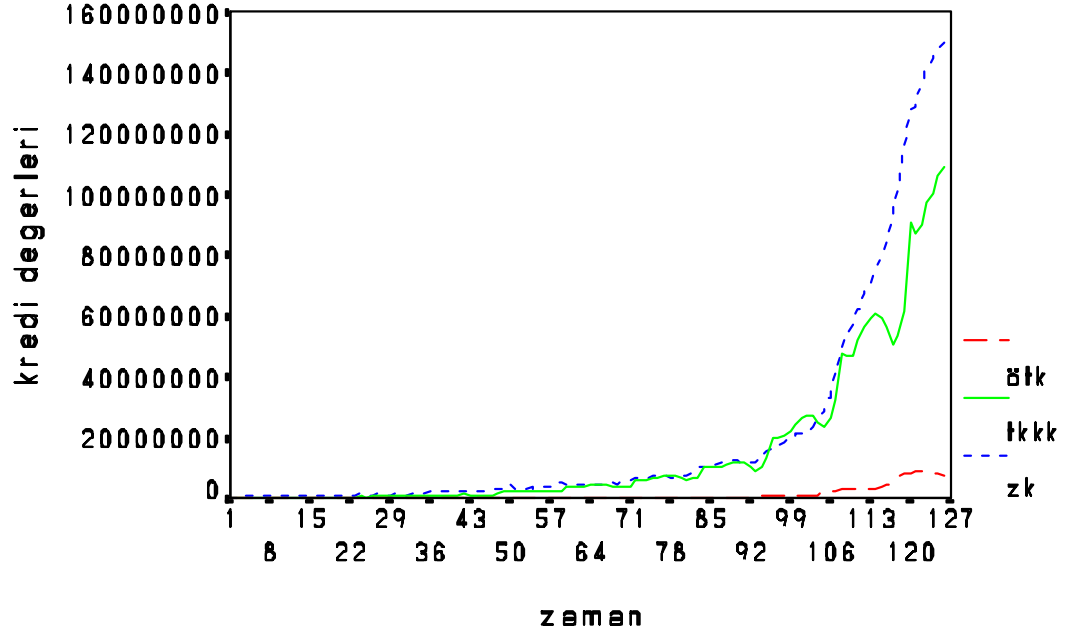
Durum 2: Değişkenler arasında tam gecikmeli doğrusal bir ilişki varsa örneğin,

$$c_1 Z_{1t} + c_2 Z_{2t} + c_3 Z_{3t-1} + c_4 Z_{4t-1} = 0$$

ise, orjinal diziler için bulunan uygun AR(1) modeline ait artıkların özdeğer-özvektör analizi, diziler arası ilişkiyi gösterir. Burada adı geçen ilişkiler sözkonusu ise, bir değişkenin, öteki değişkenler cinsinden yazılması mümkün olabilmektedir.

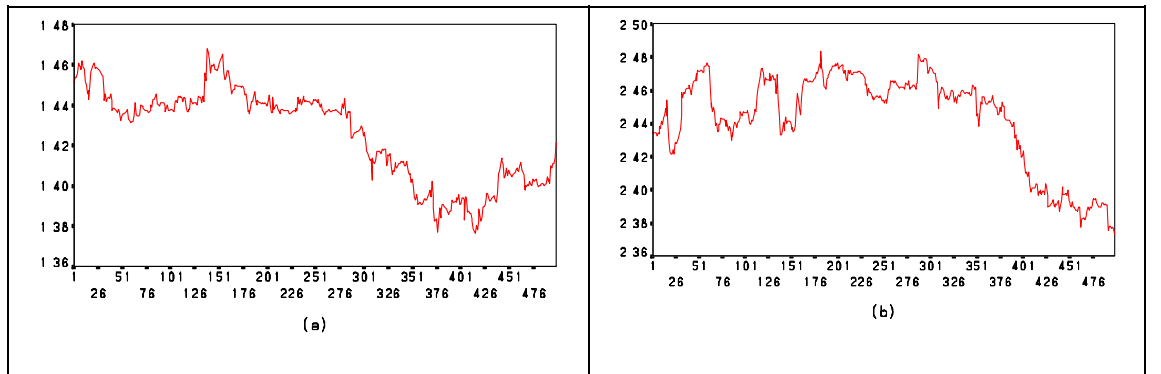
### 3. İKİ GERÇEK VERİ ÜZERİNDE UYGULAMA

Yukarıda verilen ilişkileri yapısında içeren içermeyen iki farklı veri grubu incelenecektir. Bu çalışmada inceleme konusu olan iki veri grubundan biri Ziraat Bankası'nın aylık kredi dizileri; özel tarımsal kredi (ötk), tarım kredi kooperatifleri kredisi (tkkk) ve zirai kredi (zk) dizileridir. Adı geçen diziler, Ocak 1987- Haziran 1997 arasında gözlemlenmiş 126 birimden oluşmaktadır. Bu dizilerin grafikleri Şekil 1'de görülmektedir.

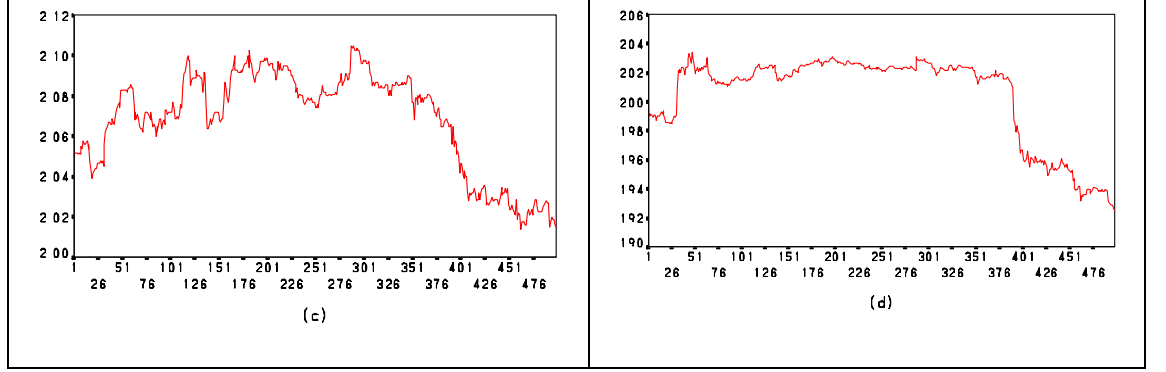


Şekil 1: Ziraat Bankası'nın ötk, tkkk ve zk dizilerinin grafikleri

Diğeri ise ABD Dolarının, BP, DM, SF ve YEN'e göre saatlik değişim dizileridir. Söz konusu veri, farklı amaçlı bir çalışmada kullanılmıştır (Cecen ve Erkal, 1996: 323-329). Bu veri grubuna ait dizilerin grafikleri Şekil 2'de verilmiştir.



## Reşat Kasap



Şekil 2: ABD Doları'nın, BP (a), DM (b), SF (c) ve YEN (d)'e göre değişim dizilerinin grafikleri

İki farklı örnek için elde edilen analiz sonuçları aşağıda verilecektir. Öncelikle kredi dizilerine ait sonuçlar verilecektir. Buna göre orjinal verinin varyans-kovaryans matrisi ve özdeğerler matrisi

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} 2.48042 & -0.19278 & 0.22318 \\ & 1.49705 & 0.48047 \\ & & 1.09449 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2.53107 & 0 & 0 \\ 0 & 1.81498 & 0 \\ 0 & 0 & 0.72592 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Yapılan modellemeyle vektörel AR(1) modeli için elde edilen parametre tahminleri matrisi

$$\hat{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} -0.2775 & 0.0000 & 0.1683 \\ 0.1833 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.2752 & 0.0000 & 0.2242 \end{bmatrix},$$

olur. Burada istatistiksel olarak anlamlı olmayan katsayıların yerine 0(sıfır) yazılmıştır. Şimdi bu parametre tahminleri kullanılarak bulunan artıklara karşılık gelen varyans-kovaryans matrisi ve onun özdeğerleri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\hat{\Sigma}_{\underline{A}_t} = \begin{bmatrix} 0.96839 & 0.50057 & 0.21563 \\ & 1.46880 & -0.30021 \\ & & 2.26300 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2.36557 & 0 & 0 \\ 0 & 1.74592 & 0 \\ 0 & 0 & 0.58871 \end{bmatrix}.$$

Şimdi ABD Dolarının, BP, DM, SF ve YEN'e göre saatlik değişimlerine ait diziler için elde edilen sonuçlar şöyle bulunmuştur: orjinal veriye ait varyans kovaryans matrisi ve onun özdeğerleri

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0.00052 & 0.00033 & 0.00025 & 0.03604 \\ & 0.00080 & 0.00067 & 0.08228 \\ & & 0.00060 & 0.07020 \\ & & & 9.17324 \end{bmatrix},$$

ve

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} 9.17466 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00038 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00002 \end{bmatrix}$$

dir. Çokdeğişkenli AR(1) modeli için tahmin edilen parametre matrisi

$$\hat{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 0.990 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.033 & 0.920 & 0.000 & 0.050 \\ 0.020 & 0.000 & 0.935 & 0.036 \\ 0.030 & 0.000 & 0.000 & 0.978 \end{bmatrix}$$

olur. Şimdi modelin artıklarının varyans-kovaryans matrisi ile ona karşılık gelen özdeğerler matrisi

$$\hat{\Sigma}_{\underline{A}_t} = \begin{bmatrix} 0.870 & -0.410 & -0.280 & -0.180 \\ & 1.360 & 0.930 & 0.540 \\ & & 1.010 & 0.330 \\ & & & 0.610 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2.52 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix}$$

gibi elde edilir.

#### 4. SONUÇ VE YORUM

Bu çalışmada inceleme konusu olan Ziraat Bankası aylık kredi miktarları dizileri ile ABD Doları'nı BP, DM, SF ve YEN'e karşı saatlik değişim oranlarından oluşan diziler için yapılan analiz ile elde edilen sonuçlar ayrı ayrı göz önüne alınsın. Öncelikle kredi dizilerinin grafiklerine bakıldığında, Türkiye'nin genel ekonomik durumundan dolayı dizilerin devamlı artan bir seyirde oldukları görülmektedir. Fakat bu artışın gerek orjinal verilerin varyans-kovaryans matrisinin özdeğerlerinden ve gerekse AR(1) ile modellenen verinin artıklarının kovaryans matrisinin özdeğerlerinden kredi dizileri arasında ciddi bir eşzamanlı ve gecikmeli doğrusal ilişkinin olmadığı literatürdeki benzer çalışmaların sonucuna dayanarak söylenebilir. Fakat buna rağmen artıkların kovaryans matrisinin en küçük özdeğerinin sıfıra daha yakın olmasından dolayı veri yapısının gecikmeli doğrusal ilişkiye daha meyilli olduğu söylenebilir.

Çalışmada ikinci veri seti olarak incelenen ABD Doları'nın, BP, DM, SF, ve YEN'e göre saatlik değişimlerinin dizilerinin analiz sonuçlarına göre; veri yapısında hem eşzamanlı doğrusal ilişki hem de gecikmeli doğrusal ilişkinin var olduğu orjinal değerlerin ve AR(1) modelinin artıklarının varyans-kovaryans matrislerinin özdeğerlerinden hemen anlaşılmaktadır. Bu sonuçlara göre, her iki veri grubu için şu söylenebilir: birinci veri grubu dizilerini birini diğerleri cinsinden ifade etmek uygun olmayabilir. Bunun anlamı, Ziraat Bankası'nı bu üç kredisi için farklı politikalar söz konusu olduğu söylenebilir. İkinci veri grubunu oluşturan dizileri açısından durum tamamıyla farklıdır. Bir diziyi diğerleri cinsinden ifade etmek mümkün olabilir. Bunun anlamı, ABD Doları'nın, BP, DM, SF ve YEN'e göre saatlik değişimlerinin birbirine çok benzediği, gerektiğinde biri için düşünülen bir işlem, diğeri için de düşünülebileceği söylenebilir.

#### ABSTRACT

In this study, it has been shown to detect the contemporaneous linear relationship and the lagged relationship on the two different real data in the modeling vectorial time series. One of the monthly data set are concerning three kind of credits of the Bank (TCZB). Another data set are hourly exchange



rate of US Dollar to BP, DM, SF and YEN. In the end of the analysis shown that the first group data have not any serious linear relationship. But, there are both of two linear relationship between the series in the second data set.

#### **KAYNAKÇA**

- AHN, S.K. ve REINSEL, G.C. (1988), “Nested reduced-rank autoregressive models for multiple time series”, *JASA*, 83, 849-856.
- BEWLEY, R.ve YANG, M. (1994), “Parameter reduction in long-term VAR forecasting models”, *The 14-th International Symposium on Forecasting*, Sweden, 56.
- BOX, G.E.P.; ERJAVEC, J., HUNTER, W.G. ve MacGREGOR, J.F. (1973), “Some problems associated with the analysis of multiresponse data”, *Technometrics*, 15, 33-51.
- CECEN, A.A. ve ERKAL, C. (1996), “Distinguishing between stochastic and deterministic behaviour in foreign exchange rate returns: further evidence”, *Economic Letters*, 51, 323-329.
- COEN, P.G. GOMME, E.D. ve KENDALL, M.G. (1969), “Lagged relationships in economic forecasting”, *J. Roy. Statist. Soc., A*, 132, 133-163.
- REINSEL, G.C. (1995), *Elements of Multivariate Time Series*, Springer-Verlag, Londra.
- SEARLE, S. R. (1982), *Matrix Algebra Useful for Statistics*, John Wiley and Sons, New York.
- TSE, Y.K. (1995), “Lead-lag relationship between spot index and futures price of the Nikkei Stock Average”, *Journal of Forecasting*, 14, 553-563.