T.C. Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, Cilt: 3, Sayı: 1, Yıl: 1988

NEWTON YAKLAŞIM METODUNUN YERİNEKOYMA PROBLEMİNE TATBİKİ

Sedat AKALIN (*)

Ö Z E T

Bu çalışmada, işletmelerde çok mühim sorunlardan biri olan yerinekoyma (yenileme) işinin kısa bir takdimi yapıldıktan sonra, işletme maliyeti ve müstamel fiyatı - dolayısiyle - kapital maliyeti fonksiyonları işletmece tesbit olunmuş bir makinenin optimal değiştirilme (y., yerine yenisinin konulması) zamanı önce sıralama, sonra Newton yaklaşım metodu ile hesaplanıp, iki yöntemin sonuçları karşılaştırılmıştır.

1. GİRİŞ

Yerinekoyma, müessiriyetin veya verimliliğin zamanla yahut anî olarak bozulması yada sıfıra inmesi durumlarında gerekli şekilde davranarak önceki seviyeye yükseltilme işidir.

Burada gâye, işletme maliyeti **zamanla artan** ve müstamel (kullanılmışının satış) fiyatı **zamanla azalan** bir makinenin (kamyon, donanım, techizat, vb.) eniyi (optimal) değiştirme (yerine yenisini ikame) zamanının tesbitidir.

2. ORTAYA ÇIKTIĞI DURUMLAR

Yenileme de denilebilen 'yerine koyma' işinin sebebi, donatımın desenlendiği standardlara uygun performansını, her ne yüzden olursa olsun, artık kaybettiği gerekçesi olabileceği gibi, mezkûr standardların artık kâfi gelmediği, daha müessir ve daha iktisadî benzerlerinin piyasaya arzı da olabilir.

Yerinekoyma ihtiyacı aşağıdaki sebeplerden bir veya birkaçının bileşiminden tevellüt edebilir.

(*) Prof. Dr., D.E.Ü.İ.İ.B.F., Ekonometri Bölümü

a. Eldeki donatım şu sonuçlardan biri veya daha çoğu yüzünden yeterli çalışmamaktadır: Aşırı boşdurma (y., âtıl kapasite), düşük mal kalitesi, artan işçilik maliyeti, yüksek işletme maliyeti, anormal (gereğinden çok yüksek) bakım harcamaları (tamir ve gözden geçirme çoğu zaman bu şartları iyileştirebilir).

b. Süregelen veya potansiyel kapasite arttırılması yada çeşitlendirme sözkonusudur.

c. Rekabet sebebiyle yahut diğer nedenlerle pazara yeni yada geliştirilmiş mamûller sürülmüştür. (Yeni ürünler donatım alımlarını mecburî kılabilir; bu yüzden, onların hâli hazır donatım üzerindeki tesiri önceden değerlendirmeğe tâbi tutulmalıdır.)

d. Mevcut (eldeki) donatım şimdilik tatminkâr işlemekte ise de, piyasada daha etkin (y., verimli) donatım vardır.

e. Makine gücünün arttırılması işçi maliyetini düşürür veyahut kaliteyi yükseltir.

f. Malolmayı düşürecek veya kaliteyi yükseltecek işlem ve yöntemler geliştirilmiştir.

g. Tehlikeyi önlemek gereklidir; işçilerin korunması başta gelir. Bunları sağlayacak bir yerinekoyma morali yükselen işçilerin daha verimli çalışmalarını ve endüstriyel tazminat maliyetlerinin azaltılmasını mümkün kılar.

h. Fabrikanın yeniden tanzimi, geliştirilmiş materyal yönetimi, yapım servislerinin kurulması, ..., vb. ile daha müessir üretim temin edilebilir, veya dolaylı (indirek) maliyetleri düşürebilir.

3. YERİNEKOYMA KARARI

Yerinekoyma kararı eldeki kapital fonlarının mümkün en avantajlı şekilde kullanılması ve yatırımlar üzerinde arzulanan kazancın sağlanmasını tesbit sorunuyla ilgilidir, ki geleceğe ait aşağıdaki tahminleri gerektirir:

i. Yeni donatımla işletme maliyet avantajlarını sağlayacak gerekli hacmin - talep tahminine bağlı olarak - sürdürülüp sürdürülemiyeceği.

ii. Söz konusu donatımın alternatif kullanılma imkânı bulunup bulunmadığı.

iii. Eldeki donatım tatminkâr bir biçimde tamir olunabilir mi? Onarılabilirse, ne kadarlık bir süre için?

iv. Yakın bir gelecekte daha verimli bir donatımın ortaya çıkıp çıkmıyacağı?

4. SAYISAL ÖRNEK

TADES Firmasının tesbitine göre, belli bir tarım makinesinin alınış fiatı 10 milyon (10^7) liradır. İşletme maliyeti zamanın (t) kuadratik bir fonksiyonu olup, i'inci yıl sonunda yıllık ortalama işletme maliyeti Denk. (1) ile bellidir:

$$I_i = 10^6 + 10^4 i^2 \tag{1}$$

Burada i, i'nci pozitif tam sayı olup, 1 ile başlamaktadır.

Müstamel kıymeti ise, kullanılmış-mal pazarındaki fiyatı olup, her yıl, kalan değerinin 3/5'ü nisbetinde azalmaktadır; y., 0,6'sı kadar her yıl sonunda değerinden kaybetmektedir. Böylelikle, n yıl sonundaki müstamel (yeniden satış) fiyatı,

$$M_k = 10^7 (3/5)^n \tag{2}$$

dir. n yılda toplam kapital maliyeti,

$$M_{tk} = 10^7 - 10^7 (3/5)^n \tag{3}$$

olur. Buradan, n yıl için ortalama yıllık maliyet, (1) ve (3) Dnk.lerinin toplamının yılsayısına (n) bölümü ile tesbit edilebilir:

$$OM = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} (10^6 + 10^4 i^2) + 10^7 - 10^7 (0{,}6)^n\right] \tag{4}$$

Tesbitine çalışılan **minimum ortalama yıllık maliyet** iki yolla bulunabilir. Bunlardan ilki, tam sayılı yılın ya istenen cevap veya pratik maksatlar için kâfi yakınlıkta olduğu varsayımına dayanılarak yıllık maliyetlerin ve ortalamanın bir (1)den başlanılarak sıralanmasiyle olur. Bu kabûl altında çözüm Tablo 1.de verilmiştir.

Tablo 1.de, kolon 1 makinenin çalıştırıldığı yıllardır; kolon 2, Denk. (1) den hesaplanmıştır. Kolon 3, Dnk. (2)den; kolon 4, Dnk. (3)ten; hesap edilmiştir. Kolon 5 ise kolon 2'nin kümülatif (yığmalı) toplamıdır. Kolon 6, kolon 4 ile kolon 5'in toplamıdır. Kolon 7, y., ortalama yıllık toplam maliyet kolonu, kolon 6'nın çalıştırılma yıllarına bölümünden elde edilmiştir, ki bu kolon Dnk. (4)den de elde edilebilir. Meselâ, 10 yıl sonunda yıllık ortalama maliyet, Dnk. (4)te n = 10 konularak, aşağıdaki gibi bulunur:

$$OM_{10} = \frac{1}{10}\left[10(10^6) + 10^4 . \frac{10(11)21}{6} + 10^7 - 10^7(0,6)^{10}\right] \doteq 2378950.-$$

Tablodaki değer (000) cinsindendir. Hatırlatma: 1'den n'e kadar tabiî sayıların kareleri toplamı n(n+1) (2n+1)/6'dır.

TABLO 1. SIRALAMA YOLUYLA ÇÖZÜM

Yaş Çalışma Yılı (1)	Yıllık İşletme Maliyeti (2)	Müstamel Kıymeti (000) (3)	Toplam Kapital Maliyeti (4)	Toplam İşletme Maliyeti (5)	Toplam Maliyet (4)+(5) (6)	Ortalama Maliyet (6)/n (7)
1	1010	600	4000	1010	5010	5010
2	1040	3600	6400	2050	8450	4225
3	1090	2160	7840	3140	10980	3660
4	1160	1296	8704	4300	13004	3251
5	1250	777,600	9222,400	5550	14772,400	2954,480
6	1360	466,560	9533,440	6910	16443,440	2740,5733
7	1490	279,936	9720,064	8400	18120,064	2588,5805
8	1640	167,962	9832,038	10040	19872,038	2484,0041
9	1810	100,777	9899,223	11850	21749,223	2416,5803
10	2000	60,466	9939,534	13850	23789,534	2378,9534
11	2210	36,280	9963,720	16060	26023,720	2365,7927*
12	2440	21,768	9978,232	18500	28478,232	2373,1860
13	2690	13,061	9986,939	21190	31176,939	2398,2260
14	2960	7,836	9992,164	24150	34142,164	2438,7260
15	3250	4,702	9995,298	27400	37395,298	2493,0198

Tablo 1'in 7 nci kolonunda da görüldüğü üzere, ortalama maliyetin minimize edildiği (enküçüklendiği) yerine koyma yaşı 11 yıldır. Makine faaliyetten çekilip onbirinci yılın sonunda 36280 liraya satıldığında, ömrü boyunca ortalama yıllık maliyeti 2 milyon 365 bin 793 lira olacaktır, ki bu kadar düşük maliyeti temin edebilen başka bir **tam yıl** yoktur.

Bununla beraber, tam-yıl varsayımından vazgeçmek de mümkündür. Yerinekoyma problemi, fonksiyonların zaman itibariyle sürekli oldukları ve makinenin tam-sayılı yıl olmayan bir zaman sonra da devreden çıkartılabileceği kabûl edilerek dahi çözümlenebilir.

Ortalama maliyet (OM) fonksiyonunun, Dnk. (4)'te verildiği gibi, zamana göre türevi alınıp, bulunan türev sıfıra eşitlenebilir. Dnk. (4), önce parantezden kurtarılarak Dnk. (5) hâline getirilir:

- 5 -

$$OM = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(10^6+10^4 i^2) + 10^7 - 10^7(0,6)^n\right] \tag{4}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} n.10^6 + 10^4\sum_{i=1}^{n} i^2 + 10^7 - 10^7(0,6)^n\right]$$

$$= 10^6 + 10^4\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} + \frac{10^7}{n} - \frac{10^7}{n}(0,6)^n$$

$$= 10^4\left[100 + \frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1000}{n} - \frac{1000}{n}(0.6)^n\right] \tag{5}$$

Dnk.(5) in türevi alınırsa, Dnk.(6) elde edilir:

$$\frac{d}{dn}(OM) = 10^4\left[\frac{2}{3}n + \frac{1}{2} - \frac{1000(0,6)^n}{n^2}(0,511n + 1)\right] \tag{6}$$

burada, $\ln(0,6) = -0,511$ alınmıştır.

bu ifadenin sıfıra eşitlenmesi, Dnk.(7) yı verir:

$$0 = 10^4\left[\frac{2}{3}n + 0,5 - \frac{1000}{n^2} + \frac{1000}{n}(0,6)^n\left(\frac{1}{n} + 0,511\right)\right] \tag{7}$$

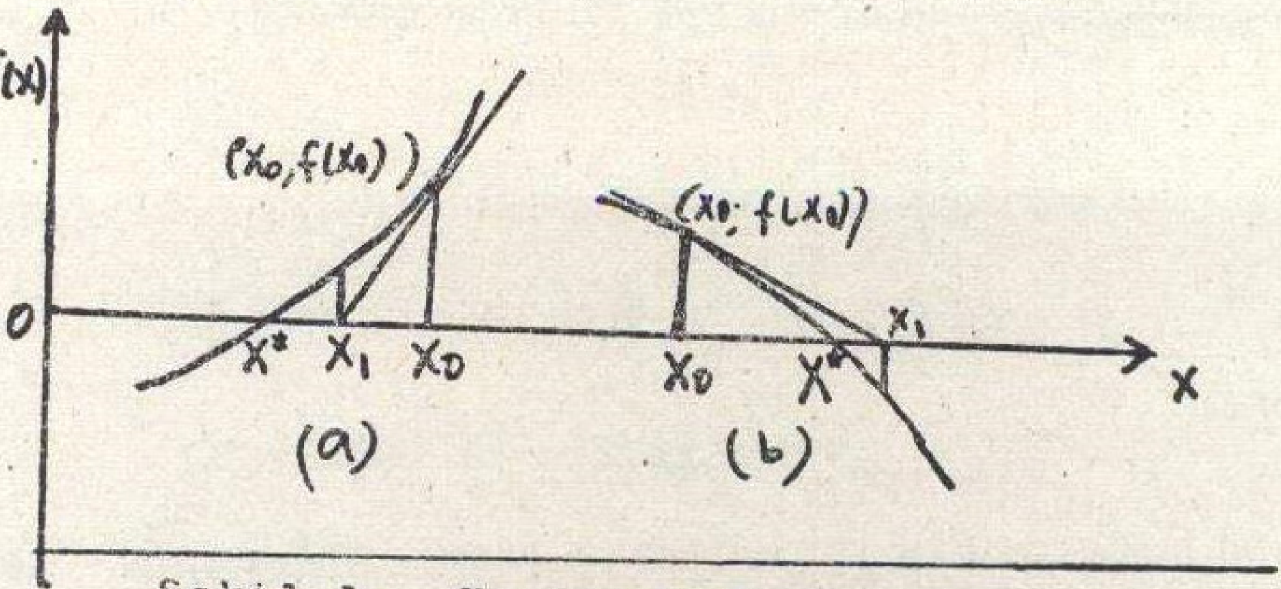
Burada n optimal yerinekoyma süresidir. Dnk. (7) müteamil metodlarla kolayca çözümlenemez; ancak, aşağıda açıklandığı üzere, Newton yaklaştırma yöntemiyle kolayca yaklaştırılabilir, y., denklemin kökü çok yaklaşık bulunabilir.

Birçok durumlarda

$$f(x) = 0 \tag{8}$$

şeklinde bir fonksiyonla karşılaşılır ve kökünün veya köklerinin bulunması gerekir. Böyle bir hâl ekseriya, türevin sıfıra eşitlenmesi ve kökün bulunması, yâni, türevi sıfıra eşit olan bilinmeyenin hesabı için ortaya çıkar.

Newton yaklaştırma metodu Şekil 1. ile tersim edilebilir:



Şekil 1. Newton yaklaştırma metodu

Şekilde soldaki diyagram, x ile birlikte artan bir fonksiyonu temsil etmektedir. Yâni (y.,), bu fonksiyon bir türev ise, asıl denklem bu fonksiyonun sıfır değerini aldığı (y., x exenini kestiği) noktada bir **minimuma** sahiptir. Sağ diyagramda, fonksiyon azalandır, ve, bu fonksiyon bir türev ise, orijinal denklem bu fonksiyonun x exenini kestiği noktada bir maximuma haizdir. İki hâlde de maksat $f(x) = 0$ için x değerini tesbittir.

Takip edilecek yol, Şekil 1.'in diyagramlarında izlenilebilecek, aşağıdaki gerekçeye dayanmaktadır. Evvelâ, arzulanan kökün bir tahmini yapılmalıdır. Bu başlangıç tahmin x_0 olsun. Sonra, Newton'un metodu olan itirasyon işlemi grafiklerden biri üzerinde takibolunabilir, aşağıda açıklandığı üzere.

$(x_0,0)$ noktasından, fonksiyonun grafiğini $x_0, f(x_0)$ noktasında kesen bir dikme çıkılır. Bu noktadan eğriye bir teğet çizilir ve x eksenini kesinceye kadar uzatılır. Bulunan $(x_1,0)$ noktası ikinci tahmindir. Grafiklerde açıkça görüldüğü gibi, x_1 noktası aranan x^* köke x_0'ın olduğundan daha yakındır, ve işlemin tekrarı (itirasyonu) x^*'e giderek yaklaşan mütevali x_i değerlerini verecektir. x_0 başlangıç tahmini x^*'in öbür tarafında seçilmiş olsaydı, tahkik edilebileceği üzere, bu metod yine de giderek x^*'e yakınlaşan x_i değerlerini sağlıyacaktı.

Hesaplama işi, analiz edilmekte olan fonksiyon ile onun türevi arasındaki münasebete dayandırılmıştır.

Şekil 1. in her iki diyagramında eğriye $x_0, f(x_0)$ noktasında değen teğetin eğimi $f'(x_0)$ dır, fonksiyonun x_0 cinsinden ifade edilmis türevi. Aynı zamanda, eğim,

$$\text{Eğim} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \tag{9}$$

Dikkat edilecek olursa, payda Dnk. (9)'daki gibi yazılırsa iki durumda da eğimin işareti doğrudur. Tabiî, soldaki diyagramda, eğim pozitif olup, orijinal fonksiyonun aranılan noktada bir minimuma sahip olduğunu gösterir, zira bu eğim asıl fonksiyonun ikinci türevidir. Sağdaki diyagram bir maksimumu temsil eder. Her iki hâlde,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

x_1 için çözümlendiğinde,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{10}$$

(i+1) inci tahmini (i) inciden hesaplamanın genel formûlü Dnk.(11) dir:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{11}$$

İşte bu Dnk.(11) Newton'un yaklaştırma yönteminin temelini teşkil etmektedir. Bu metod Dnk.(7) nin hâllinde kullanılacaktır.

$$0 = 10^4\left[\frac{2}{3}n + 0,5 - \frac{1000}{n^2} + \frac{1000}{n}(0,6)^n\left(\frac{1}{n} + 0,511\right)\right] \tag{7}$$

ifadesinin bir türev olduğunu unutarak, onu kökünü aradığımız f(n) ifadesi olarak tarif edersek, Dnk.(7) $\longrightarrow$ Dnk.(12) şeklini alır:

$$f(n) = 10^4\left[\frac{2}{3}n + 0,5 - \frac{1000}{n^2} + \frac{1000}{n}(0,6)^n\left(\frac{1}{n} + 0,511\right)\right] \tag{12}$$

Bunun türevi ise Dnk. (13) olur:

$$f'(n)=10^4\left[\frac{2}{3} + \frac{2000}{n^3} + 1000\left[\frac{-0,511(0,6)^n n^2 - 2n(0,6)^n}{n^4} + \frac{-0,511^2(0,6^n)n - 0,511(0,6^n)}{n^2}\right]\right]$$

$$=10^4\left[\frac{2}{3} + \frac{2000}{n^3} - 1000\left(\frac{0.6^n(0.511)n + 2(0.6)^n}{n^3} + \frac{(0.6)^n n(0.511)^2 + (0.6)^n(0.511)}{n^2}\right)\right] \tag{13}$$

Bir ilk takdir (tahmin) olarak, gerçi tabloda optimal n değerinin n = 11 civarında olacağını biliyorsak da, metodu göstermek için $n_o = 10$ alalım ve bunu Dnk.(12) ve Dnk.(13) te ikame edelim:

$$n_1 = n_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 10 - \frac{-2,464(10^4)}{2,462(10^4)}$$

$= 11,011 \doteq 11$ elde edilir. İkinci tahmin 11 olmuş olur;

itirasyona devamla $n_2 = 11,108$ bulunur:

$$n_2 = n_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 11 - \frac{f(11)}{f'(11)} = 11 - \frac{-0,233}{2,167} \doteq 11,108, \text{ y.,}$$

$n_2 = 11,11$ ikinci itirasyonda bulunan üçüncü tahmin olur, ki

n_1 den 0,009 gibi gâyet cüz'î fark etmektedir. $x^* = 11,11 \doteq 11$ yıl 40gün

sonra yerine konulmalıdır. n_2 nin x^* optimaline çok yaklaştığı görülmekle, itirasyona burada son verilir. Ayrıca, f'(11,11) gösteriyor ki, n'in bu değeri civarında, ortalama maliyet eğrisi üzerinde bir **minimum** vardır, çünkü $2,167(10^4)$ **pozitif** değerine sahip f'(11,11) ifadesi ortalama maliyet eğrisinin ikinci türevidir, y., $d^2/(dn^2)$ (OM).

Binaenaleyh, 11,11 yıl denklemin kökü olarak kabûl edilebilir. Makine 11 yıl 40 gün sonra faaliyetten alındığında, ortalama-yıllık-maliyet denklemi, Dnk. (4), kısmî yılları dikkate alacak şekilde ufak bir değişikliğe tâbi tutulur:

$$OM = \frac{1}{11,11}\left\{\sum_{i=1}^{11}(10^6+10^4 i^2)+0,11\left[10^6+10^4(11,11)^2\right] +10^7-10^7\left(\frac{3}{5}\right)^{11,11}\right\}$$

$$= \frac{10^4}{11,11}\left\{\sum_{i=1}^{11}(100+i^2) + 0,11(100+11,11^2) + 10^3(1-0,6^{11,11})\right]$$

$$= \frac{10^4}{11,11}\left[1100+\frac{11(12)23}{6} + 0,11(100+11,11^2) + 1000(1-0,6^{11,11})\right]$$

$$= \underline{\underline{2364669}},64 \text{ TL.}$$

11 yıl 40 günlük yerinekoyma devri yıllık minimum ortalama maliyeti 2 milyon 364 bin 669 lira 64 kuruş olarak tesbit eder. Bu tutar, süre itibariyle de kendisine çok yakın (fark sadece 40 gün) olan 11 yıllık yerine koyma peryodu için Tablo 1. de elde edilen 2365792,70 TL'dan 1123 lira daha düşüktür, ki bu farkın küçük oluşu optimum nokta civarında eğrinin çok yayvan (flat) olduğuna işarettir.

KAYNAKÇA

Akalın, Sedat (1979); Yöneylem Araştırması, Bornova: Ege Üniversitesi Matbaası.

Gülçür, F.K. (1966); İşletmelerde Faaliyet Araştırması, İstanbul.

Richmond, S.B. (1968); Operations Research, N.Y., The Ronald Press Com.

APPLICATION OF NEWTON'S APPROACH METHOD TO THE REPLACEMENT PROBLEM

At this work, replacement problem, which is one of very important decision making, has been briefly introduced, and then optimal time of replacement for a certain machine whose operating cost and capital cost function predicted by the firm, is compted first by enumeration, later by Newton's approximation methods and the results of the two methods are compared.