

ÇOK DEĞİŞKENLİ KALİTE KONTROLÜ

Ali Rıza FİRUZAN (*) Ali ŞEN (**)

ÖZET

Kalite kontrolünde kontrol kartlarının kullanılması, ürünün kalite özelliğinin dikkate alınması, geniş kabul gören bir yaklaşımdır. Bu nedenle istatistiğin tek değişkeni inceleyen kesiminden geniş ölçüde yararlanır. Fakat Çoğu ürünün kalitesi birden fazla kalite özelliği ile tanımlanmakta ve böylece uygulanacak kontrol kartının bu özellikleri yansıtmak biçimde olması gerekmektedir. Birden fazla kalite özelliğinin incelendiği Çok değişkenli kalite kontrolünde, amaca uygun olan T^2 istatistiği ve onun için düzenlenen T^2 kontrol kartı kullanılmaktadır.

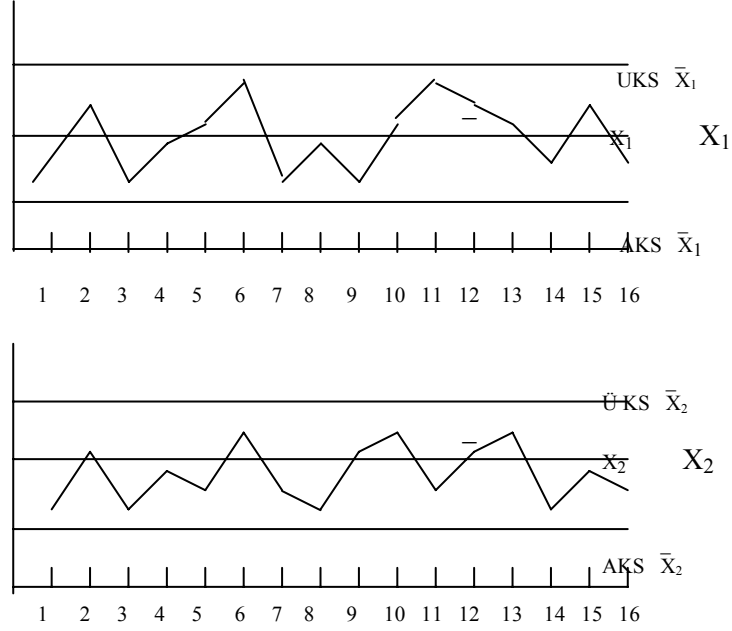
GİRİŞ

Eğer bir ürünün kalitesi ölçülebilir iki kalite özelliği tarafından belirleniyorsa kontrol için yapılan ölçümlerden X ve Y gibi iki sayı elde edilir. Örneğin; her biri için X kontrol kartı düzenlenir ve uygulanırsa, kontrol altında olarak görünen süreç, gerçekte kontrol dışı olduğu birçok zamanda da kontrol altında olarak görülür.

Birbirleriyle ilişkili değişkenlerin ayrı ayrı kontrol kartları ile kontrol edilmeleri, yukarıdaki çelişkili duruma ek olarak hatalı olasılıklara da yol açmaktadır. Örneğin, bir motor blokunda kullanılacak silindir gömleğinin iç ve dış çapları sırasıyla X_1 ve X_2 olsun. Ayrıca X_1 ve X_2 birlikte ürün kalitesini belirlesinler, Her ikisi de varyansları eşit ve ortalama çapları $\pm 3\sigma$ sınırlarında \bar{X} kontrol kartı ile kontrol edilsinler. Eğer X_1 ve X_2 kontrol sınırları arasında ise üretim süreci, bir başka deyişle, ürün kalitesi kontrol altında olarak kabul edilecektir.

(*) Yrd. Doç. Dr. Muğla Üniversitesi İ.İ.B.F. İşletme Bölümü

(**) Doç. Dr. D.E.Ü. İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü



Şekil 1. Silindir Gömleğin İç X_1 ve Dış X_2 İçin Kontrol Kartları.

Süreç kontrol altında iken, X_1 veya X_2 nin kontrol sınırları kalite kontrol dışına çıkma olasılıkları eşit ve 0.0027, başlıca ifadeyle,

$$P(\text{I. tip hata} / \mu_{x1}) = P(\text{I. tip hata} / \mu_{x2}) = 0.0027$$

olsun. Her iki ortalamanın kontrol dışına çıkma olasılığı, bağımsız olarak kabul edildiklerinden,

$$P(\text{I. tip hata} / \mu_{x1} \cdot \mu_{x2}) = (0.0027) (0.0027) = 0.00000729$$

olacaktır. Bulunan sayı 0.0027 den çok farklıdır. Ayrıca X_1 veya X_2 nin de kontrol altında olma olasılıkları,

$$(1 - \alpha) (1 - \alpha) = (0.9973) (0.9973) = 0.99460729$$

olsun. Burada görülüyor ki her iki çapı ayrı ayrı \bar{X} kontrol kartları ile kontrol etmek, kontrol yönteminde önemli sorunlara neden olacaktır.

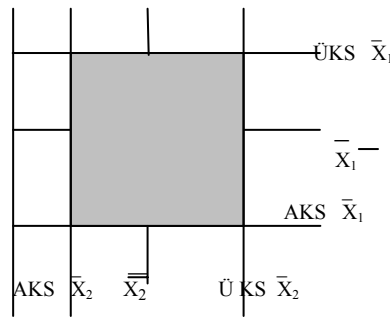
Kalite karakteristiğinin sayısı arttıkça, kontrol sürecinde ki aksakların da artacağı açıktır. Eğer kalite karakteristiği P tane ise ve her biri

$$P(\text{I. tip hata} / \mu_{x1}) = \alpha \text{ olan } \bar{X} \text{ kontrol kartı uygulanırsa,}$$

$$P \left| \begin{array}{l} \text{P kalite özelliğinin} \\ \text{kontrol sınırları} \\ \text{arasında olması} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{P kalite} \\ \text{özelliği} \\ \text{kontrol altında} \end{array} \left| \begin{array}{l} p \\ \prod_{i=1}^p (1 - \alpha) = (1 - \alpha)^p \end{array} \right.$$

olur. Dolayısıyla bir test için gerçek I. tip hata olasılığı
 $P(\text{I. tip hata}) = 1 - (1 - \alpha)^p$

olur.



Şekil.2. X_1 ve X_2 İçin Bağımsız Kontrol Sınırlarını Kullanarak Oluşturulan Kontrol Alanı.

İncelenen ürünün kalitesi iki kalite özelliği tarafından belirleniyorsa, her ikisinin de kontrol altında olmasını sağlayan kontrol alanı bir elips olmaktadır.

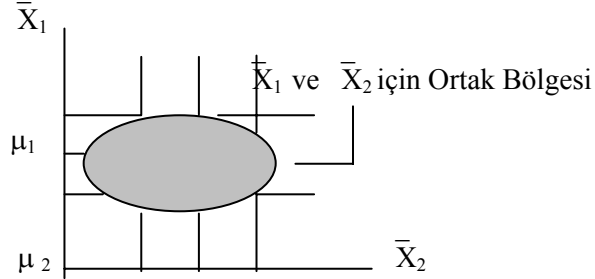
1. Ortalama Değerlerin Kontrolü

İki kalite karakteristiği X_1 ve X_2 'nin iki değişkenli normal dağılıma göre, ortak dağılım gösterdiği varsayılırsa, kalite karakteristiklerinin ortalama değerleri μ_1 ve μ_2 ise ve X_1 ve X_2 'nin standart sapmaları sırasıyla s_1 ve s_2 olursa kovaryans- X_1 ve X_2 arasındaki bağımlılığını ölçen, X_1 ve X_2 arasındaki bir ölçüdür ve s_{12} ile gösterilmektedir. σ_1 , σ_2 ve σ_{12} nin bilindiği varsayılp n hacimli bir örnekten hesaplanan iki kalite karakteristiğinin örnek ortalamaları \bar{x}_1 ve \bar{x}_2 ve ise, o halde;

$$\chi_0^2 = \frac{n}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \left| \sigma_2^2 (\bar{X}_1 - \mu_1)^2 + \sigma_1^2 (\bar{X}_2 - \mu_2)^2 - 2\sigma_{12} (\bar{X}_1 - \mu_1) (\bar{X}_2 - \mu_2) \right| \quad \dots 1$$

Burada χ_0^2 2 serbestlik derecesine sahip bir ki-kare dağılımı gösterir. Bu denklem, μ_1 ve μ_2 ortalamaları için temel kontrol kartı olarak kullanılabilir. Eğer μ_1 ve μ_2 değerlerinin süreç ortalamaları değişmezse, o zaman χ_0^2 'nin değerlerinin $\chi_{\alpha,2}^2$ 'nin değerlerinden daha küçük olması gerekir ki orada $\chi_{\alpha,2}^2$, 2 serbestlik dereceli ki-kare dağılımının üst yüzdesini oluşturur. En azından

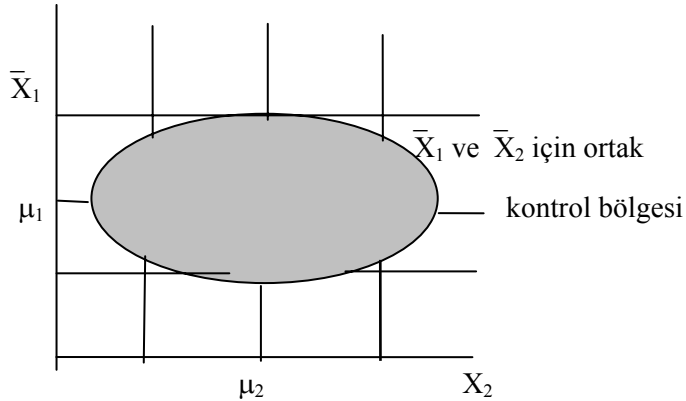
ortalamalardan biri bazı yeni değerlerle (kontrol dışı) değişirse o zaman $\chi_0^2 > \chi_{\alpha,2}^2$ 'yi olması beklenir.



Şekil 3. Bağımsız İki Değişken İçin Kontrol Elipsi.

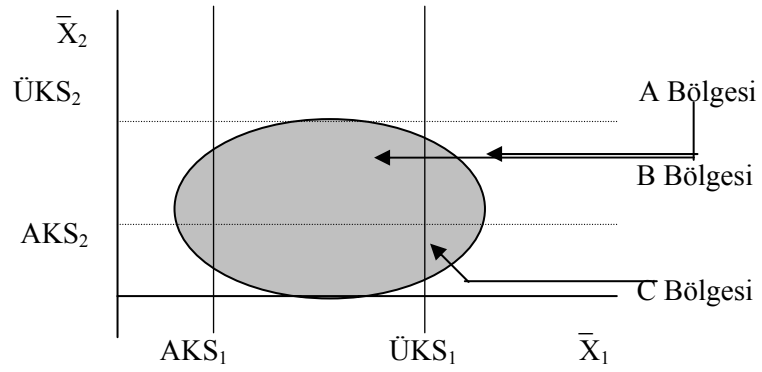
Kontrol prosedürü grafiksel olarak gösterilebilir. $\sigma_{12} = 0$ olduğu bağımsız iki tesadüfi değişkenin problem ele alındığında, o zaman (formül 1) 'deki denklem, şekil 3'de gösterildiği gibi merkezi μ_1 ve μ_2 olan, X_1 ve X_2 eksenlerine paralel temel eksenleri bulunan bir elipsi tanımlar. $\chi_{\alpha,2}^2$ nin yerini tutan diğer elipsin dışını işaret ederse, süreç kontrol dışı iken χ_0^2 'yi kapsayan ve χ_0^2 'ye eşit olan (1) nolu denklem bir çift örnek ortalaması (\bar{x}_1 , \bar{x}_2) veren elipsin içini gösteren bir değerinin kontrol sürecine dahil olduğunu dolaylı yoldan gösterir. Şekil 3 genelde "kontrol elipsi" olarak isimlendirilir.

İki bağımsız, \bar{X} kartı kullanıldığında kontrol elipsindeki \bar{X}_1 ve \bar{X}_2 için ortak kontrol bölgesi ile \bar{X}_1 ve \bar{X}_2 ortak kontrol bölgesi (şekil 2) birbirine benzer. Eğer iki kalite karakteristiği bağımlıysa, o zaman $\sigma_{12} \neq 0$, ve kontrol elipsi (şekil 4) gösterilir. İki değişken bağımlı olduğunda, elipsinin temel eksenlerinin, \bar{X}_1 , \bar{X}_2 eksenlerine paralel olmadığına dikkat edilmesi gerekir.



Şekil 4. İki Bağımlı Değişken İçin Bir Kontrol Elipsi.

Kontrol kartları veya eşdeğer bölge kullanımı çok yanıltıcı olabilir. Kontrol bölgesinin genelde elips şeklinde olduğu kısaca açıklanacaktır. Eğer ortalamaların çifti (X_1 , X_2) elips biçiminde bölge dışındaki işaretlenir ise, bunlar kontrol dışı olarak görülür. Bunun yanı sıra eğer dikdörtgen bölge kullanılırsa; tüm süreç ortalamalarının kontrolde olduğu (A bölgesi), birinin kontrol dışı veya diğerinin kontrolde olduğu (B bölgesi) veya tümünün kontrol dışı olduğu (C bölgesi) şekil 5 de gösterilmektedir.



Şekil 5. Elips ve Dikdörtgen Biçiminde Kontrol Bölgeleri

İki değişken arasındaki korelasyon derecesi bu bölgelerin ölçülerini ve bunların kendi hatalarını etkiler. Ayrıca tüm örnek ortalamalarının süreç kontroldeyken elips bölge içinde plotlama olasılığı kesin $1 - \alpha$ iken dikdörtgen bölge ile bu olasılık $1 - \alpha'$ 'dir.

Kontrol elipsi ile ilgili iki dezavantaj vardır.

(I) Ardışık gösterilen noktalar zaman kaybına yol açar, bu nedenle hızlı testler ve diğer prosedürler kolaylıkla uygulanamaz.

(II) İki'den fazla kalite karakteristiği için elips çizmenin zor olmasıdır.

Bu zorluklardan sakınmak için kontrol kartındaki her bir örnek için denklemden hesaplanan χ^2_0 nin değerleri ile $\chi^2_{\alpha,2}$ de bir üst değeri olan (şekil 6.da gösterildiği gibi) değerleri göstermeye alışılmıştır. Bu kontrol kartı genellikle " χ^2 kontrol kartı" olarak isimlendirilir. Bu kontrol kartı ile ardışık zamanlı veriler ile seriler veya diğer tesadüfi olmayan örneklerin incelenecek kadar korunduğuna dikkat edilir. Sürecin durumu bir tek sayıyla karakterize edilerek χ^2_0 istatistiğinin değeri) ilave avantaja sahip olmuştur. Bu özellikle iki veya daha fazla kalite karakteristiği söz konusu olduğunda yararlıdır.

ÜKS $\chi^2_{\alpha,2}$

χ^2_0



Şekil 6. P = 2 Kalite karakteristikleri için $\chi^2_{\alpha,2}$ Kontrol Kartı

2. Bireysel Gözlemler İçin Çok Değişkenli Kontrol Kartları

Kontrol kartlarının oluşmasında iki farklı aşama vardır. İlk aşama geriye dönük bir görüntü verir. İlki tek değişkenli ise veya alt grup verisi, süreç üzerinde toplanmışsa, sürecin kontrolde olup olmadığını test etmeyi sağlar. Bir alt grup, belirli zaman aralığı boyunca alınan bir örnek gibi, süreçteki bazı noktalardan alınan gözlemlerin örneğini sunmaktadır. Bu aşama genellikle sürecin başlangıç aşaması olarak adlandırılmaktadır. Amaç, gözlemler için kontrol sınırlarını oluşturmada veri setini elde etmektir. Bu ilk aşamanın amacı istatistiksel kontrolü oluşturmak ve ikinci aşama için hatasız kontrol sınırları bulmaktır. İkinci, aşama gelecek için çekilen alt grupların süreç standartlarından her hangi bir sapmayı meydana çıkaran kontrolün bakımını sağlamak için kontrol kartlarını kullanmaktan ibarettir.

Çok değişkenli T^2 istatistiği genellikle kontrol kartı yapısındaki her iki aşama için kart istatistiği olarak kullanılmaktadır. T^2 istatistiğinin belirli F dağılımını takip ettiği gerçeğini kullanarak kontrol sınırları oluşturulmaktadır. Başlangıç aşaması bireysel veriler ile birlikte kontrol sınırları F ve ki-kare dağılımlarına dayandırılan bir yaklaşım kullanarak hesaplanır.

3. Başlangıç Aşamasında Kontrolü Saptamak

p sayıda kalite karakteristiklerinin birlikte ölçüldüğü ve kontrol ihtiyacı olduğu durum dikkate alınsın. Bu karakteristikler, Σ , p karakteristiğin varyans ve kovaryanslarından ibaret olan P x P boyutlu matris ve m_i 'inci karakteristiği, ortalaması olmak üzere kovaryans matrisi Σ ve ortalama vektörü $m' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ olan P boyutlu çok değişkenli normal dağılım gösterdiği kabul edilsin. Çok değişkenli normal dağılım, her karakteristik için tahmin edilen tek değişkenli normal dağılıma paralel P boyutlu olmaktadır. Çok değişkenli normalliğin varsayımı kontrol sınırlarını elde etmek amacı ile yapılmaktadır. Kontrol saptandıktan sonra verinin normal dağılmış olduğu varsayılır. Sonuçlar varsayımların geçerliliğine bağlıdır. Sürecin başlangıç aşamasında kontrolde

olduğu ve geçmiş verilen m alt gruplu örneğinin μ ve Σ parametrelerini tahmin etmek için uygun olduğu varsayılmaktadır.

Notasyon amaçlı olarak, aşağıdaki vektör ile referans olarak verilen örnekten P inci karakteristiğın i' nci bireysel gözlemi sunulmaktadır.

$$X_i = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{ip} \end{bmatrix}$$

Tahmin edilmiş ortalama bileşenleri her bir karakteristiğın ortalamalarından oluşmaktadır.

$$\bar{X}_i = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{X}_p \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_j = \frac{1}{m} \sum_{J=1}^m X_j$$

Tahmin edilmiş kovaryans matrisi

$$S_m = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X}_m)(X_i - \bar{X}_m)'$$

dir. X_i gözlemi için Hotelling, istatistiğine dayandırılan çok değişkenli kontrol kartını oluşturmada aşağıdaki istatistiği kullanır.

$$Q_i = (X_i - \bar{X}_m)' S_m^{-1} (X_i - \bar{X}_m)$$

Q_i nin dağılımı kesin olarak bilinmemektedir ve çok değişkenli kontrol kartı pratisyenleri, kontrol kartı sınırlarını elde etmek için ki-kare ve F dağılımlarına yaklaştırmaktadır.

Eğer \bar{X}_m ve S_m nin tahminlerinin gerçek populasyon değerleri μ ve σ olduğu varsayılırsa, her biri ayrı ayrı, P serbestlik dereceli ki-kare değişkeni olarak dağılmış Q_i istatistiğini göstermektedir. Bu durumda alt kontrol sınırı

$$\text{AKS} = \chi^2 (1 - \alpha / 2; p)$$

ve üst kontrol sınırı

$$\text{ÜKS} = \chi^2 (\alpha / 2; p) \quad \dots 3$$

olmaktadır. Burada $\chi^2 (\alpha ; p)$, p serbestlik dereceli ki-kare dağılımının $1 - \alpha$ 'lık yüzde noktasıdır.

Eğer X_i ' nin i. gözlem \bar{X}_m ve S_m ' nin her ikisinde bağımsız ise, buradan Q_i istatistiği p ve m - p serbestlik dereceli bir F dağılımı göstermektedir. Bu durumda

$$\text{AKS} = \frac{p(m-1)(m+1)}{m(m-p)} F(1-\alpha_2; p, m-p)$$

$$\text{ÜKS} = \frac{p(m-1)(m+1)}{m(m-p)} F(\alpha_2; p, m-p)$$

Olmaktadır. Burada $F(\alpha_2; p, m-p)$ p ve m - p serbestlik dereceli F dağılımının $1 - \alpha$ yüzde noktasıdır. Buradaki başlangıç aşamalarında açıklanan alt tahminlerin hiç biri gerçeğe uygun değilse, işaretlenmiş Q_i istatistiğinin dağılımı için tahminlenen yaklaşımların bazı dezavantajları vardır. Örneğin p küçük olmadıkça, ki-kare dağılımının uygunluğu için büyük bir alt grup hacmi gerekmektedir. Özellikle,

$$Q_i \cong \frac{(m-1)^2}{m} B(p/2, (m-p-1)/2) \quad \dots 4$$

(4) eşitliğindeki dağılım sadece, sürecin başlangıç aşamasında toplanan (örneğin kontrol sınırları hesaplamada kullanılan) bireysel X_i değerleri kontrol sınırlarının arasına düşüp düşmediğine bakmak için kontrol edilirler.

Q_i 'nin doğru dağılımını bilerek, istenilen kontrol sınırlarını oluşturmak olasıdır. Alt kontrol sınırı şöyledir.

$$AKS = \frac{(m-1)^2}{m} B(1-\alpha/2; p/2, (m-p-1)/2)$$

Üst kontrol sınırı ise,

$$ÜKS = \frac{(m-1)^2}{m} B(\alpha/2; p/2, (m-p-1)/2)$$

dir. Burada $B(\alpha; p/2, (m-p-1)/2)$ -ve $(m-p-1)$ parametrelili Beta dağılımının $1-\alpha$ yüzde noktasıdır. Eğer beta dağılımı için tablolar uygun değilse;

$$\frac{(P/(m-p-1)) F(\alpha; p, m-p-1)}{1+(p/(m-p-1)) F(\alpha; p, m-p-1)} = B((\alpha/2; p/2, (m-p-1)/2)$$

Beta ve F dağılımları ile tesadüfi değişkenleri arasındaki ilişki kullanılabilir. Bu ilişkiler kullanılarak aşağıdaki sınırlar yazılabilir:

$$AKS = \frac{(m-1)^2}{m} \times \frac{(P/(m-p-1)) F(1-\alpha/2; p, m-p-1)}{1+(p/(m-p-1)) F(1-\alpha/2; p, m-p-1)} \quad \dots 5$$

$$ÜKS = \frac{(m-1)^2}{m} \times \frac{(P/(m-p-1)) F(\alpha/2; p, m-p-1)}{1+(p/(m-p-1)) F(\alpha/2; p, m-p-1)} \quad \dots 6$$

Birçok durumda AKS sifira eşit kılınmıştır. Bunun sebebi ortalamadaki herhangi bir değişimin Q_i istatistiğinde bir düşüşe, neden olabileceğidir ve burada AKS' na önem verilmeyebilir. Bu nedenle, Q_i sadece ortalama vektördeki değişmelerde değil, ayrıca verinin kovaryans matrisindeki değişmelerinde de hassastır. Eğer kovaryans matrisi değişecek ise Q_i 'nin anormal küçük değerleri de ortaya çıkabilir. Bu nedenle böyle değişiklikleri bulmak için kullanımda sıfır olmayan AKS seçilir. Unutmamak gerekir ki, büyük Q_i değerleri sadece ortalama vektördeki değişimler ile değil, ayrıca kovaryans matrisinde ki değişmeler ile de ortaya çıkabilir .

Merkez çizgi genel olarak tek değişkenli kontrol kartları üzerinde gösterilmektedir. Bu, alt ve üst sınırlar çok değişkenli kontrol kartları üzerinde

medyan civarında simetrik olarak yerleştirilmediği için kolaylık sağlayacaktır. Bu tip çok değişkenli kartlar için uygun merkez çizgi $\alpha = 1$ ile (6) eşitliği kullanılarak oluşturulabilir.

p sayıda kalite karakteristiklerinin ortaklaşa kontrol edildiği durumda bu sonuçları büyütmek mümkündür. p kalite karakteristiklerinin olasılık dağılımının p değişkenli normal olduğu varsayılırsa, prosedür n hacimli bir örneğinden, her bir kalite karakteristiğinin örnek ortalamasını hesaplamayı öngörür. Bu kalite karakteristiklerinin ortalama grubu p x 1 boyutlu vektör ile gösterilir. İstatistik kontrol kartında test istatistiği her bir örnek için,

$$\chi_0^2 = n (\bar{x} - \mu) \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu)$$

dir. Burada her kalite karakteristiğinin kontroldeki ortalamaları $\mu' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ ve S kovaryans matrisidir. Kontrol kartında üst sınır

$$\text{ÜKS} = \chi^2_{\alpha, p}$$

dir. Uygulamadan, sürecin kontrolde olduğu varsayıldığında n hacminden alınan ilk örneklerin analizinden μ ve Σ 'yi tahmin etmek gereklidir. Değişik m örnekleri mevcut olduğu varsayılırsa örnek ortalamalar ve varyanslar her bir örnekten bilinen şekilde,

$$\bar{X}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ijk} \quad \begin{matrix} j=1,2, \dots p \\ k=1,2, \dots m \end{matrix} \quad \dots 8$$

$$S_k^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{jk} - \bar{X}_{jk})^2 \quad \begin{matrix} j=1,2, \dots p \\ k=1,2, \dots m \end{matrix} \quad \dots 9$$

hesaplanır. Burada k inci örnekte j inci kalite karakteristiğinin üzerindeki gözlem X_k 'dir. k' inci örnekte kovaryans j ve h kalite karakteristikleri arasındadır.

$$S_{hk}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{jk} - X_{jk}) (X_{hk} - \bar{X}_{hk}) \quad \begin{matrix} k=1,2, \dots m \\ j \neq h \end{matrix} \quad \dots 10$$

\bar{X}_k , S_k^2 ve S_{hk} gibi bütün m örneklerinin ortalaması alındığı durumda

$$\bar{X}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_{ijk} \quad j=1,2, \dots p \quad \dots 11a$$

$$S_j^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jk}^2 \quad j=1,2, \dots p \quad \dots 11b$$

$$S_{jh}^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jhk} \quad j \neq h \quad \dots 11c$$

\bar{X} Vektörü elemanları $\{x_j\}$ dir, ve $p \times p$ örnek kovaryans matris S şu şekilde düzenlenir.

$$S = \begin{bmatrix} S_1^2 & S_{12} & S_{13} & \dots & S_p \\ & S_2^2 & S_{23} & \dots & S_{2p} \\ & & & & S_p^2 \end{bmatrix} \quad \dots 12$$

Şimdi μ yerine \bar{x} ve Σ yerine S ; 13 denklemindeki yerlerine koyarak test istatistikleri

$$T^2 = n (\bar{x} - \bar{x})' S^{-1} (\bar{x} - \bar{x}) \quad \dots 13$$

şeklinde olur. Bu prosedür genellikle Hotelling T^2 kontrol kartı olarak isimlendirilir. Eğer μ ve Σ başlangıç örneklerinin nispi olarak büyük bir sayısından tahmin edildiyse ($m \geq 20$ veya 25 gibi) o zaman Hotelling T^2 kartında üst kontrol sınırı olarak ÜKS = $\chi^2 \alpha, p$ kullanılır.

4. Değişkenlik Kontrolü

Çok değişkenli problemde, m vektör ortalaması sürecini kontrol etmek önemliken, aynı zamanda süreç değişkenliğini kontrol etmek de önemlidir. Süreç değişkenliği $p \times p$, kovaryans matrisi S ile gösterilir. Bu matrisin başlıca köşegen elemanları bireysel süreç değişkenlerinin varyanslarıdır ve diagonalin dışındaki elemanlar kovaryanslardır . Bunun için iki prosedür sunulmuştur.

Birinci prosedürü ele alalım. Bilindiği gibi Σ populasyonun varyans kovaryans matrisini, S örnek varyansı kovaryans matrisini göstermektedir. S , Σ nin tahminleyicisidir. Burada Σ nin Σ_0 gibi sabit bir değerde tutulması isteniyor. Bunun gerçekleşip gerçekleşmediği için bir test yapılacaktır.

$$H_0 : S \leq \bar{S}_0 \text{ (sabit)}$$

$$H_1 : S > S_0$$

dir. Burada H_0 red edilir ise çok değişkenli kartta değişkenliğin kontrol dışı olduğu kabul edilir.

$$W_i = -pn + pn \ln(n) - n \ln(|A_i|/|\Sigma|) + \text{tr}(\Sigma^{-1} A_i) \quad \dots 14$$

olur, ki burada, $A_i = (n-1) S_i$, S_i 'i örnek için örnek kovaryans matristir ve trace operatörüdür. W_i 'nin değeri UKS = $\chi^2_{\alpha, p(p+1)/2}$ 'nin üzerinde işaretlenirse, o takdirde süreç kontrol dışıdır.

İkinci yaklaşım genelleştirilmiş varyans $|S|$ 'e dayanır. Bu istatistik örnek kovaryans matrisinin determinantı'dır. Montgonery ve Wadsworth, $|S|$ 'e bir kontrol kartı geliştirmek için asimptotik normal tahmin kullanmışlardır.

$|S|$ 'nin dağılımı için $|S|$ 'in ortalaması ve varyansını elde etmede başka bir metod kullanılabilir ve $|S|$ 'in muhtemel dağılımının

$E|S| \pm 3 \sqrt{V(|S|)}$ aralığı tarafından kapsanır. Beklenen değeri ve varyansı aşağıda verildiği gibidir.

$$E|S| = b_1 |S| \quad \dots 15$$

$$V(|S|) = b_2 |S|^2 \quad \dots 16$$

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{i=1}^p (n-i) \quad \dots 17$$

$$b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{i=1}^p (n-i) \left| \prod_{i=1}^p (n-j+2) - \prod_{i=1}^p (n-j) \right| \quad \dots 18$$

dir. Bu nedenle $|S|$ için kontrol kartı parametreleri

$$\begin{aligned} \text{AKS} &= |\Sigma| (b_1 - 3b_2^{1/2}) \\ \text{ÜKS} &= |\Sigma| (b_1 + 3b_2^{1/2}) \\ \text{KS} &= b_1 |\Sigma| \end{aligned} \quad \dots 19$$

olur . 19'daki AKS eğer hesaplanan değer sıfırdan küçükse sıfır olarak kabul edilir.

Genellikle pratik olarak Σ ilk örneklerin analizine dayanarak bir örnek kovaryans matrisi S ile tahmin edilir. Eğer, bu problemde Σ yi $|S|/b_1$ ile (19) denklemindeki yerine koyarsak, (15) denkleminde gösterilen $|S|/b_1$, Σ 'nin sapmasız bir tahminleyicisidir.

Tablo 1. de kimyasal endüstri sürecinin başlangıç aşamasından alınan gerçek veriler sunulmuştur. Bu örnek kimyasal süreçte benzer şekilde üç değişkenin eş zamanlı ölçümlerini içermektedir. Bunlar özel bir maddenin kirli lik yüzdesi (x_1), sıcaklığı (x_2) ve konsantrasyon kuvveti (x_3) değişkenleridir. Veriler çok değişkenli normal dağılış göstermektedir

Bu örnekte üç değişken üzerinde 14 gözlem vardır, böylece $m = 14$ ve $p = 3$ dur. Örnek ortalamasının vektörü,

$$\bar{X}_{14} = \begin{bmatrix} 16.83 \\ 85.19 \\ 43.21 \end{bmatrix}$$

dir. Örnek kovaryans matrisi

$$S_{14} = \begin{bmatrix} 0.365 & -0.022 & 0.100 \\ 0.022 & 1.036 & -0.245 \\ 0.100 & -0.245 & 0.224 \end{bmatrix}$$

dir. Örnek korelasyon matrisi R_m , X_i ve X_j arasındaki çift yöllü korelasyon katsayısının oluşturan r_{ij} elemanlarından oluşmuştur. Bu da, R_m 'nin i. sıra ve j. kolondaki elemanı şöyle verilmiştir.

$$r_i = \frac{S_j}{\sqrt{S_i} \sqrt{S_j}}$$

Burada S_{ij} örnek kovaryans matrisi S_m 'nin i.sıra ve j. kolondaki elemanıdır. Bu örnek için, Korelasyon matrisi R_{14}

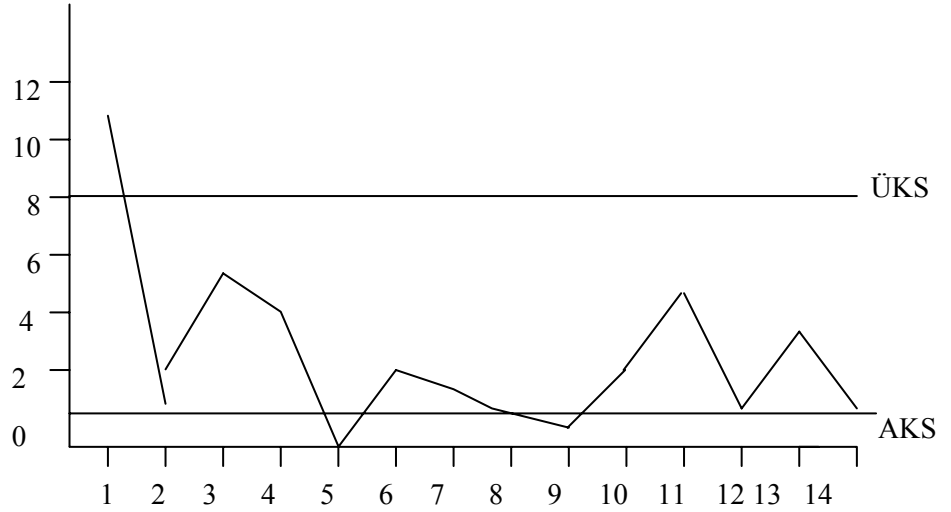
$$R_{14} = \begin{bmatrix} 1.000 & -0.035 & 0.348 \\ -0.035 & 1.000 & -0.507 \\ 0.348 & -0.507 & 1.000 \end{bmatrix}$$

dir. Kontrol sınırları ve kart istatistiği çok değişkenli kontrol kartlarını oluşturmak için gerekir. Kart istatistiği Q_i 'nin değerleri tablo 1. de verilmiştir. $\alpha = 0.01$ ile 5 ve 6 eşitliklerini kullanarak ilgili kontrol sınırları,

$$AKS = \frac{(14-1)^2}{14} \times \frac{(3/(14-3-1))(0.0229)}{1+(3/(14-3-1))(0.0229)} = 0.082$$

$$\tilde{U}KS = \frac{(14-1)}{14} \times \frac{(3/(14-3-1))(8.081)}{1+(3/(14-3-1))(8.081)} = 8.55$$

dir. Şekil 7. çok değişkenli kontrol kartlarını gösterir. Birinci ve beşinci gözlemleri her ikisinde kontrol sınırları dışında kalırlar.



Tablo 1. Kimyasal Endüstri ve İstatistikler Gözlemi

Gözlem	Kirlilik yüzd. (X_1)	Sıcaklık (X_2)	Kkonsantrasy on (X_3)	Q_i ($m=14$)	Q_i ($m=13$)
1	14.92	85.72	42.26	10.93	
2	16.90	83.77	43.44	2.04	1.84
3	17.38	84.46	42.74	5.58	5.33
4	16.90	86.27	43.60	3.86	3.58
5	16.92	85.23	43.18	0.04	0.23
6	16.71	83.81	43.72	2.25	2.17
7	17.07	86.08	43.33	1.44	1.46
8	16.93	85.85	43.41	1.21	1.05
9	16.71	85.73	43.28	0.68	1.91
10	16.88	86.27	42.59	2.17	5.16
11	16.73	83.46	44.00	4.17	3.84
12	17.07	83.81	42.78	1.40	1.65
13	17.60	85.92	43.11	2.33	7.00
14	16.90	84.23	43.48	0.90	0.72

Gözlem 1'i tekrar ele alırsak, $m = 13$ ile tahmin edilen parametreleri yeniden hesaplamak, tahmin edilmiş ortalamaların yeni vektörü,

$$\bar{X}_s = \begin{bmatrix} 16.98 \\ 85.14 \\ 43.28 \end{bmatrix}$$

olmaktadır. Yeni hesaplanmış kovaryans matrisi gibi,

$$S_{13} = \begin{bmatrix} 0.068 & 0.076 & -0.055 \\ 0.076 & 1.092 & -0.216 \\ -0.055 & -0.216 & 0.163 \end{bmatrix}$$

dir. Örnek kovaryans matrisi ,

$$R_{13} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.280 & -0.520 \\ 0.280 & 1.000 & -0.512 \\ -0.520 & -0.512 & 1.000 \end{bmatrix}$$

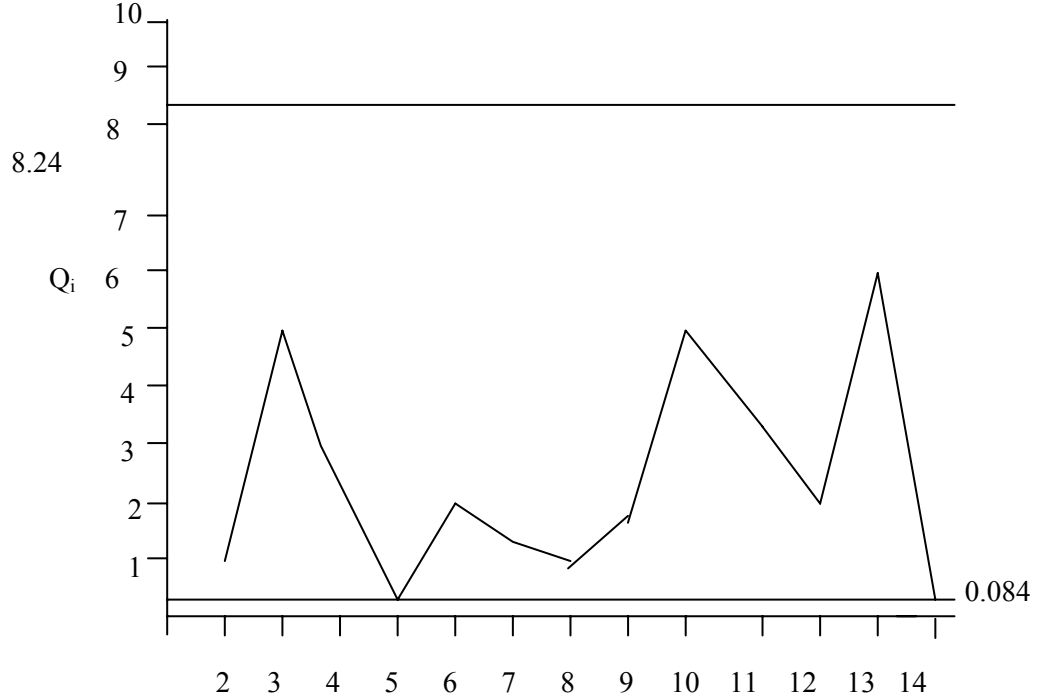
dir. Tekrar hesaplanmış Q_i değerleri tablo 3.'in son kolonunda verilmiştir. Bu örnek (şimdi 13 boyutu) için benzer kontrol sınırları

$$AKS = \frac{(13-1)^2}{13} \times \frac{(3/(13-3-1)) \times 0.0228}{1+(3/(13-3-1)) \times 0.0228} = 0.084$$

$$ÜKS = \frac{(13-1)^2}{13} \times \frac{(3/(13-3-1)) \times 8.717}{1+(3/(13-3-1)) \times 8.717} = 8.24$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu Q_i değerleri tekrar işaretlenirse şekil 8. de hiç bir gözlemin kontrol sınırları dışında olmadığı görünür. İstatistiksel kontrol, örnek hatası nedeniyle, sapan nokta adı verilen değişkenin özel nedenini elemekle saptanmıştır.

$m = 14$ de AKS'nin aşağısında olan gözlem 5'in şimdi kontrol sınırlarının içinde olmasını söylemek ilginçtir. Q_i 'lerin arasındaki bağımlılık buna katkıda bulunmaktadır .



Şekil 8. 13 Gözlem ile Değiştirilmiş Veri Seti İçin Çok Değişkenli Kontrol Kartı

5. Gelecek Değerler İle Kontrolü Korumak

Bu aşamada başlangıç aşamasında bulunan \bar{X}_m ortalamalarının vektörleri ve kovaryans matrisi S_m gelecek gözlemleri test etmede kullanılacak olan kontrol sınırlarını hesaplamada kullanılır. Böylece, X_f gelecek gözlemi için \bar{X}_m ve S_m bağımsızdır.

Hotelling İstatistiği kullanılırsa,

$$T_f^2 = (x_f - \bar{x}_m)' S_m^{-1} (x_f - \bar{x}_m)$$

burada X_f , p karakteristiğindeki gelecek gözlemlerin p boyutundaki vektörünü göstermektedir. X_m , m gözlemin p boyutundaki ortalama vektörüdür. S_m birleşik p x p kovaryans matrisidir

Eğer başlangıç örneği büyükse, genel yaklaşım olarak başlangıç aşaması standartlardır ve gerçek populasyon parametrelerinin m ve S 'ya eşit olduğunu varsayılmaktadır. T_f^2 istatistiği buradan aşağıdaki formül ile bulunur.

$$T_f^2 = (x_f - \mu)' \Sigma^{-1} (x_f - \mu) \quad \dots 20$$

Sonuçlanan üst ve alt çok değişkenli kontrol sınırları daha önce görüldüğü gibi hesaplanır.

T_f^2 'nin dağılımları bulunabildiğinden alttaki ki-kare yaklaşımı için; hiç fazladan bir şeye gereksinim yoktur. Dağılım,

$$T_f^2 \cong \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} F(p, m-p) \quad \dots 21$$

dir. Burada kontrol sınırları

$$AKS = \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} F(1-\alpha/2; p, m-p) \quad \dots 22$$

$$ÜKS = \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} F(\alpha/2; p, m-p) \quad \dots 23$$

dir. Tablo 1. Deki veriler için kontrol sınırları

$$AKS = \frac{3(13+1)(13-1)}{13(13-3)} 0.0229 = 0.088$$

$$ÜKS = \frac{3(13+1)(13-3)}{13(13-3)} 8.081 = 31.33$$

şekilde hesaplanabilir. Gözlemlerin gelecek vektörü için $T_f^2 = 3.52$

$$X_f = \begin{bmatrix} 17.08 \\ 84.08 \\ 43.81 \end{bmatrix}$$

Bu değer kontrol sınırları arasında olduğundan bu gözlemdeki süreç kontrol altındadır.

ABSTRACT

There are many situation in which it is necessary to simultaneously monitor two or more correlated quality characteristics. Such problems are referred to as multivariate quality control problems many products quality has been identified with more quality properties and therefore control chart must reflect that properties. In multivariate quality control, T^2 statistics and T^2 control chart are used arranging for it.

KAYNAKÇA

- ALT, F.B.,(1985); "Multivariate Quality Control", *In Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol.6. Edited by Johnson. N.L.& Kotz. S., Wiley J., New york
- BURNAK, N.,(1988); *Çok Değişkenli Kalite Kontrolunda Maliyet Analizi*, Anadolu Üniversitesi Yayınları, No.259, Eskişehir,
- HAWKINS. Douglas M., (1991); Multivariate Control Based On Regression Adjusted Variables", *Technometrics*, Vol.33. No 1
- MRRISON, D.F.(1990); Multivariate Statistical Methods, 3 Baskı, Mc Graw-Hill, Inc
- NOLAV D. TRACY & JOHN C. YONCA & ROBERT I. MASON, (1992); "Multivariate Control Charts For Individual Observations", *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, No:2
- TATLIDIL. H.,(1992); *Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz*, Ankara
- TRACY, N.D. & YOUNG, J.C. & MASON, R.L., (1992); " Multivariate Control Charts For individual Observations", *Journal of Quality Technology*, Vol.24, No.2. April s.88-95.