

LILLIEFORS 'UN UYGUNLUK İÇİN MUKAYESE VE GRAFİK TESTLERİ VE BUNLARIN ÇEŞİTLİ OLAYLARDA DAĞILIMLARA UYGULANMASI

İbrahim HASGÜR (*)

ÖZET

Gözlem kümesinin tamamıyla açıklanmış (bilinen) sürekli birdağılımdan gelip gelmediğini test ederken, Kolmogorov- Simirnov testi için kullanılan standart tablolar geçerlidir . Şayet bir veya birkaç parametrenin örnekten tahmin edilmesi gerekiyorsa o zaman bu tablolar yeterli olmamaktadır Bilhassa ortalama ve varyansın bilinmediği , fakat örnekten tahmin edilmesi gerektiği durumlarda gözlem kümesinin bir normal veya üstel popülasyondan gelip gelmediğinin testinde Kolmogorov - Simirnov istatistiği ile kullanmak üzere Lilliefors tarafından bir Monte Carlo Simulasyonu ile hesaplanmış bir tablo mevcuttur. Aynı tablo değerleri daha sonra İman tarafından eğrileri çizilerek grafikleri hazırlanmıştır. Bu makalede işte bu tablo ve grafikler tanıtılmaya çalışılmakta ve uygulamaları yapılmaktadır.

1- GİRİŞ

İncelenen bir frekans dağılımının uygun olduğu teorik dağılımın bilinmesi son derece yararlıdır. Bu durumda çeşitli olaylar için aranan ihtimaller rahatça bulunabilir. Bu bakımdan verilen bir frekans dağılımının ait olduğu teorik dağılımın bilinmediği durumlarda eldeki frekans dağılımı hakkında karar verebilmek için onun yapısına uyan teorik dağılımın tespiti önem kazanır. Bu dağılımın tespiti için de uygulanabilen çeşitli test ve kriterler mevcuttur. Bunlardan başlıcaları Ki-Kare Uygunluk Testi, Kolmogorov-Simirnov Testi, Cramer-Von Mises (veyahut moment) testi ile burada tanıtacağımız Lilliefors testidir. Herbir testin çeşitli üstünlük ve sakıncaları vardır. Sözelimi örnek hacminin küçük olduğu problemlerde Ki-Kare testi uygulanamaz, bu durumda Kolmogorov-Smirnov Testi uygulanmalıdır. Büyük örnek hacmi için Ki-Kare tercih edilmeli, örnek hacminin yeterince küçük olduğu problemlerde ise Ki-Kare testini kullanabilmek için komşu sınıflar birleştirilmelidir. Moment testleri ise oldukça karışık olmasına rağmen her türlü örnek hacmi için uygulanabilir. Ki-Kare ve Kol-

(*) Doç. Dr., D.E.Ü.İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü

mogorov-Smirnov uygunluk testlerinin her ikisi için de sınıf sayısı mutlaka belirtilmelidir. (Halaç, 1982; 15)

2- LILLIEFORS TESTİ

Bizim burada anlatacağımız Lilliefors testi, 1938 yılında önerilen Kolmogorov-Smirnov testinin geliştirilmiş bir şeklidir. Bilindiği gibi Kolmogorov-Smirnov testinde incelenen dağılımın sürekli olduğu, anakütle ortalaması ve varyansının bilindiği varsayılır. Ki-Kare testindeki gibi bu testte de örnek verilerinin dağılımı ile teorik dağılım arasındaki uyum derecesi kullanılmaktadır. Bunun için teorik dağılımın kümülatifi ile örnek dağılımın kümülatifi kıyaslanarak aradaki farklar (sapmalar) belirlenir. Bu sapmalar içinde en büyük mutlak sapmaya sahip olan değer seçilerek oluşturulan tablo kritik değerleriyle karşılaştırılır ve dağılım hakkında karara varılır. Smirnov'un tablo halinde verdiği değerler 1948 yılında basılarak yayımlanmıştır.

Lilliefors testi, esasen Kolmogorov-Smirnov testine dayanmaktadır. Şayet teorik dağılım fonksiyonu tamamen açıklanmamışsa, yani belirli parametreler örnek verilerinden tahmin edilmesi gerekiyorsa, bu durumda Kolmogorov-Smirnov testi için hazırlanmış tablolar yeterli olmaz. İşte Lilliefors bir veya daha fazla parametrenin örnekten tahmin edilmesi gerektiği, mesela, ortalama ve varyansın açıklanmadığı, fakat örnekten tahmin edilmesi gerektiği durumlarda gözlem kümesinin bir normal veya üstel dağılım popülasyonundan gelip gelmediğini test etmek için Kolmogorov-Smirnov testinin geniş bir uygulama alanı bulamayacağını ifade etmiş ve bu durumda kullanılmak üzere yeni tablolar hazırlamıştır. (Lilliefors, 1967; 399-402)

Takip edilen prosedür ise şöyledir : N gözlemlili bir örnek verilmiştir. $S_n(x)$ gözlenen kümülatif dağılım fonksiyonu ve $F^*(x)$ verilerden tahmin edilmiş parametreler ile ortalaması \bar{x} ve standart sapması s olan teorik kümülatif dağılım fonksiyonu olarak alındığında $T = \max |F^*(x) - S_n(x)|$, $\forall x$ için istatistiği hesaplanır.

Eğer T değeri tablodaki kritik değeri aşarsa, gözlemlerin özelliği incelenen dağılımdan geldiği hipotezi reddedilir. Lilliefors bu tabloları önce normal dağılım için daha sonra da üstel dağılım için bir Monte Carlo Simulasyonu metodu kullanarak hazırlamıştır. Lilliefors bu simulasyonda N 'in her bir değeri için 1000 veya daha fazla örnek kullanmıştır. Bulunan değerlerin gerçek güven seviyeleri 0.10 ; 0.05 ve 0.01 için yapılan standart hatalar sırasıyla 0.009 ; 0.007 ve 0.003 den daha büyük değildir. Bu değerler Kolmogorov-Smirnov testi için standart tablodakilerle karşılaştırıldığında Monte Carlo kritik değerlerinin ekseriyetle yaklaşık olarak standart değerlerinin üçte ikisi oranında oldukları görülür. (Lillifors, 1967, 399-

402) , (Massey, 1951: 68-78) ve (Birnbaum, 1952: 425-441). Böylece bilhassa N'in daha büyük değerleri için Monte Carlo değerlerinin standart değerlere oranı nispeten sabit olacaktır. Bu durumda değerlerin $1/\sqrt{N}$ kadar azalacağı görülür . Sözgelimi 40 hacimli bir örnek için Monte Carlo değerleri 40'ın karaköküyle çarpılmış ve sonuç 30 dan daha büyük örnek hacmi için kritik değerlere pay olarak yazılmıştır.

Ayrıca Masseyin çalışmasında Kolmogorov-Smirnov testi için verilen standart tablolar, tablo 1 ile karşılaştırıldığında α için %1 anlam seviyesinde tablo 1'deki kritik değerlerin standart tablolar kullanıldığında $\alpha=0.20$ anlam seviyesinde bulunan kritik değerlerinden N'in her bir değeri için bir parça daha küçük olduğu görülür. Böylece ortalama ve standart sapma değerlerinin örnekten tahmin edildiğinde gerçek anlam seviyesinin standart tablolarla verilenlerden çok daha düşük olacağı anlamında gerçekten hassas ve tutarlı bir test elde edilmiş olacaktır.

Ayrıca Lilliefors bir Monte Carlo hesaplamasıyla testin hassasiyetini ortaya koymuştur. Bunun için 20 hacimli 500 örneği bir kaç dağılımdan çekerek Kolmogorov - Smirnov testini kullanmak (tablo 1) suretiyle red ihtimallerini belirlemiştir.(Lilliefors, A.g.k) Bulunan sonuçların Kolmogorov ' un verdiği tablo değerlerine göre daha hassas olduğunu ortaya koymuştur.

Şimdi bir örnek üzerinde Liliefors testinin nasıl uygulanacağını gösterelim.

Tablo 1 T'nin Kritik Değerleri Tablosu

Örnek Hacmi N	D=MaxI F*(X) - Sn(X) için anlam seviyesi				
	.20	.15	.10	.05	.01
4	.300	.319	.352	.381	.417
5	.285	.299	.315	.337	.405
6	.265	.277	.294	.319	.364
7	.247	.258	.276	.300	.348
8	.233	.244	.261	.285	.331
9	.223	.233	.244	.271	.311
10	.215	.224	.239	.258	.294
11	.206	.217	.230	.249	.284
12	.199	.212	.223	.242	.275
13	.190	.202	.214	.234	.268
14	.183	.194	.207	.227	.261
15	.177	.185	.201	.220	.257
16	.173	.182	.205	.213	.250
17	.169	.177	.189	.206	.245
18	.166	.173	.184	.200	.239
19	.163	.169	.179	.195	.235
20	.160	.166	.174	.190	.231
25	.149	.153	.165	.180	.203
30	.131	.136	.144	.161	.187
30'dan büyük	.736	.768	.805	.886	1.031
	----- \sqrt{N}	----- \sqrt{N}	----- \sqrt{N}	----- \sqrt{N}	----- \sqrt{n}

Örnek : Büyük bir süpermarketler zincirine sahip olan bir firmanın yöneticileri bir malın faturalama süresi araştırmasında 7 ayrı mağaza için (dk. olarak) şu sonuçları bulmuşlardır: 51,50,45,53,46,49,47. Bu örneğin alındığı ana kütle için norm. l dağılıp dağılmadığını araştıralım. Bunu için verilen bilgileri küçükten büyüğe doğru sıralayarak Tablo 2'yi oluşturalım:

Tablo 2

i	X_i	$t_i = (X_i - \bar{X})/S$	S_i^*	F_i^*	$ F_i^* - S_i^* $
1	45	-1.40	1/7=0.1429	0.0808	0.0621
2	46	-1.02	2/7=0.2857	0.1539	0.1318
3	47	-0.65	3/7=0.4286	0.2578	0.1708
4	49	0.11	4/7=0.5714	0.5438	0.0276
5	50	0.48	5/7=0.7143	0.6844	0.0299
6	51	0.86	6/7=0.8571	0.8051	0.0520
7	53	1.61	7/7=1.0000	1.0000	0.0000

$\bar{X}=48.71$

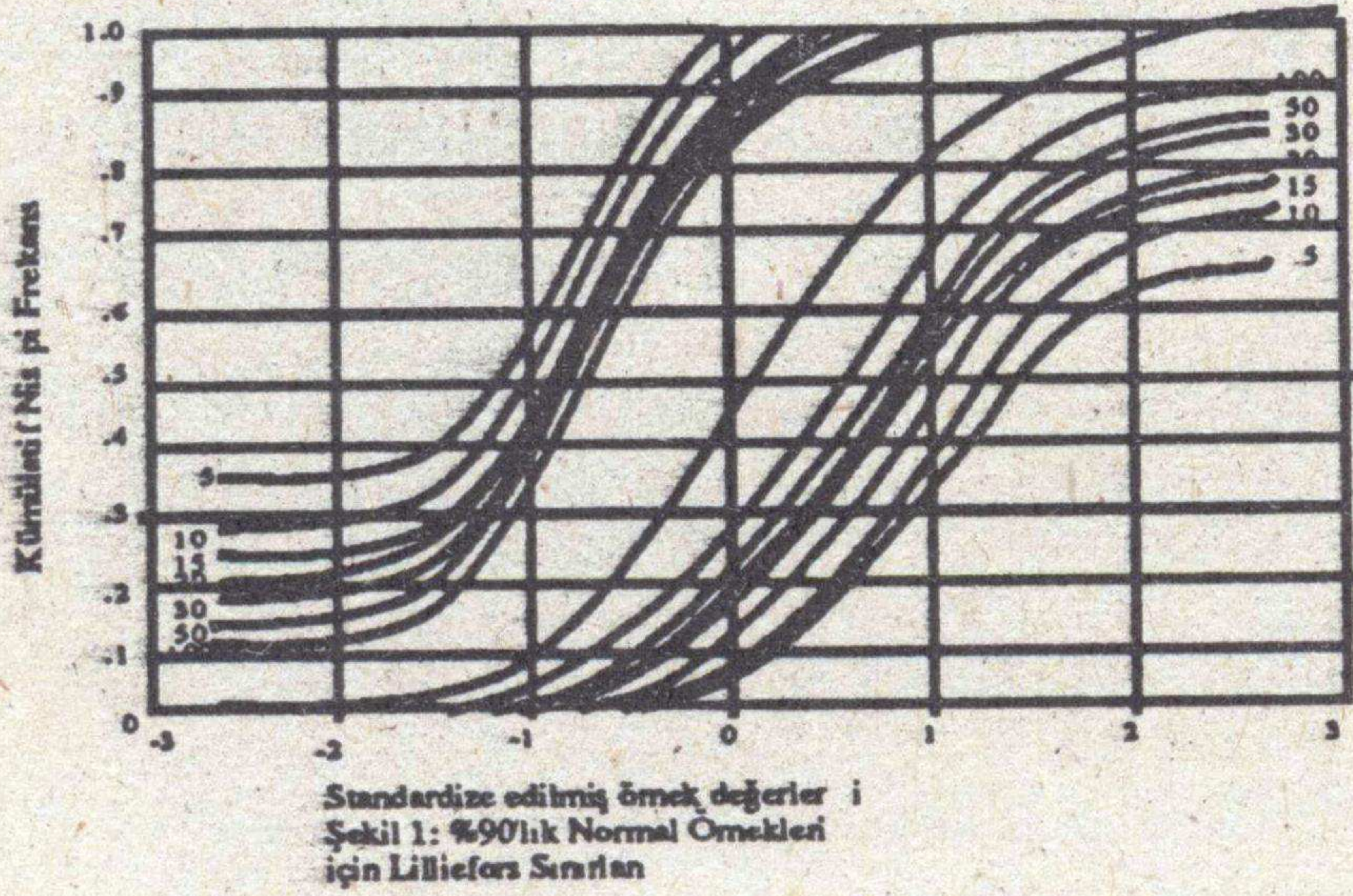
$S=2.66$

Burada sözkonusu fark değeri ya da hesaplanan değer, gözlenen kümülatif frekanslarla bunlara karşılık gelen teorik kümülatif ihtimaller (F_i^*) arasındaki en yüksek mutlak farka sahip değerdir. Gözlenen kümülatif frekansları belirlemek için, N gözlemlili örneğin gözlemlerini küçükten büyüğe doğru sıralamak gerekir. Sıralı değerlerden ilki X_1 için kümülatif frekans $S_1 = 1/N$, ikinci değer X_2 için $S_2 = 2/n$, X_3 için $S_3 = 3/n$ v.d olacaktır. Böylece S_i ler gözlenen kümülatif frekanslar olmaktadır. S_i lerle ilgili teorik kümülatif ihtimaller F_i^* 'leri belirlemek için, önce ortalama \bar{X} ve standart sapma s , örnek gözlemlerinden hesaplanır; sonra X_i asli değerleri standartlaştırılır, yani $t_i = (X_i - \bar{X})/s$ ler belirlenir. F_i^* değerleri Ek 1 ve Ek 2 de verilen normal dağılım tablolarından (t_i 'nin negatif değerleri için Ek 1 den; pozitif değerleri için Ek 2 den) okunur. $|F_i^* - S_i|$ değerlerini hesaplayıp bunlar arasından en yüksek değerli olanı seçmek ve bunu $\alpha = \%20, \%15, \%10, \%5$ ve $\%1$ gibi bir anlamlılık seviyesi ve örnek hacmi N'ye göre bulunacak tablo değeri ile karşılaştırmak testin son adımını oluşturur. Bu işlemler tablo 2 de gösterilmiştir. Tablo 2'nin son sütununda mutlak maximum farkın 0.1708 olduğu görülür. Son olarak bu fark tablo 1 den bulunacak kritik bir

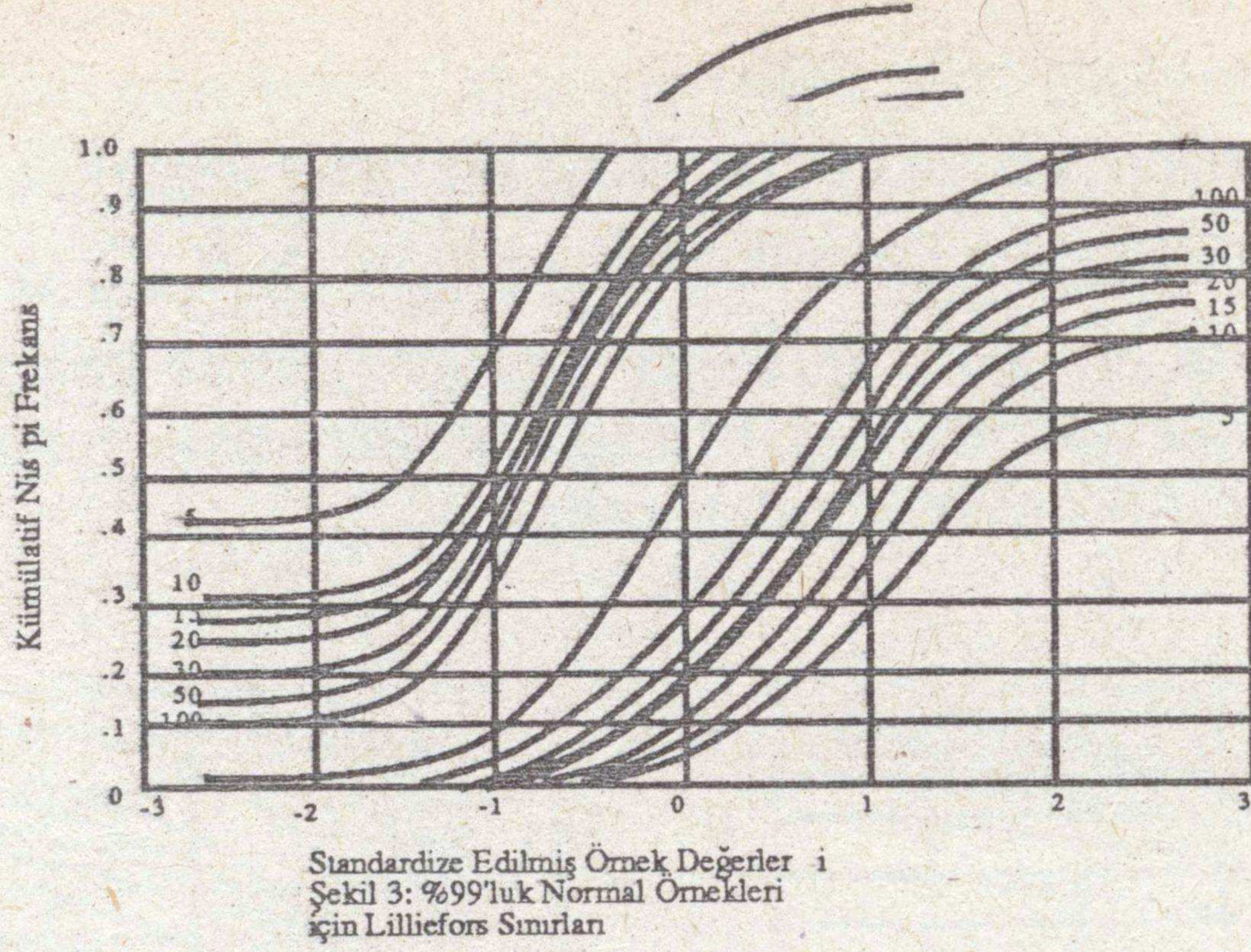
değerle karşılaştırılarak karara varılır. O halde $T_h = 0.1708 < T_{tab} = 0.300$ olduğundan H_0 'ın (örneğin normal dağılmış bir ana kütlede geldiği şeklinde kurulmuş sıfır hipotezinin) kabulüne karar verilir.

3.LILLIEFORS TEST'İNE GRAFİK YAKLAŞIM

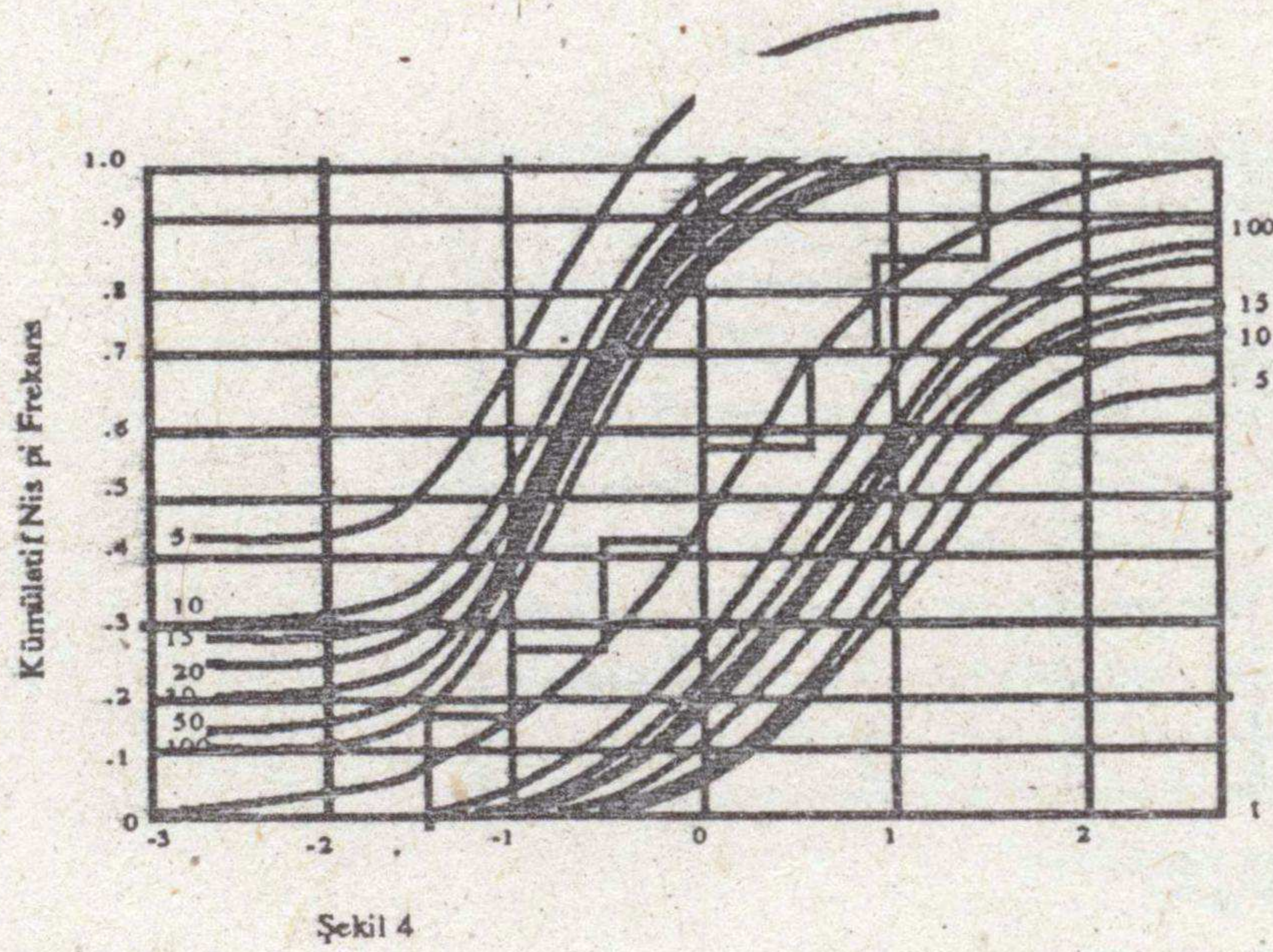
Lilliefors'un bu testini teorik ihtimaller F_i^* 'lere ihtiyaç olmadan grafikler yardımıyla gerçekleştirmek de mümkündür. Bunun için Lilliefors'un yukarıda belirttiğimiz normal dağılım ve üstel dağılımda verdiği tablo değerlerinden yararlanılarak çizilen kümülatif frekans eğrileri kullanılır. Lilliefors'un normal dağılım ve üstel dağılım için yaklaşık olarak verdiği kritik değerleri (üstel dağılım için yaklaşık değerler daha sonra Durbin tarafından kesin olarak belirlenmiştir. (Durbin, 1975: 5-22)) kullanarak kümülatif frekans eğrileri ilk defa Ronald L. Iman tarafından çizilmiştir. R.L. Iman bu grafikleri çizerek, sadece $t_j = (X_j - \bar{X})/s$ formülüyle hesaplanan standardize örnek gözlemlerini hesaplayarak Şekil 1 ve 3 arası verilen (seçilmiş α değerlerine bağlı) grafiklerden biri üzerinde ampirik dağılım fonksiyonunu belirtmek suretiyle Lilliefors testinin yapılabileceğini göstermiştir. (Iman, 1982:109-112)



Sözgelimi bir normal dağılım hipotezinin belli bir α güven seviyesinde reddilebilmesi için, (t_j, s_j) koordinatlarından birisinin örnek hacmi N' ye göre verilmiş iki eğri dışında kalması gerekmektedir. Grafik üzerinde bulunmayan N değerli örnek hacimleri için enterpolasyon (doğrusal) yapılabilir. Fakat örnek hacmi N için tam değer yoksa ondan sonra gelen değere bakılabilir.



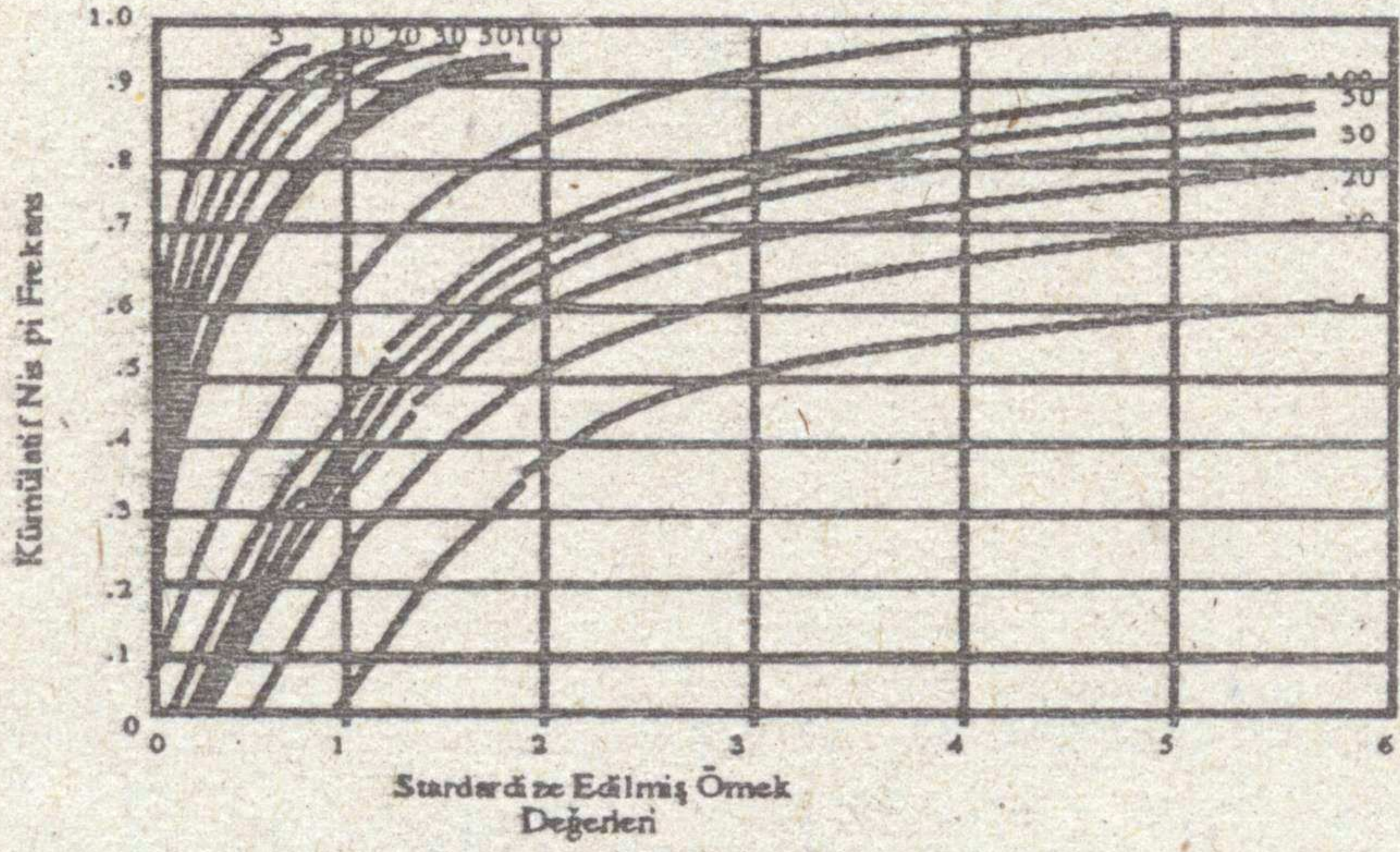
Mesela bizim örneğimizde $N=7$ olduğu için $N=10$ eğrileri dışında nokta olup olmadığına bakılır. Şekil 4 de örneğimizin Lilliefors testi grafiği yer almaktadır. Görüldüğü gibi (t_i, s_i) koordinatları noktalarının hepsi %95 güven seviyesinde $N=10$ eğrileri arasında bulunmaktadır. O halde X 'in normal dağıldığı şeklindeki H_0 hipotezi reddedilemeyecektir.



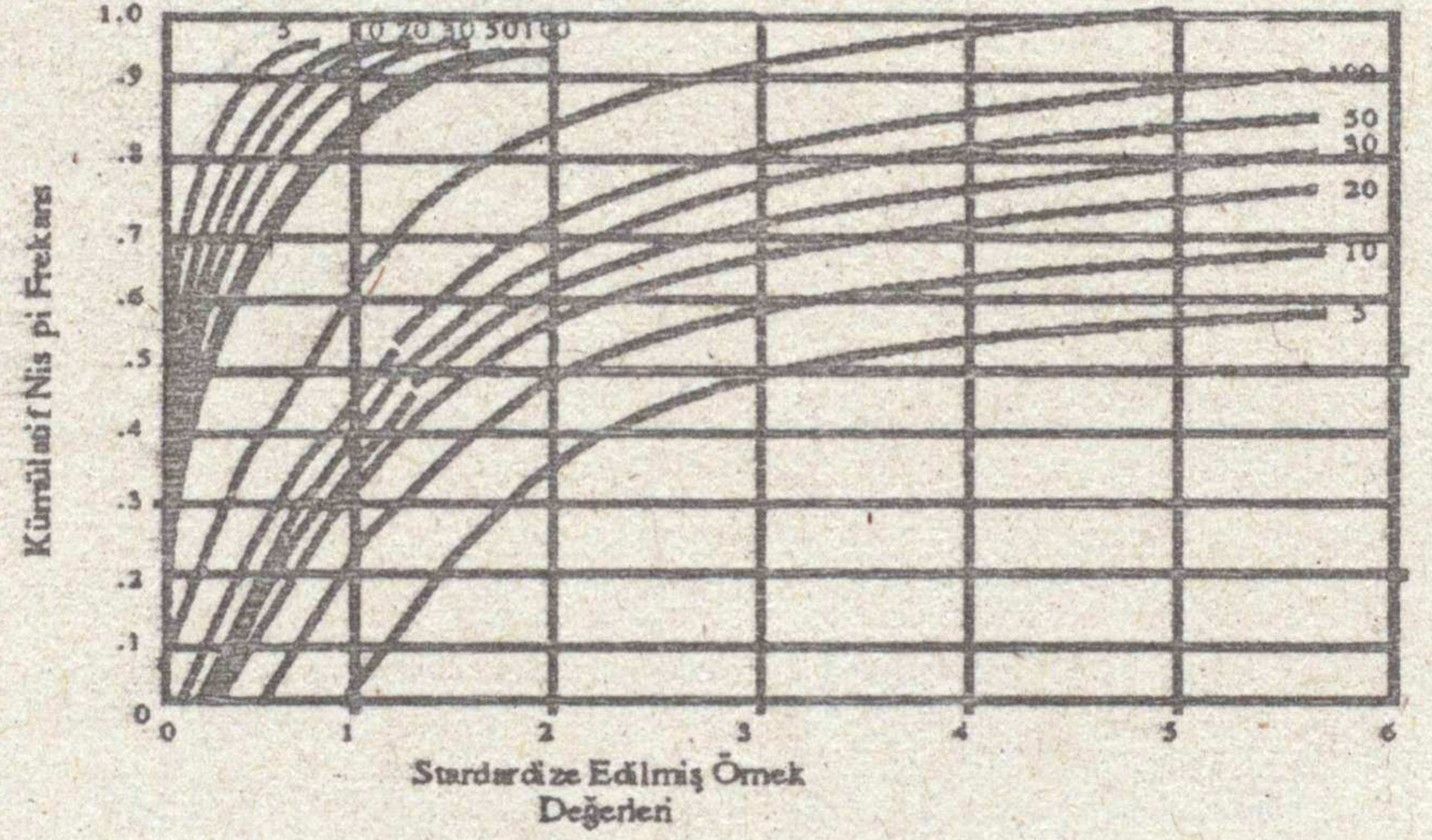
4. Üstel Dağılımlara Lilliefors Testi Uygulamak İçin Kullanılan Grafikler

Lilliefors testi üstel dağılımlar için genişletilmiş ve T istatistiği için yaklaşık kritik değerler yine bir Monte Carlo Simulasyonu yapılarak Lilliefors tarafından verilmiştir (Lilliefors, 1969:387-389). Gerçek değerler ise Durbin tarafından hesaplanmıştır. θ bilinmeyen bir parametre olduğunda T istatistiğinin hesabında kullanılan $F^*(x)$ dağılım fonksiyonu üstel dağılım için $F^*(x) = 1 - e^{-x/\theta}$ dur. Burada da örnek verilerininin standardize edilmesi gerekir. Standardize işlemi ise $X_i^* = X_i / \bar{X}$ şeklinde yapılır. X_i^* için

amprik dağılım fonksiyonu seçilmiş bir α seviyesine bağlı olarak 5 ila 7 arasındaki şekillerden biri ile çizilir. Yine bir üstel dağılım hipotezinin belli bir α güven seviyesinde reddedilebilmesi için (X_i^*, S_i) koordinatlarından birinin örnek hacmi N 'e göre verilmiş iki eğri dışında kalması gerekmektedir. Bunun yanında normal dağılım için sözkonusu ayrıntılar burada da geçerlidir. Şimdi bir örnekle bunu görelim:

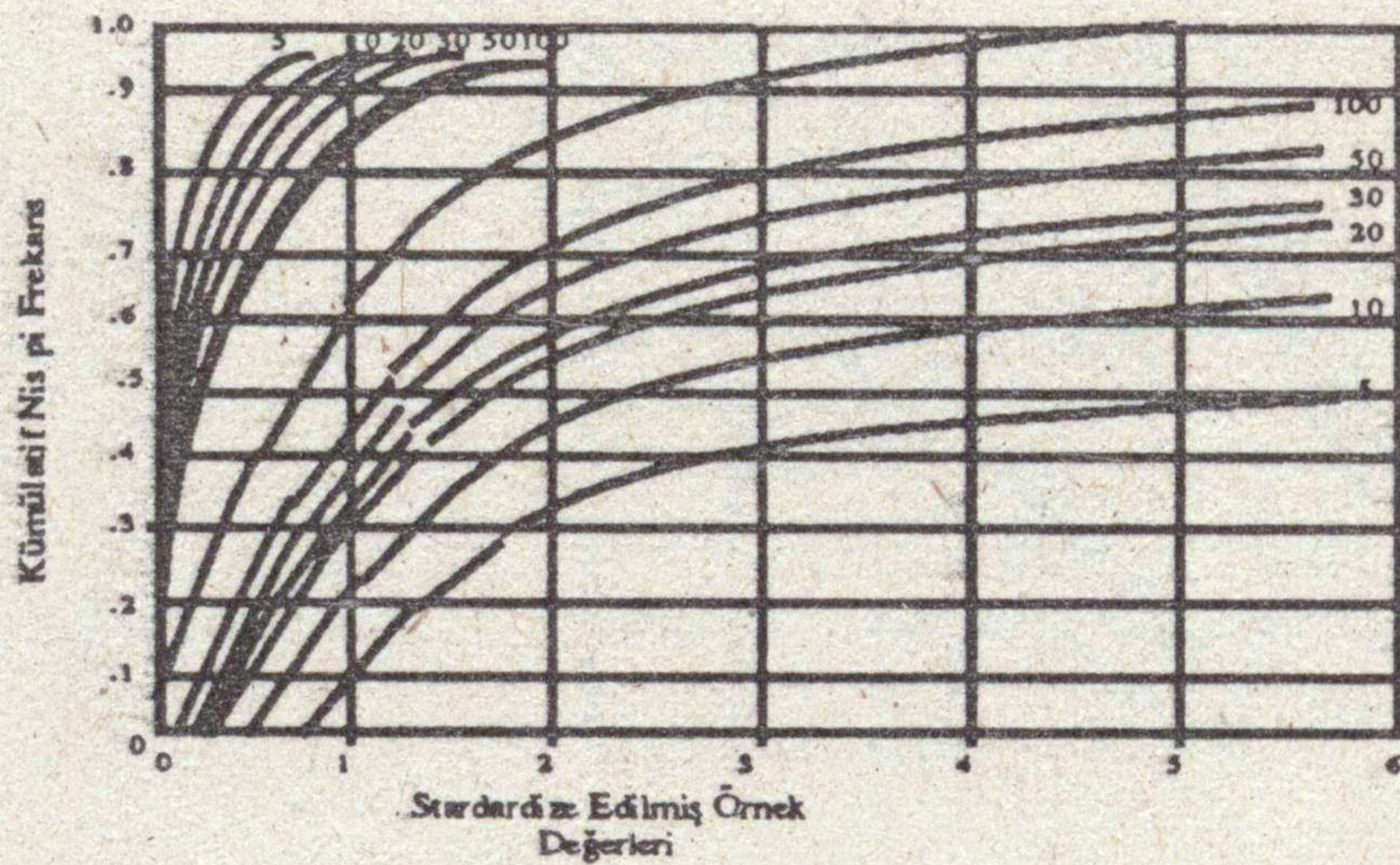


Şekil 5: %90 lık Üstel Örnekler İçin Lilliefors Sınırları



Şekil 6: %95 lık Üstel Örnekler İçin Lilliefors Sınırları

Bir telefon santralında yapılan şehirlerarası telefon görüşmeleri arasında geçen dakika ile ölçülen zaman verilerinin kümesi aşağıda verilmiştir (CONOVER, 1980:350).



Şekil 7: %99 lık Üstel Örnekler İçin Lilliefors Sınırları

$$X_i: 6 \ 2 \ 8 \ 6 \ 1 \ 11 \ 10 \ 3 \ 4 \ 6 \quad \bar{X} = 5,7 \text{ dir.}$$

standardize edilmiş değerler ise

$$X_i^* = X_i / 5,7 \text{ aşağıdaki gibidir.}$$

$$X_i^* = 1,05 \ 0,35 \ 1,40 \ 1,05 \ 0,18 \ 1,93 \ 1,75 \ 0,53 \ 0,70 \ 1,05$$

Bu standirdize edilmiş değerler için amprik dağılım fonksiyonu şekil 8'de %5 Lilliofers testi için çizilmiştir. Amprik dağılım fonksiyonu $N=10$

eğrileri arasında kaldığından dolayı verilerin üstel dağılıma sahip olduğu kabul edilir.



Telefon konuşmaları arasında geçen zaman için bir üstel dağılım testi.

5. Lilliefors Testi İçin Çeşitli Uygulamalar

Bu kısımda Lilliefors testinin gerek normal dağılımlar gerekse üstel dağılımlar için uygulandığı çeşitli örneklerden bahsedilecektir. Konunun tam anlamıyla hazmedilebilmesi için değişik uygulamaları örneklerle görmek yararlı olacaktır.

Örnek 1 Oto lastiği üretiminde ihtisaslaşmış bir firma yeni bir lastik çeşidi üreterek birkaç yıl önce piyasaya sürmüştür. Firmanın iş hacmi içinde bu lastik çeşidinin oranı şöyledir;

YIL	İş Hacminde İlgili Lastiğin % si
1984	25
1985	8
1986	20
1987	25
1988	28

Firma yöneticisi ; 1989 yılında bu lastiğin iş hacmindeki % sini tahmin etmek istemektedir. (İşletmenin lastik piyasasındaki gelişme oranı, ticaret politikası ve rakiplerinin ticaret politikalarının değişmediği varsayımı ile)

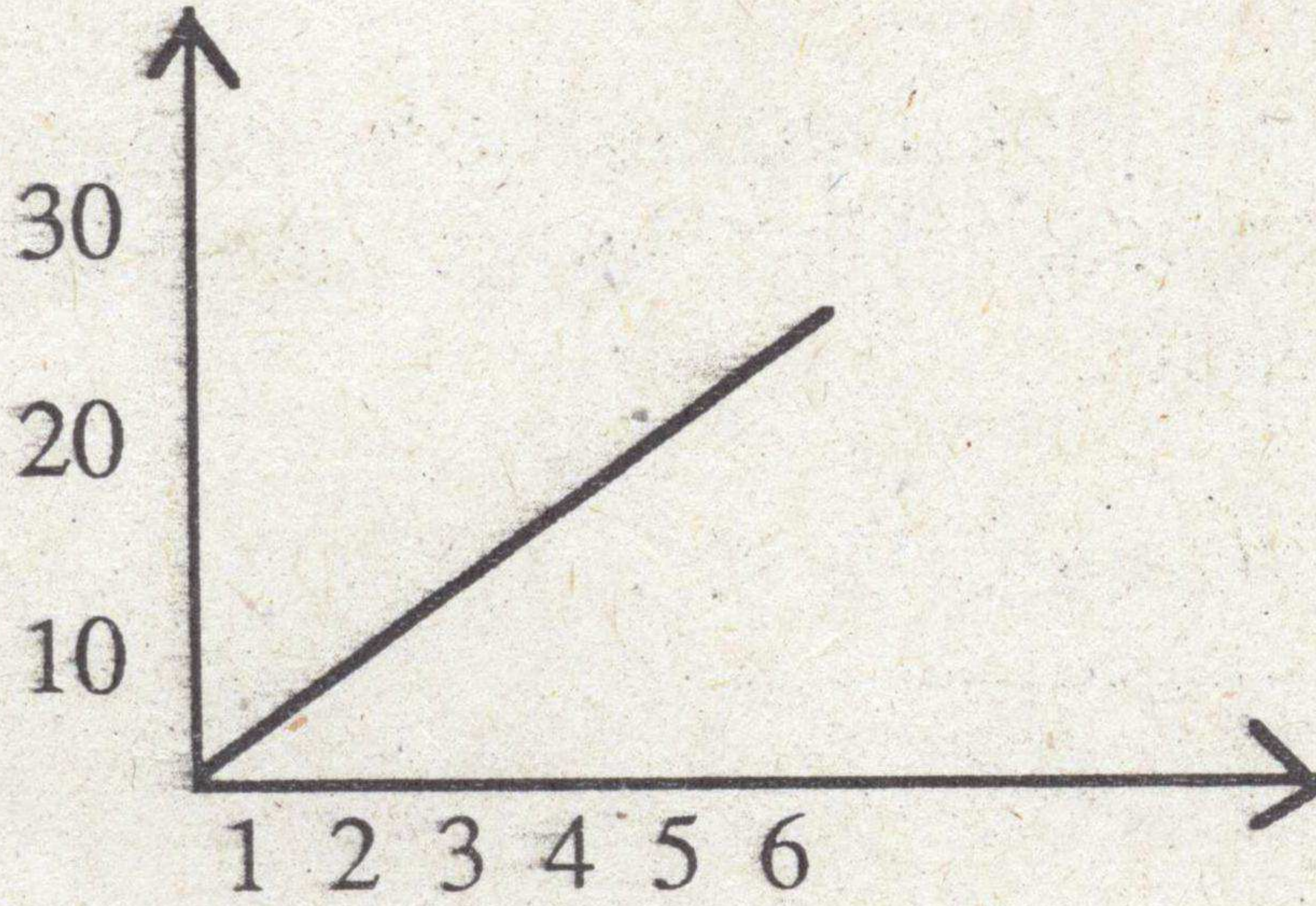
- Grafiği çizerek regresyon denklemini bulunuz.
- Belirlilik ve korelasyon katsayılarını hesaplayınız.
- İş hacmi içinde 1989 yılının oranını tahminleyiniz.

d) Regresyon hata teriminin standart hatasını hesaplayınız.

e) Hata terimlerinin Normal dağıldığı hipotezinin geçerliliğini %95 güven seviyesinde test ediniz. (Giard, 1985, 385)

Tablo 3

i	X _i	Y _i	X _i ²	Y _i ²	X _i Y _i	Ŷ _i	e _i	e _i /σ
1	1	2.5	1	6.25	2.5	3.1	+0.6	+0.28
2	2	8	4	64	16	9.9	+1.9	+0.90
3	3	20	9	400	60	16.7	-3.3	-1.56
4	4	25	16	625	100	23.5	-1.5	-0.71
5	5	28	25	784	140	30.3	+2.3	+2.3
	15	83.50	55	1879.25	318.5	83.5	0	0
5	3	16.70	11	376.85	63.7	16.70	0	0



Şekil 9

$$V(x) = 11 - (3)^2 = 2$$

$$V(y) = 375,85 - (16,7)^2 = 96,96$$

$$\text{Cov}(x,y) = 63,70 - 3 \cdot 16,70 = 13,6$$

a) Denklem : $y = ax + b$ den

$$a = \text{Cov}(x,y) / V(x) = 13,6 / 2 = 6,8$$

$$b = y - ax = 16,7 - 6,8.3 = - 3,7$$

$$y = 6,8 x - 3,7$$

$$b) r^2 = [Cov(x,y)]^2 / V(x).V(y) = 13,6.13,6 / 2.96,96 = 0,9536$$

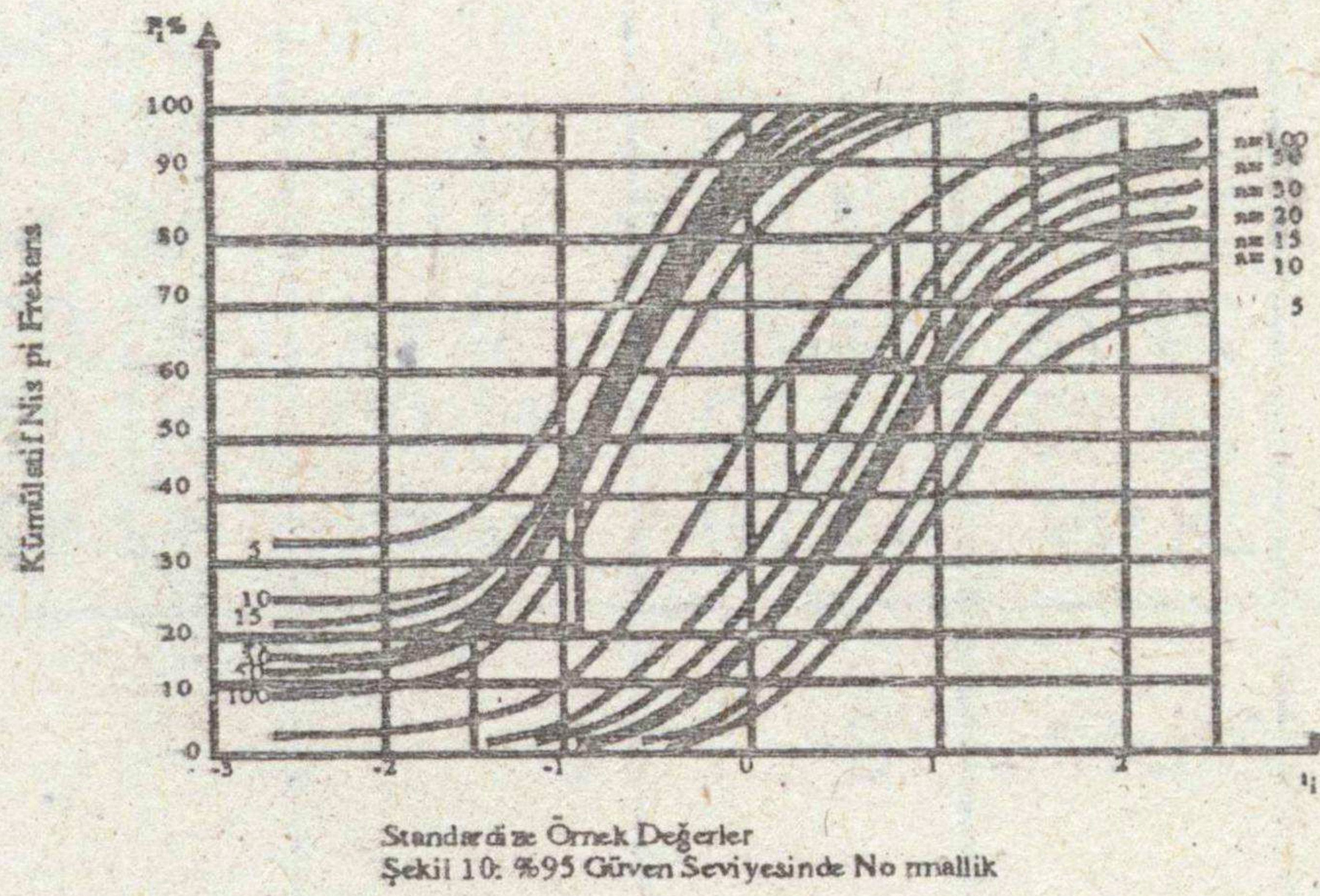
$$r = 0,9766$$

$$c) y = 6,8.6 - 3,7 = 37,1\%$$

$$d) \sigma^2 = (1-r^2).V(y) = (1-0,9538).96,96 = 4,4796$$

$$\sigma = 2,1166$$

e) Şekil 10'da hata terimlerinin normallik varyansının kabul edilebilirliğini görüyoruz. Çünkü noktalar $n = 5$ için verilen eğrilerin arasında kalmaktadır.



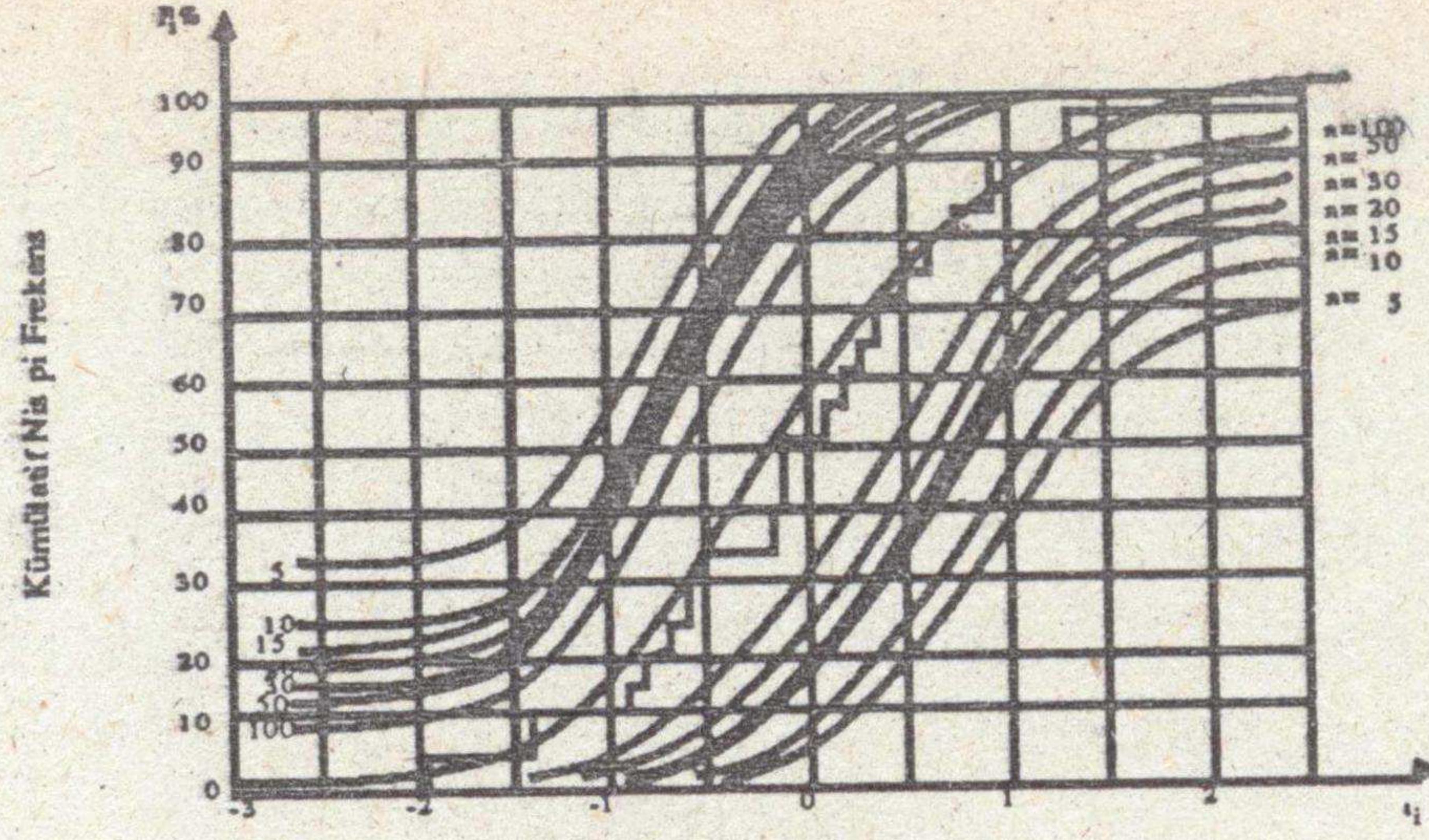
Örnek 2 Bir banka 20 büyük müşterisi arasında bir anket yaparak onların aylık ortalama iş hacmi X_i ve kısa vadeli mevduat tutarları Y_i hakkında aşağıdaki tabloda verilen bilgileri elde etmiştir. (X_i : Milyon TL., Y_i : Onbin TL.)

TABLO 4

i_j	X_i	Y_i	\hat{Y}_i	e_i	$t_i=e/\sigma_r$	$t_i(\text{Sıralı})$	f_i
1	25	4.5	5.75	+1.25	+0.54	-1.93	0.05
2	26.3	5.2	6.91	+1.71	+0.74	-1.40	0.10
3	28.5	9.4	8.88	-0.52	-0.22	-0.95	0.15
4	28.7	8.4	9.06	+0.66	+0.28	-0.73	0.20
5	29.2	9.2	9.50	+0.30	+0.13	-0.74	0.25
6	30.3	9.0	10.49	+1.49	+0.64	-0.69	0.30
7	33.4	14.5	13.25	-1.25	-0.54	-0.60	0.35
8	34.0	15.5	13.79	-1.71	-0.73	-0.54	0.40
9	36.2	15.2	15.76	+0.56	+0.24	-0.22	0.45
10	37	15.5	16.47	+0.97	+0.42	-0.10	0.50
11	37.8	18.8	17.19	-1.61	-0.69	+0.13	0.55
12	40.1	22.5	19.24	-3.26	-1.40	+0.24	0.60
13	41.3	21.7	20.31	-1.39	-0.60	+0.28	0.65
14	41.8	21.0	20.76	-0.24	-0.10	+0.42	0.70
15	43.5	24.0	22.28	-1.72	-0.74	+0.54	0.75
16	45.5	21.0	24.07	+3.07	+1.32	+0.64	0.80
17	46.0	29.0	24.51	-4.49	-1.93	+0.74	0.85
18	46.3	27.0	24.78	-2.22	-0.95	+1.00	0.90
19	46.9	23.0	25.32	+2.32	+1.00	+1.32	0.95
20	50.0	22.0	28.09	+6.09	+2.62	+2.62	1.00
	747.8	336.4	336.40	0	0		

Lilliefors testini kullanarak hataların normalliği %95 güven seviyesinde test edelim. Bunun için standardize edilmiş sapmaları hesaplamak gerekmektedir.

Tablo 4 de bu $t_i = e_i / \sigma_r$ sapmaları ve diğer değerler hesaplanarak verilmiştir. Burada $e_i = y_i - \hat{y}_i$ ve $\hat{y}_i = ax_i + b$ dir. Şekil 11 de verilen grafikte normallik hipotezinin tamamen kabul edilebilir olduğu görülmektedir. Çünkü (t_i, f_i) noktaları $N=20$ hacimli örnekler için %95 güven seviyesinde hazırlanmış eğrilerin arasında kalmaktadır.



Şekil 11: %95 Güven Seviyesinde Normallik Varsayımı İçin Grafik Testi

Örnek 3 Bir firmanın enflasyon tesirinden arındırılmış olarak yıllara göre iş hacmi (Milyon TL.) olarak aşağıda verilmiştir.

Tablo 5

x_{it}	1980	81	82	83	84	85
X_i	126	115	165	192	176	237

Aşağıdaki modellerden hangisinin daha iyi olduğunu belirleyelim ve her model için hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımını Lilliefors testine tabi tutalım : $\alpha = 0.05$

a) $X_t = a_t + b$ b) $X_t = A.B^t$

Önce a) modelini inceleyelim. Buradan Tablo 6'yı teşkil edersek : E.K.K.Y'den yararlanılarak

$$X_t = 92 + 21,857t$$

$$r^2 = 0,8376$$

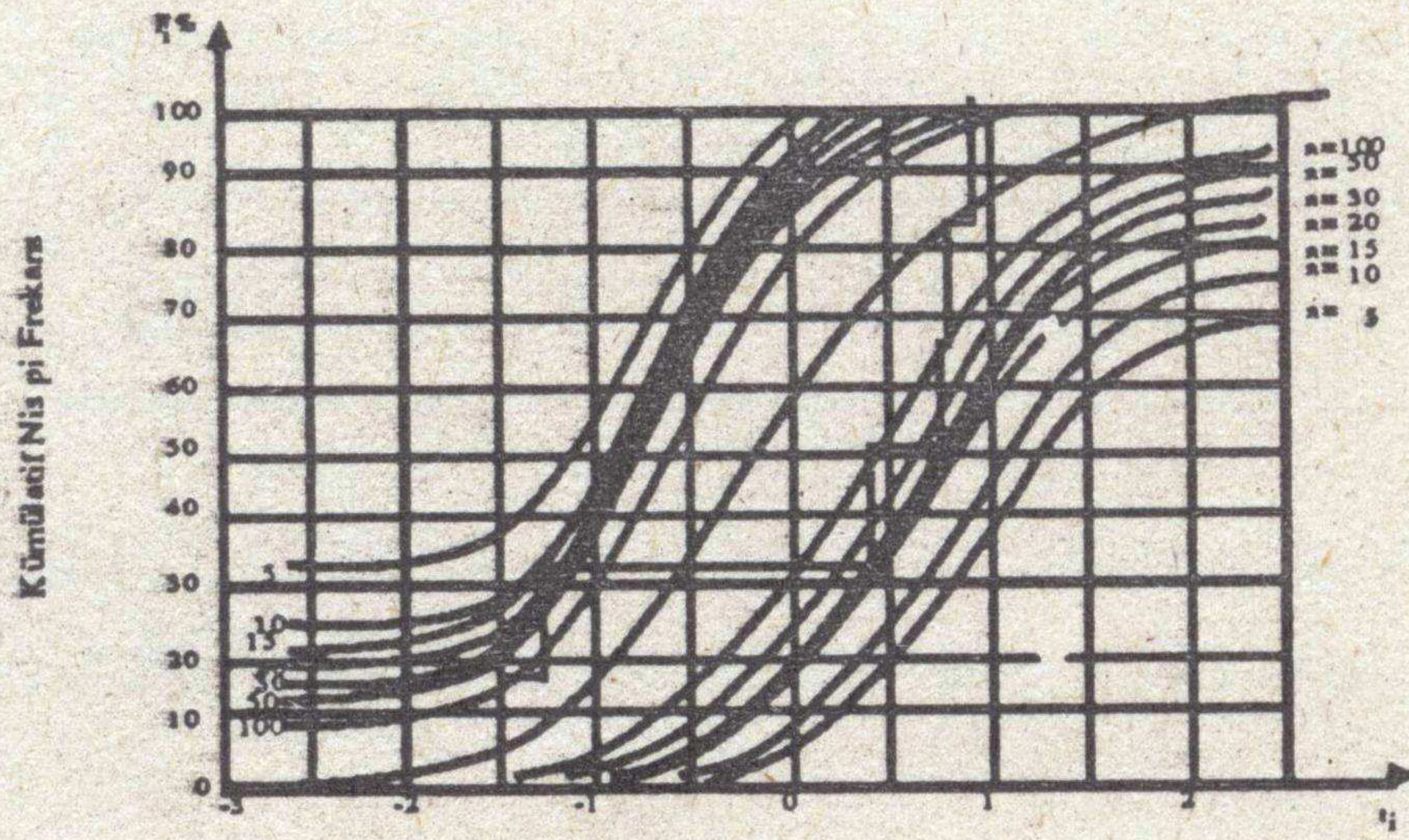
$$\hat{\sigma}_r = 16,45 \text{ elde edilir.}$$

Tablo 6

t	X_i	\hat{X}_i	$e_t = X_t - \hat{X}_t$	e / G_r
1	126	113.14	12.14	+0.74
2	115	135.71	-20.71	-1.26
3	165	157.57	7.43	+0.45
4	192	179.43	12.57	+0.76
5	176	201.29	-25.29	-1.53
6	237	223.14	13.86	+0.84
	1011	1011.0	0	0

Tablo 6 daki noktaları şekil 12 deki grafikte yerleştirirsek bu noktaların $N = 10$ ($N = 6$ dan hemen büyük olan mevcut değer) örnek hacmine ilişkin eğrilerin arasında bulunduğunu görürüz. Şu halde normallik hipotezi reddedilmeyecektir. (Bu arada şunu da açıklamış olalım ki, şekilde her ne kadar eğriler sınırları kesiyorsa da bu önemli olmayıp yalnızca pratik olarak gözlemlenen frekanslar ile teorik frekanslar arasındaki uzaklıklar gözönünde bulundurulur.)

Şunu ifade etmekte yarar vardır : Sapmaların bu normallik hipotezi analizi lineer regresyonun tesadüfi modeliyle verilerin analizini izlemeyi ve muhtemelen güven aralığıyla tahminleri doğru hesaplamayı mümkün kılmaktadır.



Şekil 12: %95 Güven Seviyesinde Normallik Varsayımı İçin Grafik Testi

(Modelin Sapmaları $X_t = 92 + 21,857t$)

b) modelini incelersek bu bir yarı logaritmik model olup $\ln X_t = 4,63849 + 0,13106t$ ve buradan da

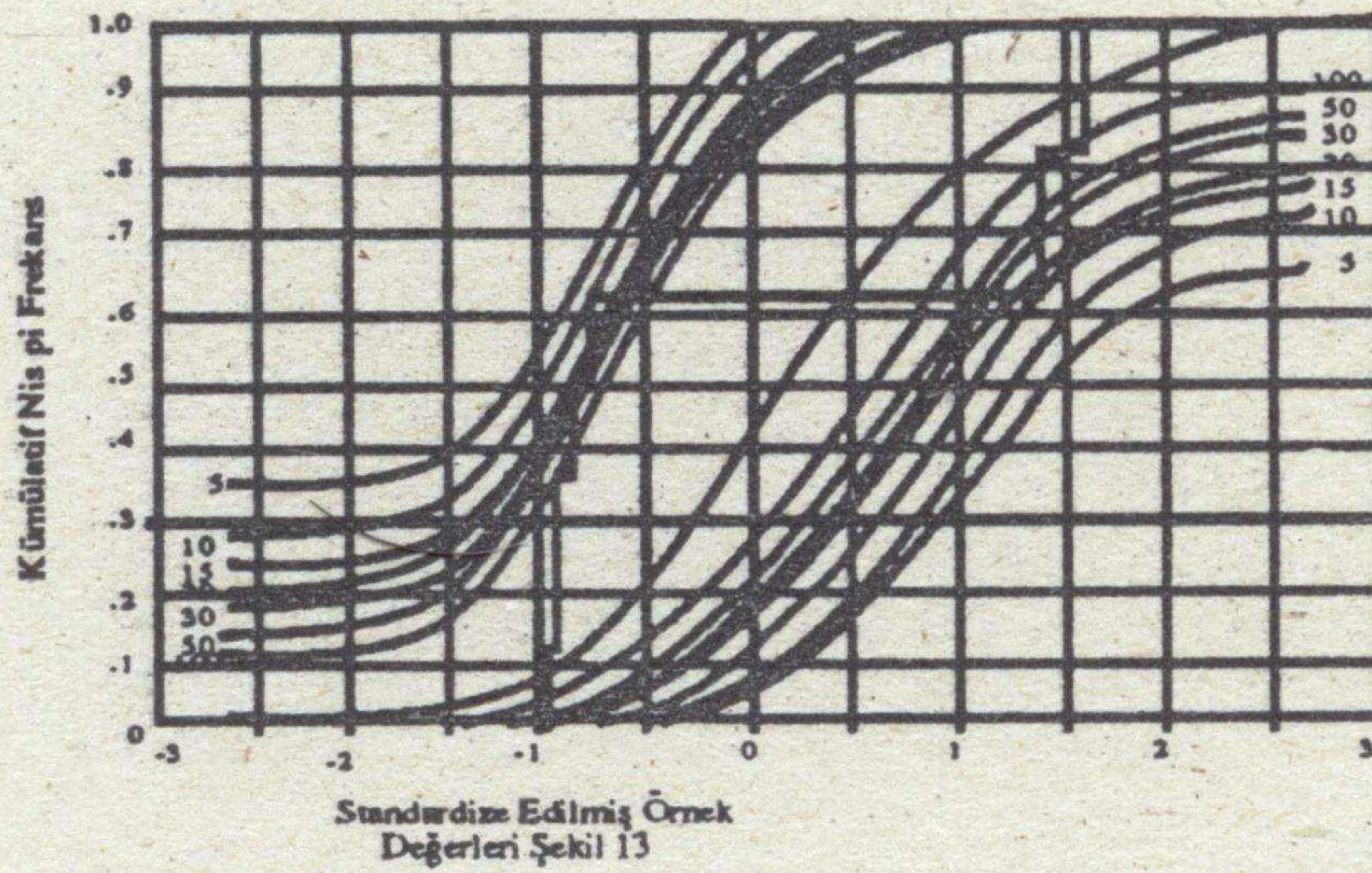
$X_t = 103,4 \cdot e^{0,13106t}$ elde edilir. Bulunan bu denkleme göre X_t 'nin tahminlerini yeniden oluşturduktan sonra, $\sigma_e = 13,12$ standart hatası elde edilir. Aynı şekilde $r^2 = 0,8965$ bulunur ki bu değer aritmetik model için bulunan değerden daha büyük olup, dolayısıyla standart hatasının küçüklüğünü ve determinasyon katsayısının büyüklüğü kriteri nazara alınarak yarı logaritmik modelin doğrusal modele göre daha üstün olduğu sonucuna varılır.

Yarı logaritmik modelin sapmalarının normallik hipotezini test etmek için standardize hataların hesaplanması gerekir. Bu hatalar E_t / S olarak Tablo 7'nin son kolonunda gösterilmiştir.

Tablo 7

S_i	t	X_t	$\ln \hat{X}_t$	$\log \hat{X}_t$	$\hat{X}_t = e^{\ln \hat{X}_t}$	$e_t = X_t - \hat{X}_t$	$E_t = \ln \hat{X}_t - \ln X_t$	E_t / S
0.16	1	126	4.83628	4.76955	117.87	8.13	-0.06673	-0.67
0.33	2	115	4.74493	4.90064	134.37	-19.37	+0.15568	+1.56
0.50	3	165	5.10595	5.03167	153.19	11.81	-0.07428	-0.74
0.66	4	192	5.25750	5.16273	174.64	17.36	-0.09477	-0.95
0.83	5	176	5.17048	5.29379	199.10	-7.10	+0.12331	+1.23
1	6	238	5.46806	5.42485	226.98	10.03	-0.04321	-0.43
		1011				20.96	0	0

$N=10$ ve %95 güven seviyesinde çizilmiş şekil 13 teki grafikte hesaplanan noktalar yerleştirilecek olursa gözlemlerimizin eğrilerin sınırları içerisinde kaldığı görülecektir. O halde normallik hipotezi reddedilmeyecektir.



6. Sonuç :

Bu makalede anlatılan ve çeşitli uygulamaları gösterilerek tanıtılan Lilliefors Testi normal ve üstel dağılımları test etmek için gayet kullanışlı ve kolay bir yol sağlamaktadır. Ayrıca son kısımda verilen grafik yöntem istatistikçiler için kullanım kolaylığı sağlamakta ve Ki-Kare uygunluk test-

leriyle birlikte ortaya çıkabilen bazı hataları izale etme imkânı vermektedir. Son olarak burada tanıttığımız Lilliefors testi ile diğer uygunluk testlerinin güçlerini mukayese etmek için araştırmacılara kaynaklar kısmında verdiğimiz Lilliefors (1967 ve 1969); Shapiro, Wilk ve Chen (1968); Stephens (1974); ve La Brecque (1977)'un makalelerini tavsiye ederiz.

THE GRAPHIC AND COMPARE TESTS OF LILLIEFOR'S FOR GOODNESS OF FIT AND APPLICATIONS OF THEIRS TO DISTRIBUTIONS AT VARIOUS CASES

The standart tables wich are using for Kolmogorov-Smirnov test are valid for the controlling the set of sample Whether it comes from full determined continues distribution. If it's necessary to estimate one or more parameters from sample, those tables couldn't be sufficient. Especialy, if we have to estimate mean and variance from the sample, have another table calculated by Lilliefors by using Monte-Carlo Simulation techniques for the testing the set of sample whether it came from normal or exponantiel population Later, Iman is developed the graphics of table values by drawing their curves. The aims of this Study is to explain those tables, graphics and their applications.

KAYNAKÇA

BIRNBAUM, Z.W. (1952); "Numerical Tabulation Of Distribution-Kolmogorov's Statistics For Finite Sample Size ;" **Journal Of The American Statistical Association**, 47, Sh. 425-441

CONOVER, W.J. (1980); **Practical Nonparametric Statistics** (2nd.ed), New York ; John Wiley.

DURBIN, J. (1975); "Kolmogorov - Smirnov Tests When Parameters Are Estimated With Applications To tests Of Exponentiality And Tests On Spacings" , **Biometrika**, 62, Sh. 5-22.

GIARD, V.(1985) ; "Applique'e a'la Gestion", **Edition Economica**, Paris .

HALAÇ, O. (1982); **İşletmelerde Simulasyon Teknikleri**, İ.Ü.İşletme Fak.Yayın No: 130

IMAN, R.L. (1982); "Graphs For Use With The Lilliefors Tests For Normal And Exponentiality Distributions", **The American Statistician**, May, Vol. 36 , Sh. 109-112

La BRECQUE, J. (1977); "Goodness-Of-Fit Tests Based On Non-linearity In Probality Plots", **Technometrics**, 19, Sh. 293-306.

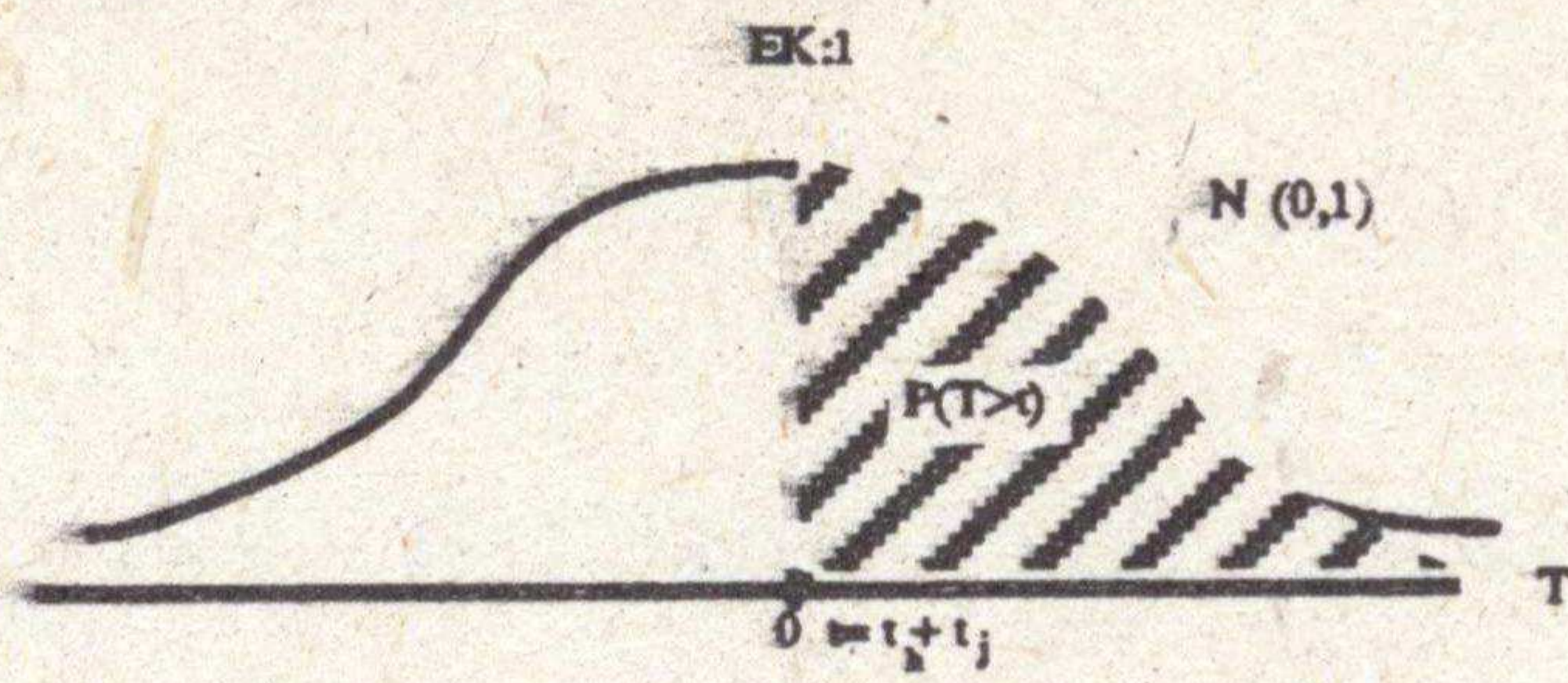
LILLIEFORS, H.W. (1967); "On The Kolmogorov - Smirnov Tests For Normality With Mean And Variance Unknown", **Journal Of The American Statistical Association**, 62, Sh. 399-402.

LILLIEFORS, H.W. (1969); "On The Kolmogorov - Smirnov Tests For The Exponential Distribution With Mean Unknown", **Journal Of The American Statistical Association**, 64 , Sh. 387-389.

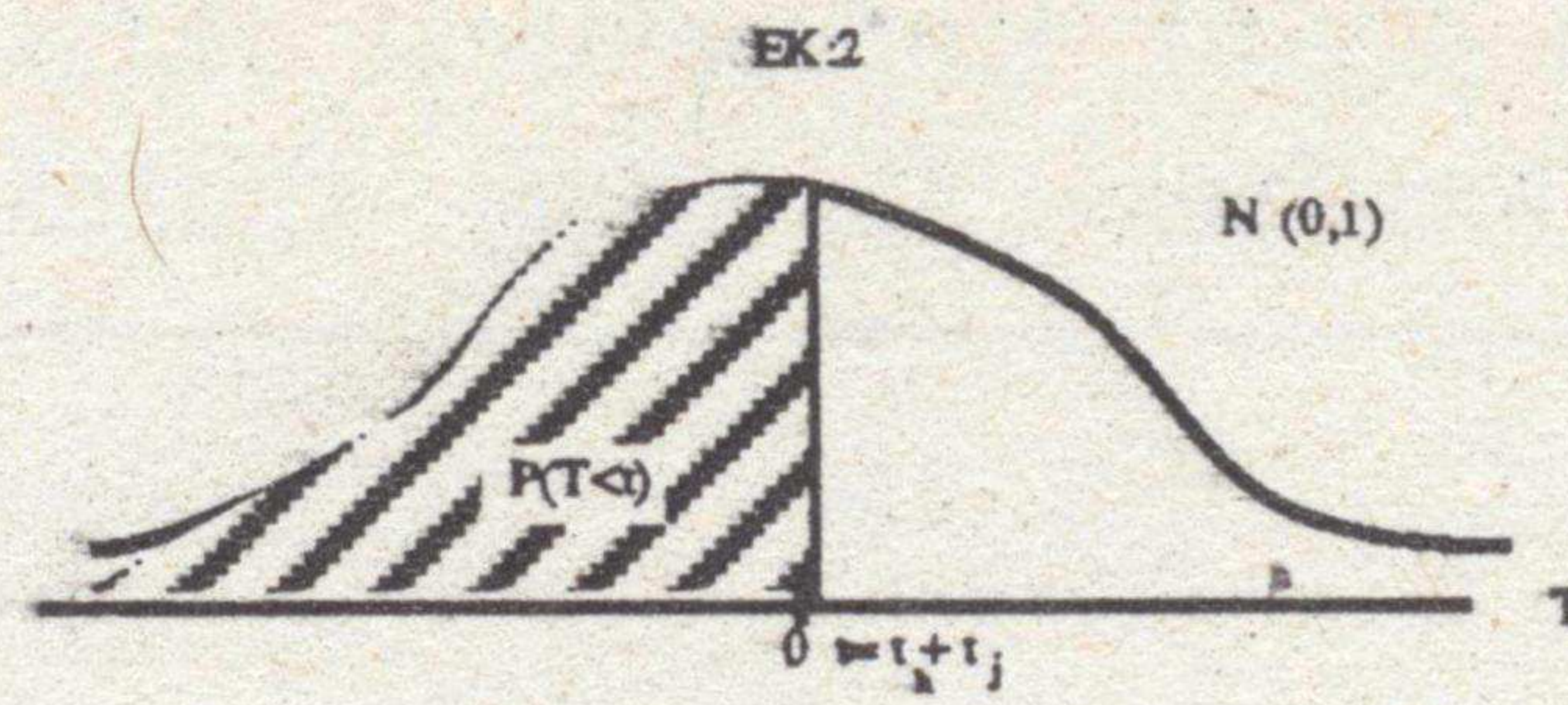
MASSEY, F.J. (1951); "The Kolmogorov-Smirnov Test For Goodness Of Fit" **Journal Of The American Statistical Association**, 46, Sh. 68-78.

SHAPIRO, S.S. (1968); WILK, M.B. ; And CHEN, H.J. ; "A Comporative Study Of Various Tests For Normality", **Journal Of The American Statistical Association**, 63, Sh. 1343-1372.

STEPHENS, M.A. (1974); "EDF Statistics For Goodness Of Fit And Some Comparisons", **Journal Of The American Statistical Association**, 69, Sh. 730-737.



t_j h	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0057	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0043	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0032	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0023	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010



BU DAHA BITMEDI.

t_j	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7290	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9779	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

t	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5	
P(T<t)	0.99865	0.99904	0.99931	0.99952	0.99966	0.99976	0.99981	0.999841	0.999928	0.999968	0.999997