D.E.Ü.İ.İ.B.F.Dergisi
Cilt:13, Sayı:II, Yıl:1998, ss:101-112

ÇOK CEVAPLI SÜREÇLERİN OPTİMİZASYONU ÜZERİNE BİR İNCELEME

Cenk ÖZLER (*) **Levent ŞENYAY** (**)

ÖZET

Ürün geliştirme aşamalarında ortaya çıkan bir problem, ürün özelliklerinin arzu edilen kombinasyonunu veren koşulların seçimidir. Bu da, birden çok sayıda cevap değişkeninin eşanlı optimizasyonunu (özelliklerin arzu edilen kombinasyonu) içeren bir problemdir. Bu çalışmada, çok cevabın bulunduğu süreçlerde kullanılan yaklaşımlardan Khuri ve Conlon (1981) tarafından geliştirilen genelleştirilmiş uzaklık yaklaşımı öncelikle ele alınmıştır. Khuri ve Conlon tarafından önerilen üç uzaklık fonksiyonundan bir tanesi cevapların arzu edilen değerlerinden göreli uzaklıklarını dikkate almaktadır. Ancak bu uzaklık fonksiyonu, cevapların tamamı maksimize edilmek istendiğinde kullanılabilecek bir yapıdadır. Bu çalışmada ise, cevapların hedef değerlere yakın olması veya minimize edilmesi istendiği durumları da dikkate alan bir uzaklık ölçüsü geliştirilmiştir.

1. GİRİŞ

Ürün geliştirme aşamalarında ortaya çıkan bir problem, ürün özelliklerinin arzu edilen kombinasyonunu veren koşulların seçimidir. Bu da, birden çok sayıda cevap değişkeninin eşanlı optimizasyonunu (özelliklerin arzu edilen kombinasyonu) içeren bir problemdir. Örneğin, bir beton parke taşı kalitesinin iyileştirilmesi probleminde, cevaplar (kalite karakteristikleri) beton dayanımı, su emme yüzdesi, yüzey pürüzlülüğü vs. şeklindedir. Cevapların bağlı olduğu girdi değişkenleri (faktörler) alt vibrasyon sıcaklığı, üst vibrasyon sıcaklığı, strok sayısı vs. olarak sıralanabilir. Burada amaç, beton dayanımını maksimize, su emme yüzdesini ve yüzey pürüzlülüğünü minimize eden faktör seviyelerinin seçimidir.

Çok cevaplı bir deneyden elde edilen verilerin analizi, verilerin çok değişkenli yapısının dikkatli bir şekilde ele alınmasını gerektirmektedir. Diğer bir deyişle, cevap değişkenleri bireysel ve diğerlerinden bağımsız olarak incelenmemelidir. Cevaplar arasında var olabilecek ilişkiler, bu tip tek değişkenli incelemelerin anlamsız olmasına neden olur. Bu durumda, bir kaç cevap fonksiyonu eşanlı olarak optimize edilmek isteniyorsa, ayrı ayrı optimumların elde edilmesi anlamsızdır. Bir cevap için optimal olan koşullar, diğer cevaplar için optimumdan uzak, hatta fiziksel olarak uygulanması olanaksız olabilir. Keşifsel bir yaklaşım olarak, tüm cevapların eş yükselti eğrilerinin üst üste koyularak, koşulların tüm cevaplar için *yaklaşık* optimum olduğu bir bölge belirlenebilir (bkz. Lind vd., 1960). Bununla birlikte, bu prosedür, çok sayıda girdi değişkeni ve cevap içeren sistemlerde sınırlıdır. Bundan başka, bir koşullar setini (veya deney bölgesindeki bir noktayı) böyle bir yaklaşım ile optimum olarak tanımlamak zordur.

(*) Arş. Gör. Dr. D.E.Ü. İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü.
(**) Doç. Dr. D.E.Ü. İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü.

Myers ve Carter (1973), iki cevaptan oluşan bir dual cevap sistemi için bir optimizasyon problemini ele almışlardır. Bu cevaplardan birisi birincil cevap, diğeri ikincil cevap olarak adlandırılır. Myers ve Carter, ikincil cevabın belli veya istenen bir değeri alması kısıtı altında, birincil cevabı maksimize (veya minimize) eden girdi değişkenlerinin kombinasyonunu bulmak için bir algoritma geliştirmişlerdir. Diğer bir deyişle, ikincil cevap fonksiyonu, birincil cevap fonksiyonunun optimizasyonu üzerinde bazı kısıtlar koymaktadır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 285).

Myers ve Carter (1973)'ın dual cevap probleminin daha genel bir biçimi Biles (1975) tarafından ele alınmıştır. Biles, belirli aralıklar içerisinde, bir birincil cevap fonksiyonunu birkaç ikincil cevap fonksiyonu olması kısıtı altında optimize etmek için bir prosedür tanımlamıştır.

Myers ve Carter'ın dual cevap problemini eşitsizlik kısıtları altında optimize etmek için, DelCastillo ve Montgomery (1993), doğrusal olmayan programlama tekniklerinden genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan (generalized reduced gradient) algoritmasını kullanmışlardır. Genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan (GİG) yönteminin avantajı, birden fazla sayıda kısıtın (cevap fonksiyonları) veya bu kısıtların daha genel yapılarının ele alınabilmesine imkan vermesidir. GİG algoritması ile ilgili açıklamalar DelCastillo ve Montgomery (1993) ve Bazaraa vd. (1993)'te detaylı olarak verilmektedir.

Önce Harrington (1965) tarafından tanıtılan ve ardından Derringer ve Suich (1980) tarafından geliştirilen çekicilik (desirability) fonksiyonu, r adet cevap değişkeni bulunan bir durumda, her bir tahminleşmiş cevap değişkeni $\hat{y}_i$'yı (i = 1, 2, …, r), bir çekicilik değeri d_i'ye dönüştürmektedir. Burada çekicilik değeri $0 \le d_i \le 1$ aralığındadır. Söz konusu cevabın çekiciliği arttığında (cevap, arzu edilen değerine yaklaştığında), karşılık geldiği çekicilik değeri d_i de artmaktadır. Ardından bireysel çekicilik değerlerinin geometrik ortalaması D elde edilmektedir. Burada tek bir D değeri, birleşik cevap seviyelerinin çekiciliğinin genel bir değerini vermektedir. D, [0,1] aralığında bir değer alır ve karakteristikler daha arzu edilir seviyede olduklarında D'nin değeri artar. $d_i = 0$ olduğunda (cevap değişkenlerinden birisi kabul edilemez seviyede olduğunda), $D = 0$ olur. Bu yüzden d_i'lerin geometrik ortalamasının alınması tercih edilmektedir. Çekicilik fonksiyonu yaklaşımının yukarıda bahsedilen yaklaşımlara göre en önemli avantajı, çok sayıdaki cevabın eşanlı maksimizasyonuna ve / veya minimizasyonuna imkan vermesidir. Ayrıca bu yaklaşım uygulayıcıya, her bir cevabın önem derecesi hakkındaki bilgilerini subjektif bir şekilde çekicilik fonksiyonuna dahil etme imkanı vermektedir.

Khuri ve Conlon (1981), çekicilik fonksiyonu yaklaşımının subjektif yapısını eleştirmiştir ve bu yüzden ürünün çekicilik değeri D'nin uygulayıcıları yanlış sonuçlara götürebileceğini belirtmiştir. Ayrıca Khuri ve Conlon, bu yaklaşımın, cevapların varyans heterojenliklerini ve aralarında olabilecek korelasyonları hesaba katmadığını vurgulamıştır. Bundan dolayı, bu güçlükleri yenmek amacıyla Khuri ve Conlon (1981), çok cevaplı optimizasyon için başka bir yöntem olan genelleştirilmiş uzaklık yaklaşımını vermiştir.

Khuri ve Conlon tarafından önerilen üç uzaklık fonksiyonundan bir tanesi cevapların arzu edilen değerlerinden göreli uzaklıklarını dikkate almaktadır. Ancak bu uzaklık fonksiyonu, cevapların tamamı maksimize edilmek istendiğinde kullanılabilecek bir yapıdadır. Bu çalışmada ise, öncelikle Khuri ve Conlon (1981) tarafından önerilen yaklaşım gözden geçirilmiştir. Ardından cevapların hedef değerlere yakın olması veya minimize edilmesi istendiği durumları da dikkate alan bir uzaklık ölçüsü geliştirilmiştir.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ UZAKLIK YAKLAŞIMININ GÖZDEN GEÇİRİLMESİ

Bu yaklaşımda, çok cevaplı bir sistemde tüm cevap fonksiyonlarının aynı girdi değişkenlerine bağlı olduğu ve deney bölgesinde aynı derecedeki polinomiyal regresyon modelleri ile temsil edilebileceği varsayılmaktadır. r, söz konusu cevapların sayısı olduğunda, i'inci cevap modeli şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_0\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad , \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{1}$$

Burada $\mathbf{y}_i$, i'inci cevaptaki $N \times 1$ boyutlu gözlemler vektörü; $\mathbf{X}_0$, $N \times p$ boyutlu rankı p olan ve kolonları girdi değişkenlerinin seviye kombinasyonlarından oluşan bir matris; $\boldsymbol{\beta}_i$, bilinmeyen parametrelerin oluşturduğu $p \times 1$ boyutlu vektör; $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ ise $N \times 1$ boyutlu hata vektörüdür. Ayrıca,

$$\begin{aligned} &E(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \mathbf{0} \\ &\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \sigma_{ii}\mathbf{I}_N \quad , \qquad i = 1, 2, \ldots, r \\ &\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j) = \sigma_{ij}\mathbf{I}_N \quad , \quad i, j = 1, 2, \ldots, r; \quad i \neq j \end{aligned} \tag{2}$$

olduğu varsayılmaktadır. (i, j)'inci elemanı σ_{ij} $(i,j = 1, 2,\ldots, r)$ olan $r \times r$ boyutlu matris $\boldsymbol{\Sigma}$ ile gösterilir. Varyans-kovaryans matrisinin (Σ) sapmasız bir tahmini

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\mathbf{y}'\left[\mathbf{I}_N - \mathbf{X}_0(\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{X}_0'\right]\mathbf{y}}{N - p} \tag{3}$$

şeklinde verilmiştir (Khuri ve Conlon, 1981: s. 384). Burada $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1\!: \mathbf{y}_2\!:\ldots\!: \mathbf{y}_r]$ şeklindedir ve r cevabın hiçbirinin birbiriyle doğrusal bağımlı olmadığı varsayılmıştır.

i'inci cevap için kestirim eşitliği,

$$\hat{y}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{z}'(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\beta}}_i \qquad , \qquad i = 1, 2,\ldots,r \tag{4}$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)'$ ve $\mathbf{z}'(\mathbf{x})$, $\mathbf{X}_0$ matrisinin bir satırıdır.($\mathbf{z}'(\mathbf{x})$, ilk eleman 1, kalan p - 1 elemanı x_1, x_2,…, x_k'ların kuvvetleri ve çapraz - çarpımlarından oluşan bir satır vektörüdür). $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i = (\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{X}_0'\mathbf{y}_i$, ($i$ = 1, 2,…, r) $\boldsymbol{\beta}_i$'nin en küçük kareler tahminleyicisidir. Ayrıca,

$$\mathrm{Var}\left[\hat{y}_i(\mathbf{x})\right] = \mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})\sigma_{ii} \ , \quad i = 1, 2,\ldots, r$$

$$\mathrm{Cov}\left[\hat{y}_i(\mathbf{x}), \hat{y}_j(\mathbf{x})\right] = \mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})\sigma_{ij} \ , \quad i, j = 1, 2,\ldots, r, \ i \neq j$$

olmaktadır. Burada σ_{ij}, varyans-kovaryans matrisi Σ'nın (i, j)'inci elemanıdır. Buradan,

$$\mathrm{Var}\left[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\right] = \mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{z}'(\mathbf{x})\Sigma \tag{5}$$

yazılabilir. Burada $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = (\hat{y}_1(\mathbf{x}), \hat{y}_2(\mathbf{x}),\ldots, \hat{y}_r(\mathbf{x}))'$, $\mathbf{x}$ noktasında kestirilmiş cevaplar vektörüdür. $\mathrm{Var}\left[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\right]$'in sapmasız bir tahminleyicisi,

$$\mathrm{V\hat{a}r}\left[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\right] = \mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})\hat{\Sigma} \tag{6}$$

şeklindedir. Burada $\hat{\Sigma}$, eşitlik (3)'de verildiği gibidir.

ϕ_i , deney bölgesinde bireysel olarak optimize edilen $\hat{y}_i(\mathbf{x})$'in optimum değeri olsun. Ayrıca $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)'$ olsun. Eğer tüm tahminlenmiş cevaplar bireysel optimumlarına çalışma koşullarının aynı seti $\mathbf{x}$'de ulaşıyorsa *ideal* optimum elde edilmiş demektir. Bu durumda çok cevaplı optimizasyon problemi kolaylıkla çözülür ve başka bir çalışmaya gerek yoktur. Ancak böyle bir ideal optimum çok seyrek olarak gerçekleşir. Daha genel durumlarda, cevapların tamamı için yaklaşık uygun olan, girdi değişkenlerindeki uzlaşılmış koşulların bulunması ele alınır. *Uygun* koşullar ile, çok cevaplı fonksiyonun ideal optimumdan mümkün olduğu kadar az sapma gösterdiği koşullar kastedilmektedir. Böyle bir sapma, $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$'in ($r$-boyutlu Öklid uzayında bir nokta) $\boldsymbol{\phi}$'den (bireysel optimumun vektörü) uzaklığının bir ölçüsü olan bir uzaklık fonksiyonunun ortalaması ile formüle edilebilir. Bu uzaklık fonksiyonu $\rho\left[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\phi}\right]$ şeklinde gösterilir. Ardından, çok cevaplı optimizasyon, deney bölgesinde bu uzaklık fonksiyonunu minimize eden **x**'deki koşulların bulunmasını içeren bir yapıya dönüşmektedir.

Uzaklık fonksiyonu ρ birkaç değişik şekilde seçilebilir. Olası bir seçim ağırlıklı uzaklık olabilir (Khuri ve Conlon, 1981: s.366):

$$\rho\left[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\phi}\right]=\left[(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\phi})'\left\{\mathrm{Var}\left[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\right]\right\}^{-1}(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\phi})\right]^{1/2} \quad \textbf{(7)}$$

$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$'in varyans-kovaryans matrisinin eşitlik (6)'da verilen tahminini kullanarak

$$\rho_1\left[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\phi}\right]=\left[\frac{(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\phi})'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\phi})}{\mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})}\right]^{1/2} \quad \textbf{(8)}$$

şeklindeki uzaklık fonksiyonu elde edilir. Eğer varyans-kovaryans matrisi köşegen ise (bu sonuç biliniyor veya istatistiksel bir teste dayanarak ulaşılmış olabilir) uzaklık fonksiyonu ρ_1 şu şekilde yazılabilir:

$$\rho_2\left[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\phi}\right]=\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{(\hat{y}_i(\mathbf{x})-\phi_i)^2}{\left\{\hat{\sigma}_{ii}\,\mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})\right\}}\right]^{1/2} \quad \textbf{(9)}$$

Burada $\hat{\sigma}_{ii}$, $\hat{\Sigma}$'nın i'inci köşegen elemanıdır (i = 1, 2,…, r). Bireysel optimumdan (maksimumdan) göreli değişmeleri ele almak isteyenler için başka bir uzaklık fonksiyonu, Khuri ve Conlon (1981) tarafından

$$\rho_3\left[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\phi}\right]=\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{(\hat{y}_i(\mathbf{x})-\phi_i)^2}{\phi_i^2}\right]^{1/2} \quad \textbf{(10)}$$

şeklinde verilmiştir.

Yukarıda bahsedilen uzaklık fonksiyonlarının hepsi de Khuri ve Conlon (1981) tarafından genelleştirilmiş uzaklık olarak adlandırılmaktadır. Eğer $\mathbf{x}_0$, $\rho\left[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\phi}\right]$'yı deney bölgesinde mutlak minimuma ulaştıran nokta ise ve m_0 bu minimumun değeri ise, $\mathbf{x}_0$ noktasındaki deneysel koşullar, r cevap fonksiyonunun herbiri için yaklaşık optimum olarak tanımlanabilir. m_0'ın değeri küçüldükçe, bu koşullar *ideal* optimuma yaklaşır.

Genelleştirilmiş uzaklık $\rho\left[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\phi}\right]$'ın geliştirilmesinde ϕ'nin değerlerinin şans değişkenleri olup olmadığı hesaba katılmamaktadır. ϕ'deki herhangi bir değişkenlik, çok cevaplı fonksiyonun optimumunun bulunmasına etki edebilir. Bu yüzden Khuri ve Conlon (1981: ss.366-367) ϕ'nin değişkenliğini dikkate alan bir yaklaşımı da ele almışlardır.

3. GÖRELİ UZAKLIK FONKSİYONU İLE SÜREÇ OPTİMİZASYONU

Khuri ve Conlon (1981) tarafından önerilen uzaklık ölçülerinden birisi, eşitlik (10) ile verilen, cevap değerlerinin ideal değerlerinden göreli uzaklıklarını ölçen fonksiyondur. Ancak bu uzaklık fonksiyonu, kolaylıkla farkedilebileceği gibi tüm cevapların maksimize edilmesi istendiğinde kullanılabilecek bir yapıdadır. Burada her bir $(\hat{y}_i(\mathbf{x})-\phi_i)^2/\phi_i^2$ (i = 1,2,…,r) değeri, $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ ideal değer ϕ_i'ye ulaştığında 0, $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ sıfıra ulaştığında 1 değerini alır.

Çok cevaplı süreçlerde, eş anlı olarak, bazı cevapların maksimizasyonu, bazılarının minimizasyonu ve bazılarının da bir hedef değer T'ye yaklaşması arzu edildiğinde, bu tip süreçlerin optimizasyonu için ideal değerlerden göreli uzaklıkların dikkate alındığı bir uzaklık fonksiyonu geliştirilebilir. Bu uzaklık fonksiyonu

$$H=\left[\sum_{i=1}^{r}h_i\right]^{1/2} \quad \textbf{(11)}$$

şeklinde tanımlansın. Burada herhangi bir i'inci cevap maksimize edilmek isteniyorsa

$$h_i=\frac{(\hat{y}_i(\mathbf{x})-A_i)^2}{(A_i-B_i)^2} \quad \textbf{(12)}$$

yazılabilir. Burada A_i ve B_i, $\hat{y}_i(\mathbf{x})$'in deney bölgesinde kanonik analiz, sırt analizi veya bir doğrusal olmayan programlama tekniği ile elde edilen *maksimum* ve *minimum* değerleridir. A_i değeri $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ için *ideal* değer olup eşitlik (10)'daki ϕ_i'ye eşittir. $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ maksimum (ideal) değeri A_i'ye ulaştığında h_i = 0 değerini alır. $\hat{y}_i(\mathbf{x})$, *en arzu edilmeyen* değer B_i'ye (minimuma) ulaştığında h_i = 1 değerini alır.

Herhangi bir i'inci cevap minimize edilmek isteniyorsa,

$$h_i=\frac{(\hat{y}_i(\mathbf{x})-B_i)^2}{(A_i-B_i)^2} \quad \textbf{(13)}$$

yazılabilir. Burada $\hat{y}_i(\mathbf{x})$'in *minimum* değeri B_i, aynı zamanda *ideal* değerdir ve bu değere ulaşıldığında $h_i = 0$ olur. Söz konusu cevap, *en arzu edilmeyen* değer A_i'ye (*maksimuma*) ulaştığında $h_i = 1$ değerini alır.

Cevap değerlerinden herhangi birinin bir hedef değer T'ye yakın olması istendiğinde

$$h_i = \frac{(\hat{y}_i(\mathbf{x}) - T)^2}{d^2} \quad \textbf{(14)}$$

yazılabilir. Burada,

$$d = \max\{A_i - T, T - B_i\} \quad \textbf{(15)}$$

şeklindedir. Diğer bir deyişle, $A_i - T$ ve $T - B_i$ ifadelerinden büyük olanı, d değeri olarak seçilir. Eşitlik (14)'de $\hat{y}_i(\mathbf{x})$, hedef değer T'ye ulaştığında $h_i = 0$ değerini alır. Burada h_i'nin alabileceği en büyük değer 1'dir.

Göreli uzaklık yaklaşımının canlandırılması için $r = 3$ cevaplı bir süreç ele alınsın. Bu cevaplardan y_1'in maksimizasyonu, y_2'nin minimizasyonu ve y_3'ün bir hedef değer T'ye yaklaştırılması, küresel deney bölgesi R'de istensin. Bu durumda optimizasyon problemi,

$$H = \left[\frac{(\hat{y}_1(\mathbf{x}) - A_1)^2}{(A_1 - B_1)^2} + \frac{(\hat{y}_2(\mathbf{x}) - B_2)^2}{(A_2 - B_2)^2} + \frac{(\hat{y}_3(\mathbf{x}) - T)^2}{d^2} \right]^{1/2} \quad \textbf{(16)}$$

olmak üzere,

Min H

Kısıt: $\mathbf{x}'\mathbf{x} \le \rho^2$ **(17)**

şeklinde yazılabilir. Bu tip bir süreç optimizasyonu problemi doğrusal olmayan programlama teknikleri yardımı ile (örneğin GİG algoritması kullanılarak) çözülebilir.

4. LASTİK ENDÜSTRİSİNDE BİR UYGULAMA

Derringer ve Suich (1980) tarafından incelenen lastik endüstrisindeki bir yüzey-dişi bileşimi probleminde cevap değişkenleri (y'ler), PICO Aşınma İndeksi (y_1), yüzde 200 modül (y_2), kopma uzaması (y_3) ve sertlik (y_4) olarak ele alınmıştır. Cevap değişkenlerinin her biri şu girdi değişkenlerine bağlıdır: hidratlı silis seviyesi (x_1), silan kavrama seviyesi (x_2) ve kükürt seviyesi (x_3). Burada amaç, y_1 ve y_2'yi maksimize edecek ve y_3 ve y_4'ü bir hedef değere yaklaştıracak

x'lerin seviyelerinin seçimidir. Cevap değişkenleri üzerindeki kısıtlar aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
&y_1 > 120 \\
&y_2 > 1000 \\
&600 > y_3 > 400 \\
&75 > y_4 > 60
\end{aligned}
\qquad \textbf{(18)}
$$

Ayrıca y_3 ve y_4 için hedef değerler $T_1 = 500$ ve $T_2 = 67.5$ şeklindedir. Derringer ve Suich (1980) bu problemin çözümünde çekicilik fonksiyonu yaklaşımını kullanmıştır. Bu kesimde Derringer ve Suich (1980)'de sunulan tasarım, veriler ve modeller kullanılmış, ancak problem üçüncü bölümde önerilen göreli uzaklık yaklaşımı kullanılarak çözülmüştür. Söz konusu deney tasarımı bir merkezi bileşik tasarımdır ve deney bölgesi küreseldir ($\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq 3$). Bu tasarımdan elde edilen çok cevaplı veriler Tablo 1'de verilmiştir. Her bir cevap verisi için ikinci derece modellerin uyumu yapıldığında tahminlenen katsayılar ve cevapların standart hataları Tablo 2'de verilmiştir. Bu bölümde ele alınan örnek uygulamada optimizasyon probleminin çözümü için popüler bir elektronik hesap tablosu yazılımı olan Excel 7.0 içerisindeki "Solver" seçeneği kullanılmıştır. Solver seçeneği, genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan algoritmasını kullanmaktadır.

Her bir modelden elde edilen A ve B değerleri (deney bölgesindeki maksimum ve minimum değerleri), ayrıca y_3 ve y_4 için T ve d değerleri Tablo 3'de verilmiştir.

Göreli uzaklık fonksiyonunun $\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq 3$ kısıtı altında minimum değeri H = 0,7439 olarak $\mathbf{x}$ = (0.4647, 0.6884, -1.2183) noktasında elde edilmiştir. Bu seviyelerdeki tahminlenmiş cevap değerleri

$$
\begin{aligned}
&y_1 = 131.9748 \\
&y_2 = 1654.6171 \\
&y_3 = 431.2756 \\
&y_4 = 68.7482
\end{aligned}
\qquad \textbf{(19)}
$$

şeklinde elde edilmiştir. Görüldüğü gibi elde edilen sonuçlar, cevaplar üzerindeki tüm kısıtları sağlamaktadır.

Tablo 1. Deney Tasarımı ve Veriler

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4
-1	-1	1	102	900	470	67.5

1	-1	-1	120	860	410	65
-1	1	-1	117	800	570	77.5
1	1	1	198	2294	240	74.5
-1	-1	-1	103	490	640	62.5
1	-1	1	132	1289	270	67
-1	1	1	132	1270	410	78
1	1	-1	139	1090	380	70
-1.633	0	0	102	770	590	76
1.633	0	0	154	1690	260	70
0	-1.633	0	96	700	520	63
0	1.633	0	163	1540	380	75
0	0	-1.633	116	2184	520	65
0	0	1.633	153	1784	290	71
0	0	0	133	1300	380	70
0	0	0	133	1300	380	68.5
0	0	0	140	1145	430	68
0	0	0	142	1090	430	68
0	0	0	145	1260	390	69
0	0	0	142	1344	390	70

Kaynak: G. Derringer ve R. Suich (1980).

Tablo 2. Model Katsayıları ve Cevapların Standart Hataları

	Katsayılar			
Terimler	Model y_1	Model y_2	Model y_3	Model y_4

Sabit	139.12	1261.13	400.38	68.91
x_1	16.49	268.15	-99.67	-1.41
x_2	17.88	246.50	-31.40	4.32
x_3	10.91	139.48	-73.92	1.63
x_1x_2	5.13	69.38	8.75	-1.63
x_1x_3	7.13	94.13	6.25	0.13
x_2x_3	7.88	104.38	1.25	-0.25
x_1^2	-4.01	-83.57	7.93	1.56
x_2^2	-3.45	-124.82	17.31	0.06
x_3^2	-1.57	199.18	0.43	-0.32
Standart Hata	5.61	328.69	20.55	1.27

Kaynak: G. Derringer ve R. Suich (1980).

Tablo 3. *A*, *B*, *T* ve *d* değerleri

	Model y_1	Model y_2	Model y_3	Model y_4
A	195.5737	2296.9314	657.4572	80.9249
B	91.7967	394.1319	207.5263	60.5107
T			500	67.5
d			292.4737	13.4249

5. SONUÇ

Kesim 4'te verilen örnek uygulama sonuçlarına bakıldığında, bu çalışmada önerilen göreli uzaklık yaklaşımının çok cevaplı süreçlerin optimizasyonunda kullanılabileceği görülmektedir. Cevaplar için arzu edilen değerler (18) eşitsizlikleri ile verilmiş olup, optimizasyon sonucunda (19) ile verilen eşitlikler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların cevaplar uzerinde (18) eşitsizlikleri ile verilen kısıtları sağladığı görülmektedir. Bununla beraber bu sonuçlar cevapların ideal değerlerini karşılamamaktadır. Ancak buradaki süreçte olduğu gibi, tüm cevapların ideal değerlerini sağlayan koşulların bulunması bir çok süreç için imkansız olabilir. Bu durumda tüm cevapların ideal değerlerine olan göreli uzaklıklarının bir fonksiyonu (eşitlik (16)) minimize edilerek, en azından cevaplar üzerindeki tüm kısıtlar sağlanmıştır.

Bu çalışmada önerilen yaklaşım, genelleştirilmiş uzaklık yaklaşımında olduğu gibi cevaplar arasındaki kovaryansları dikkate almamaktadır. Ancak göreli uzaklık yaklaşımı ile çok cevaplı süreçlerin optimizasyonu için, cevapların, aynı faktörlerin aynı derecedeki etkilerinin bir fonksiyonu olması gerekmemektedir. Diğer bir deyişle, genelleştirilmiş uzaklık yaklaşımında olduğu gibi, tasarım matrisi tüm cevaplar için aynı olmak zorunda değildir.

ABSTRACT

A common problem in product development is the selection of a set of conditions which will result in a product with a desirable combination of properties. This essentially is a problem involving the simultaneous optimization of several response variables (the desirable combinations of properties). In this study, generalized distance approach developed by Khuri and Conlon (1981) is presented. One of the distance functions proposed by Khuri and Conlon considers relative distances from individual optimum. But this distance function is useful when the simultaneous maximization of all the responses is the main interest. In this study, another distance function, which is likely to consider relative changes from the individual optimum (the minimum, the maximum or a target value), is proposed.

KAYNAKÇA

BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D., ve SHETTY, C. M. (1993), *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 2. Baskı, New York: John Wiley.

BILES, W. E. (1975), “A Response Surface Method for Experimental Optimization of Multi-Response Processes,” *Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development*, 14, 152-158.

KHURI, A. I. ve CONLON, M. (1981), “Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polinomial Regression Functions,” *Technometrics*, 23, 363-375.

KHURI, A. I. ve CORNELL, J. A. (1987), *Response Surfaces: Designs and Analyses*, New York: Marcel Dekker.

DEL CASTILLO, E. ve MONTGOMERY, D. C. (1993), "Nonlinear Programming Solution to the Dual Response Problem," *Journal of Quality Technology*, 25, 199-204.

DERRINGER, G. ve SUICH, R. (1980), "Simultaneous Optimization of Several Response Variables," *Journal of Quality Technology*, 12, 214-219.

HARRINGTON, E. C. (1965), "The Desirability Function," *Industrial Quality Control*, 21, 494-498.

LIND, E. E., GOLDIN, J. ve HICKMAN, J. B. (1960), "Fitting Yield and Cost Response Surfaces," *Chemical Engineering Progress*, 56, 62-68.

MYERS, R. H. ve CARTER, W. H.,Jr. (1973), "Response Surface Techiques for Dual Response Systems," *Technometrics*, 15, 301-317.