

63656

T. C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

**CEVAP YÜZEYİ YÖNTEMLERİNİN SÜREÇ
İYİLEŞTİRME AMACI İLE KULLANILMASI
ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA**

CENK ÖZLER

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. LEVENT ŞENYAY**

**İZMİR
1997**

YÜKSEKÖĞRETİM KURULU DÖKÜMANTASYON MERKEZİ

TEZ VERİ GİRİŞ FORMU

YAZARIN		Merkezimizce Doldurulacaktır
Soyadı : ÖZLER	Adı : Cenk	Kayıt No:
TEZİN ADI		
Türkçe : Cevap Yüzeyi Yöntemlerinin Süreç İyileştirme Amacı İle Kullanılması Üzerine Bir Araştırma		
Yabancı Dil : An Investigation on the Use of Response Surface Methods for Process Improvement		
TEZİN TÜRÜ: Yüksek Lisans <input type="checkbox"/> Doktora <input checked="" type="checkbox"/> Doçentlik <input type="checkbox"/> Tıpta Uzmanlık <input type="checkbox"/> Sanatta Yeterlik <input type="checkbox"/>		
TEZİN KABUL EDİLDİĞİ		
Üniversite: Dokuz Eylül Üniversitesi		
Fakülte :		
Enstitü : Sosyal Bilimler Enstitüsü		
Diğer Kuruluşlar:		
Tarih:		
TEZ YAYINLANMIŞSA		
Yayınlayan:		
Basım Yeri:		
Basım Tarihi:		
ISBN		

TEZ YÖNETİCİSİNİN

Soyadı, Adı : ŞENYAY, Levent

Ünvanı : Doçent Doktor

TEZİN YAZILDIĞI DİL : TÜRKÇE

TEZİN SAYFA SAYISI: 259

TEZİN KONUSU (KONULARI) :

- 1) Cevap Yüzeği Yöntemlerinin Taguchi'nin Parametre Tasarımına Alternatif Olarak Kullanılması
- 2) Çok Cevaplı Süreçlerin Deneysel Yöntemler İle Optimizasyonu

TÜRKÇE ANAHTAR KELİMELEER :

- 1- Cevap Yüzeyleri
- 2- Deneş Tasarımı
- 3- Kalite İyileştirme
- 4- Çoklu Cevaplar

Başka vereceğiniz anahtar kelimeler varsa lütfen yazınız.

İNGİLİZCE ANAHTAR KELİMELEER : (Konunuzla ilgili yabancı indeks,abstrakt ve thesaurus'ları kullanınız).

- 1- Response Surfaces
- 2- Experimental Design
- 3- Quality Improvement
- 4- Multiple Responses

Başka vereceğiniz anahtar kelimeler varsa lütfen yazınız

- 1- Tezimden Fotokopi yapılmasına izin vermiyorum
- 2- Tezimden dipnot gösterilmek şartıyla bir bölümün fotokopisi alınabilir
- 3- Kaynak gösterilmek şartıyla tezin tamamının fotokopisi alınabilir.

Yazarın İmzası:

Tarih: 16/9/1997



YANLIŞ-DOĞRU TABLOSU

ayfa	Satırı veya Yeri	Yanlış	Doğru
0	(2.6) nolu eşitlik	$f = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right _{x=x_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right _{x=x_0} + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right _{x=x_0}$	$f = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right _{x=x_0} (x_1 - x_{10}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right _{x=x_0} (x_2 - x_{20}) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right _{x=x_0} (x_k - x_{k0})$
5	Kesim 2.4 2. paragraf 2. Satır	tasarıma olan uzaklığın	tasarımın merkezine olan uzaklığın
16	3. satır	r 'inci	d 'inci
16	4. satır	$d(d =$	$\delta(\delta =$
33	3. satır	Kesim 2.3.5'de	Kesim 2.6.5'de
42	10. satır	X_{ui} 'nin	ξ_{ui} 'nin
50	Tablo 2.6'da birinci sütun	n_0 (ortogonal) (eşitlik (2.57))	n_0 (ortogonal) (eşitlik (2.63))
50	Tablo 2.6'da birinci sütun	n_0 (TH) (eşitlik (2.58))	n_0 (TH) (eşitlik (2.64))
68	2. paragraf 4. Satır	değerlerinin	değerlerinden
71	eşitlik (2.85)'in altındaki ilk cümle	bulmanın mümkün olmadığı	bulmanın her zaman mümkün olmadığı
77	10. satır	tasarımlarını ile karşılaştırılmıştır.	tasarımlarını karşılaştırmıştır.
132	eşitlik (3.68)	$y^\lambda = e^{\lambda \log y} \cong 1 + \lambda \log y + \frac{1}{2} \lambda^2 (\log y)^2 + \dots$	$y^\lambda = e^{\lambda \log y} \cong 1 + \lambda \log y + \frac{1}{2} \lambda^2 (\log y)^2 + \dots$

Doktora tezi olarak sunduğum “Cevap Yüzeyi Yöntemlerinin Süreç İyileştirme Amacı İle Kullanılması Üzerine Bir Araştırma” adlı çalışmanın, tarafımdan, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.



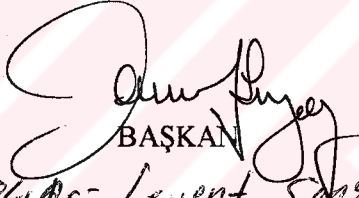
..16/..9../1997


Cenk ÖZLER

TUTANAK

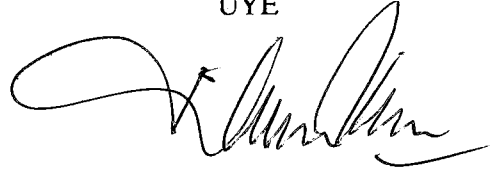
Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsünün/...../1997 tarih vesayılı toplantısında oluşturulan jüri, Lisansüstü Öğretim Yönetmeliği'nin maddesine göre Ekonometri Anabilim Dalı doktora öğrencisi Cenk ÖZLER'in "Cevap Yüzeği Yöntemlerinin Süreç İyileştirme Amacı İle Kullanılması Üzerine Bir Araştırma" konulu tezini incelenmiş ve aday 07/11/97 tarihinde, saat 10⁰⁰'da jüri önünde tez savunmasına alınmıştır.

Adayın kişisel çalışmaya dayanan tezini savunmasından sonra ...100...dakikalık süre içinde gerek tez konusu, gerekse tezin dayanağı olan anabilim dallarından jüri üyelerince sorulan sorulara verdiği cevaplar değerlendirilerek tezin ...başarılı...olduğuna oy ...birliği...ile karar verildi.


BAŞKAN
Prof. Dr. Levent Şahyap


ÜYE
Prof. Dr. Ali Şen

Prof. Dr. Fikret İkiş
ÜYE



ÖZET

Cevap yüzeyi yöntembilimi, bir kaç girdi değişkeninin bir ürün veya sürecin cevabını etkilediği durumlarda ve amaç, bu cevabın optimizasyonu olduğunda, kullanılan matematiksel ve istatistiksel tekniklerin bütünüdür. Cevap yüzeyi yöntembiliminde kullanılan teknikler ise aşağıdakileri kapsamaktadır:

1. Söz konusu cevabın ölçülmesini sağlayacak uygun deneylerin tasarlanması;
2. (1)'de seçilen tasarımdan toplanan verilere en iyi uyumu sağlayacak modelin bulunması;
3. Optimum cevap değerini veren koşulların (faktör seviyelerinin) seçimi.

Bu çalışmada; cevap yüzeyi yöntembiliminde kullanılan deney tasarımları olan birinci ve ikinci derece modeller için cevap yüzeyi tasarımları; cevap yüzeylerinin analizinde kullanılan en hızlı artış, kanonik analiz ve sırt (ridge) analizi yöntemleri; çok cevaplı deneylerin analizinde kullanılan yöntemler (uyum yetersizliği testi, dual cevap teknikleri, çekicilik fonksiyonu, genelleştirilmiş uzaklık fonksiyonu) ve Taguchi'nin parametre tasarımına alternatif olarak kullanılan cevap yüzeyi yöntemleri incelenmiştir. Çok cevaplı süreçlerin optimizasyonunda kullanılmak üzere bir görelî uzaklık fonksiyonu önerilmiştir. Çok cevaplı süreçlerin optimizasyonunda kullanılması önerilen bu yaklaşımın Taguchi'nin parametre tasarımı problemlerinde de kullanılabileceği gösterilmiştir. Ayrıca, çok cevaplı süreçlerin optimizasyonunda kullanılan yaklaşımlar olan çekicilik fonksiyonu ve genelleştirilmiş uzaklık yaklaşımlarının parametre tasarımı problemlerinde kullanılabileceği gösterilmiştir. Son olarak, çok cevaplı süreçler için parametre tasarımı problemlerinde, çok değişkenli beklenen kayıp fonksiyonunun kullanılması önerilmiştir. Bu çalışmada önerilen prosedürler için bir kaç örnek, uygulama bölümünde verilmiştir.

ABSTRACT

Response surface methodology is a collection of mathematical and statistical techniques that are useful for the modelling and analysis of problems in which a response of interest is influenced by several input variables and the objective is to optimize this response. The techniques used in response surface methodology include the following:

1. Designing a set of experiments that will yield adequate and reliable measurements of the response of interest,
2. Determining a model that best fits the data collected from the design chosen in (1), and
3. Determining the optimal settings of experimental factors that produce optimum value of the response.

In this study, the techniques used in response surface methodology are presented: Experimental designs that are set up for the purpose of collecting data for fitting first-order second-order models are presented. Techniques for the determination of optimum conditions when a first-order or a second-order model is fitted to a data set are given (steepest ascent, canonical analysis, and ridge analysis). It is devoted to a discussion of some multivariate aspects of response surface methodology with regard to parameter estimation, lack of fit, and simultaneous optimization. Dual response techniques, desirability function approach, and generalized distance approach are presented. Another distance function, particularly to those who like consider relative changes from the individual optimum, is proposed. Response surface alternatives to the Genichi Taguchi's robust parameter design approach are presented. It has also been shown how desirability function approach, generalized distance approach, and relative distance approach can be applied in robust design studies. When there are several responses, multivariate expected loss function can be used for achieving a robust process. Several examples illustrate these procedures are given in the application chapter.

ÖNSÖZ

1980'lerin ortalarından itibaren, Birleşik Devletler ve Avrupa'daki endüstriyel kuruluşlar yoğun bir şekilde kalite iyileştirme ile ilgilenmektedirler. İstatistiksel süreç kontrolü ve deney tasarımının da içinde bulunduğu istatistiksel yöntemler, bu faaliyetlerin içerisinde anahtar rol oynamaktadır. Kalite iyileştirme en çok, ürün ve süreç geliştirme döngüsü içinde etkilidir. Deney tasarımı yöntemleri uygulandığında, daha kolay imal edilen, daha yüksek güvenilirliğe sahip olan ve müşteri gereksinimlerini karşılayan ya da bu gereksinimleri aşan ürünler ortaya çıkabilmektedir.

Bu bağlamda cevap yüzeyi yöntembilimi deney tasarımının önemli bir dalı olarak görülebilir. Cevap yüzeyi yöntembilimi, yeni süreçlerin geliştirilmesi, performanslarının optimizasyonu ve yeni ürünlerin tasarım ve / veya formülasyonlarının iyileştirilmesinde kullanılan istatistiksel ve matematiksel araçları kapsamaktadır. Ürün ve süreç değişkenliğinin indirgenmesi ve ürün ve süreç performansının iyileştirilmesini içeren kalite iyileştirmenin hedefleri, cevap yüzeyi yöntembiliminin kullanımı ile çoğu kez gerçekleştirilebilmektedir.

Henüz ülkemizde deney tasarımı ve deney tasarımının özel bir dalı olan cevap yüzeyi yöntembilimi yaygın olarak uygulanmamaktadır. Bir çok endüstri kuruluşunda bu yöntemleri uygulayabilecek yeterli laboratuvar koşullarının bulunmaması ve bu yöntemlerin endüstri kuruluşlarınca yeterince tanınmaması, uygulamaların yaygın olmamasının sebeplerinden bazıları olarak gösterilebilir. Bu çalışma ile hem uygulayıcılara destek sağlanması, hem de ülkemiz bilim hayatına katkı sağlanması hedeflenmiştir.

Bu çalışmanın hazırlanması esnasında öneri ve yardımlarını esirgemeyen tez yöneticim Doç. Dr. Levent ŞENYAY'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, yapıcı eleştirileri ve yardımlarından yararlandığım Doç. Dr. Ali ŞEN, Yrd. Doç. Dr. Kadir ERTAŞ ve Arş. Gör. Ali Kemal ŞEHİRLİOĞLU'na da çok teşekkür ederim. Büyük bir dikkat ve titizlikle bu çalışmanın bilgisayarda yazımını gerçekleştiren eşim Derya'ya teşekkürlerimi sunmak isterim.

Eylül, 1997
İzmir

Cenk ÖZLER

İÇİNDEKİLER

Özet.....	i
Abstract.....	ii
Önsöz.....	iii
İçindekiler.....	iv
Kısaltmalar.....	ix
Tablolar Listesi.....	x
Şekiller Listesi.....	xi
1. Giriş.....	1
1.1 Cevap Yüzeyi Yöntembilimi ve Kalite İyileştirme Uygulamaları.....	3
1.2 Çalışmanın Kapsamı.....	4
2. Cevap Yüzeyi Modelleri ve Tasarımları.....	7
2.1 Cevap Yüzeyi Modelleri.....	7
2.2 Cevap Yüzeyi Yöntembiliminin Yapısı.....	10
2.3 Cevap Yüzeyi Tasarımlarının Özellikleri.....	12
2.4 Cevap Yüzeyi Tasarımlarında Ortogonallik ve Döndürülebilirlik Kavramları.....	15
2.5 Birinci Derece Modeller ve Deney Tasarımları.....	19
2.5.1 Birinci Derece Model.....	20
2.5.2 Birinci Derece Modeller İçin Tasarımlar.....	21
2.5.2.1 2^k Faktöryel Tasarımlar.....	23
2.5.2.2 2^k Faktöryel Tasarımların Bloklanması ve Kısmi Tekrarı... ..	27
2.5.2.3 Plackett-Burman Tasarımları.....	31
2.5.2.4 Kesirli Faktöryel Tasarımların Cevap Yüzeyi Yöntembilimine Uygulanması.....	32
2.5.2.5 Simpleks Tasarım.....	33
2.6 İkinci derece Modeller ve Deney Tasarımları.....	36
2.6.1 Ortogonal İkinci Derece Tasarımlar.....	37
2.6.2 Döndürülebilir İkinci Derece Tasarımlar.....	38

2.6.3 3^k Faktöryel Tasarım.....	42
2.6.4 Box-Behnken Tasarımları.....	45
2.6.5 Merkezi Bileşik Tasarımlar.....	46
2.6.6 Eş Yarıçaplı Tasarımlar.....	51
2.6.6.1 İki-Boyutlu Tasarımlar.....	53
2.6.6.2 İkiden Fazla Boyutlu Eş Yarıçaplı Tasarımlar.....	55
2.6.7 Küçük Bileşik Tasarımlar.....	57
2.6.8 Diğer İkinci Derece Tasarımlar.....	59
2.6.8.1 Silindirik Döndürülebilir Tasarımlar.....	59
2.6.8.2 Asimetrik Döndürülebilir Tasarımlar.....	61
2.6.8.3 Koshal Tasarımları.....	62
2.6.8.4 Box-Draper Doyurulmuş Tasarımları.....	64
2.6.8.5 Tekdüzen Kabuk (Uniform Shell) Tasarımları.....	65
2.6.8.6 Hoke Tasarımları.....	67
2.6.8.7 Melez Tasarımlar.....	67
2.6.9 İkinci Derece Tasarımlarda Ortogonal Bloklama.....	68
2.6.10 Ortogonal Olarak Bloklanmış Tasarımların Analizi.....	72
2.7 Varyansı Minimize Eden Tasarım Kriterleri (Optimum Tasarımlar) ve Cevap Yüzeyi Tasarımlarının Etkinlikleri.....	73
2.7.1 Varyansı Minimize Eden Tasarım Kriterleri.....	73
2.7.2 Cevap Yüzeyi Tasarımlarının Etkinliği.....	77
2.8 Sayısal ve Niteliksel Değişkenler İçin Cevap Yüzeyi Tasarımları.....	80
2.8.1 Standart Tasarımların Uygun Olmamasının Nedenleri.....	80
2.8.2 Sayısal ve Niteliksel Değişkenli Modeller.....	83
2.8.3 Sayısal ve Niteliksel Değişkenli Durumlar İçin Tasarım Örnekleri.....	85
2.9 Cevap Yüzeyi Tasarımlarında Diğer Konular.....	91
2.9.1 Sapmayı Dikkate Alan Tasarımlar.....	92
2.9.2 Cevap Yüzeyi Tasarımlarının Kuntluğu.....	92
2.9.3 Karışım Deneylerinin Tasarımı.....	93
2.9.4 Eğim İçin Tasarımlar.....	94

2.9.5 Doğrusal Olmayan Modeller İçin Tasarımlar.....	95
2.9.6 Uyum Yetersizliği Testinin Gücünü Arttırmak İçin Kullanılan Tasarımlar.....	96
2.9.7 Cevap Yüzeyi Tasarımlarında Döndürülebilirliğin Ölçülmesi.....	97
3. Cevap Yüzeylerinin Analizi.....	98
3.1 Model Yeterliliğinin Kontrolü.....	98
3.1.1 Artıkları Analizi.....	98
3.1.2 Uyum Yetersizliğinin Testi.....	99
3.2 Birinci Derece Cevap Yüzeylerinin Analizi: En Hızlı Artış Yönteminin Süreç İyileştirme Amacı İle Kullanılması.....	100
3.2.1 En Hızlı Artış Yönünün Bulunması.....	101
3.2.2 En Hızlı Artış Yönü İçin Güven Bölgesi.....	104
3.2.3 Bir Kısıt Altında En Hızlı Artış.....	106
3.2.4 2^k Tasarıma Merkez Noktalarının Eklenmesi ve Yüzey Eğriselliği İçin Bir Serbestlik Dereceli Test.....	108
3.3 İkinci Derece Cevap Yüzeylerinin Analizi.....	109
3.3.1 Bir Cevap Sisteminde Durağan Noktanın Koordinatlarının Bulunması.....	110
3.3.2 Bir İkinci Derece Cevap Sisteminin Kanonik Eşitliği.....	113
3.3.2.1 A Kanonik Formu.....	113
3.3.2.2 B Kanonik Formu.....	117
3.3.2.3 Kanonik Formlar A ve B 'nin Uygulanması.....	118
3.3.3 Sırt Sistemleri.....	119
3.3.3.1 Durağan Sırt, $k = 2$	120
3.3.3.2 Artan Sırt, $k = 2$	120
3.3.3.3 Sırtı Tanımlamak İçin A Formundaki Kanonik Analiz.....	122
3.3.3.4 Sırtta Uzaklık.....	123
3.3.3.5 Sırttaki Durağanlık.....	125
3.3.3.6 Sonuçların Özeti.....	125
3.3.3.7 θ_i ve λ_i İçin Yaklaşık Standart Hatalar.....	126

3.3.4 Sırt Analizi Yöntemi.....	126
3.4 Cevap İçin Metrik Seçimi.....	131
4. Çok Cevaplı Deneylerin Analizi.....	134
4.1 Doğrusal ve Genel Çok Cevaplı Model.....	135
4.1.1 Doğrusal Çok Cevaplı Model.....	135
4.1.2 Genel Çok Cevaplı Model.....	137
4.1.2.1 Cevaplar Arasındaki Doğrusal Bağımlılıklar.....	138
4.1.2.2 Doğrusal Bağımlılıkların Özdeğer Analizi İle Tespit Edilmesi.....	140
4.1.2.3 Doğrusal Bağımlılıkların Özvektör Analizi İle Tespit Edilmesi.....	141
4.2 Çok Cevaplı Deneylerin Tasarımı.....	142
4.3 Çok Cevaplı Doğrusal Bir Modelin Uyum Yetersizliği İçin Bir Test.....	143
4.3.1 Çok Değişkenli Uyum Yetersizliği Testinin Geliştirilmesi.....	144
4.3.2 Cevapların Uyum Yetersizliğine Katkısı Olan Alt Setlerinin Seçimi.....	146
4.4 Dual Cevap Sistemleri İçin Optimizasyon Teknikleri.....	147
4.5 Çekicilik Fonksiyonu Yaklaşımı İle Süreç Optimizasyonu.....	149
4.5.1 Tek Taraflı Transformasyonlar.....	150
4.5.2 Çift Taraflı Transformasyonlar.....	152
4.6 Genelleştirilmiş Uzaklık Yaklaşımı İle Süreç Optimizasyonu.....	153
4.6.1 Uzaklık Ölçüsünün Tanımlanması.....	155
4.6.2 ϕ 'nin Değişkenliğini Dikkate Alan Bir Uzaklık Ölçüsü.....	156
4.7 Görelî Uzaklık Fonksiyonu İle Süreç Optimizasyonu.....	158
5. Cevap Yüzeyi Yöntemlerinin Taguchi'nin Parametre Tasarımına Alternatif Olarak Kullanılması.....	161
5.1 Kalite ve Kayıp Fonksiyonu.....	161
5.2 Parametre Tasarımının Tanımı.....	162
5.3 Çaprazlanmış Dizin Tasarımları ve Sinyal-Gürültü Oranları.....	164
5.4 Taguchi Analizi.....	169
5.5 Parametre Tasarımında Tasarım ve Analiz Üzerine Diğer Yorumlar.....	170

5.6 Kunt Parametre Tasarımı İçin Deney Tasarımları: Birleşik Dizinler.....	171
5.7 Parametre Tasarımı Problemleri İçin Cevap Yüzeyi Alternatifleri.....	176
5.7.1 Süreç Ortalaması ve Varyansının Modellenmesi.....	177
5.7.2 Optimum Koşulların Bulunmasında Dual Cevap Yaklaşımlarının Kullanılması.....	180
5.7.3 Minimum Varyans Koşullarında Güven Bölgeleri.....	182
5.7.4 Gürültü Faktörlerinin Korelasyonlu Olması Durumu ve Süreç Varyansı İçin Sırt Analizi.....	183
5.7.5 Alternatif Modellerin Kullanılması.....	186
5.7.5.1 Myers, Khuri ve Vining'in Modeli.....	186
5.7.5.2 Box ve Jones'un Modeli.....	186
5.7.5.3 Lucas'ın Modeli.....	188
5.7.5.4 Engel ve Huele'nin Modeli.....	189
5.7.6 Gürültülü Kontrol Faktörlü Durumlar.....	189
5.7.7 Doğrusal Yaklaşım.....	190
5.7.8 Tek Sayıdan Oluşan Performans Cevap Yüzeyi Kriterleri.....	191
5.7.9 Log Doğrusal Varyans Modeli.....	193
5.8 Yüksek Kesirli Tasarımlarda Yayılma Etkilerinin Tespit Edilmesi ve Hesaplanması.....	195
5.8.1 Artıkların Kullanılması.....	195
5.8.2 Artıklardan Elde Edilen Diğer Tanısal Bilgiler.....	197
5.8.3 Varyans Modellemesi İle İlgili Diğer Yorumlar.....	198
5.8.4 Tekrarlı Gözlemlenilen Durumlarda Yayılma Etkileri.....	198
5.8.5 Tekrarsız Deneylerde Yayılma Etkileri.....	199
5.9 Çekicilik Fonksiyonunun Parametre Tasarımı Problemlerine Uyarlanması	
5.9.1 Daha Büyük Daha İyidir Durumu.....	202
5.9.2 Daha Küçük Daha İyidir Durumu.....	204
5.9.3 Hedef Değer En İyidir Durumu.....	204
5.10 Genelleştirilmiş Uzaklık Yaklaşımının Parametre Tasarımı Problemlerine Uyarlanması.....	205

5.11 Görelî Uzaklık Yaklaşımının Parametre Tasarımı Problemlerine	
Uyarlanması.....	206
5.11.1 Daha Büyük Daha İyidir Durumu.....	206
5.11.2 Daha Küçük Daha İyidir Durumu.....	206
5.11.3 Hedef Değer En İyidir Durumu.....	207
5.12 Çok Cevaplı Durumlarda Kunt Tasarım.....	207
6. Uygulamalar.....	212
6.1 Lastik Endüstrisinde Bir Uygulama.....	212
6.2 Bir Basım İşleminde Kalite İyileştirme Çalışmaları.....	214
6.3 Bir Renkli TV Görüntü Kalitesini İyileştirme Çalışması.....	219
6.4 Çok Cevaplı Bir Süreçte Kunt Parametre Tasarım.....	227
7. Sonuç.....	231
Kaynaklar.....	234
Diğer Kaynaklar.....	238

KISALTMALAR

DEBT : Dengeli Eksik Blok Tasarımı.

MBT : Merkezi Bileşik Tasarım.

TH : Tekdüzen Hassasiyet.

GIG : Genelleştirilmiş İndirgenmiş Gradyan.

SN : Sinyal-Gürültü.

M&M : Myers & Montgomery.

D&M : Del Castillo & Montgomery.

TABLolar LİSTESİ

Tablo 2.1. Bir Faktöryel Tasarımda Faktöryel Etkilerin Sistematik Bir Şekilde Elde Edilmesi İçin İşaret Kolonları ve Bölenleri.....	25
Tablo 2.2. 2^k Faktöryel DeneYlerin Bloklanması.....	28
Tablo 2.3. 2^{6-3} Kesirli Faktöryel.....	31
Tablo 2.4. Plackett-Burman Tasarımları.....	32
Tablo 2.5. Bir Döndürülebilir İkinci Derece Tasarım İçin $\hat{y}(\mathbf{x})$ 'in $\rho = 1$ 'deki Varyansının $\rho = 0$ 'dakine Eşit Yapmak İçin Gereken λ_4 Değeri.....	41
Tablo 2.6. Tekdüzen Hassasiyetli veya Ortogonal Döndürülebilir MBT.....	50
Tablo 2.7. Merkez Noktasının Bulunmadığı Durumlarda Bir Döndürülebilir Eş Yarıçaplı Tasarımın İki Ortak Merkezli Halkasının Oranları.....	54
Tablo 2.8. Bazı Küçük Bileşik Tasarımlar İçin Gerekli Nokta Sayıları.....	57
Tablo 2.9. Bir 12-Denemeli Plackett-Burman Tasarımından Beş Kolonun Temel Olarak İki Değişik Seçimi.....	58
Tablo 2.10. Ortogonal Bloklanan Döndürülebilir veya Yaklaşık Döndürülebilir Merkezi Bileşik Tasarımlar.....	70
Tablo 2.11. Ortogonal Bloklı Bir Tasarıma Uyumu Yapılan Bir İkinci Derece Model İçin Varyans Analizi Tablosu.....	72
Tablo 2.12. Bir Hiperküpteki MBT'nin D - ve G -Etkinlikleri.....	79
Tablo 2.13. Bir Hiperküredeki MBT'nin D - ve G -Etkinlikleri.....	79
Tablo 2.14. Dört Kategorinin Kukla Değişkenler İle Temsili.....	84
Tablo 2.15. Dört Kategori İçin Alternatif Kukla Yerleşimi.....	84
Tablo 2.16. Tasarım 2.18a ile Ortaya Çıkan Tahminleme Kolonları.....	88
Tablo 3.1. Teorik İkinci Derece Eşitliklerin Karakteristikleri.....	123

Tablo 6.1. Deney Tasarımı ve Veriler.....	213
Tablo 6.2. Model Katsayıları ve Cevapların Standart Hataları.....	214
Tablo 6.3. A , B , T ve d Değerleri.....	214
Tablo 6.4. Basım Süreci Verileri.....	215
Tablo 6.5. Optimizasyon Sonuçları.....	219
Tablo 6.6. Renkli TV Görüntü Verileri.....	220
Tablo 6.7. Birinci Durum: Süreç Ortalamasının Büyütülmesi, Süreç Varyansının İndirgenmesinden Daha Önemli.....	227
Tablo 6.8. İkinci Durum: Süreç Varyansının İndirgenmesi, Süreç Ortalamasının Büyütülmesinden Daha Önemli.....	227
Tablo 6.9. Birleşik Dizin ve Türetilmiş Veriler.....	228

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. (a) Bir Teorik Cevap Yüzeyi (b) Teorik Cevap Yüzeyinin Eş Yükselti Eğrileri.....	8
Şekil 2.2. İki Değişkenli İkinci Derece Model İle Tanımlanan Bazı Yüzey Örnekleri.....	9
Şekil 2.3. İşletilebilir Bölge ve Deney Bölgeleri.....	11
Şekil 2.4. Cevap Yüzeyi Çalışmalarında İzlenebilecek Olası Bir Akış Diyagramı..	13
Şekil 2.5. Bir 2^3 Faktöryel Tasarımın Geometrik Gösterimi.....	24
Şekil 2.6. $k = 2$ ve $k = 3$ Boyutlu Simpleks Tasarım.....	34
Şekil 2.7. Eşitlik (2.36) İle Verilen Simpleks Tasarım.....	35
Şekil 2.8. $k = 2$ Olduğunda, Bir İkinci-Derece Döndürülebilir Tasarım İçin, ρ ve λ_4 'ün Bir Fonksiyonu Olarak Hassasiyet Ölçüsü $W(\rho)$	40
Şekil 2.9. 3^2 Faktöryel Tasarım.....	43
Şekil 2.10. $k = 2$ Değişken İçin Bir MBT.....	48
Şekil 2.11. Merkez Noktalı Bir Beşgen Tasarım.....	55
Şekil 2.12. Bir Kübün Sekiz Köşesi ve Bir Sekizyüzlünün Altı Köşesi.....	56
Şekil 2.13. $k=3$ Boyutlu x_3 Eksenine Göre Bir Silindirik Döndürülebilir Tasarım..	60
Şekil 2.14. k Değişkenli İkinci Derece Model İçin Box-Draper Doyurulmuş Tasarımları (a) $k = 2$; (b) $k = 3$	65
Şekil 2.15. İki Boyutlu Bir Tekdüzen Kabuk Tasarımı.....	66
Şekil 2.16. $k = 3$ Boyutlu Bir Melez Tasarımı.....	67
Şekil 2.17. $(x_1, x_2, z_1)^2$ 'de İkinci Derece Bileşik Tasarım.....	81
Şekil 2.18. (x_1, x_2, z_1, z_2) 'de Birinci Derece Tasarım.....	82
Şekil 2.19. Bir 2^{4-1}_{IV} Tasarım: $x_1x_2z_1z_2 = I$	82

Şekil 2.20. Model (2.96) İçin Beş Ayrı Tasarım.....	86
Şekil 2.21. Model (2.98) ve (2.99) İçin Tasarım.....	87
Şekil 2.22. Model (2.99) İçin Tasarımlar.....	87
Şekil 2.23. Model (2.102) İçin Üç Tasarım.....	89
Şekil 2.24. Model (2.103) İçin Üç Tasarım.....	91
Şekil 3.1. $\hat{y} = 2 + 3x_1 - 1.5x_2$ İçin En Hızlı Artış Yönü.....	103
Şekil 3.2. $k = 3$ Durumunda En Hızlı Artış Yönü İçin Güven Konisi.....	106
Şekil 3.3. Bir Kısıt Altında En Hızlı Artış.....	107
Şekil 3.4. Uyumu Yapılmış İkinci Derece Eşitlik İçin Değişik Tipteki Yüzeyler ve Kanonik Eksenleri.....	112
Şekil 3.5. Eşitlik (3.31)'in $\hat{y} = 76$ ve 79 için Eş Yükselti Eğrileri.....	115
Şekil 3.6. Eşitlik (3.39)'u Veren A Kanonik Formu.....	116
Şekil 3.7. Eşitlik (3.47)'yi Veren B Kanonik Formu.....	118
Şekil 3.8. (a) y' 'nin $w = x_1x_2$ 'ye Karşı Grafiği, (b) y' 'nin x_1 ve x_2 'ye Karşı Grafiği.....	120
Şekil 3.9. Veriler (a) Gibi Bir Deney Bölgesinde Toplandığında, Gerçek Sistem (b)'deki Gibi Merkezi S Olan Elipslerden ya da (c)'deki Gibi Merkezi S' Olan Hiperbollerden Oluşabilir.....	121
Şekil 3.10. $k = 3$ Durumu İçin Bazı İkinci Derece Eşitliklerin Eş Yükselti Sistemleri.....	124
Şekil 3.11. Merkezi S Olan Bir Elipsoid veya Merkezi S' Olan Bir Hiperboloid İle Yaklaşılabilir Bir Artan Sırt.....	124
Şekil 3.12. $k = 2$ İçin Eş Merkezli Çemberler ve \hat{y} 'nin Maksimum Değerlerinin Yerleşimi.....	127
Şekil 3.13. Sırt Analizinde R İle μ Arasındaki İlişki.....	131
Şekil 4.1. Değişik n Değerleri İçin (4.43) Transformasyonu.....	151

Şekil 4.2. Değişik s ve t Değerleri İçin (4.44) Transformasyonu.....	153
Şekil 5.1. $2^2 \times 2^2$ Çaprazlanmış Dizin.....	164
Şekil 5.2. Başka Bir Çaprazlanmış Dizin.....	165
Şekil 5.3. Aynı SN_I 'yi Veren Beş Veri Seti.....	168
Şekil 5.4. xy Etkileşimi.....	177
Şekil 5.5. Örnek Ortalama ve Varyans Cevap Yüzeyleri (eğrileri).....	193
Şekil 5.6. Dokuz Adet Varyans.....	194
Şekil 5.7. Artıkların Bir Faktör Seviyesine Karşı Grafiği.....	196
Şekil 5.8. Artıkların Bir Faktör Seviyesine Karşı Grafiği.....	196
Şekil 6.1. Süreç Ortalaması Cevap Yüzeyi.....	221
Şekil 6.2. Süreç Ortalaması Eş Yükselti Eğrileri.....	222
Şekil 6.3. Süreç Varyansı Cevap Yüzeyi.....	223
Şekil 6.4. Süreç Varyansı Eş Yükselti Eğrileri.....	224

Birinci Bölüm

GİRİŞ

Cevap yüzeyi yöntembilimi (Response surface methodology), değişik tipteki endüstriyel süreçlerin geliştirilmesi, iyileştirilmesi ve optimizasyonunda kullanılan istatistiksel ve matematiksel tekniklerin bütünüdür. Cevap yüzeyi yöntembiliminin en yaygın uygulamaları, bir kaç *girdi değişkeninin (faktörün)* bir ürün veya sürecin *performans ölçüsü* veya *kalite karakteristiğini* etkilediği durumlardır. Bu performans ölçüsü veya kalite karakteristiği *cevap* olarak adlandırılmaktadır. Girdi değişkenleri (faktörler) araştırmacı veya uygulayıcı tarafından kontrol altında tutulabilmektedir.

Bir süreçteki girdi değişkenleri ile cevap değişkeni arasındaki ilişkinin yapısı bilindiğinde, girdi değişkenleri seviyeleri, optimum cevap değerini elde edecek şekilde seçilebilir. Ancak, cevap ile girdi değişkenleri arasındaki ilişkinin gerçek yapısı bilinmediğinde, girdi değişkenlerinin cevap üzerindeki etkilerinin ampirik olarak bulunması söz konusudur. Diğer bir deyişle, cevap ile girdi değişkenleri arasındaki ilişkiyi temsil eden ampirik bir modelin (genellikle bir polinomiyal) bulunması söz konusudur. Cevap yüzeyi yöntembiliminde, bir polinomiyal ile, girdi değişkenleri uzayındaki küçük bir bölgede bilinmeyen gerçek ilişkiye yaklaşılabileceği varsayılmaktadır. Bu polinomiyailler ise genellikle birinci ve ikinci derecedendir.

Cevap yüzeyi yöntembiliminde kullanılan teknikler aşağıdakileri kapsamaktadır:

1. Söz konusu cevabın ölçülmesini sağlayacak deneylerin tasarlanması: Cevap yüzeyi çalışmalarında veri toplama aşamasının planlanması oldukça önemlidir. Bu aşamada deney tasarımlarının özel bir sınıfı olan *cevap yüzeyi tasarımları* kullanılmaktadır. Birinci derece modeller için kullanılan cevap yüzeyi tasarımları, *birinci derece tasarımlar* ve ikinci derece modeller için kullanılan cevap yüzeyi tasarımları, *ikinci derece tasarımlar* olarak adlandırılmaktadır.

2. (1)'de seçilen tasarımdan toplanan verilere en iyi uyumu sağlayacak modelin bulunması: Model parametreleri ile ilgili *hipotez testleri*, *uyum yetersizliği testi*, *artık (residual) analizi*, verilere en iyi uyumu sağlayacak modelin bulunmasında kullanılabilir. Ayrıca girdi değişkenleri ve / veya cevap değişkeni üzerine uygulanan *transformatasyonlar* ile modelin uyumu iyileştirilebilir.

3. Optimum cevap değerini veren koşulların (optimum faktör seviyelerinin) seçimi: Cevabın maksimizasyonu (veya minimizasyonu) hedeflendiğinde ve birinci derece modelin yeterli olduğu durumlarda, cevabın optimum değeri, genellikle incelenen bölgenin dışarıdır. Bu gibi durumlarda cevabın optimum değerine yaklaşmak için, *en hızlı artış (veya azalış)* yöntemi kullanılabilir. İkinci derece modelin yeterli olduğu durumlarda ise, cevabın optimum değeri incelenen bölgede veya bu bölgenin dışında olabilir. Optimum cevap değeri, incelenen bölgede ise *kanonik analiz*, bu bölgenin dışında ise yine *kanonik analiz* ve / veya *sırt (ridge) analizi* kullanılabilir. *Doğrusal olmayan programlama* teknikleri, incelenen bölge içerisinde, cevabın optimum değerini bulmak amacı ile kullanılabilir.

Cevap yüzeyi yönteminin bir çok uygulaması ardışık bir yapıdadır. Bir cevap yüzeyi çalışmasında izlenebilecek adımlar, detaylı olarak bu çalışmanın ikinci bölümünde verilmiştir.

1.1 CEVAP YÜZEYİ YÖNTEMBİLİMİ VE KALİTE İYİLEŞTİRME UYGULAMALARI

Hill ve Hunter (1966), cevap yüzeyi yöntemi ile ilgili olarak kimya endüstrisindeki uygulamaları vurgulayan ve ayrıntılı bir literatür taramasının yapıldığı makalelerinde, cevap yüzeyi yönteminin Box ve Wilson (1951)'in çalışması ile başladığını ifade etmişlerdir (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 137). Cevap yüzeyi çalışmalarını biyometri açısından inceleyen ve ayrıntılı bir literatür taraması yapan Mead ve Pike (1975) ise, cevap yüzeyi yönteminin başlangıcının 1930'larda kullanılan *cevap eğrilerine* dayandığını iddia etmişlerdir. Mead ve Pike, cevap eğrilerinin kullanıldığı alanların hayvan ve bitkiler için büyüme eğrilerinin, probit analizin ve gübre seviyeleri ile verim arasındaki ilişkilerin incelendiği tarımbilim çalışmalarının olduğunu

belirtmişlerdir. Myers, Khuri ve Carter (1989), 1966-1988 arasındaki çalışmalar ile ilgili olarak ayrıntılı bir literatür taraması yapmışlardır ve fizik ve mühendislik bilimlerindeki, gıda bilimindeki, sosyal bilimlerdeki, biyolojik ve klinik bilimlerdeki ve endüstriyel uygulamaları vurgulamışlardır.

1980'lerin ortalarından itibaren, Birleşik Devletler ve Avrupa'daki endüstriyel kuruluşlar yoğun bir şekilde kalite iyileştirme ile ilgilenmektedirler. İstatistiksel süreç kontrolü ve deney tasarımının da içinde bulunduğu istatistiksel yöntemler, bu faaliyetlerin içerisinde anahtar rol oynamaktadır. Kalite iyileştirme en çok, ürün ve süreç geliştirme döngüsü içinde etkilidir. Yarı iletkenler ve elektronik, uzay gemileri ve bunların teçhizatları, otomotiv, biyoteknoloji ve farmasötik, tıbbi aletler, kimya ve proses endüstrileri gibi sektörler, deney tasarımı yöntemlerinin uygulanarak daha kolay imal edilen, daha yüksek güvenilirliğe sahip olan ve müşteri gereksinimlerini karşılayan ya da bu gereksinimleri aşan ürünlerin ortaya çıktığı sektörlerle örnek olarak gösterilebilir (Myers ve Montgomery, 1995: ss.13, 14).

Bu bağlamda cevap yüzeyi yöntembilimi deney tasarımının önemli bir dalı olarak görülebilir. Cevap yüzeyi yöntembilimi, yeni süreçlerin geliştirilmesi, performanslarının optimizasyonu ve yeni ürünlerin tasarım ve / veya formülasyonlarının iyileştirilmesinde kullanılabilir. Ürün ve süreç değişkenliğinin indirgenmesi ve ürün ve süreç performansının iyileştirilmesini içeren kalite iyileştirmenin hedefleri, cevap yüzeyi yöntembiliminin kullanımı ile çoğu kez gerçekleştirilebilmektedir.

Cevap yüzeyi yöntembilimi değişik tipteki endüstriyel problemlerin çözümünde kullanışlı bir yaklaşım olarak kabul görmektedir. Genellikle bu problemleri dört kategoriye ayırmak mümkündür:

1. *Özel Bir Bölgede Bir Cevap Yüzeyinin Haritalanması.* Mevcut işletim koşulları (seviyeler) civarında gerçek cevap fonksiyonuna, uyumu yapılmış bir cevap yüzeyi ile yeterli bir yaklaşım sağlanabildiği durumlarda, mevcut işletim koşullarındaki bazı değişimler ile cevap değerinde olabilecek değişimler kestirilebilir.

2. *Cevabın Optimizasyonu.* Endüstri dünyasında, süreci optimize eden koşulların bulunması oldukça önemli bir problemdir. Örneğin, kimyasal bir süreçte maksimum saflık yüzdesini veren zaman ve sıcaklık seviyelerinin bulunması söz konusudur.

3. *Çok Sayıda Spesifikasyonu veya Müşteri Gereksinimlerini Karşılacak Koşulların Seçilmesi*. Bir çok cevap yüzeyi probleminde, eş anlı olarak ele alınması gereken bir kaç cevap değişkeni söz konusu olabilir. Örneğin, yine kimyasal bir süreçte, maliyet ve konsantrasyon gibi iki cevap daha olduğu varsayalım. Burada saflık yüzdesinin %70'in üzerinde olması istenirken, eş anlı olarak maliyetin 34 para birimi / librenin altında olması ve konsantrasyonun 65 gr / litre \pm 3 gr / litre sınırları içerisinde olması şartı aranabilir.

4. *Ürün ve Süreç Değişkenliğinin İndirgenmesi (Kunt Parametre Tasarımı)*: Kunt parametre tasarımı (robust parameter design), ürün ve süreçlerin hedef değerleri etrafında tutarlı olması ve kontrol edilemeyen faktörlerdeki değişmelere karşı duyarsız veya kunt (robust) hale getirilmesi için Genichi Taguchi tarafından önerilen bir yaklaşımdır.

Taguchi'nin bir tuğla fabrikasındaki tecrübesi, kunt parametre tasarımı için uygun bir örnektir (bkz. Byrne ve S. Taguchi, 1986): Problem, pişirilme işlemine tabi tutulan tuğlalardaki ölçü farklılıkları olarak belirlenmiştir. Yapılan incelemeler, fırın ortamındaki düzensiz ısı dağılımını, problemin temel sebebi olarak ortaya koymuştur. Sıcaklığın hassas kontrolü pahalı bir yatırım olduğundan, tuğlanın malzeme kompozisyonu değiştirilerek, boyutun sıcaklığa karşı duyarlılığı azaltılmaya çalışılmıştır. Kireç oranının %1'den %5'e çıkarılması ile, pişirme işleminden sonra boyut uygunsuzluğu olan tuğlaların oranı %30'dan %1'in altına indirgenebilmiştir.

1.2 ÇALIŞMANIN KAPSAMI

Çalışmanın izleyen bölümlerinde cevap yüzeyi yöntembilimi içerisinde kullanılan teknikler verilmiştir. İkinci bölümde, cevap yüzeyi modelleri, cevap yüzeyi yöntembiliminin yapısı ve cevap yüzeyi modellerinin parametrelerinin tahminlenmesinde kullanılan cevap yüzeyi tasarımları verilmiştir. Birinci derece modeller ve ikinci derece modeller için tasarımlar, ikinci derece tasarımlarda bloklama, ikinci derece tasarımların etkinlikleri ve niteliksel değişkenlerin olması durumunda kullanılan tasarımlar verilmiştir. Ayrıca bu bölümünün sonunda cevap yüzeyi tasarımlarının kurulmasında kullanılan diğer kriterler ve özel amaçlı tasarımlar kısaca tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, cevap yüzeyi tasarımından elde edilen veriler ile yaklaşım polinomiyelerinin kurulmasından sonra bu modellerin analizi için kullanılan teknikler verilmiştir. Model yeterliliğinin kontrolü ile ilgili kısaca verilen bilgilerin ardından, birinci derece modellerin kullanılması durumunda süreç iyileştirme amacı ile kullanılan en hızlı artış yöntemi ve ikinci derece modellerin kullanılması durumunda optimum koşulların bulunması amacı ile kullanılan kanonik analiz ve sırt analizi yöntemleri verilmiştir. Bu bölümün sonunda model varsayımları sağlanmadığında ve / veya model yetersizliği durumlarında veya model yapısını basitleştirmek amacı ile kullanılan cevap transformasyonları (cevap için metrik seçimi) kısaca verilmiştir.

Dördüncü bölümde, birden fazla sayıda cevap değişkeninin bulunması durumunda, çok cevaplı modellerin kurulması ve uyum yetersizliğinin test edilmesi verilmiştir. Ardından çok cevaplı modellerin optimizasyonu ile ilgili olarak verilen dual cevap sistemleri için optimizasyon teknikleri, çekicilik fonksiyonu (desirability function) ve genelleştirilmiş uzaklık (generalized distance) yaklaşımları gözden geçirilmiştir. Ayrıca bu bölümün sonunda, cevapların ideal değerlerinden göreceli uzaklıklarının dikkate alındığı bir uzaklık fonksiyonu önerilmiştir.

Beşinci bölümde, ürün ve süreçlerin, kontrol edilemeyen faktörlerdeki değişimlere karşı duyarsız veya kurt hale getirilmesi ve ürün ve süreçlerin hedef değerleri etrafında tutarlı olması için Genichi Taguchi tarafından önerilen, kurt parametre tasarımı yaklaşımı verilmiştir. Ardından Taguchi'nin parametre tasarımı problemlerinin çözümünde, cevap yüzeyi yaklaşımlarının alternatif olarak kullanılması ile ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalar tartışılmıştır. Kurt parametre tasarımında, Taguchi'nin önerdiği deney tasarımları (ortogonal dizinler olarak adlandırılmaktadır) için alternatif cevap yüzeyi tasarımları ve yine Taguchi'nin verilerin analizi için önerdiği sinyal-gürültü oranlarına alternatif olarak önerilen optimizasyon yaklaşımları incelenmiştir. Çok cevaplı süreçlerin optimizasyonunda kullanılan yaklaşımlardan çekicilik fonksiyonu, genelleştirilmiş uzaklık ve göreceli uzaklık yaklaşımlarının kurt parametre tasarımı problemlerinin çözümü için uyarlanmasına çalışılmıştır. Bundan başka, kurt parametre tasarımı problemlerinde çok fazla üzerinde durulmayan çok cevaplı süreçlerin söz konusu olması durumunda, daha önce çok değişkenli süreç yeterlilik indekslerinin geliştirilmesinde kullanılan çok

değişkenli kayıp fonksiyonu ele alınarak, kuantum parametre tasarımı problemlerinde kullanılması tartışılmıştır.

Altıncı bölümde ise öncelikle, dördüncü bölümde önerilen göreceli uzaklık yaklaşımının çok cevaplı süreçlerin optimizasyonunda kullanılması ile ilgili olarak bir örnek uygulama verilmiştir. Ardından, beşinci bölümde kuantum parametre tasarımı için önerilen yaklaşımlar ile literatürde yapılmış olan çalışmalar iki örnek uygulama ile karşılaştırılmıştır. Son olarak çok cevaplı durumlarda kuantum parametre tasarımı probleminin çözümünün gerçekleştirilmesi için türetilmiş verilerin kullanıldığı bir örnek verilmiştir.



İkinci Bölüm

CEVAP YÜZEYİ MODELLERİ VE TASARIMLARI

Bu bölümde öncelikle cevap yüzeyi çalışmalarında kullanılan modeller ve cevap yüzeyi yönteminin yapısı tanıtılmıştır. Ardından cevap yüzeyi modellerinin parametrelerinin tahminlenmesi için kullanılan cevap yüzeyi tasarımları incelenmiştir.

2.1 CEVAP YÜZEYİ MODELLERİ

Bir süreçte iki girdi değişkeni ξ_1 ve ξ_2 ile cevap değişkeni y arasındaki ilişki Şekil 2.1'de verildiği gibi olduğunda, cevabı maksimize eden girdi değişkenleri seviyeleri şekile bakılarak kolaylıkla bulunabilmektedir. Ancak pratikte bir çok durumda gerçek cevap fonksiyonunun yapısı bilinmeyebilir. Cevap y ile kontrol edilebilir k adet girdi değişkeni arasındaki ilişki

$$y = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) + \varepsilon \quad (2.1)$$

şeklinde olduğunda ve gerçek cevap fonksiyonu f bilinmediğinde, bu fonksiyon oldukça karmaşık bir yapıda (muhtemelen doğrusal olmayan bir fonksiyon) olabilir. Ayrıca buradaki ε deneysel hata olup, cevaptaki ölçüm hatasının veya süreçlerin doğasında olan diğer varyasyon kaynaklarının etkisi vb. etkileri içerebilir. ε için ortalaması sıfır ve varyansı sabit σ^2 olan normal dağılışa sahip olduğu varsayımı yapılmaktadır. Buradan

$$E(y) = \eta = E[f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)] + E(\varepsilon)$$

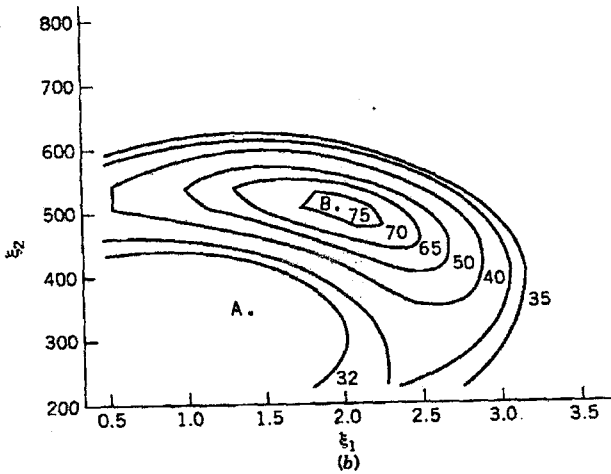
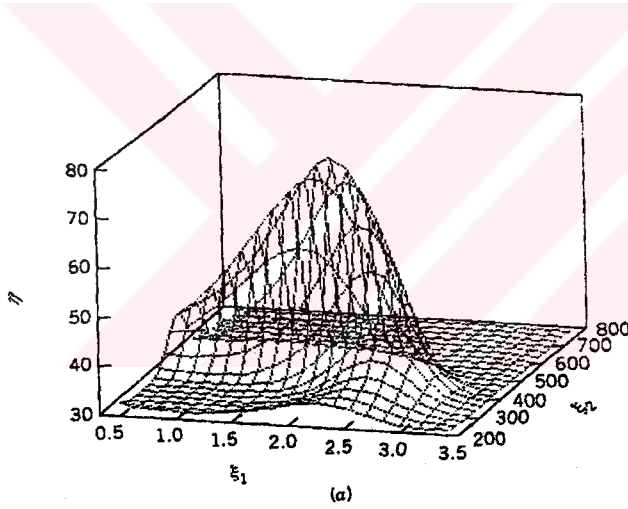
$$\eta = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \quad (2.2)$$

yazılabilir. Deney tasarımlarının kurulmasını kolaylaştırmak için girdi değişkenlerinin kodlanmış değişkenler olan (bkz. Kesim 2.4) x_1, x_2, \dots, x_k 'ya dönüştürülmesi ile eşitlik (2.2)'deki gerçek cevap fonksiyonu

$$\eta = f(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik (2.3) ile verilen ilişki, $k = 1$ olduğunda bir eğri, $k = 2$ olduğunda bir yüzey ve $k > 2$ olduğunda bir hiper yüzey ile temsil edilir. Bir çok cevap yüzeyi probleminde cevap ile girdi değişkenleri arasındaki ilişkinin gerçek yapısı bilinmediğinden, gerçek fonksiyonel ilişki için bir yaklaşımın (genellikle bir polinomial) bulunması söz konusudur. Genellikle girdi değişkeni uzayının küçük bir bölgesinde düşük dereceli yaklaşım polinomiyalleri kullanılmaktadır. Cevap, girdi değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonu ile yeterli derecede temsil edilebiliyorsa, yaklaşım fonksiyonu bir birinci derece modeldir:

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k \quad (2.4)$$



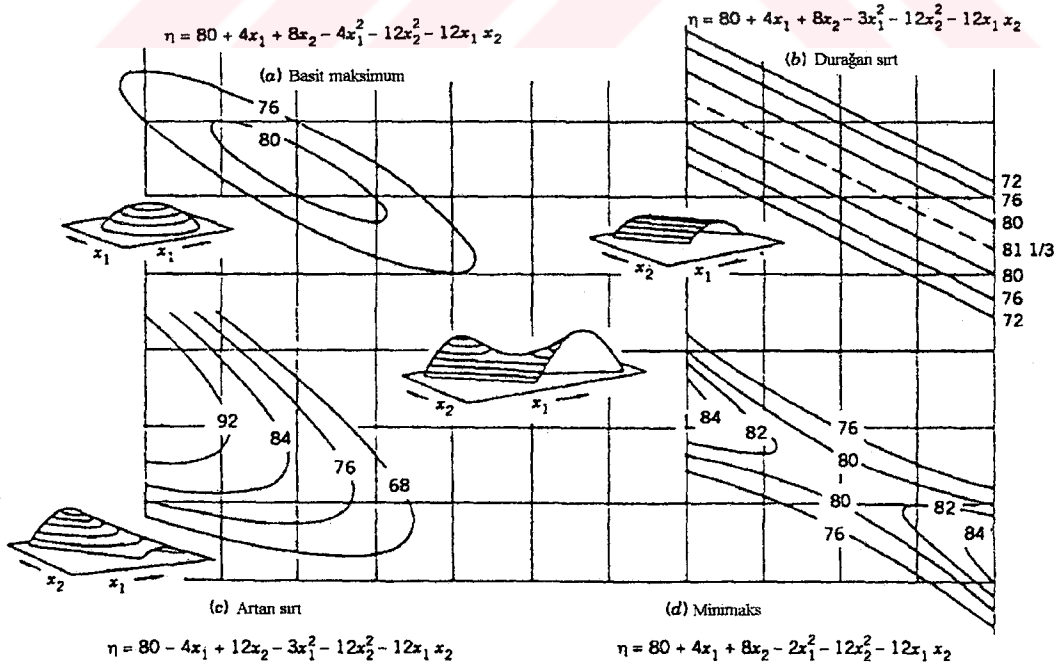
Şekil 2-1 (a) Bir teorik cevap yüzeyi (b) Teorik cevap yüzeyinin eş yükselti eğrileri

Eğer sistemde eğrisel bir ilişki varsa, daha yüksek dereceden, örneğin ikinci derece bir polinomialin kurulması sözkonusudur:

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j \quad (2.5)$$

İkinci derece modeller, cevap yüzeyi yönteminde çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Myers ve Montgomery (1995: s.7) ikinci derece modellerin yaygın olarak kullanılmasının nedenlerinden bazılarının aşağıdakiler olduğunu belirtmişlerdir:

1. İkinci derece model oldukça esnek ve değişik tipteki fonksiyonel formları tanımlayabilir. Böylece gerçek cevap yüzeyine yeterli bir yaklaşım sağlanabilmektedir. Şekil 2.2’de bir ikinci derece model ile türetilen bir kaç değişik cevap yüzeyi ve eş yükselti eğrisi verilmiştir.
2. İkinci derece modeldeki parametrelerin (β lar) tahminlenmesi kolaydır. Bu amaçla en küçük kareler yöntemi kullanılabilir.
3. İkinci derece modellerin, cevap yüzeyi problemlerinin çözümünde başarılı sonuçlar verdiği bir çok uygulama bulunmaktadır.



Şekil 2-2 İki değişkenli ikinci derece model ile tanımlanan bazı yüzey örnekleri.

Gerçek cevap fonksiyonu f için bir polinomial yaklaşımın kullanılması, $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}$ noktası etrafındaki Taylor serisi açılımına dayanmaktadır. Örneğin, birinci derece model, birinci derece Taylor serisi açılımıdır:

$$f = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x=x_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x=x_0} + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{x=x_0} \quad (2.6)$$

Burada \mathbf{x} , girdi değişkenleri vektörü ve $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}$ noktasındaki girdi değişkenleri vektörüdür. Benzer şekilde, ikinci derece Taylor serisi açılımı ise ikinci derece modeli verir.

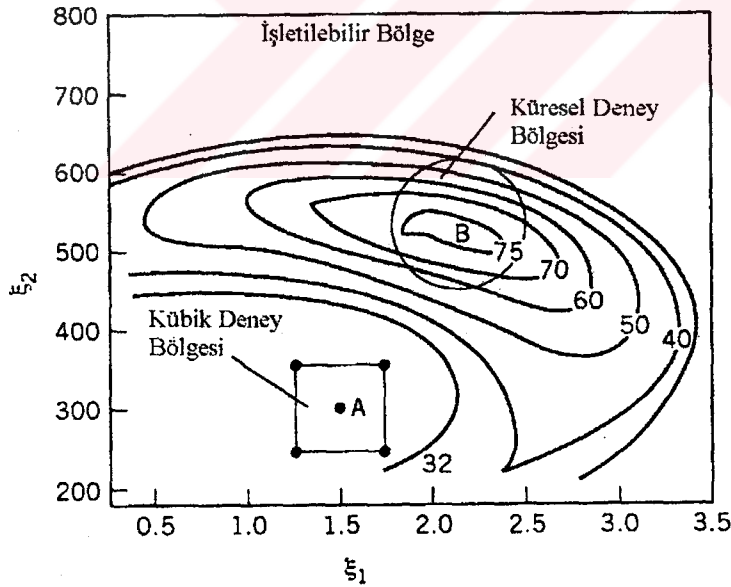
2.2 CEVAP YÜZEYİ YÖNTEMBİLİMİNİN YAPISI

Cevap yüzeyi yöntembiliminin bir çok uygulamasının ardışık bir yapıda olduğu görülmektedir. İlk olarak hangi faktörlerin veya değişkenlerin cevap yüzeyi çalışmasında daha önemli olduğu tespit edilir. Bunun için genellikle, cevap üzerinde etkisi olduğu düşünülen faktörlerden önemsiz olanların elimine edilmesi maksadı ile bir deney tasarlanır. Bu tip deney tasarımları *eleme tasarımları* olarak adlandırılmaktadır. Genellikle cevap yüzeyi çalışmalarının başlangıcında cevabın açıklanmasında önemli olabilecek değişkenlerin sayısı oldukça fazla olabilir. Faktörlerin eliminasyonunun amacı, izleyen aşamalarda tasarlanacak deneylerin daha etkin ve daha az sayıda deneme (run) gerektirmesi için aday değişkenlerin sayısının indirgenmesidir. Myers ve Montgomery (1995: s.10) eleme deneylerini, cevap yüzeyi çalışmalarının *sıfırmacı evresi* olarak adlandırmaktadır ve önemli faktörleri tanımlamak için bir eleme deneyi uygulanmadan bir cevap yüzeyi analizi yapılmaması gerektiğini belirtmektedir.

Önemli faktörlerin tanımlanmasından sonra, cevap yüzeyi çalışmasının *birinci evresi* başlatılır. Bu evrede araştırmacının amacı, mevcut girdi değişkenlerinin mevcut seviyelerinin, cevabın optimum değerinin yakınlarında mı, yoksa mevcut sürecin optimumdan uzak bir bölgede mi işletildiğini bulmaktır. Girdi değişkenlerinin mevcut seviyeleri optimum cevap değerinden uzak ise, araştırmacının süreci optimuma yaklaştırmak için süreç değişkenlerindeki düzeltmeleri bulması gerekmektedir. Cevap yüzeyi yöntembiliminin bu aşamasında, cevabın optimum değerinin bulunduğu bölgeye yaklaşmak için birinci derece modelin, bu modelin parametrelerini tahminlemek için bir

birinci derece tasarımın ve optimizasyon tekniklerinden en hızlı artış yönteminin kullanılması söz konusudur.

Bir cevap yüzeyi çalışmasının *ikinci evresi*, süreç, optimum cevabın civarında işletildiğinde başlamaktadır. Sürecin optimum cevabın civarında işletildiğinin nasıl anlaşılacağı ile ilgili detaylar üçüncü bölümde verilmiştir. En hızlı artış yöntemi ile optimuma yaklaşılabileceği gibi, bazı durumlarda süreç ile ilgili ön bilgilerden, sürecin optimum civarında işletildiği biliniyor olabilir. Bu noktada araştırmacı genellikle, girdi değişkenleri uzayında, küçük bir bölgede gerçek cevap fonksiyonuna yeterli yaklaşımı sağlayacak bir model elde etmek isteyecektir. Gerçek cevap yüzeyi genellikle optimum civarında bir eğrisellik göstereceği için, bir ikinci derece model (veya belki daha yüksek dereceli polinomial) kullanılabilir. Bu modelin parametrelerinin tahminlenmesi için ikinci derece bir tasarımın kullanılması gerekmektedir. Uygun yeterli bir yaklaşım modeli elde edildiğinde, bu model, sürecin optimum koşullarını bulmak amacı ile üçüncü bölümde verilen kanonik analiz ve / veya sırt analizi gibi yöntemler ile analiz edilebilir.



Şekil 2-3 İşletilebilir bölge ve deney bölgeleri

Bu ardışık deneysel süreç, *işletilebilir bölge (operability region)* olarak adlandırılan girdi değişkenleri uzayındaki bir bölgede uygulanmaktadır. Tüm işletilebilir bölgenin tek bir deneyden elde edilen bir ampirik model ile açıklanması beklenmez. Bunun yerine, Şekil 2.3 ele alındığında, işletilebilir bölge içerisinde A noktası etrafındaki

daha küçük bir *deney bölgesi* tanımlanır. Deney bölgeleri, A noktası etrafındaki gibi bir kübik bölge olabileceği gibi, B noktası etrafındaki gibi bir küresel bölge de olabilir. Şekil 2.3'e bakıldığında, cevabın maksimizasyonu isteniyor ise, A noktasında başlayan bir cevap yüzeyi çalışması, araştırmacıyı B noktası civarına bir noktaya götürebilir. Ardından B noktası civarında dar bir bölgede cevaba yaklaşmak için bir ikinci derece model kullanılabilir. Böylece uyumu yapılmış bu cevap yüzeyinin incelenmesi ile ξ_1 ve ξ_2 için optimum koşullar veya seviyeler belirlenebilir.

Optimum koşulların deneysel olarak elde edilmesi amacı ile en hızlı artış yönteminin ve ikinci derece modeller için deney tasarımlarının (ikinci derece tasarımlarının) kullanılması, ilk kez Box ve Wilson (1951) tarafından önerilmiştir. Cevap yüzeyi yönteminin ardışık yapısı araştırmacıya, çalışma konusu olan süreç veya sistem hakkında bilgi edinme imkanı verir. Bu da cevap yüzeyi yönteminin uygulanması esnasında araştırmacının; (1) ne kadar tekrar gerektiği, (2) optimumun bulunduğu bölgenin yeri, (3) gereken yaklaşım fonksiyonunun tipi, (4) uygun deney tasarımlarının seçimi ve (5) cevaplar veya süreç değişkenleri üzerinde transformasyonların gerekip gerekmediği gibi sorulara da yanıtlar bulmasını sağlayacaktır (Myers ve Montgomery, 1995: s.12). Cevap yüzeyi çalışmalarında Şekil 2.4'de verildiği gibi bir iş akışı izlenebilir.

2.3 CEVAP YÜZEYİ TASARIMLARININ ÖZELLİKLERİ

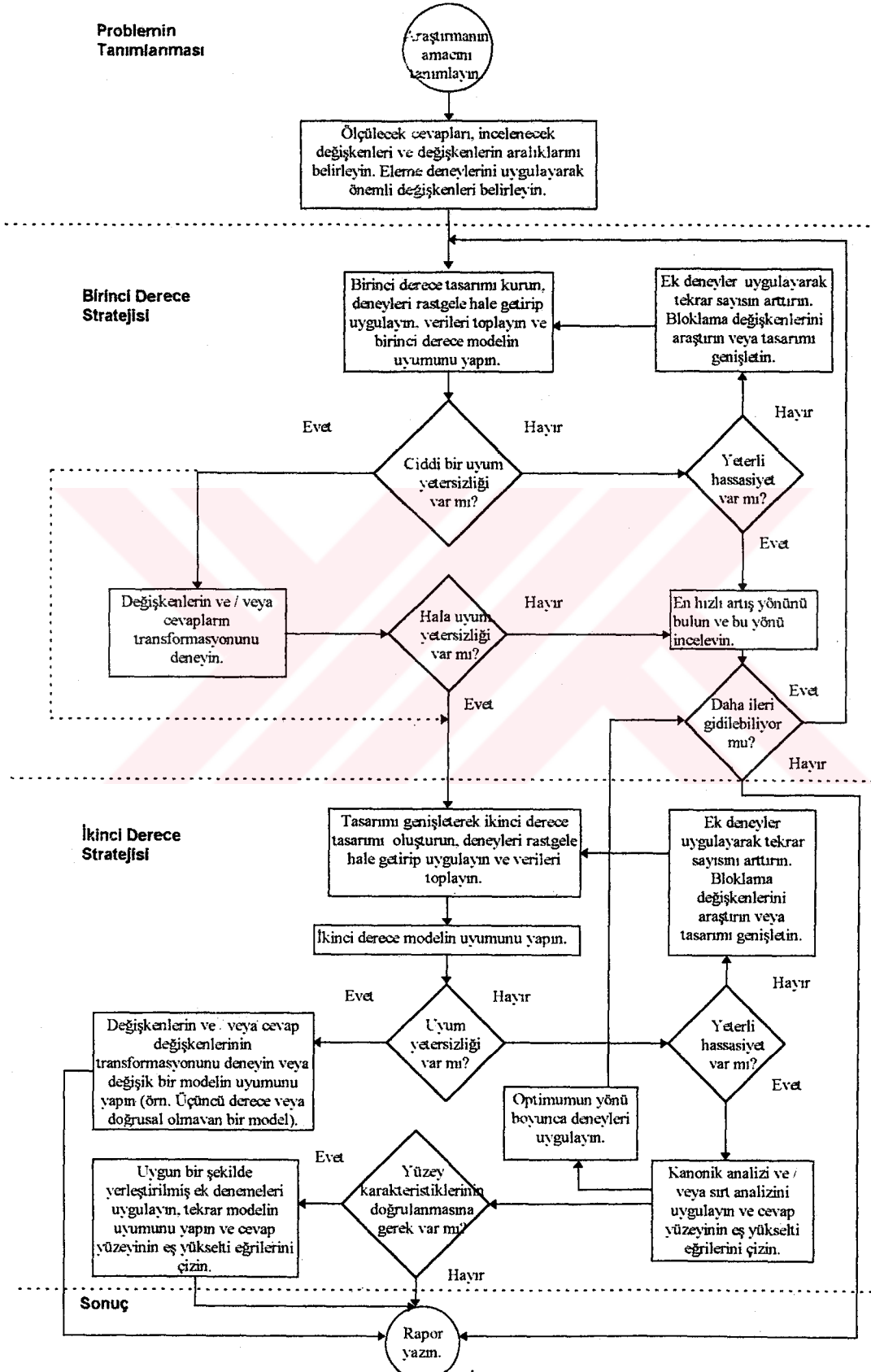
Uyumu yapılacak model matris notasyonunda

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.7)$$

şeklinde yazıldığında, burada \mathbf{y} , N gözlemden oluşan vektör; $\boldsymbol{\beta}$, $p \times 1$ boyutlu parametreler vektörü; \mathbf{X} , $N \times p$ boyutlu girdi değişkenlerinin seviye kombinasyonlarından oluşan matris ve $\boldsymbol{\varepsilon}$, $N \times 1$ boyutlu ortalaması sıfır ve sabit varyans σ^2 'ye sahip, birbirlerinden bağımsız normal dağılım gösteren hataların oluşturduğu vektördür. Model (2.7)'nin beklenen değeri

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \quad (2.8)$$

şeklinde yazılabilir. \mathbf{X} matrisinin satır vektörleri \mathbf{z}_u 'lerden oluştuğu varsayalım ($u = 1, 2, \dots, N$). $\boldsymbol{\beta}$ 'nin en küçük kareler tahminleyicisi



Şekil 2-4. Cevap Yüzeyi Çalışmalarında İzlenebilecek Olası Bir Akış Diyagramı
Kaynak: G. E. P. Box, W. G. Hunter ve J. S. Hunter (1978); J. S. Hunter vd. (1988)

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (2.9)$$

şeklindedir ve burada \mathbf{b} , β 'nın en iyi doğrusal sapmasız tahminleyicisidir. \mathbf{b} 'nin varyans-kovaryans matrisi

$$\text{Var}(\mathbf{b}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \sigma^2 \quad (2.10)$$

olarak yazılabilir. Uyumu yapılmış değerler

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\mathbf{b} \quad (2.11)$$

eşitliğinden hesaplanabilir. Bir $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)'$ noktasındaki kestirilmiş cevap

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}'\mathbf{b} \quad (2.12)$$

nin varyansı

$$\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})] = \mathbf{z}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{z}\sigma^2 \quad (2.13)$$

şeklindedir.

Box ve Draper (1975, s.347), tasarım noktalarında toplanan verilere bir polinomial modelin uyumu yapılırken, kullanılacak bir cevap yüzeyi tasarımının 14 özelliğini sıralamıştır: Box ve Draper'a göre tasarım,

1. Söz konusu deney bölgesi R boyunca tatmin edici bir bilgi dağılışı türetmelidir;
2. \mathbf{x} 'deki uyumu yapılmış değer $\hat{y}(\mathbf{x})$ 'in , \mathbf{x} 'deki gerçek değer $\eta(\mathbf{x})$ 'e mümkün olduğu kadar yakın olmasına imkan vermelidir;
3. Modeldeki uyum yetersizliğini tespit etmeye imkan vermelidir;
4. Transformasyonların tahminlenmesine imkan vermelidir;
5. Deneylerin bloklarda uygulanmasına imkan vermelidir;
6. Daha yüksek derecedeki tasarımların ardışık olarak kurulmasına imkan vermelidir;
7. Hatanın içsel bir tahminini (saf hatanın bir tahminini) sağlamalıdır;
8. Aşırı gözlemlere ve genel normal teori varsayımlarındaki zayıflamalara karşı duyarsız olmalıdır;

9. Minimum sayıda deney noktasını gerektirmelidir;
10. Görsel değerlendirmelere imkan veren basit veri şablonları sağlamalıdır;
11. Hesaplamaların basit olmasına imkan vermelidir;
12. Bağımsız değişkenlerin yerleşiminde hatalar ortaya çıktığında iyi bir davranış göstermelidir; diğer bir deyişle tasarım seviyelerinin kontrolundaki hatalara karşı duyarsız olmalıdır;
13. Bağımsız değişkenlerdeki seviye sayısının büyük olmasını gerektirmemelidir;
14. Varyansın sabitliği varsayımının kontroluna imkan vermelidir.

2.4 CEVAP YÜZEYİ TASARIMLARINDA ORTOGONALLİK VE DÖNDÜRÜLEBİLİRLİK KAVRAMLARI

Yukarıdaki özelliklere ek olarak, bazen tasarımın *ortogonallik* ve/veya *döndürülebilirlik* (*rotatability*) özelliklerine de sahip olması istenir. Ortogonal tasarım, uyumu yapılmış modeldeki terimlerin birbirleriyle korelasyonsuz ve böylece parametre tahminlerinin korelasyonsuz olduğu tasarımdır. Bu durumda, deney bölgesindeki herhangi bir \mathbf{x} noktasında kestirilmiş cevabın varyansı, modeldeki parametre tahminlerinin varyanslarının ağırlıklı toplamları olarak açıklanabilir. Örneğin, birinci derece model için kullanılacak bir tasarım, yalnız ve yalnız $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisi köşegen ise ortogonaldır.

Diğer taraftan, döndürülebilir bir tasarım ile, \mathbf{x} noktasının yerleşimine bağlı olduğu bilinen $\hat{y}(\mathbf{x})$ 'in varyansı, yalnızca \mathbf{x} noktasından tasarıma olan uzaklığının bir fonksiyonu olur. Böylece, döndürülebilir bir tasarım ile, kestirim varyansı $\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})]$, tasarım merkezinden eşit uzaklıkta olan tüm \mathbf{x} noktalarında eşit olur. Bundan dolayı, girdi değişkenleri uzayında, sabit kestirim varyansının yüzeyleri, eş merkezli hiper küreler (iki boyutlu Öklid uzayında çemberler, üç boyutlu Öklid uzayında küreler) biçimini alır.

Döndürülebilirlik kavramı ilk olarak Box ve Hunter (1957) tarafından tanıtılmıştır ve günümüze kadar da önemli bir tasarım kriteri olmuştur (Khuri ve Cornell, 1987: s. 54). Döndürülebilirliğin çekici taraflarından birisi, $\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})]$ 'in büyüklüğü ile ölçülen

kestirim kalitesinin, girdi değişkenleri uzayındaki koordinat eksenlerinin döndürülmesi ile değişmemesidir (invariant olmasıdır).*

Eşitlik (2.7) ile verilen modelin uyumu yapılmak istendiğinde, bu model r 'inci dereceden k adet girdi değişkeninin bir fonksiyonu ise, $[1^{\delta_1} 2^{\delta_2} \dots k^{\delta_k}]$ ile gösterilen, d ($d = 0, 1, \dots, 2d$)'inci dereceden bir *tasarım momenti*

$$[1^{\delta_1} 2^{\delta_2} \dots k^{\delta_k}] = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{u1}^{\delta_1} x_{u2}^{\delta_2} \dots x_{uk}^{\delta_k} \quad (2.14)$$

olmaktadır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 54). Burada N gözlem sayısı ve $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ 'ler $\sum_{i=1}^k \delta_i = d$ koşulunu sağlayan negatif olmayan tamsayılardır. Bu tasarım momentleri, *moment matrisi* olarak adlandırılan $N^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X}$ matrisinin elemanlarıdır. Örneğin, önerilen model k adet kodlanmış değişkenli birinci dereceden bir model olsun. Burada kodlanmış değişkenler (x_1, x_2, \dots, x_k)

$$x_{ui} = \frac{\xi_{ui} - \bar{\xi}_i}{S_i}, \quad S_i = \left\{ \sum_{u=1}^N \frac{(\xi_{ui} - \bar{\xi}_i)^2}{N} \right\}^{1/2} \quad (2.15)$$

$u = 1, 2, \dots, N$
 $i = 1, 2, \dots, k$

şekindedir. Paydadaki $S_i, \bar{\xi}_i$ ekseninin yönündeki tasarım noktalarının yayılışının bir ölçüsüdür. Moment matrisi

$$\frac{1}{N} \mathbf{X}' \mathbf{X} = \begin{matrix} & & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & [1] & [2] & [3] & \dots & [k] \\ & [11] & [12] & [13] & \dots & [1k] \\ & & [22] & [23] & \dots & [2k] \\ & & & [33] & \dots & [3k] \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & [kk] \end{array} \right] & & & & \end{matrix} \quad (2.16)$$

simetrik

şekindedir. Burada

$$[i] = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{ui} \quad [ii] = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{ui}^2 \quad [ij] = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{ui} x_{uj} \quad i, j=1, 2, \dots, k$$

olmaktadır. Moment $[i]$, x_{ui} değerlerinin N gözlem için ortalamasıdır ve birinci derece moment olarak adlandırılır. Moment $[ii]$, x_{ui}^2 değerlerinin tüm $u = 1, 2, \dots, N$ değerleri üzerinden ortalamasıdır ve saf ikinci derece moment olarak adlandırılır. Bu moment $[i^2]$ şeklinde de yazılabilir. Moment $[ij]$, $i \neq j$ ise karma ikinci derece moment olarak adlandırılır. Bununla birlikte, değişkenlerin eşitlik (2.15)'deki gibi kodlanmasıyla, $\sum_{u=1}^N x_{ui} = 0$ ve $\sum_{u=1}^N x_{ui}^2 = N$ olur. Bundan dolayı eşitlik (2.16)'da $i = 1, 2, \dots, k$ için $[i] = 0$ ve $[ii] = 1$ olur. Böylece eşitlik (2.16)'daki moment matrisi

$$\frac{1}{N} \mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & [12] & [13] & \dots & [1k] \\ & & 1 & [23] & \dots & [2k] \\ & & & 1 & \dots & [3k] \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.17)$$

şeklinde sadeleştirilebilir.

Uyumu yapılmış model ikinci derece olduğunda, $N^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisi dördüncü dereceye kadar olan momentleri içerir. İki değişkenli durumda $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$ modeli için moment matrisi

$$\frac{1}{N} \mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_2 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & [12] \\ & 1 & [12] & [111] & [122] & [112] \\ & & 1 & [112] & [222] & [122] \\ & & & [1111] & [1122] & [1112] \\ & & & & [2222] & [1222] \\ & & & & & [1122] \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.18)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$[111] = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{u1}^3, \quad [122] = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{u1} x_{u2}^2$$

$$[1111] = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{u1}^4, \quad [1122] = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{u1}^2 x_{u2}^2$$

şeklindedir. Bu momentler $[1^3]$, $[12^2]$, $[1^4]$ ve $[1^2 2^2]$ şeklinde de gösterilebilirler.

Döndürülebilir bir tasarım için moment matrisinin genel formunu tanımlamak için, eşitlik (2.14) ile gösterilen tasarım momentinin ele alınması gerekmektedir. Bir tasarımın döndürülebilir olabilmesi için gerek ve yeter koşul, δ 'ıncı dereceden momentin formunun aşağıdaki gibi olmasıdır (Khuri ve Cornell, 1987: s.60):

$$[1^{\delta_1} 2^{\delta_2} \dots k^{\delta_k}] = 0 \quad \text{herhangi bir } \delta_i \text{ tek sayı ise}$$

$$= \frac{\lambda_{\delta} \prod_{i=1}^k (\delta_i)!}{2^{\delta/2} \prod_{i=1}^k \left(\frac{\delta_i}{2}\right)!} \quad \text{tüm } \delta_i \text{'ler çift sayı ise} \quad (2.19)$$

Burada λ_{δ} δ 'nın bir fonksiyonu olan bir değerdir. Eşitlik (2.19)'un türetilmesi için bkz. Myers ve Montgomery (1995: Ek 5). En azından bir δ_i tek ise, δ 'ıncı dereceden bir tasarım momentine tek, tüm δ_i 'ler çift ise, δ 'ıncı dereceden bir tasarım momentine çifttir denir.

Eşitlik (2.19)'daki formülü canlandırmak için, birinci derece bir model ele alınsın ($y_u = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ui} + \varepsilon_u$, $u = 1, 2, \dots, N$). Ardından moment matrisinin köşegen olmayan tüm elemanları $[ij]$ ve $[ji]$ ($i \neq j$) formundadır ve δ_i 'ler sıfır veya bir değerini alırlar. Köşegendeki momentler ise $[ii]$ veya $\delta_i = 2$, $\delta_j = 0$ ($i \neq j$) olur (Moment matrisinin (1,1)'inci elemanı hariç). Eşitlik (2.19)'dan, bu momentler $[ii] = \lambda_2 2! / 2 = \lambda_2$ şeklinde açıklanabilir. Bundan dolayı birinci dereceden döndürülebilir bir tasarım için moment matrisi

$$\frac{1}{N} \mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \lambda_2 \mathbf{I}_k \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

şeklini alır. Böylece döndürülebilir bir tasarım aynı zamanda ortogonal bir tasarım olur.

k değişkenli bir ikinci derece modelin uyumu yapıldığında, ikinci derece döndürülebilir bir tasarım için moment matrisinin formu

$$\frac{1}{N} \mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_k & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_k^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \dots & x_{k-1}x_k \\ 1 & \mathbf{0}' & & & \lambda_2 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2 & & & & & \\ x_1 & \mathbf{0} & \lambda_2 \mathbf{I}_k & & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ x_k & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & \\ x_1^2 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & & & & & & & & \\ x_2^2 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & \\ x_k^2 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & & & & & & & & \\ x_1x_2 & & & & & & & & & & & & \\ x_1x_3 & & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ x_{k-1}x_k & & & & & & & & & & & & \lambda_2 \mathbf{I}_k \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

olur. Burada \mathbf{J}_k , $k \times k$ boyutlu 1'lerden oluşan bir matris ve $k' = k(k-1)/2$ şeklindedir. Momentler $[ii] = \lambda_2$, $[iiii] = 3\lambda_4$ ve $[ijij] = \lambda_4$ 'lerden başka, (2.21)'deki moment matrisinin diğer tüm elemanları sıfırdır. Eşitlik (2.15)'deki kodlama dönüşümü kullanıldığında $\lambda_2 = 1$ olacaktır.

2.5 BİRİNCİ DERECE MODELLER VE DENEY TASARIMLARI

Bir cevap yüzeyi incelemesinin amaçlarından birisi de, gerçek cevap ile bir girdi değişkenleri grubu arasındaki fonksiyonel ilişkinin ampirik olarak bulunmasıdır. Polinomiyal modeller, gerçek modeller için yaklaşım fonksiyonları olarak kullanılmaktadırlar. Uygulamalarda genellikle düşük dereceli polinomiyaller yüksek dereceli polinomiyallere tercih edilir. Böylece söz konusu cevap üzerinde, faktör uzayının küçük bir alt bölgesinde daha az sayıda terimle çalışılabilir. Daha büyük bir bölgede bu tip düşük dereceli polinomiyal yaklaşımlar, gerçek cevaptaki daha yüksek dereceli terimlerden kaynaklanabilecek bir uyum yetersizliğinin ortaya çıkması durumunda yetersiz ve gerçek dışı olabilir.

Uygulamalarda en çok kullanılan yaklaşım modelleri, birinci bölümde de belirtildiği gibi birinci ve ikinci dereceden polinomiyaillerdir. İzleyen kesimlerde birinci derece modeller ve birinci derece modellerin uyumunu yapmak için verilerin toplanması amacıyla kurulan deney tasarımları ele alınmıştır.

2.5.1 Birinci Derece Model

k girdi değişkenli birinci derece modelin genel formu

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \varepsilon \quad (2.22)$$

şeklinde. Burada y gözlenebilir cevap değişkeni, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ bilinmeyen parametreler ve ε şansa bağlı hata terimidir. ε 'nin ortalaması sıfır ise, eşitlik (2.22)'deki modelin şansa bağlı olmayan kısmı, gerçek ortalama cevap η 'yi temsil etmektedir:

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i \quad (2.23)$$

Eşitlik (2.22)'deki ε deneysel hata olarak kabul edilmektedir. Eşitlik (2.23)'deki model, gerçek ortalama cevabı temsil etmede yetersiz ise, ε deneysel hataya ek olarak şansa bağlı olmayan (sistemik) hatayı da içeriyor demektir.

Eşitlik (2.22)'deki model matris notasyonunda eşitlik (2.7)'deki gibi yazılabilir. Burada \mathbf{y} , N ($N \geq k + 1$) gözlemden oluşan bir vektör, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)'$, $(k + 1) \times 1$ boyutlu bilinmeyen parametreler vektörü, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)'$, $N \times 1$ boyutlu hataların oluşturduğu vektör ve \mathbf{X} , $N \times (k + 1)$ boyutlu girdi değişkenlerinin seviye kombinasyonlarından oluşan bir matristir. Daha spesifik olarak, \mathbf{X} matrisi $\mathbf{X} = [\mathbf{1} : \mathbf{D}]$ şeklindedir. Burada $\mathbf{1}$, $N \times 1$ boyutlu birlerden oluşan bir vektör ve \mathbf{D} , (ii) 'inci elemanı (ξ_{ui}) , u 'uncu denemede (experimental run) kullanılan i 'inci girdi değişkeni değeri olan $N \times k$ boyutlu bir matristir. \mathbf{D} matrisi tasarım matrisi olarak adlandırılmaktadır. \mathbf{X} matrisinin rankı tam ise, $\boldsymbol{\beta}$ 'nin bir tahminleyicisi en küçük kareler tahminleyicisi \mathbf{b} 'dir ve \mathbf{b} 'nin varyans kovaryans matrisi eşitlik (2.10)'daki gibi yazılabilir.

Girdi değişkenleri ξ_i 'ler,

$$x_{ui} = 2(\xi_{ui} - \bar{\xi}_i) / R_i \quad u = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, \dots, k \quad (2.24)$$

şeklinde kodlanmış olsunlar. Burada $\bar{\xi}_i = \sum_{u=1}^N \xi_{ui} / N$ ve R_i en büyük seviye ile en küçük seviye arasındaki farktır. Böylece kodlanmış değişkenlerin değerleri

$$\sum_{u=1}^N x_{ui} = 0 \quad (2.25)$$

eşitliğini sağlarlar.

2.5.2 Birinci Derece Modeller İçin Tasarımlar

Eşitlik (2.23)'deki model gerçek ortalama cevabı temsil etmede yeterli ise, parametreleri tahminlemek için seçilen tasarım, deney bölgesinin tamamında gerçek cevabın yeterli kestirimlerini sağlamalıdır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 74). Bir $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)'$ noktasındaki kestirilmiş cevap değeri $\hat{y}(\mathbf{x})$,

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = [1, \mathbf{x}']\mathbf{b} \quad (2.26)$$

şeklinde yazılabilir. \mathbf{x} noktasında kestirilmiş cevabın varyansı

$$\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})] = [1, \mathbf{x}'] \text{Var}(\mathbf{b}) [1, \mathbf{x}']' \quad (2.27)$$

olarak elde edilir. Eşitlik (2.10) ve $\mathbf{1}'\mathbf{D} = \mathbf{0}'$ 'dan, eşitlik (2.27)

$$\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})] = [1, \mathbf{x}'] \text{diag} \left[\frac{1}{N}, (\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1} \right] [1, \mathbf{x}']' \sigma^2$$

veya

$$\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})] = \frac{\sigma^2}{N} + \mathbf{x}'(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\mathbf{x}\sigma^2 \quad (2.28)$$

yazılabilir. Eşitlik (2.28), $\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})]$ 'in tasarım matrisi \mathbf{D} 'ye olan bağımlılığını göstermektedir.

Birinci derece bir tasarımın seçimi için uygun bir kriter, $\hat{y}(\mathbf{x})$ 'in varyansının minimizasyonudur (Khuri ve Cornell, 1987: s.75). Daha spesifik olarak, sözkonusu deney

bölgesi R 'de, $\mathbf{x}'(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\mathbf{x}$ 'in mümkün olduğu kadar küçük olduğu bir tasarım araştırılmaktadır.

$\hat{y}(\mathbf{x})$ 'in minimum varyans özelliğini sağlamak için

$$0 \leq \mathbf{x}'(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\mathbf{x} \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\| \quad (2.29)$$

olduğu dikkate alınsın. Burada $\|\cdot\|$, $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{1/2}$ ve $\|(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\| = \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (d^{ij})^2 \right]^{1/2}$ (burada d^{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, k$ $(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}$ in ij 'inci elemanıdır) şeklinde tanımlanan Öklid normunu göstermektedir. Eşitlik (2.29)'a bakıldığında, $\mathbf{x}'(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\mathbf{x}$ 'i minimize etmek için $\|(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\|$ 'i mümkün olduğunca küçük yapan \mathbf{D} tasarımının seçilmesi gerektiği görülmektedir.

\mathbf{D} matrisinin i 'inci kolonu \mathbf{d}_i olsun. Böylece $\mathbf{D} = [\mathbf{d}_1; \mathbf{d}_2; \dots; \mathbf{d}_k]$ yazılabilir. Ayrıca R bölgesinde \mathbf{x}_i değerleri üzerinde

$$\mathbf{d}_i' \mathbf{d}_i \leq c_i^2 \quad (2.30)$$

gibi bir kısıt olduğu varsayılınsın. Buradaki c_i ($i = 1, 2, \dots, k$) sabit bir değerdir. Eşitsizlik (2.30) ile verilen kısıt, i 'inci koordinat eksenini yöündeki tasarımın yayılışının c_i^2 ile sınırlandırıldığı anlamına gelmektedir. Diğer bir deyişle

$$d_{ii} \leq c_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.31)$$

şeklindedir. Burada d_{ii} , $\mathbf{D}'\mathbf{D}$ 'nin i 'inci köşegen elemanıdır. Khuri ve Cornell (1987: s.99-101)'de

$$d_{ii} \geq \frac{1}{d_{ii}} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.32)$$

olduğu gösterilmiştir. Burada d_{ii} , $(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}$ 'in i 'inci köşegen elemanıdır. Böylece eşitsizlik (2.31) ve (2.32)'den, R bölgesi için

$$d_{ii} \geq \frac{1}{c_i^2} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.33)$$

olduğu görülebilir. $\text{Var}(b_i) = \sigma^2 d^i$ olduğu için $\text{Var}(b_i) \geq \sigma^2 / c_i^2$ yazılabilir. Eşitsizlik (2.32)'deki eşitlik durumu $d_{ij} = 0$ olduğunda, diğer bir deyişle, $\mathbf{d}'_i \mathbf{d}_j = 0$ ($i \neq j$) olduğunda sağlanır. Bu durumda d^i , $1/c_i^2$ değerini $d_{ii} = c_i^2$ ($i = 1, 2, \dots, k$) olduğunda alabilir. Bundan dolayı tasarım,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_i \mathbf{d}_j &= 0 & i \neq j \\ \mathbf{d}'_i \mathbf{d}_i &= c_i^2 & i = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (2.34)$$

koşullarını sağlıyorsa, d^i minimum değer olarak $1/c_i^2$ 'yi almaktadır. (2.34)'deki koşullar sağlandığında R bölgesinde $\|(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\|$ 'in minimum değerine ulaşılabilir.

(2.34)'deki koşulları sağlayan bir tasarım, \mathbf{D} matrisinin birbirine ortogonal olmasına ve saf ikinci derece momentler $\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{ui}^2 = \frac{1}{N} d_{ii}$ 'lerin R bölgesi içerisinde mümkün olduğunca büyük olmasına neden olur. Böylece (2.34) koşullarını sağlayan bir tasarım, b_i 'lerin varyansı için, σ^2 / c_i^2 'ye eşit olan minimum değerleri türetir. Birinci derece tasarım \mathbf{D} 'ye *ortogonal tasarım* denir.

Ortogonal bir tasarım ile, k girdi değişkeninin etkileri birbirlerinden bağımsız olarak tahminlenebilir. Bu yüzden \mathbf{b} 'nin varyans-kovaryans matrisinin köşegen olmayan elemanları sıfır olur. Bu da \mathbf{b} 'nin elemanlarının istatistiksel olarak bağımsız oldukları anlamına gelmektedir.

Ortogonal tasarımlar sınıfındaki tasarımlar şunlardır (Khuri ve Cornell, 1987: s.76):

1. 2^k faktöryel tasarımlar
2. Kesirli (kısmi tekrarlı) 2^k tasarımlar
3. Plackett-Burman tasarımları
4. Simpleks tasarımlar

2.5.2.1 2^k Faktöryel Tasarımlar

2^k faktöryel tasarımda her bir faktör ya da girdi değişkeni iki seviyede ölçülmektedir. Faktör seviyeleri düşük seviye -1, yüksek seviye +1 değerini alacak

şekilde kodlanabilirler. k faktörün seviyelerinin tüm olası kombinasyonları ele alındığında, kodlanmış değişkenler cinsinden 2^k satırdan oluşan bir D tasarım matrisi elde edilir. Kodlanmış değişkenler eşitlik (2.24)'deki transformasyon kullanılarak elde edilebilir. Kodlanmış formda, örneğin bir 2^3 faktöryel tasarım için tasarım matrisi aşağıdaki gibidir:

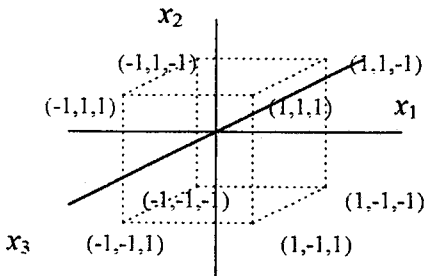
$$\begin{array}{c}
 x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\
 \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} = [\mathbf{d}_1; \mathbf{d}_2; \mathbf{d}_3] \quad (2.35)
 \end{array}$$

Tasarım noktaları Şekil 2.5'deki gibi gösterilebilir. Burada $i \neq j$ için $\mathbf{d}_i' \mathbf{d}_j = 0$ olduğu görülebilir. Ayrıca $\mathbf{d}_i' \mathbf{d}_i = 8$ ($i = 1, 2, 3$) ve böylece $\mathbf{D}'\mathbf{D} = \text{diag}(8, 8, 8)$ şeklindedir. k faktörlü durum için, $\mathbf{D}'\mathbf{D} = \text{diag}(2^k, 2^k, \dots, 2^k) = 2^k \mathbf{I}_k$ yazılabilir.

Genel olarak, bir 2^k faktöryel tasarımın seviyeleri

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) = (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$$

şeklinde 2^k noktadan oluşmaktadır. Burada \pm işaretlerinin tüm olası kombinasyonu sırasıyla seçilir. Geometrik olarak tasarım, k boyutlu bir hiperkübün köşelerinden oluşmaktadır. Deney noktalarının eşitlik (2.35)'de olduğu gibi standart sırada yazılması, denemelerin bu standart sırada uygulanması anlamına gelmez. Bunun nedeni denemelerin tesadüfi olarak gerçekleştirilmesidir.



Şekil 2-5. Bir 2^3 faktöryel tasarımın geometrik gösterimi.

Verilen bir faktörün (girdi değişkeninin) ana etkisi Yates (1937) tarafından, sözkonusu faktörün düşük ve yüksek seviyelerinde cevabın seviyesindeki ortalama değişme olarak tanımlanmaktadır. Buna göre örneğin x_1 faktörünün ana etkisi A ,

$$A = \bar{y}_{A^+} - \bar{y}_{A^-} \quad (2.36)$$

şeklinde tahminlenebilir. Faktöryel tasarımların önemli bir özelliği, yalnızca ana etkilerin değil, değişkenler arasındaki etkileşim etkilerinin de tahminlenmesine imkan vermesidir. Etkileşim etkileri, ana etkiler ile aynı şekilde tahminlenebilir.

Tablo 2.1. Bir 2^3 faktöryel tasarımda faktöryel etkilerin sistematik bir şekilde elde edilmesi için işaret kolonları ve böleneri

	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	Muamele kombinasyonu	Cevap
	+	-	-	-	+	+	+	-	(1)	$y_{(1)}$
	+	+	-	-	-	-	+	+	a	y_a
	+	-	+	-	-	+	-	+	b	y_b
	+	+	+	-	+	-	-	-	ab	y_{ab}
	+	-	-	+	+	-	-	+	c	y_c
	+	+	-	+	-	+	-	-	ac	y_{ac}
	+	-	+	+	-	-	+	-	bc	y_{bc}
	+	+	+	+	+	+	+	+	abc	y_{abc}
Bölen	8	4	4	4	4	4	4	4		

Bir 2^3 tasarım için ana etki ve etkileşim etkilerinin kolayca tahminlenmesi için Tablo 2.1'deki işaret kolonları dikkate alınabilir. Bu tablodaki muamele kombinasyonları kolonundaki harfler, hangi faktörlerin yüksek seviyelerinin kullanıldığını göstermektedir. Örneğin ab, A ve B faktörlerinin yüksek C faktörünün düşük seviyesinin kullanıldığı muamele kombinasyonuna karşılık gelmektedir. (1) ise tüm faktörlerin düşük seviyelerinin kullanıldığı muamele kombinasyonudur. Ana etki A 'nın tahminlenmesi aşağıda verildiği gibi sağlanabilir:

$$A = \frac{1}{4} (-y_{(1)} + y_a - y_b + y_{ab} - y_c + y_{ac} - y_{bc} + y_{abc}) \quad (2.37)$$

Benzer şekilde diğer ana etkiler ve etkileşim etkileri de hesaplanabilir. Örneğin etkileşim etkileri AC ve ABC ,

$$AC = \frac{1}{4} (y_{(1)} - y_a + y_b - y_{ab} - y_c + y_{ac} - y_{bc} + y_{abc}) \quad (2.38)$$

$$ABC = \frac{1}{4} (-y_{(1)} + y_a + y_b - y_{ab} + y_c - y_{ac} - y_{bc} + y_{abc}) \quad (2.39)$$

şeklinde hesaplanabilir. Etkilerin tahminlenmesinde daha hızlı bir yöntem Yates yöntemidir. Yates yöntemi Box, Hunter ve Hunter (1978: s.342-344)'da verilmiştir.

Bir 2^k tasarım için, $\text{Var}(y) = \sigma^2$ ise

$$\text{Var}(\text{genel ortalama}) = \frac{\sigma^2}{2^k},$$

$$\text{Var}(\text{etki}) = \frac{4\sigma^2}{2^k} \quad (2.40)$$

yazılabilir. Eğer cevaplar r adet gözlemin ortalaması " \bar{y} "lardan oluşuyor ise,

$$\text{Var}(\text{genel ortalama}) = \frac{\sigma^2}{N}, \quad \text{Var}(\text{etki}) = \frac{4\sigma^2}{N} \quad (2.41)$$

yazılabilir. Burada $N = r2^k$, toplam gözlem sayısıdır. (2.40) ve (2.41) formülleri Kesim 2.5.2.2'de verilen kesirli faktöryel tasarımlara da uygulanabilir.

2^k faktöryel tasarım kullanıldığında eşitlik (2.9)'daki en küçük kareler tahminleyicisi \mathbf{b} ve eşitlik (2.10)'daki varyans-kovaryans matrisi

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2^k} \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\text{Var}(\mathbf{b}) = \frac{\sigma^2}{2^k} \mathbf{I}_{k+1} \quad (2.42)$$

biçimini alır. Eşitlik (2.40) ve (2.42) karşılaştırıldığında tahminlenmiş regresyon katsayılarının (sabit terim hariç) ve bu katsayıların standart hatalarının, tahminlenmiş ana etkilerin ve ana etkilerin standart hatalarının yarısına eşit olduğu görülebilir. Bunun nedeni, bir etkinin verilen bir girdi değişkeni x_i 'nin seviyesinin -1 'den $+1$ 'e hareket ettirilmesi sonucu cevapta ortaya çıkan farklılık olarak tanımlanmasıdır. Bu da x_i iki birim değiştirildiğinde y 'de ortaya çıkan değişmeye karşılık gelmektedir. Regresyon katsayıları ise x_i bir birim değiştirildiğinde y 'de ortaya çıkan değişiktir.

2.5.2.2 2^k Faktöryel Tasarımların Bloklanması ve Kısmi Tekrarı

Önceki kesimde verilen 2^k faktöryel tasarımda denemelerin uygulanma sırası şansa bağlı olarak seçilmektedir; diğer bir deyişle tasarım *tam tesadüfi*dir. Bununla birlikte, pratikte tasarımı *tesadüf bloklarında* gerçekleştirmek bazen daha uygun olabilir. Örneğin, hammaddedeki farkedilebilen bir heterojenlik sebebiyle sıkıntı veren bir durum ortaya çıkabilir. Başka bir örnek olarak, bir 2^6 tasarım için sırası tesadüfi 64 adet denemenin uygulanması gerekmektedir. Ancak homojen hammadde karışımlarını üretmek amacıyla kullanılan bir mikser yalnızca sekiz pişim için yeterli olduğunda, 64 noktadan oluşan deney, içinde 8 denemenin yapıldığı homojen hammaddelerin oluşturduğu 8 mikser (blok) kullanılarak tasarlanabilir. Mikserler (bloklar) arasındaki farklar etkilerin tahminlerinde sapmaya yol açabilir. R. A. Fisher, bu sapma problemini çözmek için, blokların etkilerinin yaklaşık olarak eklenebilir olduğu varsayımını (genellikle makul bir varsayımdır) yapmıştır (Box ve Draper, 1987: s. 143). Bu varsayım doğrultusunda bloklar arasındaki farklar, cevabın sabit (ancak bilinmeyen) bir miktar kadar artmasına veya azalmasına neden olur.

2^k faktöryeller, yüksek derecedeki etkileşimlerin gözardı edilmesiyle, her biri 2^{k-m} noktadan oluşan 2^m bloğa bölünebilir. Önceki kesimde verilen 2^3 tasarım tekrar ele alındığında üç-faktör etkileşiminin tahmini

$$b_{123} = \frac{1}{8} (-y_{(1)} + y_a + y_b - y_{ab} + y_c - y_{ac} - y_{bc} + y_{abc}) \quad (2.43)$$

şeklinde elde edilebilir. Tablo 2.2(a)'da gösterildiği gibi, deneysel üniteler iki gruba bölünürse, bloklar arasındaki sistematik bir farklılık eşitlik (2.43) ile tahminlenebilir. Böylece üç-faktör etkileşimi, bloklar ile karışmış (confounding) olur. Tasarımın ortogonal olması nedeniyle, diğer tüm etkiler blok etkilerinden bağımsız olarak tahminlenebilir.

Bloklama için yaygın olarak yüksek dereceli etkileşimler kullanılır. Tablo 2.2(b) bir 2^4 tasarımdaki 16 denemenin iki bloğa bölünmüş halini vermektedir. Burada dört-faktör etkileşimi bloklar ile karışmıştır. Böylece bu tasarımın sahip olduğu tanımlama kontrastı $I = ABCD$ 'dir. Buradaki iki blok, $ABCD$ ile ortak olarak tek ve çift sayıda harfi bulunan muamele kombinasyonlarından oluşmaktadır.

Tablo 2.2(c)'de bir 2^5 tasarımın 32 denemesi herbiri sekiz denemeden oluşan dört bloğa bölünmüştür. Bu bloklar, denemelerin iki tanımlama kontrastına bağlı olarak bölünmesi ile elde edilmiştir. Tanımlama kontrastlarının çarpımı da bir tanımlama kontrastıdır. Tablo 2.2(c)'de iki üç-faktör etkileşimi ABC ve CDE seçilmiştir. Buradan üçüncü tanımlama kontrastı

$$I = ABC = CDE = ABC^2DE = ABDE \quad (2.44)$$

şeklinde verilmiştir. Tablo 2.2(c), ABC ve CDE ile ortak olarak tek ve çift sayıda karakterin spesifik kombinasyonu ile tüm muameleleri içeren dört bloğu vermektedir. Pratikte hangi etkileşimlerin tanımlama kontrastında dahil edileceği, hangi etkileşimlerin ihmal edilebilir olduğuna bağlıdır.

Tablo 2.2. 2^k faktöryel deneylerin bloklanması

(a) İki bloktaki $2^3: I = ABC$											
ABC ile ortak olarak sembol sayısı		Blok numarası	Muamele kombinasyonları								
Tek		1	a	b	c	abc					
Çift		2	(1)	ab	ac	bc					
(b) İki bloktaki $2^4: I = ABCD$											
$ABCD$ ile ortak olarak sembol sayısı			Blok numarası	Muamele kombinasyonları							
Tek		1	a	b	c	abc	d	abd	acd	bcd	
Çift		2	(1)	ab	ac	bc	ad	bd	cd	adcd	
(c) Dört bloktaki $2^5: I = ABC = CDE = ABDE$											
ABC ve CDE ile ortak olarak sembol sayısı		Blok numarası	Muamele kombinasyonları								
Tek	Tek	1	c	abc	ad	bd	ae	be	cde	abcde	
Çift	Tek	2	ac	bc	d	abd	e	abe	acde	bode	
Tek	Çift	3	a	b	cd	abcd	ce	abce	ade	bde	
Çift	Çift	4	(1)	ab	acd	bcd	ace	bce	de	abde	

2^k faktöryel tasarımların dezavantajı, k arttıkça deneme sayısının hızlı bir şekilde artmasıdır. Sonuç olarak, yüksek dereceli etkileşimler dahil olmak üzere, tüm

parametrelerin hassas tahminleri elde edilebilir. Eğer bu etkileşimlerin ihmal edilebilir olduğu biliniyorsa, $N = 2^k$ denemenin yalnızca bir kısmi tekrarının (kesrinin) uygulanması ile ana etkiler ve düşük dereceli etkileşimler daha ekonomik olarak elde edilebilir.

Bir 2^4 tasarımın yarı tekrarı, Tablo 2.2(b)'deki iki bloktan birinin uygulanması ile elde edilebilir. Bu durumda tam 2^4 tasarımın her bir etkisi, gözlemlerin aynı doğrusal kombinasyonları ile tahminlenen başka bir etki ile eş yapıda (aliased) olacaktır. İki adet 2^{4-1} kesirli faktöryel, Tablo 2.2(b)'deki birinci blok ile verilen tasarım için $I = -ABCD$ ilişkisi, ikinci blok ile verilen tasarım için $I = ABCD$ ilişkisi ile türetilmiştir. Eş yapılar jeneratörlerin her iki tarafının çarpımıyla bulunabilir. Bu durumda $I = ABCD$ jeneratörü aşağıdaki eş yapıları verir:

$$A = BCD, B = ACD, C = ABD, D = ABC, AB = CD, AC = BD, AD = BC$$

Üç faktör etkileşimlerinin ihmal edilebilir olduğu varsayımı geçerli ise, ana etkilerin sapmasız tahminleri elde edilebilir. Bununla birlikte, iki-faktör etkileşimleri ikili olarak karışır. Kesirli deneylerden elde edilen sonuçların yorumlanmasında, bireysel olarak anlamsız olan faktörler arasındaki etkileşimden ziyade, önemli faktörler arasındaki etkileşimlerin var olması olasıdır (Atkinson ve Donev, 1992: s.66). Tahminlenmiş katsayıların yorumlanmasında zorluk çekildiğinde, ek deneylerin uygulanması gerekir. Buradaki örnekte diğer 2^{4-1} uygulanmalıdır.

Tablo 2.2(c)'deki 2^5 tasarımın bloklarından birinin uygulanması, sekiz denemeden oluşan bir 2^{5-2} faktöryeli verir. Bu çeyrek tekrar için, her bir etki diğer üç etki ile karışmış durumdadır ve bu etkilerin birbirleri ile çarpımları tasarımın jeneratörlerini vermektedir. Tablo 2.2(c)'nin dördüncü çeyreğindeki eş yapılar aşağıdaki gibidir:

$$A = BC = ACDE = BDE$$

$$B = AC = BCDE = ADE$$

$$C = AB = DE = ABCDE$$

$$D = ABCD = CE = ABE$$

$$E = ABCE = CD = ABD$$

Tablo 2.2(c)'nin birinci bloğundan oluşan 2^{5-2} tasarım için eş yapılar aşağıdaki jeneratörlerden ortaya çıkar:

$$I = -ABC = -CDE = ABDE$$

Buradaki eş yapılara örnek olarak

$$A = -BC = -ACDE = BDE$$

verilebilir. Buradaki eş yapılar bazı işaretlerin farklı olması dışında önceki eş yapılar ile aynıdır.

Bu tasarım için, jeneratörler arasında en kısa kelime 3 harften oluşmaktadır. Böyle tasarımlar *kararlılığı 3* olan tasarımlar olarak adlandırılırlar. Kararlılığı 3 olan bir tasarımda en azından bazı ana etkiler iki-faktör etkileşimleri ile eş yapılıdır; ancak hiç bir ana etki diğer bir ana etki ile eş yapılı değildir. Kararlılığı 4 olan bir tasarımda, bazı iki-faktör etkileşimleri diğer iki-faktör etkileşimleri ile eş yapılı olabilir; ancak ana etkiler üç-faktör veya daha yüksek dereceli etkileşimleri ile eş yapılı olurlar. Kararlılığı 5 olan bir tasarımda ise, hiç bir ana etki, diğer bir ana etki veya iki-faktör etkileşimi ile eş yapılı olmazlar; ayrıca hiç bir iki-faktör etkileşimi diğer bir iki-faktör etkileşimi ile eş yapılı olmazlar.

Bir 2^{k-m} kesirli faktöryelin türetilmesi için alternatif bir yöntem, $k - m$ faktörlü bir faktöryel ile başlayıp ardından m adet faktörü eklemektir. Örneğin, Tablo 2.2(b)'deki 2^4 tasarımın birinci bloğu ($D = -ABC$ olan blok) bir 2^3 faktöryel ile türetilir.

$k = 6$ ve $m = 3$ için bir tasarım Tablo 2.3'de verilmiştir. Buradaki jeneratörler $D = ABC$, $E = AB$ ve $F = BC$ şeklinde seçildiğinde 2^3 faktöryel tasarımdan 2^{6-3} tasarım türetilir. Ayrıca bu tasarımda iki faktör etkileşimlerinden yalnızca AC , ana etkiler ile eş yapılı değildir. Yediden daha az sayıda faktörlü ve bu tip sekiz denemeli tasarımların kullanıldığı durumlarda bazı iki-faktör etkileşimleri ana etkiler ile eş yapı içerisinde bulunmayacağı için, eş yapıların nasıl seçileceği araştırmacı kişinin kararına bağlıdır. Araştırmacı, iki-faktör etkileşimlerinden AC 'nin daha önemli olduğu hakkında bir ön bilgiye sahip ise Tablo 2.3'deki gibi bir tasarım seçilebilir. AB etkileşiminin daha önemli olduğu hakkında bir ön bilgi olsaydı, bu durumda jeneratörlerden biri $E = AC$ olarak seçilirdi. Kararlılığı 3 olan tasarımlar deneysel araştırmaların genellikle eleme aşamasında (sıfıncı evresinde) kullanılırlar (Atkinson ve Donev, 1992: s. 68).

Çeşitli kararlılıktaki 2^{k-m} tasarımlar için kısa ancak kullanışlı bir liste Box, Hunter ve Hunter (1978: s.410), Myers ve Montgomery (1995: s.158-159) ve Montgomery (1991b: Ek 12)'de verilmiştir.

Tablo 2.3. 2^{6-3} kesirli faktöryel

<i>N</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i> (= <i>ABC</i>)	<i>E</i> (= <i>AB</i>)	<i>F</i> (= <i>BC</i>)	<i>AC</i>
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
2	1	-1	-1	1	-1	1	-1
3	-1	1	-1	1	-1	-1	1
4	1	1	-1	-1	1	-1	-1
5	-1	-1	1	1	1	-1	-1
6	1	-1	1	-1	-1	-1	1
7	-1	1	1	-1	-1	1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1

2.2.2.3 Plackett-Burman Tasarımları

Bu tasarımlar, N denemeden oluşan, $k = N - 1$ değişkenin var olduğu ve N 'in 4'ün katları olduğu iki seviyeli kesirli faktöryel tasarımlardır. Eğer N , 2'nin kuvveti ise bu tasarımlar önceki kesimde tanıtilen kesirli faktöryellere dönüşürler. Bununla beraber $N = 12, 20, 24, 28, 36, \dots$ olduğunda, Plackett ve Burman (1946) tarafından verilen doyurulmuş (saturated) tasarımlar kullanılabilir. $N = 12, 20, 24, 28, 36$ için Plackett ve Burman, tasarım matrisinin birinci satırlarını Tablo 2.4'deki gibi vermiştir.

Tasarımın tamamını elde etmek için, satırın birinci elemanından itibaren tüm işaretler bir pozisyon sağa (veya sola) kaydırılır ve son (ilk) işaret yeni satırın ilk (son) pozisyonuna yerleştirilir. Diğer satırlar da benzer şekilde elde edilir ve bu işlem k satır türetilinceye kadar devam eder. $k + 1$ 'inci satır ise eksilerden oluşur ve tasarıma eklenir. Box, Hunter ve Hunter (1978: s. 398) ise Plackett-Burman tasarımını oluştururken burada verilen birinci satırı birinci kolon olarak kullanmaktadır ve diğer kolonları, işaretleri aşağı doğru kaydırarak elde etmektedir.

$N = 28$ için tasarımın kuruluşu daha farklıdır. Bunun için Plackett ve Burman her biri 9×9 boyutlu işaretler bloğunu

X Y Z

Z X Y

Y Z X

şeklinde yerleştirmiştir. Tasarımın son satırına ise eksi işaretleri eklenmiştir. Bu bloklar Tablo 2.4'de verilmiştir. Plackett ve Burman (1946: ss. 323-324), N dördün katları olduğunda ve $N \leq 100$ için ($N = 92$ hariç) tasarımları elde etmiştir. $N = 92$ durumu Baumert vd. (1962)'de verilmiştir (Box ve Draper, 1987: s. 162).

Plackett-Burman tasarımlarının tamamının kararlılığı 3'tür ve genellikle diğer kararlılığı 3 olan kesirli faktöryeller gibi deneysel araştırmaların eleme aşamasında kullanılırlar.

Tablo 2.4. Plackett-Burman tasarımları

$k = 11$	$N = 12$	++-+++----+-
$k = 19$	$N = 20$	++-+++-+---++-
$k = 23$	$N = 24$	++++-+--+---+---
$k = 35$	$N = 36$	-++-+++---++++-+---+---+---+---+---
$k = 27, N = 28$		
+++++----	-+-----+--+	++-+++-++-
++ +++ ---	--++-+--	-++++-++-
-+++++----	+-----+--	+--+--+--+
---+-----+	--+--+--+	+--+--+--+
---+-----+	+-----+--	++-+++-++-
---+-----+	-+--+--+	-+++--+--+
+++-----+	--+--+--+	+--+--+--+
+++-----+	+--+--+--+	++-+++-++-
+++-----+	-+--+--+	-+++--+--+

Kaynak: D. C. Montgomery (1991b)

2.5.2.4 Kesirli Faktöryel Tasarımların Cevap Yüzeyi Yöntem Bilimine Uygulanması

İki seviyeli bir kesirli faktöryel tasarım, bir birinci derece tasarım olarak kullanılacaksa, kararlılığı en azından 3 olmalıdır. Böylece birinci derece model doğru ise,

tasarımın ana etki kontrastları, tüm β_i 'lerin birbirleriyle karışmadan tahminlenmesine imkan verir.

İki seviyeli bir tasarım, kesim 2.3.5'de verilen bileşik (composite) tasarımlarda kurulan bir blok olarak kullanılıyorsa, kararlılığı genellikle en azından 5'tir (Box ve Draper, 1987: s. 166). Eğer model (2.5) doğru ise, iki seviyeli tasarımın ana etki ve etkileşim kontrastları, tüm ana etki katsayıları β_i 'lerin ve tüm etkileşim katsayıları β_{ij} 'lerin birbirleriyle karışmadan tahminlenmesine imkan verir.

Seçilen derecedeki modelin yeterliliğinden emin olmak için, uyum yetersizliğinin kontrol edilmesi gerekmektedir. Doyurulmamış kararlılık 3 tasarımları, şüpheli etkileşimlerin tahminlenmesine imkan verebilir. Ayrıca merkez noktalarının tasarıma eklenmesi, faktörler ile cevap arasındaki ilişkide eğrisel bir yapının var olup olmadığının kontrolüne imkan verir. Kararlılık 4 tasarımları, birinci derece katsayılar herhangi bir iki-faktör etkileşimi ile karışmadığı için, daha güvenli birinci derece tasarımlar sağlar (Box ve Draper, 1987: s. 167).

2.5.2.5 Simpleks Tasarım

Simpleks tasarım $N = k + 1$ tasarım noktasından oluşan bir ortogonal tasarımdır. Burada k birinci derece modeldeki değişken sayısıdır ve tasarım noktaları, k -boyutlu bir düzgün yüzlü şeklin (regular sided figure) veya simpleksin köşelerine yerleşmiştir. Ayrıca bu tasarım noktaları için, iki nokta arasındaki θ açısı $\cos\theta = -1 / k$ koşulunu sağlamaktadır (Khuri ve Cornell, 1987: s.90). $k = 2$ için simpleks tasarım noktaları, bir eşkenar üçgenin köşeleridir; $k = 3$ için ise tasarım noktaları, bir dört yüzlü şeklin köşeleri olur. $k = 2$ ve $k = 3$ için simpleks tasarımın geometrik gösterimi Şekil 2.6 ile verilmiştir.

N noktalı bir simpleks tasarımı kurmak için, önce $N \times N$ boyutlu bir ortogonal matris P ele alınsın. Bu matrisin birinci kolonundaki tüm elemanlar birbirine eşit olsun. Simpleks tasarım için tasarım noktaları, $\sqrt{N}P$ matrisinin son $N - 1$ kolonu ile bulunabilir. $\sqrt{N}P$ 'ye eşit olan X matrisinin

$$X'X = NI_y$$

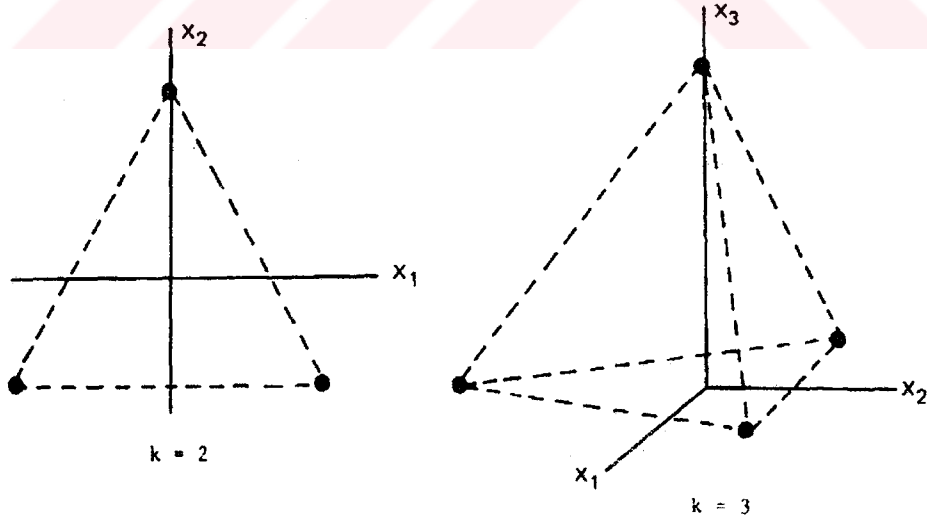
koşulunu sağladığı görülebilir. P matrisi şu şekilde elde edilebilir (Khuri ve Cornell, 1987: ss. 90, 91): $N \times N$ boyutlu tekil olmayan bir Q matrisi seçilir. Q matrisinin birinci kolonundaki elemanları birbirine eşit olsun. Gram-Schmidt ortonormalizasyon tekniği kullanılarak, Q 'nun kolonları, birbirine ortogonal ve birim uzunlukta olan başka bir N kolonlu matrise doğrusal olarak transforme edilebilir. Burada birinci kolondaki elemanlar $1/\sqrt{N}$ 'e eşittir. Örneğin, iki boyutlu bir simpleks için X matrisi

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -2/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$X = \sqrt{3}P$ koşulunu sağlayan ortogonal matris P

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

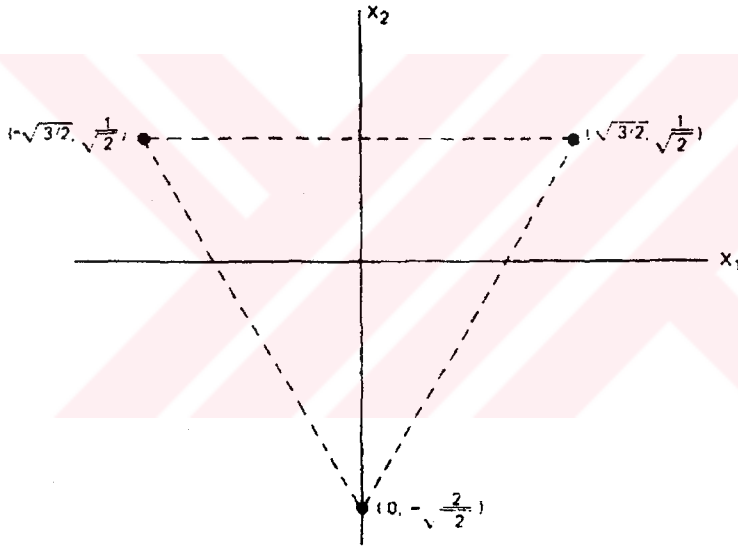
ile türetilebilir. Burada $X'X = 3P'P = 3I_3$ 'tür. Bu simpleksin köşeleri Şekil 2.7'de gösterilmiştir.



Şekil 2-6 $k = 2$ ve $k = 3$ boyutlu simpleks tasarımı

$k = N - 1$ boyutlu bir simpleks tasarımı kurmak için alternatif bir prosedür Box (1952) tarafından verilmiştir. Bu prosedür 'biri birer tasarımı' (one factor at a time

design) şu şekilde kullanılmaktadır (Khuri ve Cornell, 1987; s. 92): Birinci deney noktasında k faktörün tamamının düşük seviyesi seçilir. İkinci deney noktasında, yalnızca birinci faktörün seviyesi artırılır ve izleyen tüm deney noktalarında, bu faktörün ilk iki seviyesinin ortalaması alınır. Üçüncü deney noktasında, ikinci faktörün seviyesi artırılır ve bu faktörün diğer seviyeleri, ilk üç faktörün ortalaması olarak alınır. Bu prosedür k 'nci faktörün son seviyesinin belirlenmesine kadar devam eder. Burada bir sonraki deney noktasını kurarken seviyelerdeki artış miktarları, önceki seviyeler ile birlikte ortalamaları sıfır olacak şekilde seçilir. Bu şekilde türetilen simpleks tasarım noktalarının koordinatları aşağıdaki gibidir:



Şekil 2-7 Eşitlik (2.45) ile verilen simpleks tasarım

$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	\dots	$-a_i$	\dots	$-a_k$
a_1	$-a_2$	$-a_3$	\dots	$-a_i$	\dots	$-a_k$
0	$2a_2$	$-a_3$	\dots	$-a_i$	\dots	$-a_k$
0	0	$3a_3$	\dots	$-a_i$	\dots	$-a_k$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
				ia_i		
				0		
				\vdots		
0	0	0	\dots	0	\dots	ka_k

Burada $a_i = \{cN / i(i + 1)\}^{1/2}$ şeklindedir ve c seçilecek bir ölçekleme sabitidir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 93).

Simpleks tasarım doyurulmuş bir tasarımdır. Diğer bir deyişle tasarım noktalarının sayısı, modeldeki parametre sayısına eşittir. Böylece simpleks tasarım deneysel hata varyansını tahminlemek veya uyum yetersizliğini test etmek için yeterli serbestlik derecesine sahip değildir. Sonuç olarak, hata varyansının tahminini türetmek için tekrarlı gözlemler alınmazsa, regresyon katsayılarının anlamlılık testleri yapılamaz ve bu noktalar tasarıma eklenmezse uyum yetersizliği test edilemez.

2.6 İKİNCİ DERECE MODELLER VE DENEY TASARIMLARI

İkinci derece bir modelin parametrelerini tahminlemek için gözlenen cevap değerlerinin toplandığı tasarım, bir ikinci derece tasarımdır. İkinci derece bir tasarımda, tasarım noktası sayısı en azından $p = (k + 1)(k + 2) / 2$ olmak zorundadır. Burada k , modeldeki faktör sayısıdır. Girdi değişkenleri eşitlik (2.15)'deki gibi standardize edildiğinde, standardize değişkenler için ikinci derece model

$$y_u = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ui} + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_{ui}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=2}^k \beta_{ij} x_{ui} x_{uj} + \varepsilon_u \quad (2.46)$$

$i < j$

$u = 1, 2, \dots, N$

formundadır. Eşitlik (2.46) matris notasyonunda eşitlik (2.7)'deki gibi yazılabilir. β 'nin en küçük kareler tahminleyicisi \mathbf{b} 'nin varyans-kovaryans matrisi eşitlik (2.9)'da verildiği gibidir.

Moment matrisi $N^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X}$, 0, 1, 2, 3 ve 4'üncü dereceden tasarım momentlerinden oluşmaktadır. δ ($\delta \geq 0$)'uncu dereceden bir tasarım momenti eşitlik (2.14)'de verildiği gibidir ve $\sum_{i=1}^k \delta_i = \delta$ şeklindedir. Girdi değişkenleri ölçeklendiğinden birinci-derece momentler, $[i]$, sıfırdır ve ikinci-derece momentler, $[ii] = 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$) koşulunu sağlamaktadır. $k = 2$ ise moment matrisi

$$N^{-1}X'X = \begin{matrix} & 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 \\ \begin{matrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & [12] \\ 0 & 1 & [12] & [111] & [122] & [112] \\ 0 & [12] & 1 & [112] & [222] & [122] \\ 1 & [111] & [112] & [1111] & [1122] & [1112] \\ 1 & [122] & [222] & [1122] & [2222] & [1222] \\ [12] & [112] & [122] & [1112] & [1222] & [1122] \end{bmatrix} \end{matrix}$$

formundadır. Girdi değişkenleri ölçeklendiğinde $[iii]^2$ ve $[iiii]$ değerleri, i 'inci girdi değişkeni eksenine yönünde alınan tasarım noktalarının dağılımının çarpıklığını ve basıklığını ölçer. Eğer dağılım orijin etrafında simetrik ise $[iii]^2 = 0$ olur. Aksi halde, $[iii]^2$ 'nin büyüklüğü simetriklikten uzaklaşmanın bir ölçüsünü verir. Moment $[iiii]$, i 'inci yöndeki tasarım noktalarının yayılışı hakkında bilgi verir. Diğer bir deyişle, noktaların, merkezde mi toplandığını yoksa i 'inci bölgenin aşırı noktalarında mı bulunduğunu, veya tekdüzen dağılım gösterip göstermediği hakkında bilgi verir.

2.6.1 Ortogonal İkinci Derece Tasarımlar

Daha önce $X'X$ matrisi (veya moment matrisi) köşegen ise, buna karşılık gelen tasarım ortogonal bir tasarım olarak tanımlanmıştır. Ancak $[ii]$ ve $[ijj]$ momentleri mecburen pozitif olduğu için, ikinci derece tasarımlar için köşegen bir matris elde edilmesi mümkün değildir. Bununla beraber ortogonal ikinci derece tasarımlar, (2.46) modelindeki değişkenler aşağıdaki ortogonal polinomiyaller terimleri ile açıklanırsa elde edilebilir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 107):

$P_m(x_{ui})$, i 'inci girdi değişkeni x_i ($i = 1, 2, \dots, k$) için m 'inci ($m \geq 0$) dereceden ortogonal polinomial olsun. Ardından,

$$P_m(x_{ui}) = x_{ui}^m + \alpha_{m-1,m}x_{ui}^{m-1} + \dots + \alpha_{1m}x_{ui} + \alpha_{0m} \quad (2.47)$$

yazılabilir. Burada α değerleri aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde seçilir:

$$\sum_{u=1}^N P_m(x_{ui})P_{m-j}(x_{ui}) = 0, \quad P_0(x_{ui}) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.48)$$

Orijinal ikinci-derece model bu ortogonal polinomiyaller terimleri ile

$$y = (\mathbf{XP})(\mathbf{P}^{-1}\beta) + \varepsilon = \dot{\mathbf{X}}\dot{\beta} + \varepsilon$$

olarak açıklanabilir. Burada \mathbf{P} , x_{ui} terimlerini $P_m(x_{ui})$ 'ye dönüştüren tekil olmayan matristir. Ayrıca $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{XP}$ ve $\dot{\beta} = \mathbf{P}^{-1}\beta$ olmaktadır. Böylece, girdi değişkenleri standartlaştırıldığında

$$P_1(x_{ui}) = x_{ui}, P_2(x_{ui}) = x_{ui}^2 - [iii]x_{ui} - 1, i = 1, 2, \dots, k \quad (2.49)$$

olur. Buradan (2.46) modeli

$$y_u = (\beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_{ii}) + \sum_{i=1}^k (\beta_i + [iii]\beta_{ii}) P_1(x_{ui}) + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} P_2(x_{ui}) + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\substack{j=2 \\ i < j}}^k \beta_{ij} P_1(x_{ui}) P_1(x_{uj}) + \varepsilon_u, u = 1, 2, \dots, N \quad (2.50)$$

olarak yazılabilir. $m = 1, 2$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $\sum_{i=1}^N P_m(x_{ui}) = 0$; ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $\sum_{u=1}^N P_1(x_{ui}) P_2(x_{ui}) = 0$ olduğundan, moment matrisi $N^{-1}\dot{\mathbf{X}}'\dot{\mathbf{X}}$ aşağıdaki koşullar sağlandığında ortogonal olur:

$$[ij] = [ijj] = [ijj] = 0, i < j \text{ için}$$

$$[iij] = 1, i < j \text{ için}$$

$$[iijn] = [ijjn] = [ijnm] = 0, i < j < n \text{ için} \quad (2.51)$$

$$[iij] = [ijj] = 0, i < j \text{ için}$$

$$[ijns] = [ijn] = 0, i < j < n < s \text{ için}$$

Bu tip tasarımlara örnek olarak 3^k faktöriyel tasarımlar ve ortogonal merkezi bileşik tasarımlar gösterilebilir.

2.6.2 Döndürülebilir İkinci Derece Tasarımlar

Eğer bir tasarım döndürülebilir ise, kestirilmiş cevap \hat{y} 'nin varyansı, tasarım merkezinden eşit uzaklıktaki tüm tasarım noktalarında sabit kalır. Döndürülebilirlik için gerek ve yeter koşul eşitlik (2.19) ile verilmiştir. Bu koşuldan; ikinci-derece model

durumunda, tüm dereceleri ≤ 4 olan tüm tek momentler sıfır ve kalan çift momentler $[ii] = \lambda_2$, $[ijj] = \lambda_4$ ve $[iiii] = 3\lambda_4$ ($i, j = 1, 2, \dots, k$, $i < j$) koşullarını sağlamak zorundadır şeklinde bir sonuç çıkarılabilir. Bu da, saf dördüncü-derece moment $[iiii]$ 'nin, karma dördüncü-derece moment $[ijj]$ 'nin üç katı olması gerektiği anlamına gelir. Saf ikinci-derece moment $[ii]$ için λ_2 değeri $\lambda_2 = 1$ 'de sabitlenir ((2.15) ile verilen ölçeklemeye dayanarak). Bununla beraber, ölçekleme λ_4 'ün değerini sabitleyemez. λ_4 , döndürülebilir ikinci-derece tasarımın sahip olmasının gerektiği diğer kriterlere göre, değişik değerler alabilir. Örneğin, eşitlik (2.51)'den, $\lambda_4 = 1$ seçilirse bir döndürülebilir ikinci derece tasarım aynı zamanda ortogonal olur.

Box ve Hunter (1957: s. 213), herhangi bir döndürülebilir ikinci-derece tasarım ile, deneysel bölgedeki herhangi bir \mathbf{x} noktasındaki kestirilmiş cevabın varyansının

$$\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})] = A \left\{ 2(k+2)\lambda_4^2 + 2\lambda_4(\lambda_4 - 1)(k+2)\rho^2 + [(k+1)\lambda_4 - (k-1)]\rho^4 \right\} \quad (2.52)$$

olduğunu göstermiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 109). Burada $\rho^2 = \mathbf{x}'\mathbf{x}$ ve $A = \sigma^2 \left\{ 2N\lambda_4[(k+2)\lambda_4 - k] \right\}^{-1}$ olmaktadır. $\lambda_4 = 1$ olduğu özel bir durum için (2.52) eşitliği

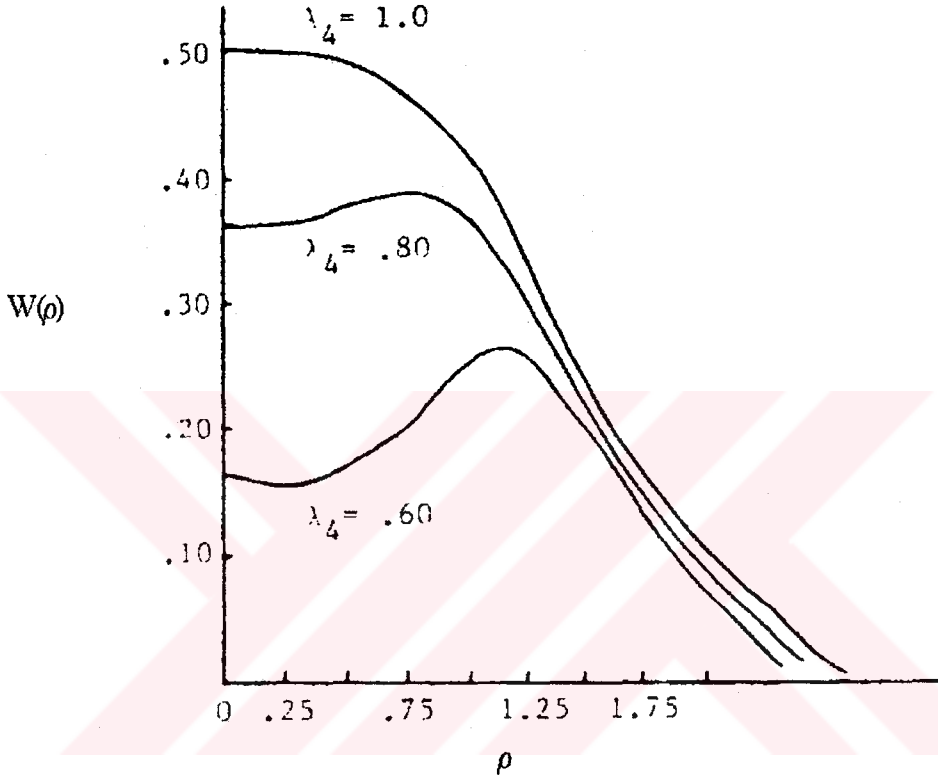
$$\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})] = \frac{\sigma^2(k+2+\rho^4)}{2N}$$

olur. Şekil 2.8'de hassasiyet fonksiyonu $W(\rho) = \left\{ N\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})]/\sigma^2 \right\}^{-1}$ 'in, $k = 2$ durumunda değişik λ_4 değerleri için ρ 'a karşı bir grafiği verilmiştir. Burada $\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})]$ eşitlik (2.52) ile verilmiştir. $W(\rho)$ 'un değerleri ile ölçülen hassasiyet, ρ biri aştığında hızlı bir şekilde azalmaktadır. (2.52)'den tasarım merkezindeki, yani $\rho = 0$ olduğunda $\hat{y}(\mathbf{x})$ 'in varyansı

$$\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{0})] = \sigma^2 \lambda_4 \left\{ N \left(\lambda_4 - \frac{k}{k+2} \right) \right\}^{-1} \quad (2.53)$$

olur. (2.53) ve Şekil 2.8'den, $\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{0})]$ 'in $\lambda_4 > k / (k + 2)$ için, λ_4 'ün azalan bir fonksiyonu olduğu görülebilir. λ_4 , bire yaklaştığında veya geçtiğinde, tasarımın merkezindeki hassasiyet artmaktadır. Bununla beraber, bu durumda, üçüncü-derece

terimlerin varlığı söz konusu olduğunda (eğer gerçekte, gerçek ortalama cevap üçüncü-dereceden bir polinomial ise), model parametrelerindeki sapmalar da oldukça yüksek olur (Khuri ve Cornell, 1987: s. 110).



Şekil 2-8 $k = 2$ olduğunda, bir ikinci-derece döndürülebilir tasarım için, ρ ve λ_4 'ün bir fonksiyonu olarak hassasiyet ölçüsü $W(\rho)$.

Kaynak : A. I. Khuri ve J. A. Cornell (1987).

Sabit bir N ve $\rho \neq 0$ için, hassasiyet fonksiyonu $W(\rho)$ 'un büyüklüğü ile ölçülen kestirimin kalitesi, λ_4 değerleri ile kullanılan döndürülebilir tasarıma bağlıdır. Şekil 2.8'den de görüldüğü gibi, ρ sıfırdan itibaren arttırıldığında hassasiyet hızlı bir şekilde azalabilir. Tasarımın merkezindeki hassasiyet, λ_4 'ün büyük değerleri için yüksek olabileceğinden, tasarım merkezinin yakınlarındaki hassasiyette büyük bir varyasyon görülebilir. Tasarım merkezi civarındaki hassasiyetin az çok tekdüzen bir dağılımın korunmasını sağlamak için, $\rho = 0$ 'daki $\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})]$ değeri, $\rho = 1$ 'deki $\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})]$ değerine eşit olan bir tasarım seçilebilir. Bu özelliği sağlayan bir döndürülebilir ikinci-derece

tasarım, *tekdüzen hassasiyetli tasarım* olarak adlandırılır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 111). Bu özellik, yarı çapı bir olan bir kürede, kestirim varyansı için yaklaşık olarak tekdüzen bir değer sağlar. Bunun amacı ise, tasarım merkezi civarındaki kestirim varyansında kararlılığı sağlamaktır. bir döndürülebilir tekdüzen hassasiyetli tasarım için değişik k değerlerine göre gerekli λ_4 değerleri Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 2.5 Bir Döndürülebilir İkinci Derece Tasarım İçin $\hat{y}(x)$ 'in $\rho = 1$ 'deki Varyansının $\rho = 0$ 'dakine Eşit Yapmak İçin Gereken λ_4 Değeri

k	2	3	4	5	6	7	8
λ_4	0.7844	0.8385	0.8704	0.8918	0.9070	0.9184	0.9274

Kaynak: A. I. Khuri ve J. A. Cornell (1987).

λ_4 , $k / (k + 2)$ 'ye yaklaştığında, (2.52)'deki A değeri sonsuz olur. Bu da döndürülebilir ikinci-derece tasarımı kullanışsız hale getirir. Box ve Hunter (1957), λ_4 'ün bu değerini ($\lambda_4 = k / (k + 2)$) *tekil* değer olarak adlandırılmışlardır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 111). Bu durum, ikinci-derece tasarımın tüm tasarım noktaları, tasarım merkezinden eşit uzaklıkta olduğunda ortaya çıkmaktadır. Kesim 2.6.6'da böyle bir tasarımın döndürülebilir olduğu gösterilmiştir. Böyle noktalar seti için, $\rho^2 = \sum_{i=1}^k x_{ui}^2$, ($u = 1, 2, \dots, N$) ve

$$\rho^2 = N^{-1} \sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^k x_{ui}^2 = \sum_{i=1}^k [ii] = k \quad (2.54)$$

olur. Burada $i = 1, 2, \dots, k$ için $[ii] = 1$ 'dir. Aynı zamanda

$$\rho^4 = N^{-1} \sum_{u=1}^N \left(\sum_{i=1}^k x_{ui}^2 \right)^2 = \sum_{i=1}^k [iii] + \sum_{i=1}^k \sum_{j \neq i}^k [ijj] \quad (2.55)$$

elde edilir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 111). (2.54) ve (2.55)'den, ikinci-derece tasarım döndürülebilir olduğunda, $[iii] = 3\lambda_4$ olduğundan

$$3k\lambda_4 + k(k-1)\lambda_4 = k^2 \quad (2.56)$$

elde edilir. (2.56) eşitliği, $\lambda_4 = k / (k + 2)$ ile denktir.

Döndürülebilir ikinci-derece tasarımları kurma yöntemleri ilk olarak Bose ve Draper (1959) tarafından $k = 3$ durumu için verilmiştir. Draper (1960), $(k - 1)$ boyutlu bir

döndürülebilir ikinci-derece tasarımdan yola çıkarak k boyutlu bir tasarımın kurulmasını sunmuştur. Burada Draper, uygun bir şekilde seçilen noktalar setlerinin eklenmesiyle, $k-1$ boyutlu noktaların koordinatlarına bir koordinat daha eklemiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 112).

2.6.3 3^k Faktöryel Tasarım

Model (2.46) saf kuadratik terimleri içerdiği için, herhangi bir ikinci-derece tasarım, her bir girdi değişkeninin en az üç seviyesini içermektedir. Olası bir ikinci-derece tasarım, her biri üç seviyeli olan k adet girdi değişkeninin seviyelerinin tüm olası kombinasyonlarında cevapların gözlenmesini gerektiren, 3^k faktöryel tasarımdır. Örneğin, $k = 2$ için, i 'inci girdi değişkeni X_{ui} 'nin üç seviyesi eşit uzaklıkta ve $a_i - c_i, a_i, a_i + c_i$ ($i = 1, 2$) formunda ise, bu seviyeler -1, 0 ve 1'e karşılık gelecek şekilde,

$$x_{ui} = \frac{\xi_{ui} - a_i}{c_i} \quad u = 1, 2, \dots, 9 \quad i = 1, 2 \quad (2.57)$$

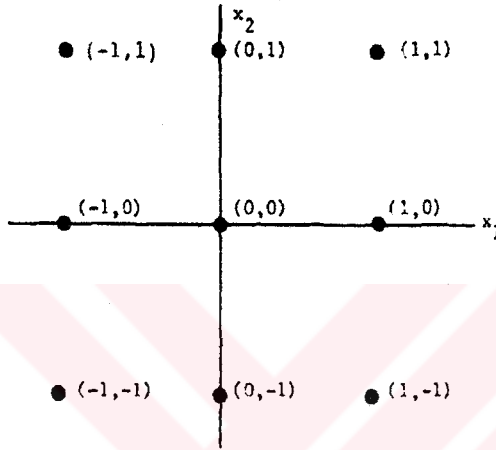
transformasyonu kullanılarak kodlanabilir. Bu durumda, kodlanmış formda, böyle bir tasarım için tasarım matrisi

$$\mathbf{D} = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

formunda olur. Tasarım noktaları Şekil 2.9'da gösterilmiştir.

3^k faktöryel tasarım durumunda, deney tasarım noktası sayısı $N = 3^k$ olur ve özellikle çok sayıda girdi değişkeni incelendiğinde aşırı derecede büyük olabilir. Deney tasarım noktalarının toplam sayısını indirmek için, bu tasarımların kesirli tekrarlarının

kullanılması ele alınabilir. $m < k$ için 3^k tasarımın 3^m 'inci kesirinin oluşturulması için genel bir prosedür Montgomery (1991: Bölüm 11)'de verilmiştir. Böyle bir kesir bir 3^{k-m} kesirli faktöriyel tasarım olarak adlandırılır. Kesirli 3^{k-m} tasarımlar için eksiksiz kapsamlı bir çalışma, $4 \leq k \leq 10$ için Connor ve Zelen (1959) tarafından verilmiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 113).



Şekil 2-9 3^2 faktöriyel tasarım

De Baun (1959), bir kaç adet üç-faktör, üç-seviyeli tasarımları tanıtmıştır. Bu tasarımlar, 3^3 tasarımdan alınan aşağıdaki noktalar altsetlerinin bir kombinasyonundan oluşmaktadır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 113):

1. 3^3 faktöriyel tasarım
2. Küp ($(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ 'deki noktalar)
3. Merkez noktası (0,0,0)
4. Sekizyüzlü ($(\pm 1, 0, 0; 0, \pm 1, 0; 0, 0, \pm 1)$ 'deki noktalar)
5. Küpsekizyüzlü ($(\pm 1, \pm 1, 0; \pm 1, 0, \pm 1; 0, \pm 1, \pm 1)$ 'deki noktalar)

De Baun tarafından incelenen tasarımlar şunlardır (Khuri ve Cornell, 1987: ss. 113, 114):

1. 3^3 faktöriyel tasarım
2. Küp + Sekizyüzlü + n merkez noktası
3. Küp + 2 Sekizyüzlü + n merkez noktası

4. K psekizy zl  + n merkez noktası
5. K p + K psekizy zl  + n merkez noktası
6. K psekizy zl  + Sekizyüzlü + n merkez noktası

De Baun yukarıdaki altı tasarımı, $\{\text{Var}[\hat{Y}(\mathbf{x})]/\sigma^2\}$ 'nin, $\rho = (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{1/2}$ (yarıçaplar)  zerindeki dağılışına ek olarak (0,0,0)'daki değerini de baz alarak karşılaştırmıştır. Sonuçta 3^3 tasarım, hiç bir şekilde 1-6 durumları içinde en etkin tasarım olarak bulunmamıştır. 3^3 tasarım, özellikle 22 ve 24 noktalı k p + iki sekizyüzlü tasarımlar ile 16 noktalı k psekizy zl  tasarımın gerisinde kalmıştır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 114).

Eğer 3^k faktöryel tasarımdaki her bir faktörün   seviyesi de eşit olarak parçalanmış ise (eşit uzaklıkta) ve seviyeleri kodlandığı için $[i]=0$ ve $[ii]=1$ ($i = 1,2,\dots,k$) ise, bu tasarımın ortogonal olduğu ve $i = 1,2,\dots,k$ için $[iii]=3/2$ olduğu gösterilebilir. $[ijj]=1$ ve tasarım ortogonal olduğundan, $[iii] \neq 3[iij]$ olduğu için 3^k tasarımın döndürülebilir olmadığı sonucunu çıkarılabilir. Bu tasarımın döndürülmesi, ikinci derece model parametrelerinin en küçük kareler tahminleyicilerinin hassasiyetini etkiler. Örneğin, 3^2 faktöryel tasarımda, faktör seviyeleri (2.15)'e göre  leklenirse tasarım matrisi

$$D = \begin{bmatrix} -g & -g \\ -g & 0 \\ -g & g \\ 0 & -g \\ 0 & 0 \\ 0 & g \\ g & -g \\ g & 0 \\ g & g \end{bmatrix}$$

olur. Burada $g = 3/\sqrt{6}$ 'dır. Burada $\lambda_4=[1122]=4g^4/9 = 1$ ve $[iii]=6g^4/9 = 3/2$ olduğunu doğrulamak kolaydır. ($i = 1,2$).

2.6.4 Box-Behnken Tasarımları

İkinci-derece modeldeki parametrelerin tahminlenmesi için üç-seviyeli eksik faktöryel tasarımların bir sınıfı Box ve Behnken (1960) tarafından geliştirilmiştir. Üç-

seviyeli eksik faktöryel tasarım, 3^k faktöryel tasarımdaki faktöryel kombinasyonların bir alt setidir. Box-Behnken tasarımları, iki seviyeli faktöryel tasarımların, dengeli eksik blok tasarımları (DEBT) ile özel bir şekilde kombinasyonu ile oluşturulur. İzleyen örnek bir Box-Behnken tasarımının nasıl oluşturulabileceğini canlandırmaktadır (Khuri ve Cornell, 1987: ss. 115, 116):

Örnek 2.1 Dört muamele ve herbirinin iki muamele içerdiği altı bloktan oluşan bir DEBT ele alınsın. Her bir muamele, tasarım içerisinde üç kez görünmektedir. Muameleler yıldız ile gösterildiğinde aşağıdaki tasarım elde edilebilir:

	x_1	x_2	x_3	x_4
1	*	*		
2			*	*
Bloklar 3	*			*
4		*	*	
5		*		*
6	*		*	

DEBT, 2^2 faktöryel tasarım

x_i	x_j
-1	-1
1	-1
-1	1
1	1

ile şu şekilde birleştirilebilir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 115): Her bloktaki iki yıldız, 2^2 tasarımın iki kolonuyla yer değiştirir. Yıldız olmayan yerlere sıfır kolonları dahil edilir. Ayrıca tasarıma merkez noktaları dahil edilir. Sonuçtaki dört değişkenli üç seviyeli Box-Behnken tasarımı aşağıdaki 27 noktadan oluşur:

x_1	x_2	x_3	x_4
-1	-1	0	0
1	-1	0	0
-1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	-1	-1
0	0	1	-1
0	0	-1	1
0	0	1	1
0	0	0	0

-1	0	0	-1
1	0	0	-1
-1	0	0	1
1	0	0	1
0	-1	-1	0
0	1	-1	0
0	-1	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

0	-1	0	-1
0	1	0	-1
0	-1	0	1
0	1	0	1
-1	0	-1	0
1	0	-1	0
-1	0	1	0
1	0	1	0
0	0	0	0

Elde edilen tasarım döndürülebilirdir ve noktalı doğrular ile gösterilmiş üç blokta blok ortogondur. İkinci derece tasarımların ortogonal bloklanması ile ilgili açıklamalar kesim 2.6.8'de verilmiştir. Bununla beraber, genel olarak Box-Behnken tasarımları her zaman döndürülebilir ve blok ortogonal olmayabilir. Box ve Behnken (1960), $k = 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12$ ve 16 girdi değişkeni için bir kaç ikinci derece tasarım vermiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 116).

2.6.5 Merkezi Bileşik Tasarımlar

Box ve Wilson (1951), 3^k faktöryel tasarımlara alternatif olarak merkezi bileşik tasarımlar (central composite designs) sınıfını önermiştir. Bir merkezi bileşik tasarım (=MBT) aşağıdakilerden oluşmaktadır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 116):

1. 2^k faktöryel veya 2^{k-m} kesirli faktöryel tasarım. Burada faktör seviyeleri -1, +1 değerleri ile kodlanır. Buna tasarımın *faktöryel parçası* denir.
2. n_0 adet merkez noktası ($n_0 \geq 1$).
3. Her bir tasarım değişkeninin eksen üzerinde, tasarım merkezine uzaklığı α olan iki yıldız (veya eksen) noktası. Bu kısım ise *eksen parçası* veya *yıldız parçası* olarak adlandırılır.

Burada toplam tasarım noktası sayısı $N = 2^k + 2k + n_0$ olur. n_0 ve α değerleri aşağıdaki paragraflarda açıklandığı şekilde seçilebilirler. Örneğin, $k = 2$ değişkenli $n_0 = 1$ ve $\alpha = \sqrt{2}$ olan bir MBT

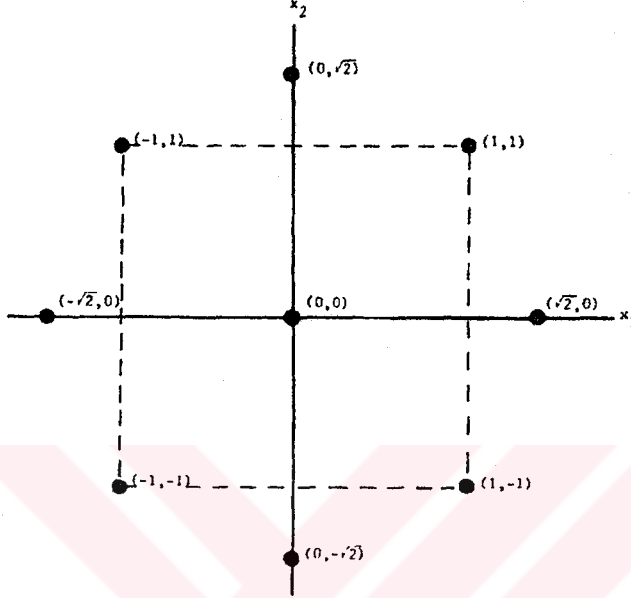
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 x_1 & x_2 \\
 \mathbf{D} = \begin{bmatrix}
 -1 & -1 \\
 1 & -1 \\
 -1 & 1 \\
 1 & 1 \\
 \sqrt{2} & 0 \\
 -\sqrt{2} & 0 \\
 0 & \sqrt{2} \\
 0 & -\sqrt{2} \\
 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

şeklindedir.

Tasarım noktaları grafiksel olarak Şekil 2.10 ile verilmiştir. Eşitlik (2.15) ile verilen ölçekleme kullanıldığında, MBT'nın tek momentlerinin sıfır olduğu kolaylıkla doğrulanabilir. Diğer bir deyişle,

$$\begin{array}{ll}
 [i] = 0 & i = 1, 2, \dots, k \\
 [iii] = 0 & i = 1, 2, \dots, k \\
 [ij] = 0 & i, j = 1, 2, \dots, k; i \neq j \\
 [iij] = 0 & i, j = 1, 2, \dots, k; i \neq j \\
 [ijk] = 0 & i \neq j \neq k \\
 [iiij] = 0 & i, j = 1, 2, \dots, k; i \neq j \\
 [iijk] = 0 & i \neq j \neq k
 \end{array}$$

Çift momentler $[ii]$, $[iiii]$ ve $[ijij]$ ($i, j = 1, 2, \dots, k$; $i \neq j$) sıfırdan farklıdır ve $[ii] = 1$ 'dir (ölçekleme dönüşümü kullanıldığında). Diğer iki moment ise merkez noktası sayısı n_0 ve yıldız noktaları için seçilen değerlere bağlıdır.



Şekil 2-10 $k = 2$ değişken için bir MBT.

$i, j = 1, 2, \dots, k$, $i \neq j$ için $[iiii] = 3[iijj]$ ise MBT aynı zamanda döndürülebilir bir tasarımdır. Eğer g , $[ii] = 1$ eşitliğini sağlayacak bir ölçek faktörü ise $g = [N / (F + 2\alpha^2)]^{1/2}$ yazılabilir. Burada $F = 2^k$ ve $N = F + 2k + n_0$, diğer bir deyişle MBT'deki toplam nokta sayısıdır. Buradan MBT için döndürülebilirlik koşulu $[iiii] = 3[iijj]$,

$$Fg^4 + 2\alpha^4 g^4 = 3Fg^4$$

veya

$$\alpha = F^{1/4} \quad (2.58)$$

olarak yazılabilir.

Eğer karma dördüncü derece moment $[ijij]$ veya λ_4 bire eşit ise, MBT aynı zamanda ortogondir. Ölçek faktörü g terimleri cinsinden karma dördüncü derece moment,

$$[ijij] = \frac{Fg^4}{N} = \frac{FN}{(F + 2\alpha^2)^2} \quad (2.59)$$

şeklinde yazılabilir. $[ijj] = 1$ olması için

$$(F + 2\alpha^2)^2 = FN \quad (2.60)$$

olmak zorundadır. MBT'ı ortogonal yapacak α , eşitlik (2.60)'dan

$$\alpha = \left(\frac{(FN)^{1/2} - F}{2} \right)^{1/2} \quad (2.61)$$

şeklinde bulunur.

MBT'ın hem döndürülebilir hem de ortogonal olması istenirse, α ve n_0 'ı bu iki özelliği sağlayacak şekilde seçmek mümkündür. Eşitlik (2.58), (2.60)'da yerine konduğunda

$$(F + 2\sqrt{F})^2 = F(F + 2k + n_0) \quad (2.62)$$

elde edilir. Eşitlik (2.62)'den n_0

$$n_0 \cong 4\sqrt{F} + 4 - 2k \quad (2.63)$$

olarak bulunur. Burada n_0 , eşitliğin sağındaki ifadeye en yakın tamsayı olarak seçilir. Örneğin, $k = 2$ ve $F = 2^2 = 4$ ise, döndürülebilir bir MBT'ın ortogonal olması için $n_0 = 8$ merkez noktası tekrarına ihtiyaç vardır. Merkez noktasındaki tekrarların sayısı, tekdüzen (veya yaklaşık tekdüzen) hassasiyet özelliğine sahip bir döndürülebilir MBT ortaya çıkaracak şekilde de seçilebilir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 119). Döndürülebilir bir tasarımın tekdüzen hassasiyet özelliğine (diğer bir deyişle tekdüzen kestirim varyansına) sahip olması için gerekli λ_4 değerleri Tablo 2.5'de verilmiştir. Eşitlik (2.59)'da α^2 yerine \sqrt{F} konulursa ve n_0 çekilirse, tekdüzen hassasiyetli döndürülebilir tasarım için merkez noktası tekrar sayısı, λ_4 'e bağlı olarak

$$n_0 \cong \lambda_4(\sqrt{F} + 2)^2 - F - 2k \quad (2.64)$$

formülünden bulunabilir. Örneğin, $k = 3$ için $F = 2^3 = 8$ ve Tablo 2.5'den $\lambda_4 = 0.8385$ bulunur. (2.64) formülünden $n_0 = 6$ merkez noktası tekrarı gerektiği görülebilir.

k değeri büyük olduğunda, MBT'ın faktöryel kısmı, bir 2^k faktöryel tasarımın kısmi tekrarı ile yer değiştirebilir. Faktöryel kısımda bir 2^{k-m} kesirli faktöryel tasarım kullanılırsa, $2^m - 1$ adet etki feda edilmiş olacaktır.

Eşitlik (2.63), (2.64) ve Tablo 2.5 kullanılarak, k girdi değişkenli ($k = 2, 3, \dots, 8$) bir döndürülebilir tasarımın hem yaklaşık ortogonal hem de yaklaşık tekdüzen hassasiyet (TH) özelliğine sahip olması için gerekli n_0 değerleri elde edilebilir. Bu değerler, F , N ve n_a değerlerine bağlı olarak Tablo 2.6'da verilmiştir. Burada n_a , yıldız noktası sayısıdır.

Tablo 2.6 Tekdüzen Hassasiyetli veya Ortogonal Döndürülebilir MBT

k	2	3	4	5	5 (1/2 tekrarı)	6	6 (1/2 tekrarı)	7	7 (1/2 tekrarı)	8	8 (1/2 tekrarı)
F	4	8	16	32	16	64	32	128	64	256	128
n_a	4	6	8	10	10	12	12	14	14	16	16
n_0 (ortogonal) (eşitlik (2.57))	8	9	12	17	10	24	15	35	22	52	33
n_0 (TH) (eşitlik (2.58))	5	6	7	10	6	15	9	21	14	28	20
N (ortogonal)	16	23	36	59	36	100	59	177	100	324	177
N (TH)	13	20	31	52	32	91	53	163	92	300	164

Kaynak: A. I. Khuri ve J. A. Cornell (1987).

Draper (1982), ortogonalite ve tekdüzen hassasiyet kriterlerine ek olarak, bir MBT'da merkez noktası tekrar sayısı n_0 'ı seçmek için bir kaç değişik kriter daha vermiştir. Bu kriterlerden bir tanesi ilk olarak Box ve Draper (1975: s.350) tarafından verilen aşağıdaki fonksiyondur:

$$\phi_1 = \frac{Nr - p^2}{N^2} \quad (2.65)$$

Burada r , $\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ 'in köşegen elemanlarının kareleri toplamıdır ve p modeldeki parametre sayısıdır. Bu fonksiyonun minimizasyonu tasarım noktalarının yayılışını minimize ederek tasarım noktalarındaki kestirim varyanslarının eşitlenmesini sağlar (Draper, 1982: s. 129). Box ve Draper (1975: s. 351) bu kriteri, küp + yıldız + n_0 merkez noktalı tasarımlarda n_0 ve α 'nın en iyi değerlerini elde etmek amacıyla uygulamıştır. Draper (1982) ise bu kriteri bir kaç değişik tasarım için kullanmıştır ve Draper'in uygulaması α 'nın sabit tutularak n_0 'ın seçimini içermektedir.

İkinci bir kriter, uyumu yapılmış ikinci derece modelin uyum yetersizliğini test etmek için merkez noktası tekrarlarının kullanılması ile ilgilidir. Bu kritere göre ve tasarımın başka yerlerinde tekrarlı noktalar bulunmadığı varsayımı altında, Draper (1982: s. 129) makul derecede duyarlı bir uyum yetersizliği testinin yapılabilmesi için, minimum

dört veya beş merkez noktası tekrarının alınmasını önermiştir. Draper (1982: s. 129) tarafından verilen üçüncü kriter, N , σ^2 ve deney bölgesinin hacmi ile normalize edilmiş, kestirilmiş cevap fonksiyonunun bütünleşik (integrated) varyansına dayanmaktadır:

$$\phi_2 = \frac{N}{\sigma^2} \int_R \text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})] d\mathbf{x} / \int_R d\mathbf{x} \quad (2.66)$$

Deney bölgesi R , yarıçapı ρ olan bir hiperküre ise, ϕ_2 , ρ ve n_0 'ın bir fonksiyonu olur. Draper'a göre bir çok MBT'da faktöryel ve yıldız noktaları yukarıda belirtilen yarıçaplı aynı hiperkürenin üzerine veya içerisine düştüğü için, $\rho = k^{1/2}$ seçimi uygundur. Bu durumda, ϕ_2 , n_0 'ın bir fonksiyonu durumuna gelmektedir ve buradaki kriter, ϕ_2 'yi minimize edecek n_0 'ı seçmektir. Draper, bu kriteri sağlamak için gerekli olan merkez noktası sayısının, ortogonallik ve tekdüzen hassasiyet kriterlerine göre gerekli olan sayıdan daha az olduğunu belirtmiştir.

Bir MBT'nin merkezi haricindeki tasarım noktaları, deneysel hatanın daha genel bir tahminini ve ikinci derece modelin parametrelerinin daha güvenilir tahminlerini elde etmek için tekrarlanabilir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 122). Dykstra (1960), tamamında ikinci derece momentlerin bire eşit olduğu, kısmen iki kez tekrarlanmış sekiz farklı MBT'ı sunmuş ve karşılaştırmıştır. Tasarımlar arasındaki karşılaştırmalar, tasarımın şu özelliklerine dayanmaktadır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 122): Üçüncü derece terimlerin varlığı nedeniyle ikinci derece model parametrelerindeki sapmalar, uyum yetersizliği testinin gücü ve kestirimin hassasiyeti. Dykstra, sekiz farklı tasarımın herbirisi için, n_0 arttırıldığında üçüncü derece terimler nedeniyle doğrusal parametrelerde ortaya çıkan sapmanın da arttığını belirtmiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 122).

2.6.6 Eş Yarıçaplı Tasarımlar

Eş yarıçaplı (equiradial) bir tasarım, herbirinin orijinden eşit uzaklıkta olduğu en az iki noktalar setinden oluşan bir tasarımdır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 123). Bu noktalar seti *eş yarıçap setleri* olarak adlandırılmaktadır. Önceki kesimlerde bahsedilen döndürülebilir merkezi bileşik tasarımlar eş yarıçaplı tasarımlar sınıfının bir üyesidir. Örneğin $k = 2$ durumu ve $\alpha = \sqrt{2}$ için, dört faktöryel ve dört eksen noktası, yarıçapı $\rho = \sqrt{2}$ olan bir çemberin üzerine düşen bir noktalar seti oluşturmaktadır. Merkez noktası

(veya noktaları) yarıçapı sıfır olan başka bir çember üzerinde bir noktalar setini oluşturmaktadır. Tek bir eş yarıçaplı set, ikinci derece modelin uyumunun yapılabilmesi için yeterli değildir. Bunu görmek için, ρ bir eş yarıçaplı noktalar setinin orijinden (tasarım merkezinden) genel uzaklığı olsun. Böylece $\sum_{i=1}^k x_{ui}^2 = \rho^2$, $u = 1, 2, \dots, N$ yazılabilir. Bu da ikinci derece model için \mathbf{X} matrisinde $x_1^2, x_2^2, \dots, x_k^2$ 'ye karşılık gelen kolonlar ile birlerden oluşan kolonun doğrusal bağımlı olduğu ve bunun sonucu olarak $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin tekil olacağı anlamına gelmektedir.

Eş yarıçaplı ikinci derece tasarımlar döndürülebilir duruma getirilebilir. Bunu göstermek için öncelikle tasarımın $s \geq 2$ eş yarıçaplı noktalar setinden oluştuğu varsayalım. n_l ve ρ_l , l 'inci eş yarıçaplı setteki nokta sayısı ve orijinden genel uzaklıkları gösterebiliriz ($l = 1, 2, \dots, s$). Ardından

$$\sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^k x_{ui}^2 = \sum_{l=1}^s n_l \rho_l^2 \quad (2.67)$$

yazılabilir. Tasarımın $[ii] = 1$, $i = 1, 2, \dots, k$ olacak şekilde ölçeklendiği varsayıldığında eşitlik (2.67)'den

$$N^{-1} \sum_{l=1}^s n_l \rho_l^2 = k \quad (2.68)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} N^{-1} \sum_{i=1}^s n_i \rho_i^4 &= N^{-1} \sum_{u=1}^N \left(\sum_{i=1}^k x_{ui}^2 \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k [iiii] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \sum_{j=1}^k [ijij] \end{aligned} \quad (2.69)$$

yazılabilir. Eşitlik (2.68) ve (2.69)'dan

$$\frac{\sum_{i=1}^s n_i \rho_i^4}{\left(\sum_{i=1}^s n_i \rho_i^2 \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^k [iiii] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \sum_{j=1}^k [ijij]}{Nk^2} \quad (2.70)$$

elde edilebilir. Burada ikinci derece eş yarıçaplı tasarımın döndürülebilir hale getirilmesi için, $[iiii] = 3\lambda_4$ ve $[ijij] = \lambda_4$ olması gerekmektedir, $i, j = 1, 2, \dots, k, i \neq j$. Bu koşullar altında eşitlik (2.70)'in

$$\frac{\sum_{i=1}^s n_i \rho_i^4}{\left(\sum_{i=1}^s n_i \rho_i^2\right)^2} = \frac{3k\lambda_4 + k(k-1)\lambda_4}{Nk^2} \quad (2.71)$$

olması gerekmektedir. Eşitlik (2.71)'den λ_4 çekildiğinde

$$\lambda_4 = \frac{Nk}{k+2} \frac{\sum_{i=1}^s n_i \rho_i^4}{\left(\sum_{i=1}^s n_i \rho_i^2\right)^2} \quad (2.72)$$

elde edilir.

Noktalar setinden birisi merkezde olduğunda, bu noktanın ρ_i değeri sıfır olur. Merkez noktası tekrarları λ_4 değerinin değiştirilmesinde kullanılabilir. Örneğin, bir tasarımda n_0 merkez noktası ve n_1 merkezde olmayan eş yarıçaplı noktaların sayısı olsun. Ardından eşitlik (2.72)

$$\lambda_4 = \frac{k(n_0 + n_1)}{n_1(k+2)} \quad (2.73)$$

şekline dönüşür. Genellikle $\lambda_4 = k / (k+2)$ değerinden kaçınılmalıdır. Böyle bir durum $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin tekil olmasına yol açan ve örneğin, tasarım yalnızca bir eş yarıçaplı setten oluştuğunda ve merkez noktası bulunmadığında ortaya çıkar.

Döndürülebilir olan ikinci derece eş yarıçaplı tasarım örnekleri, eş yarıçaplı noktalar setlerinin bir çember, bir küre veya hiperküre üzerindeki bölgeleri eşit parçalara bölen noktalar olduğu ve böylece düzgün bir çokgen veya bir çokyüzlünün köşeleri biçimini aldığı tasarımları içermektedir (Bkz. Box ve Hunter, 1957: Kesim 7).

2.6.6.1 İki-Boyutlu Tasarımlar

İki girdi değişkenli durumlar için Box ve Hunter (1957), bir tasarım bir düzgün n-gen'in köşelerinden oluşuyorsa, $n - 1$ 'e değin tüm tasarım momentlerinin döndürmeye

karşı invariant olduğunu göstermiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 127). Ardından yarıçapı sıfır olmayan tüm eş yarıçaplı setlerdeki noktalar eşit uzaklıkta ve sayıları en az beş ise, dördüncü dereceye kadar tasarım momentleri döndürmeye karşı invarianttır. Bu da ikinci derece eş yarıçaplı tasarımı döndürülebilir yapmak için yeterlidir. Böylece, yarıçapları eşit olmayan ve yarıçapı sıfır olmayan halkalarda en az beş noktanın bulunduğu ve her bir halkadaki noktaların, halkaları eşit uzunlukta parçalara bölecek şekilde yerleştirildiği (seçildiği) en az iki halka birleştirilerek, ikinci derece döndürülebilir tasarımların genel bir sınıfı elde edilebilmektedir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 127). Örneğin, $n_0 = 3$ merkez noktası ve bir adet sıfır olmayan yarıçaplı $n_1 = 5$ noktadan oluşan bir halkadan tasarım (merkez noktalı bir beşgen tasarım) ele alındığında, eşitlik (2.73)'den $\lambda_4 = 0.8$ olarak bulunabilir. Bu tasarımın geometrik gösterimi Şekil 2.11'de verildiği gibidir. Beşgen tasarımın aynı zamanda ortogonal olması isteniyorsa bu durumda $\lambda_4 = 1$ olması için beş adet merkez noktası gerekmektedir. Yarıçapları $\rho_1 > 0$ ve $\rho_2 > 0$ olan iki ortak merkezli halka ele alındığında ρ_2 / ρ_1 oranı, tekdüzen hassasiyetli bir tasarım elde edilmek isteniyorsa $\lambda_4 = 0.7844$ için, ortogonal bir tasarım elde edilmek isteniyorsa $\lambda_4 = 1$ için ve verilen n_1 ve n_2 değerleri için eşitlik (2.72) kullanılarak seçilebilir. Buradaki λ_4 değerleri Tablo 2.5'deki değerlerdir. Tablo 2.7 ise bazı ρ_2 / ρ_1 değerlerini vermektedir.

Tablo 2.7 Merkez Noktasının Bulunmadığı Durumlarda Bir Döndürülebilir Eş Yarıçaplı Tasarımın İki Ortak Merkezli Halkasının Oranları

n_1	5	5	5	6	6	7
n_2	6	7	8	7	8	8
ρ_2 / ρ_1 (tekdüzen hassasiyet)	0.414	0.438	0.454	0.407	0.430	0.404
ρ_2 / ρ_1 (ortogonalite)	0.204	0.267	0.304	0.189	0.150	0.176

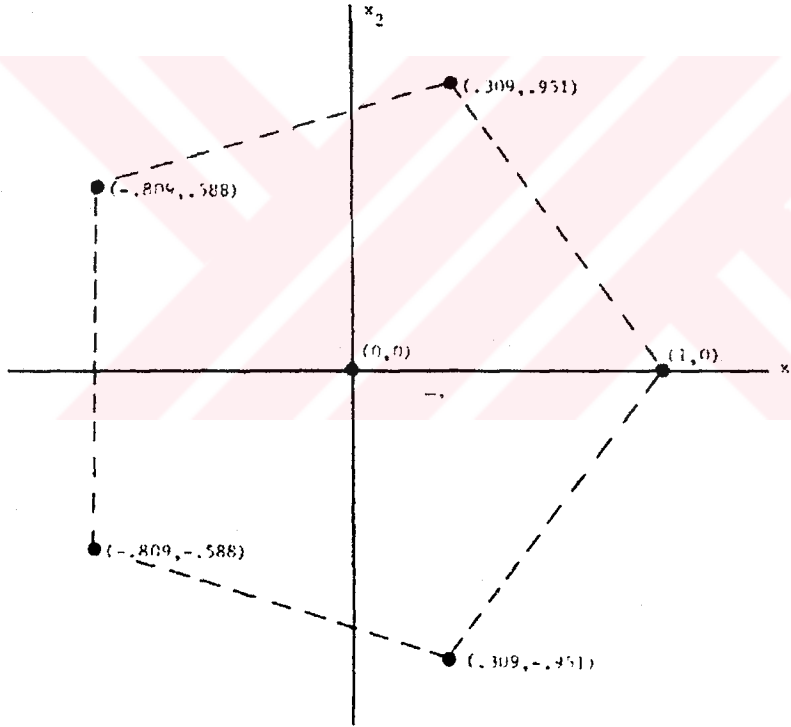
Kaynak: A. I. Khuri ve J. A. Cornell (1987).

Bir eş yarıçaplı tasarım için tasarım matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir (Myers ve Montgomery, 1995: s. 325):

$$\begin{matrix} x_1 & & x_2 \\ \{ \rho_l \cos[\theta + 2\pi u / n_l], \rho_l \sin[\theta + 2\pi u / n_l] \}, & u = 0, 1, 2, \dots, n_l - 1 & l = 1, 2, \dots, s \end{matrix}$$

Burada θ , seçilecek ilk noktadan ve orijinden geçen bir doğru ile x_1 eksenini arasındaki açı olup, $X'X$ matrisinin varyans yapısı ele alındığında, herhangi bir etkisi bulunmamaktadır. Sonuç olarak $X'X$ matrisi tasarımın döndürülmesine karşı invarianttır.

İki-Boyutlu Bir Eş Yarıçaplı Tasarımda herbir sıfır olmayan yarıçaplı halkanın en az beş noktadan oluşması koşulu, ikinci-derece döndürülebilirlik için gerek koşul olmayıp yeter koşuldur (Khuri ve Cornell, 1987: s.128). Diğer bir deyişle, sıfır olmayan yarıçaplı halkalar en azından halkaları eşit parçalara bölen beş noktadan oluşuyor ise, s halkanın tamamı bir ikinci-derece döndürülebilir tasarım biçimini alır. Bununla beraber, s halkanın tamamı bir ikinci-derece döndürülebilir tasarımı oluşturmuş ise, her bir halkanın en az beş noktadan oluşması zorunlu değildir. Bu durumla ilgili bir örnek olarak Box ve Hunter (1957: s. 220), herbir seti üç noktadan oluşan ve bu üç noktadan merkezi orijin olan bir eşkenar üçgenin köşelerinde bulunduğu s adet seti ele almıştır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 128).



Şekil 2-11 Merkez Noktalı Bir Beşgen Tasarımı

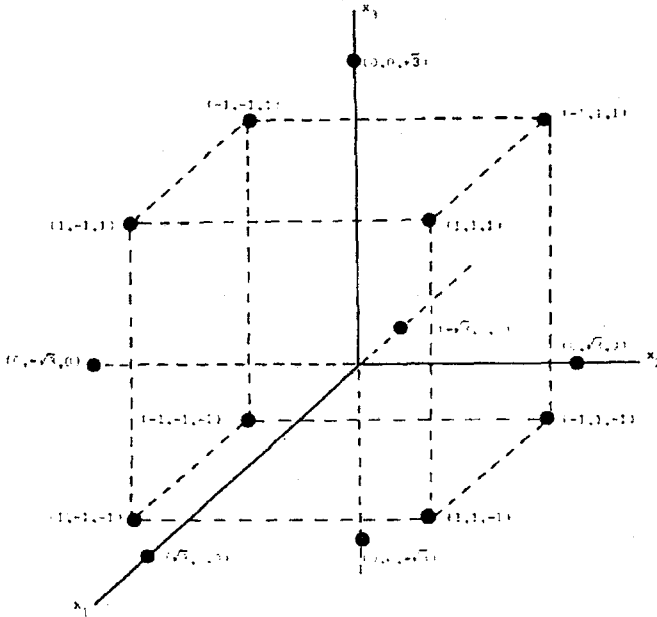
2.6.6.2 İkidenden Fazla Boyutlu Eş Yarıçaplı Tasarımlar

Box ve Hunter (1957) en az üç boyutlu eş yarıçaplı tasarımlar ile ilgili birkaç örnekten oluşan bir listeyi vermiştir. Üç boyutlu durumda, eş yarıçaplı noktalar seti ile ilgili tasarımlar aşağıda verildiği gibidir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 130):

1. Dört yüzlü şeklin dört köşesi $(-1, -1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ ve $(1, 1, 1)$;

2. Sekiz yüzünün altı köşesi $(\pm\sqrt{3}, 0, 0), (0, \pm\sqrt{3}, 0), (0, 0, \pm\sqrt{3})$;
3. Kübün sekiz köşesi $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$;
4. Oniki yüzünün oniki köşesi $(0, \pm a, \pm b), (\pm b, 0 \pm a), (\pm a, 0, \pm b)$;
5. Yirmi yüzünün yirmi köşesi $(0, \pm 1/c, \pm c), (\pm c, 0, \pm 1/c), (\pm 1/c, \pm c, 0), (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$;

Burada $a = 1.473$, $b = 0.911$ ve $c = 1.618$ 'dir. Yukarıdaki tasarımlarda herbir noktanın orijin $(0, 0, 0)$ 'dan uzaklığı $\rho = \sqrt{3}$ 'tür. Dört yüzlü, sekiz yüzlü ve kübün köşeleri, bireysel olarak ikinci derece döndürülebilir tasarımı desteklemeyip, birinci derece döndürülebilir tasarımı desteklemektedirler. Yirmi yüzlü ve oniki yüzünün köşeleri bireysel olarak ikinci derece bir tekil döndürülebilir tasarım biçimini alırlar. Burada tekilliğe yol açan değer $\lambda_4 = 3/5$ 'tir. İki boyutlu durumda olduğu gibi, yirmi yüzlü ve oniki yüzülü setlerin, merkez noktaları ve / veya diğer bir yirmi yüzlü veya oniki yüzülü ile ($\rho_1 \neq \rho_2$ ise) genişletilmesi mümkündür. Aynı zamanda bireysel olarak ikinci derece bir döndürülebilir tasarımı desteklemeyen noktalar seti birleştirilebilir. Şekil 2.12'de sekiz köşeli bir kübün altı köşeli bir sekiz yüzülü ile birleştirilmesiyle oluşturulmuş bir tasarım verilmiştir ($\rho_1 \neq \rho_2$).



Şekil 2-12 Bir kübün sekiz köşesi ve bir sekiz yüzünün altı köşesi.
Kaynak: A. I. Khuri ve J. A. Cornell (1987).

Üç boyuttan fazla olan durumlarda, eş yarıçaplı setler üç boyutludaki eş yarıçaplı setlere benzer şekilde düzenlenebilir. Bu düzenlemeler düzgün simpleks (sekiz yüzünün $k + 1$ köşeli k -boyutlu benzeri), çapraz-çokyüzlü (sekiz yüzünün $2k$ köşeli k -boyutlu benzeri) ve hiperkübü (Kübün 2^k köşeli k -boyutlu benzeri) içermektedir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 130).

2.6.7 Küçük Bileşik Tasarımlar

Kesim 2.6.5'de bahsedilen k faktörlü ikinci derece modellerin uyumunu yapmak için tavsiye edilen bileşik tasarımlar, kararlılığı en azından 5 olan küp kısmı + yıldız noktaları + merkez noktalarını içermektedir. İkinci derece model katsayılarını tahminlemek için en azından katsayı sayısı $\frac{1}{2}(k + 1)(k + 2)$ adet tasarım noktası gerekmektedir. Hartley (1959) bir bileşik tasarımın küp kısmının kararlılığının 5 olması gerekmediğini ifade etmiştir. İki faktör etkileşimleri, bir başka iki faktör etkileşimi ile eş yapılmamak koşuluyla, küp kısmının kararlılığı 3'e kadar düşebilir. Tasarımın yıldız kısmı ana etkiler için ek bilgi sağladığı için, iki faktör etkileşimleri ile ana etkiler eş yapılabılır. Westlake (1965) $k = 5, 7$ ve 9 durumları için küp kısmında Hartley'in tasarımlarına göre daha az nokta gerektiren tasarımlar vermiştir (Draper, 1985: s. 173). Tablo 2.8'de $2 \leq k \leq 9$ için değişik tasarımlardaki nokta sayıları verilmiştir.

Tablo 2.8 Bazı küçük bileşik tasarımlar için gerekli nokta sayıları

Faktör sayısı, k	2	3	4	5	6	7	8	9
Katsayılar $\frac{1}{2}(k + 1)(k + 2)$	6	10	15	21	28	36	45	55
Box-Hunter (1957) tasarımları	8	14	24	26	44	78	80	146
Hartley (1959) tasarımları	6	10	16	26	28	46	80	82
Westlake (1965) tasarımları	—	—	—	22	—	40	—	62

Kaynak: N. R. Draper (1985).

Westlake (1965), $k = 5$ için 22-denemeli üç örnek, $k = 7$ için 40-denemeli bir örnek ve $k = 9$ için 62-denemeli bir örnek tasarım vermiştir (Draper, 1985: s. 173). Draper (1985) ise Westlake'in tasarımlarından daha küçük tasarımların elde edilebileceğini göstermiştir. Bundan başka $k = 5$ ve 9 için, Westlake'in bulduğu ile eşit sayıda noktalı tasarımlar daha basit bir şekilde ve $k = 7$ için daha basit tasarımlar 42 noktalı olarak elde edilmektedir. Draper'ın önerdiği tasarımların avantajı, Westlake (1965) tarafından gösterilen yaratıcılığa gerek kalmamasıdır. Basit yöntem şu şekildedir (Draper, 1985: s. 174): (a) Tasarımın küp kısmı için bir Plackett ve Burman (1946) tasarımının k kolonu kullanılır. (b) Tekrar eden denemeler olduğunda, deneme sayısını azaltmak amacıyla tekrarlayan kısımların herbiri çıkarılır. (c) $\alpha = k^{1/2}$ ise tasarımın tekil olmaması için merkez noktası eklenir.

Tablo 2.9 Bir 12-denemeli Plackett-Burman tasarımından beş kolonun temel olarak iki değişik seçimi

(a) İki denemenin aynı olması durumu				
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-
-	-	+	+	+
-	+	-	+	+
-	+	+	-	+
-	+	+	+	-
+	-	-	+	+
+	-	+	-	+
+	-	+	+	-
+	+	-	-	+
+	+	-	+	-
+	+	+	-	-

(b) İki denemenin bir ters görüntü şeklinde olması durumu				
-	-	-	-	-
+	+	+	+	+
-	-	+	+	+
-	+	+	-	+
+	-	-	+	+
+	+	-	+	-
+	+	+	-	-
+	-	+	-	-
+	-	-	-	+
-	+	-	+	-
-	+	-	-	+
-	-	+	+	-

Kaynak: N. R. Draper (1985)

Örneğin $k = 5$ için Draper (1985), 12 denemeli bir Plackett-Burman tasarımındaki 11 kolonun 5'ini kullanmıştır. Burada tekil olmayan tasarım türeten $\binom{11}{5}$ olası seçim yapılabilmektedir. Sonuçta 22 deneme gerekmektedir ve bu sayı Westlake'in bulduğu ile aynıdır. Küp kısımları incelendiğinde 5 kolonun 66 seçimi, çift tekrarlayan bir denemeyi

içeren tasarımları türetmektedir. Böylece tekrarlayan denemenin çıkartılmasıyla 21 denemeli bir tasarım elde edilmiş olur ve bu da Westlake'in tasarımdan bir deneme eksiktir. Kalan 396 tasarımlarda ise denemelerden ikisi "terstir"; diğer bir deyişle "aynadaki görüntü" veya "katlanmış (foldover)" denemelerdir. Çift tekrarlı denemeli tasarıma bir örnek olarak Plackett-Burman tasarımının (1, 2, 3, 9, 11) kolonlarından oluşturulabilir. Burada 3'üncü ve 11'inci denemeler aynıdır. (1, 2, 3, 7, 11) kolonları ise 2'inci ve 3'üncü denemelerin ters görüntü oluşturdukları bir tasarım türetmektedir. Tasarım matrisi Plackett ve Burman (1946) tarafından önerilen formüle göre yazılırsa ve işaretleri sola doğru hareket ettirerek, en soldaki işareti izleyen denemenin en sağına atarak oluşturulduğunda buradaki kolon numaraları elde edilebilir. İzleyen kolon numaralandırması Box, Hunter ve Hunter (1978; s. 398)'in kullandığından farklıdır. Burada (1, 2, 3,..., 11) \rightarrow (1, 11, 10,..., 2) transformasyonu uygulanmalıdır. Bu notasyon farklılığı Box, Hunter ve Hunter'in Plackett ve Burman tasarımını oluştururken birinci satırı bir kolon olarak kullanmasından ve sütunlardaki işaretleri aşağı doğru kaydırmasından kaynaklanmaktadır. Beş kolonun esas olarak iki farklı seçimi Tablo 2.9 ile verilmiştir. $k = 7$ ve 9 durumları ile ilgili detaylar için Draper (1985)'e baş vurulabilir.

2.6.8 Diğer İkinci Derece Tasarımlar

Bu kesimde, ikinci derece modellerin tasarımında kullanılan diğer cevap yüzeyi tasarımları kısaca tanıtılmıştır. Bu tasarımlardan kesim 2.6.8.3'te verilen Koshal tasarımları ise yalnızca ikinci derece değil, birinci derece modeller ve ikinci derecenin üzerindeki modeller için de kullanılabilir.

2.6.8.1 Silindirik Döndürülebilir Tasarımlar

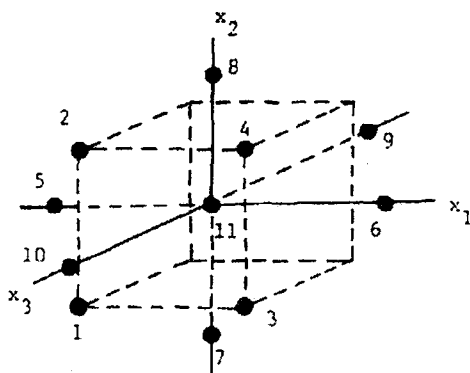
Herzberg (1966), döndürülebilir tasarımlardan daha az sınırlayıcı ve herhangi bir derecede döndürülebilirliğin sağlanması için daha az sayıda nokta gerektiren bir tasarımlar sınıfı olarak silindirik döndürülebilir tasarımları önermiştir. Kestirilmiş cevabın varyansı, belli bir ekseninde merkezlenmiş aynı ($k - 1$) boyutlu hiper kürenin üzerindeki noktalarda sabit ise, k -boyutlu tasarım, silindirik döndürülebilirdir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 130). İkinci derece silindirik döndürülebilir tasarımlara bir örnek olarak Şekil

2.13'deki $k = 3$ boyutlu tasarım Khuri ve Cornell (1987: s. 132) tarafından verilmiştir. Burada tasarım noktalarının x_1, x_2 düzlemine izdüşümleri bir döndürülebilir tasarım türetmektedir.

k değişkenli d 'inci dereceden bir model için silindirik döndürülebilirlik koşulları, Kesim 2.4'de belirtilen döndürülebilirliğe benzerdir. Kestirilmiş cevabın varyansı, $x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_k = 0$ da merkezlenmiş $(k - 1)$ boyutlu bir hiperküre üzerindeki noktalarda sabit tutulmaya çalışılırsa, silindirik döndürülebilirlik için gerek ve yeter koşul, tasarım momentlerinin aşağıdaki eşitliği sağlamasıdır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 131):

$$[1^{\delta_1} 2^{\delta_2} \dots k^{\delta_k}] = \begin{cases} 0 & \text{herhangi bir } \delta_j \text{ tek ise } j \neq i \\ \frac{\lambda_{\delta, \delta_i} \left(\prod_{j=1}^k \delta_j! \right)}{2^{\delta/2} \prod_{j=1}^k \left(\frac{1}{2} \delta_j \right)!} & \text{tüm } \delta_j \text{'ler çift ise, } j \neq i \end{cases}$$

Burada $\delta = \sum_{j=1}^k \delta_j$ momentin derecesidir ve $0 \leq \delta \leq 2d$ dir; ayrıca $\lambda_{\delta, \delta_i}$, δ ve δ_i 'ye bağlı ve silindirik döndürülebilir tasarımın diğer tasarım kriterlerini sağlamasına bağlı olarak seçilebilecek bir sabittir.



Nokta	x_1	x_2	x_3
1.	-1	-1	1
2.	-1	1	1
3.	1	-1	1
4.	1	1	1
5.	$-\sqrt{2}$	0	0
6.	$\sqrt{2}$	0	0
7.	0	$-\sqrt{2}$	0
8.	0	$\sqrt{2}$	0
9.	0	0	$-\sqrt{2}$
10.	0	0	$\sqrt{2}$
11.	0	0	0

Şekil 2-13 $k = 3$ boyutlu x_3 eksenine göre bir silindirik döndürülebilir tasarım.
Kaynak: A. I. Khuri ve J. A. Cornell (1987).

2.6.8.2 Asimetrik Döndürülebilir Tasarımlar

Simetrik bir tasarım, tüm faktörlerin eşit sayıda seviyeye sahip olduğu tasarımlardır. Asimetrik tasarımlar ise seviye sayısının tüm faktörler için eşit olmadığı tasarımlardır. Asimetrik döndürülebilir tasarımlar, faktör seviye sayılarının eşit olmadığı ve döndürülebilirliğin istendiği durumlarda kullanılırlar (Khuri ve Cornell, 1987: s. 132).

Mehta ve Das (1968) bir ikinci derece döndürülebilir tasarımın, bir ortogonal transformasyon kullanarak bir ikinci derece simetrik döndürülebilir tasarımdan elde edilebileceğini göstermiştir. Bu transformasyon döndürülebilirlik bozulmadan, faktörlerin değişik seviyelere sahip olmalarına imkan vermektedir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 132). Bununla beraber her zaman herbir faktör için belirlenmiş sayıda seviye elde edilmesi mümkün değildir.

Örnek olarak dört faktörlü bir merkezi bileşik tasarım $(\pm a, \pm a, \pm a, \pm a)$, $(\pm 2a, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 2a, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 2a, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 2a)$, $(0, 0, 0, 0)$ ele alındığında (burada a , sıfırdan farklı bir sabittir), bu tasarım noktaları aşağıdaki transformasyon ile transforme edilebilir (Khuri ve Cornell, 1987: ss. 132-133):

$$z'_u = x'_u \mathbf{B}' \quad u = 1, 2, \dots, 25$$

Burada x'_u u 'uncu tasarım noktasının koordinatları, z'_u u 'uncu yeni tasarım noktasının koordinatları ve \mathbf{B} aşağıdaki gibi bir ortogonal matristir:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Bu transformasyon, iki faktörün 0 ve $\pm\sqrt{2}$ şeklinde üç seviyeli, diğer iki faktörün ise 0 , $\pm a / \sqrt{5}$, $\pm 2a / \sqrt{5}$ ve $\pm 3a / \sqrt{5}$ şeklinde yedi seviyeli olduğu dört faktörlü bir döndürülebilir tasarım türetmektedir. İkinci derece asimetrik döndürülebilir tasarımlar ile ilgili örnekler Mehta ve Das (1968) tarafından verilmiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 133).

2.6.8.3 Koshal Tasarımları

k değişkenli d 'inci dereceden bir polinomdaki katsayı sayısı $p = \{(k + d)!\} / (d!k!)$ 'dir. p sayıda deneme içeren bir tasarım $d = 2$ durumu için Koshal (1933) tarafından verilmiştir. Koshal, bir olabilirlik fonksiyonları setinin çözümünde kullanmak üzere bu tasarımları önermiştir (Myers ve Montgomery, 1995: s. 357; Box ve Draper, 1987: s. 522). Koshal'ın tasarımlarının herhangi bir d derecesi ve k faktör sayısı için genelleştirilmesi mümkündür.

1. Birinci-Derece Koshal Tasarımları ($d = 1$). Bu tasarımlar $N = k + 1$ denemeden oluşan birer birer (one factor at a time) tasarımlardır. $k = 2$ için birinci derece modeldeki üç parametre

$$\mathbf{D} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & \end{matrix} \quad d = 1, k = 2, N = p = 3$$

tasarımı kullanılarak tahminlenebilir. Burada 0 ve 1 herbir faktör için seçilen iki seviyeye karşılık gelmektedir. $k = 4$ için birinci derece Koshal tasarımı

$$\mathbf{D} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & & \end{matrix} \quad d = 1, k = 4, N = p = 5$$

şeklinde oluşturulabilir.

2. İkinci-Derece Koshal Tasarımları ($d = 2$). İkinci derece bir modelin uyumunu yapmak için kullanılan tasarım en az üç seviyeli olmak zorundadır. Birer birer yaklaşımı ikinci derece tasarımlar için de kullanılabilir. $k = 3$ için Koshal tasarımı

$$\begin{array}{c}
 x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\
 \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad d=2, \quad k=3, \quad N=p=10
 \end{array}$$

veya

$$\begin{array}{c}
 x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\
 \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

şeklindedir (Box ve Draper, 1987: s. 524). Bu tasarımlar herhangi bir k için oluşturulabilir. Burada \mathbf{D}_1 tasarımında tasarım satırlarındaki sayılar ikinci derece polinomial eşitliğin katsayılarının indisleri ile ilişkilidir.

3. Daha Yüksek Dereceli Koshal Tasarımları. Birinci ve ikinci derece Koshal tasarımlarına benzer şekilde daha yüksek dereceli modellerin uyumunu yapmak için daha yüksek dereceli Koshal tasarımları kurulabilir. Örneğin, $k = 3$ durumunda bir üçüncü derece tasarım

$$\begin{array}{c}
 x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\
 \mathbf{D} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 2 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 2 \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 \\
 3 & 0 & 0 \\
 0 & 3 & 0 \\
 0 & 0 & 3 \\
 1 & 2 & 0 \\
 2 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 2 \\
 2 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 2 \\
 0 & 2 & 1 \\
 1 & 1 & 1
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$d = 3, \quad k = 3, \quad N = p = 20$$

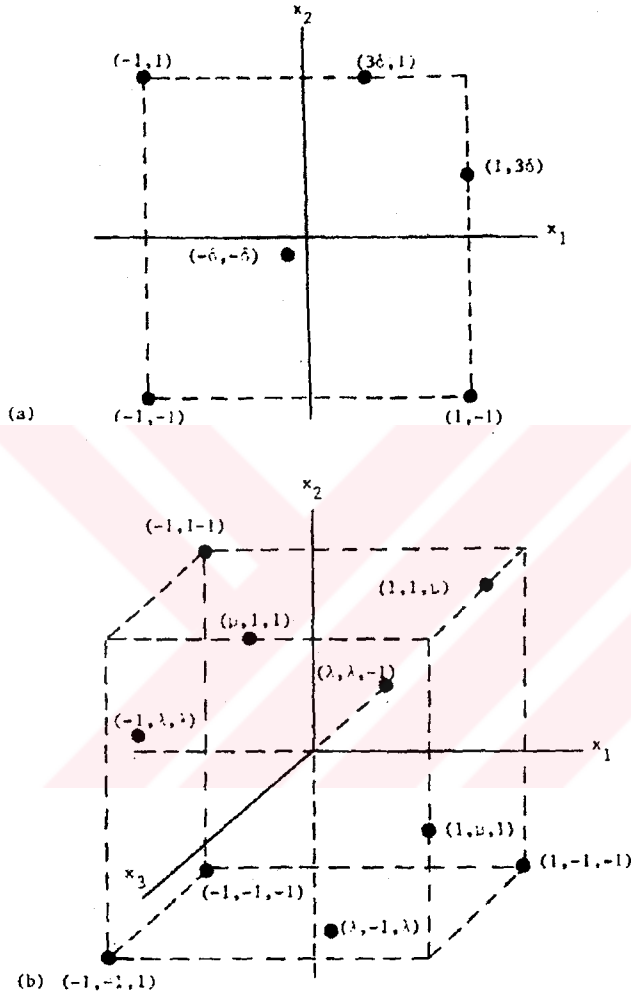
şeklinde yazılabilir.

2.6.8.4 Box-Draper Doyurulmuş Tasarımları

Tasarım noktalarının sayısı, uyumu yapılacak modeldeki terimlerin sayısına eşit olduğunda, tasarıma ve karşılık geldiği modele doyurulmuş denilmektedir. M. J. Box ve Draper (1971) k değişken için birkaç doyurulmuş ikinci derece tasarım vermiştir ve tasarım noktalarının optimum seçiminin, $k = 2$ ve $k = 3$ değişkenli durumlar için $|\mathbf{X}'\mathbf{X}|$ determinantının maksimizasyonu kriteri kullanılarak gerçekleştirilmesini önermiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 133). Bu tasarımlarda tasarım değişkenleri $i = 1, 2, \dots, k$ için $-1 \leq x_i \leq 1$ şeklinde kodlanmıştır. $k = 2$ için M. J. Box ve Draper'ın altı tasarım noktası $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-\delta, -\delta)$, $(1, 3\delta)$ ve $(3\delta, 1)$ şeklindedir ve burada $\delta = (4 - \sqrt{13}) / 3 = 0.1315$ şeklindedir. (bkz. Şekil 2.14a). $k = 3$ için 10 tasarım noktası $(-1, -1, -1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, \lambda, \lambda)$, $(\lambda, -1, \lambda)$, $(\lambda, \lambda, -1)$, $(\mu, 1, 1)$, $(1, \mu, 1)$, $(1, 1, \mu)$ şeklindedir ve burada $\lambda = 0.1925$ ve $\mu = -0.2912$ 'dir. (bkz. Şekil 2.14b).

M. J. Box ve Draper (1974) bu tasarımları $k \geq 4$ için genelleştirilmiştir. Bununla beraber genelleştirilmiş tasarımlar $k = 4$ ve $k \geq 7$ için optimum değildir. Burada bu durumlardaki optimalite problemi çözümsüz kalmıştır. M. J. Box ve Draper, $k = 4$ için

Dubova ve Federov (1972)'un daha iyi tasarımlar bulduğuna işaret etmiştir ve Jack Kiefer (basılmamış bir çalışmada) genelleştirilmiş tasarımların $k \geq 7$ için optimal olamayacağını belirtmiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 135).



Şekil 2-14 k değişkenli ikinci derece model için Box-Draper doyurulmuş tasarımları (a) $k = 2$; (b) $k = 3$.

Kaynak: A. I. Khuri ve J. A. Cornell (1987).

2.6.8.5 Tekdüzen Kabuk (Uniform Shell) Tasarımları

Tekdüzen kabuk (uniform shell) tasarımları Doehlert (1970) ve Doehlert ve Klee (1972) tarafından geliştirilmiştir. Bu tasarımlar, ortak merkezli küresel kabuklar üzerinde tekdüzen olarak bölünmüş noktalardan oluşmaktadır. Tasarım noktalarının tekdüzen aralıklarla yerleştirilmesi gerekliliği Scheffé (1963) tarafından motive edilmiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 135).

Doehlert (1970) bu tasarımları türetmek için genel bir yöntem tanımlamıştır. Buna göre $k = 2$ için köşe koordinatları $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.5, 0.866)$ olan bir eşkenar üçgen ele alındığında, her bir nokta diğer noktalardan çıkartılırsa şu dört nokta elde edilir: $(-1, 0)$, $(-0.5, -0.866)$, $(-0.5, 0.866)$, $(0.5, -0.866)$. Böylece merkez noktalı bir altıgenden elde edilen yedi nokta Şekil 2.15'deki gibidir. Başlangıçta kullanılan eş açılı üçgenin noktaları şekilde baklava sembolü ile gösterilmiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 135).

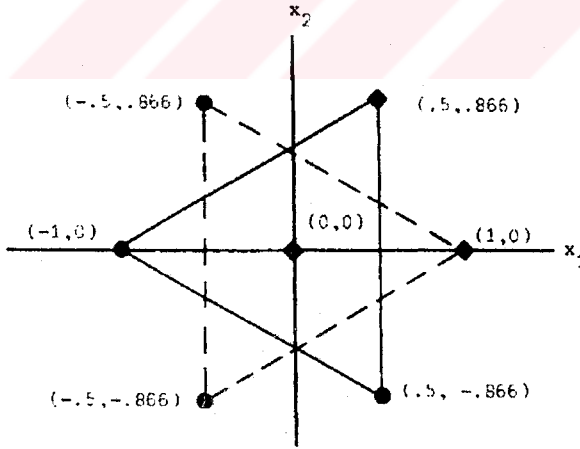
$k = 3$ için köşeleri aşağıdaki gibi olan bir dört yüzlü ele alınabilir:

$$\begin{array}{ll} (0, 0, 0) & (0.5, 0.866, 0), \\ (1, 0, 0) & (0.5, 0.289, 0.816) \end{array}$$

Burada yine bu dört noktanın herbiri diğerinden çıkartıldığında aşağıdaki dokuz nokta elde edilir:

$$\begin{array}{lll} (-1, 0, 0), & (0.5, -0.866, 0), & (0.5, -0.816), \\ (-0.5, -0.866, 0), & (-0.5, -0.289, -0.816), & (0, -0.577, 0.816), \\ (-0.5, 0.866, 0), & (-0.5, 0.289, 0.816), & (0, 0.577, -0.816). \end{array}$$

13 noktanın toplamı bir merkez noktalı bir küpsekizyüzlüyü oluşturmaktadır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 135).



Şekil 2-15 İki boyutlu bir tekdüzen kabuk tasarımı
Kaynak: A. I. Khuri ve J. A. Cornell (1987).

Genellikle, tekdüzen kabuk tasarımları bir düzgün simpleksin noktalarından, bu noktalar arasındaki farkları bularak türetilmektedir. $k = 2, \dots, 10$ için tasarımlar Doehlert (1970) tarafından verilmiştir. Faktör sayısı k olduğunda, merkez noktasına ek olarak, toplam $k^2 + k$ tasarım noktası yarıçapı bir olan bir hiper küre üzerine düşecektir. Böylece

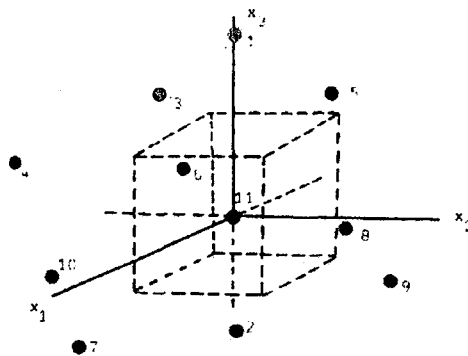
tek bir noktalar kabuğu + merkez noktası (veya noktaları), ikinci derece bir modelin parametrelerini tahminlemek için yeterli olacaktır (Khuri ve Cornell, 1987: ss. 135, 136).

2.6.8.6 Hoke Tasarımları

Hoke (1974), $k \geq 3$ faktör için 3 seviyeli ekonomik ikinci derece tasarımlar önermiştir. Bu tasarımlar, kısmen dengeli olan, 3^k faktöriyelin doyurulmuş düzensiz kesirlerine dayanmaktadır. Hoke (1974) en iyi tasarımını Box ve Behnken (1960)'ın ve Hartley (1959)'un tasarımları ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma $\text{tr}[(X'X)^{-1}]$ ve $|X'X|$ kriterlerine göre gerçekleştirilmiştir. Bu karşılaştırmalar ışığında Hoke kendi tasarımlarının tercih edilebileceği kanısına varmıştır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 136).

2.6.8.7 Melez Tasarımlar

Roquemore (1976), *melez (hybrid) tasarımlar* olarak adlandırılan doyurulmuş veya yaklaşık olarak doyurulmuş tasarımları geliştirmiştir. Bu tasarımlar $k - 1$ değişken için bir MBT'in ve k 'inci değişken için bir kolonun ve belki de bir veya iki satırın eklenmesi ile elde edilir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 136). Roquemore, $k = 3, 4$ ve 6 faktörlü durumlar için yedi farklı tasarım vermiştir. Melez tasarımlar ekonomik ve döndürülebilir veya yaklaşık döndürülebilir tasarımlardır. Şekil 2.16'da $k = 3$ faktör için bir melez tasarım verilmiştir. Burada x_1 ve x_2 kolonları, iki değişkenli bir MBT'ı oluşturmaktadır. Diğer değişken x_3 için dört seviye, tek momentleri sıfır, tüm saf ikinci derece momentleri eşit ve bir yaklaşık döndürülebilir tasarım elde edecek şekilde seçilmektedir (Myers ve Montgomery, 1995: s.360).



Nokta	x_1	x_2	x_3
1.	0	0	2
2.	0	0	-2
3.	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
4.	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
5.	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
6.	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
7.	2	0	-1
8.	-2	0	-1
9.	0	2	-1
10.	0	-2	-1
11.	0	0	0

Şekil 2-16 $k = 3$ boyutlu bir melez tasarım.
Kaynak: A. I. Khuri ve J. A. Cornell (1987).

2.6.9 İkinci Derece Tasarımlarda Ortogonal Bloklama

Zaman zaman ikinci derece bir modelin uyumunu yapmak için uygulanan denemeler homojen koşullarda gerçekleşmiyor olabilir. Örneğin, değişik hammadde yığınları bir deneyde kullanılabilir. Ayrıca, denemelerin herbiri aynı zamanda gerçekleştirilemeyebilir. Böyle durumlarda, denemeler kendi içindeki koşulları homojen olan gruplar veya bloklar içerisinde gerçekleştirilir. Toplam b blok olduğunda bu blokların etkisi (2.46) modeline dahil edilirse

$$y_u = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ui} + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_{ui}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\substack{j=2 \\ i < j}}^k \beta_{ij} x_{ui} x_{uj} + \sum_{l=1}^b \delta_l z_{ul} + \varepsilon_u \quad (2.74)$$

modeli elde edilir. Burada δ_l , l 'inci bloğun etkisi ve z_{ul} , u 'uncu deneme l 'inci blokta gerçekleştirildiğinde bir, aksi halde sıfır değerini alan bir *kukla* değişkendir. ($l = 1, 2, \dots, b$).

Doğrusal ve kuadratik etkilerin, blok etkilerinden bağımsız olarak değerlendirilmesi istendiğinde, bu amacı gerçekleştirmek için (2.74)'ün uyumunu yapmak amacıyla kullanılan ikinci derece tasarımın uygun bu şekilde seçilmesi gerekmektedir. (2.74)'teki β 'ların en küçük kareler tahminlerinin, blok etkileri δ değerlerinin bağımsız olduğu bir tasarıma *blokları ortogonal* denir. Böyle bir tasarımın kurulmasını kolaylaştırmak için (2.74) eşitliğini aşağıdaki formda yazmak uygundur (Khuri ve Cornell, 1987: s.141):

$$y_u = \beta'_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ui} + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_{ui}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\substack{j=2 \\ i < j}}^k \beta_{ij} x_{ui} x_{uj} + \sum_{l=1}^b \delta_l (z_{ul} - \bar{z}_l) + \varepsilon_u \quad (2.75)$$

Burada $\bar{z}_l = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N z_{ul}$, $l = 1, 2, \dots, b$ ve $\beta'_0 = \beta_0 + \sum_{l=1}^b \delta_l \bar{z}_l$ olmaktadır.

Ortogonal bloklama için koşullar ise şu şekildedir:

$$\sum_{u=1}^N x_{ui} (z_{ul} - \bar{z}_l) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k \quad l = 1, 2, \dots, b \quad (2.76)$$

$$\sum_{u=1}^N x_{ui} x_{uj} (z_{ul} - \bar{z}_l) = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, k \quad i \neq j \quad (2.77)$$

$$\sum_{u=1}^N x_{ui}^2 (z_{ul} - \bar{z}_l) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad l = 1, 2, \dots, b \quad (2.78)$$

Blokları ortogonal bir tasarımın aynı zamanda döndürülebilir olması istendiğinde, birinci derece momentlerin ve karma ikinci derece momentlerin sıfır olduğu varsayılır. Diğer bir deyişle,

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^N x_{ui} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, k \\ \sum_{u=1}^N x_{ui} x_{uj} &= 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, k \quad i \neq j \end{aligned} \quad (2.79)$$

olur. (2.76) - (2.79) eşitliklerinden ve z değişkenlerinin yapısından, ortogonal bloklama için x_{ui} 'lerin yerleşimi üzerindeki aşağıdaki koşullar elde edilir:

$$\sum_{u(l)} x_{ui} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k \quad l = 1, 2, \dots, b \quad (2.80)$$

$$\sum_{u(l)} x_{ui} x_{uj} = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, k \quad i \neq j \quad l = 1, 2, \dots, b \quad (2.81)$$

$$\frac{\sum_{u(l)} x_{ui}^2}{N} = \frac{n_l}{N} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad l = 1, 2, \dots, b \quad (2.82)$$

Burada $\sum_{u(l)} x_{ui}$ l 'inci bloktaki u 'nun değerlerinin toplamıdır. n_l ise, l 'inci bloktaki deneme sayısıdır. Böylece ikinci derece modellerde ortogonal bloklama için koşullar, (2.80), (2.81) ve (2.82) eşitliklerine dayanarak şu şekilde özetlenebilir:

1. (2.80) ve (2.81) koşulları, her blokta x_1, x_2, \dots, x_k 'lerden oluşan kolon dizinlerinin ortogonal ve toplamlarının sıfır olduğu anlamına gelir. Bu yüzden, *herbir blok birinci derece tasarımdan oluşmak zorundadır.*
2. (2.82) koşulu, her bloktaki x_i ($i = 1, 2, \dots, k$) değişkeni için kareler toplamının yüzdesi (kesiri), o bloktaki toplam deneme sayısının yüzdesine (kesirine) eşit olmak zorundadır, anlamına gelmektedir.

Bir MBT blokları ortogonal olarak kurulabilir. Bir MBT'nin faktöryel ve yıldız parçalarının herbiri birinci derece ortogonal tasarımıdır. Bu parçalar, MBT'nin iki bloğa ayrılmasının ilk kısmı için bir taban sağlar. Merkez noktasındaki tekrar sayısının ise koşul (2.82)'yi sağlayacak şekilde seçilmesi gerekmektedir. Bu iki bloğun oluşumu şu şekilde tanımlanabilir:

Tablo 2.10. Ortogonal Bloklanan Döndürülebilir veya Yaklaşık Döndürülebilir Merkezi Bileşik Tasarımlar¹

k	2	3	4	5	5(1/2 tekrar)	6	6(1/2 tekrar)	7	7(1/2 tekrar)
Faktöryel Bloklar									
F^2	4	8	16	32	16	64	32	128	64
b_F^3	1	2	2	4	1	8	2	16	8
n_{oi}^4	3	2	2	2	6	1	4	1	1
n_i^5	7	6	10	10	22	9	20	9	9
Eksen Blok									
n_{oi}	3	2	2	4	1	6	2	11	4
n_i	7	8	10	14	11	18	14	25	18
Ortogonal									
bloklama için α 'nın değeri	1.4142	1.6330	2.0000	2.3664	2.0000	2.8284	2.3664	3.3636	2.8284
Döndürülebilirlik için α 'nın değeri	1.4142	1.6818	2.0000	2.3784	2.0000	2.8284	2.3784	3.3333	2.8284
N^6	14	20	30	54	33	90	54	169	80

¹ Kaynak: A. I. Khuri ve J. A. Cornell (1987).

² Faktöryel Kısımdaki Nokta Sayısı

³ Faktöryel Kısımdaki Blok Sayısı

⁴ l 'inci Bloktaki Merkez Noktası Sayısı

⁵ Herbir Bloktaki Nokta Sayısı

⁶ Tasarımdaki Toplam Nokta Sayısı

Blok 1. $F = 2^k$ veya 2^{k-m} noktadan oluşan faktöryel parça ve n_{oF} merkez noktası tekrarı.

Burada m bir pozitif tamsayıdır.

Blok 2. $2k$ adet noktadan oluşan yıldız parçası ve n_{0A} adet merkez noktası tekrar. Eşitlik (2.82)'den yıldız noktaları için α değerinin

$$\alpha = \sqrt{\frac{F(2k + n_{0A})}{2(F + n_{0F})}} \quad (2.83)$$

olması gerekmektedir. Ayrıca tasarımın döndürülebilir olması isteniyorsa, $\alpha = F^{1/4}$ koşulundan ve eşitlik (2.83)'den aşağıdaki ilişki elde edilebilir:

$$\sqrt{F} = \frac{2(F + n_{0F})}{2k + n_{0A}} \quad (2.84)$$

veya

$$2F - \sqrt{F}(2k + n_{0A}) + 2n_{0F} = 0 \quad (2.85)$$

Eşitlik (2.85)'den bazı k değerleri için, blokları ortogonal olan bir MBT bulmanın mümkün olmadığı görülmektedir. Eşitlik (2.85)'in sağlanması için gerek koşul

$$(2k + n_{0A})^2 - 16n_{0F} \geq 0$$

şeklinde (Khuri ve Cornell, 1987: s.143). Eşitlik (2.85)'in sağlanmadığı k değerleri için, bir MBT'in ortogonal bloklu ve yaklaşık olarak döndürülebilir olması sağlanabilir. Örneğin, $k = 3$, $F = 8$, $n_{0F} = 4$ ve $n_{0A} = 2$ için eşitlik (2.83)'den $\alpha = 1.633 \cong \sqrt[4]{8} = 1.68$ elde edilir ki döndürülebilir yerleşime oldukça yakındır.

Yıldız noktalarından oluşan parçanın bir bloktan daha fazla parçaya bölünmesi, bir bloğun bir ortogonal birinci derece tasarımdan oluşması zorunluluğu ortadan kalkmadan mümkün değildir. Diğer taraftan, faktöryel parça, kesirli tekrarlar kullanılarak birden fazla bloğa bölünebilir. Ancak burada kesirli faktöryel tasarımların kararlılığı en azından 3 olmalıdır. Ayrıca merkez noktası sayısı tüm kesirli faktöryel blokları için eşit olmalıdır. İkinci koşul eşitlik (2.81)'in sağlanması için gerekmektedir. Döndürülebilir veya yaklaşık-döndürülebilir merkezi bileşik tasarımlar için ortogonal bloklama düzenlemeleri Tablo 2.10 ile verilmiştir. Blokları ortogonal olan diğer ikinci derece tasarımlar Box ve Hunter (1957) ve Myers (1976)'da bulunmaktadır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 144).

2.6.10 Ortogonal Olarak Bloklanmış Tasarımların Analizi

Önceki kesimde belirtildiği gibi, ortogonal bloklama ile eşitlik (2.74)'deki polinomial etkiler blok etkilerinden bağımsız hale gelir. Ardından bu modeldeki β parametrelerinin tahminleri, bloklama ihmal edilerek diğer bir deyişle δ değerleri sanki sıfır olarak kabul edilerek elde edilebilir. Sonuçtaki regresyon kareler toplamı ($RKT = \sum_{u=1}^N (\hat{y}(\mathbf{x}) - \bar{y})^2$; $\bar{y} = \sum_{u=1}^N y_u / N$), polinomial etkilere bağlı regresyon kareler toplamı ($RKT(\beta)$) ve blok etkileri kareler toplamından (KT_{Blok}) oluşur. Burada KT_{Blok}

$$KT_{Blok} = \sum_{l=1}^b \frac{B_l^2}{n_l} - \frac{\left(\sum_{u=1}^N y_u \right)^2}{N} \quad (2.86)$$

formülünden hesaplanabilir. Burada B_l , l 'inci blok için toplam ve n_l , l 'inci bloktaki deneme sayısıdır ($l = 1, 2, \dots, b$). Saf deneysel hata için kareler toplamı, aynı bloktaki merkez noktası tekrarları arasındaki kareler toplamının tüm bloklar için birleştirilmiş halidir. Eşitlik (2.75) için varyans analizi tablosu Tablo 2.11'de verilmiştir.

Tablo 2.11.'deki ifadeler $v_{SH} = \sum_{l=1}^b (n_{ol} - 1)$, (n_{ol} l 'inci bloktaki merkez noktası sayısıdır); $v_{UY} = N - (k^2 + 3k) / 2 - b - v_{SH}$; KT_{SH} , merkez noktası tekrarlarından bulunan birleşik saf hata kareler toplamı; ve KT_{UY} , KT_{SH} 'nin hata kareler toplamından (HKT) çıkarılmasıyla elde edilen uyum yetersizliği kareler toplamıdır. Burada $HKT = GKT - RKT(\beta) - KT_{Blok}$ olmaktadır ($GKT =$ Genel Kareler Toplamı ve $GKT = \sum (y_u - \bar{y})^2$ 'dir).

Tablo 2.11 Ortogonal Bloklı Bir Tasarıma Uyumu Yapılan Bir İkinci Derece Model İçin Varyans Analizi Tablosu

Kaynak	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamı
Regresyon		
Polinomial	$(k^2 + 3k) / 2$	$RKT(\beta)$
Bloklar	$b - 1$	KT_{Blok}
Artık (Hata)		
Uyum Yetersizliği	v_{UY}	KT_{UY}
Saf Hata	v_{SH}	KT_{SH}
Genel	$N - 1$	GKT

2.7 VARYANSI MİNİMİZE EDEN TASARIM KRİTERLERİ (OPTİMUM TASARIMLAR) VE CEVAP YÜZEYİ TASARIMLARININ ETKİNLİKLERİ

Optimum tasarım teorisi esas olarak II. Dünya Savaşı'ndan sonra gelişmiştir. Kiefer (1958, 1959, 1960, 1961, 1962a, 1962b), optimum tasarım teorisi için temel matematiksel alt yapıyı sağlamıştır. Şu anda, optimum tasarım teorisinin kurallarının, cevap yüzeyi tasarımlarının türetilmesine uygulanması ile ilgili iki aynı düşünce okulu vardır: Bunlar, *Kiefer Okulu* ve *Box Okulu*'dur. Box okulunda, uyumu yapılmış modelde olmasından şüphelenilen sapma, önemli bir rol oynamaktadır. Bununla beraber Kiefer okulunda, sapma anlamsız veya yokmuş gibi davranılır. Bu yüzden bu okuldaki ana meşguliyet, $\hat{y}(\mathbf{x})$ ile ortaya çıkan varyansın minimizasyonudur (Khuri ve Cornell, 1987: s. 375).

2.7.1 Varyansı Minimize Eden Tasarım Kriterleri

Optimum tasarım teorisine girmek için, eşitlik (2.7) ile verilen k değişkenli genel doğrusal model ele alındığında, $p \times 1$ boyutlu parametre vektörü β 'nin elemanlarının tahminlenmesinde, $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ 'in elemanları, \mathbf{b} 'deki elemanların varyanslarına ve kovaryansları ile doğru orantılıdır. Burada \mathbf{b} , β 'nin en küçük kareler tahminleri vektörüdür. β için p boyutlu güven bölgesi ele alınsın:

$$\{\beta: (\beta - \mathbf{b})' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\beta - \mathbf{b}) \leq c\} \quad (2.87)$$

Burada c , sabit bir değerdir. Eşitlik (2.87)'deki bölge, şekil olarak elipsoidtir. $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ matrisinin özdeğerleri $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p$, elipsoidin p adet ana ekseninin karesel uzunlukları ile doğru orantılıdır. Bu yüzden, güven bölgesi (2.87)'nin büyüklüğünü minimize etmek için, $\Psi_i, i = 1, 2, \dots, p$ değerlerinin minimizasyonu üzerinde yoğunlaşmak gerekmektedir.

$\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p$ özdeğerlerinin maksimumu, aritmetik ortalaması ve geometrik ortalamaları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\max(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p) = \Psi_{\max}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^p \psi_i}{p} = \bar{\psi}_A \quad (\text{aritmetik için } A) \quad (2.88)$$

$$\left(\prod_{i=1}^p \psi_i \right)^{1/p} = \bar{\psi}_G \quad (\text{geometrik için } G)$$

Eşitlik (2.88)'deki fonksiyonlar kullanarak, \mathbf{X} 'deki tasarım yerleşimlerinin seçimi için en popüler kriterlerin bazıları aşağıdakilere dayanmaktadır:

$$\text{tr}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = p\bar{\psi}_A = \sum_{i=1}^p \psi_i \quad (2.89)$$

$$|\mathbf{X}'\mathbf{X}| = \bar{\psi}_G^{-p} = \prod_{i=1}^p \psi_i^{-1} \quad (2.90)$$

$$\psi_{\max} \quad (2.91)$$

$$G = \max_{\mathbf{x} \in R} [\mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x})] \quad (2.92)$$

Burada $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$, R bölgesindeki bir \mathbf{x} noktasındaki, \mathbf{X} matrisinin bir satırındaki elemanlara karşılık gelen $1 \times p$ boyutlu bir vektördür. Eşitlik (2.92)'deki G , σ^2 ile çarpıldığında deney bölgesindeki maksimum kestirim varyansını verir.

Eşitlik (2.89-2.92) ile ilgili olarak, bir tasarımın çekiciliği, $\bar{\psi}_A, \bar{\psi}_G, \psi_{\max}$ ve G azaldıkça artar. Bu kriterlere dayanan tasarımlar, A -, D -, E - ve G - optimum tasarımlar olarak adlandırılır.

(2.89)-(2.92) kriterleri başlangıçta sürekli tasarım kriterleri olarak geliştirilmiştir. *Sürekli tasarım* terimi esas olarak Kiefer okulunda kullanılmıştır. Burada bir tasarım, deney bölgesinde tanımlanmış bir olasılık oranı ζ olarak kabul edilmektedir. Bu oran aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{x}) &\geq 0 \quad \text{tüm } \mathbf{x} \in R \text{ için} \\ \int_R d\zeta(\mathbf{x}) &= 1 \end{aligned} \quad (2.93)$$

Özel bir durum olarak, R 'de N noktada gözlem alındığında

$$\zeta(\mathbf{x}_l) = \begin{cases} n_l / N & \mathbf{x}_l \text{ bir tasarım noktası ise } (l = 1, 2, \dots, m) \\ 0 & \text{Diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde bir tasarım oranı söz konusudur. Burada n_l , l 'inci tasarım noktasında toplanan gözlem sayısıdır ve $\sum_{l=1}^m n_l = N$ 'dir. Böyle bir tasarım oranı *kesikli tasarım* olarak adlandırılır ve genellikle \mathbf{D}_N şeklinde gösterilir. Kesikli tasarımlar Box'un okulunda ele alınan geleneksel tasarımlardır. Kesikli olmayan tasarım oranları *sürekli tasarım oranları* olarak adlandırılır. Örneğin,

$$\zeta(\mathbf{x}_l) = \begin{cases} \kappa_l & \mathbf{x}_l \text{ bir tasarım noktası ise } (l = 1, 2, \dots, m) \\ 0 & \text{Diğer hallerde} \end{cases}$$

biçimindeki bir tasarım oranı, en az bir κ_l irrasyonel bir sayı olduğunda, sürekli bir tasarım oranıdır. Ayrıca burada $\kappa_l \geq 0$ ve $\sum_{l=1}^m \kappa_l = 1$ olmaktadır. Sürekli tasarım oranları pratikte gerçekleştirilemez ancak, kesikli bir tasarım ile sürekli tasarımlara yaklaşılabılır. Bu yüzden kesikli tasarımlara *gerçek (exact) tasarım oranları* da denir.

Sürekli tasarım çalışmalarında da, kesikli tasarım durumundaki gibi, $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisi ve kestirim varyansı $\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})]$ ile ilgilenilmektedir. Genel doğrusal model

$$y_u = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_u)\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_u \quad u = 1, 2, \dots, N \quad (2.94)$$

ele alındığında, bu eşitlik N gözlem için matris notasyonunda $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ olur. Buradan sürekli bir tasarım oranı ζ için, kesikli durumdaki moment matrisi $\mathbf{X}'\mathbf{X} / N$ 'e benzer bir matris

$$\mathbf{M}(\zeta) = [m_{ij}(\zeta)] = \left[\int_R f_i(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x})d\zeta(\mathbf{x}) \right] \quad (2.95)$$

şeklinindedir. Burada $f_i(\mathbf{x})$, bir $\mathbf{x} \in R$ noktasında değerlendirilmiş olan $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 'in i 'inci elemanıdır ($i = 1, 2, \dots, p$). Kesikli bir N -noktalı tasarım için $\mathbf{M}(\zeta) = \mathbf{X}'\mathbf{X} / N$ olur. Ayrıca sürekli tasarım durumunda kestirim matrisi, standardize $\{(N / \sigma^2) \text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})]\}$ için bir genelleme

$$d(\mathbf{x}, \zeta) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{M}^{-1}(\zeta)\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.96)$$

şeklindedir.

H , R 'deki tüm tasarım oranlarının sınıfı ve $\lambda_i(\zeta)$, $\zeta \in H$ için $\mathbf{M}(\zeta)$ 'nin i 'inci özdeğeri olsun. A -, D -, E - ve G - optimalite kriterlerinin sürekli benzerleri aşağıdaki gibidir (Khuri ve Cornell, 1987: ss. 378, 379; Atkinson ve Donev, 1992: ss. 93-115):

1. Bir tasarım oranı, H 'de $\sum_{i=1}^p \lambda_i(\zeta)$ 'yi maksimize ediyorsa A - optimumdur.
2. Bir tasarım oranı, H 'de $|\mathbf{M}(\zeta)|$ 'yi maksimize ediyorsa D - optimumdur.
3. Bir tasarım oranı, H 'de $\lambda_{(1)}(\zeta)$ 'yi maksimize ediyorsa E - optimumdur. Burada $\lambda_{(1)}(\zeta)$, $\mathbf{M}(\zeta)$ 'nin en küçük özdeğeri.
4. Bir tasarım oranı ζ^* , H 'de, R 'deki maksimum standardize kestirim varyansını minimize ediyorsa G - optimumdur. Diğer bir deyişle

$$\max_{\mathbf{x} \in R} d(\mathbf{x}, \zeta^*) = \min_{\zeta \in H} \left\{ \max_{\mathbf{x} \in R} d(\mathbf{x}, \zeta) \right\}$$

olmaktadır (Atkinson ve Donev, 1992: s. 116). Kiefer ve Wolfowitz (1960) yukarıda tanımlanan D -optimum ve G -optimum tasarımların denk (identical) olduğunu ispatlamıştır (Atkinson ve Donev, 1992: s. 104). Ayrıca Kiefer ve Wolfowitz, bir tasarım oranı ζ^* 'nin yalnız ve yalnız

$$\max_{\mathbf{x} \in R} d(\mathbf{x}, \zeta^*) = p$$

ise G - optimum (veya D - optimum) olduğunu göstermiştir (Atkinson ve Donev, 1992: ss. 114, 115). Burada p , modeldeki parametre sayısıdır.

Kiefer ve Wolfowitz (1960)'in bilinen bu denklik teoremi, bir D -optimum tasarımın kurulması için pratik bir algoritmanın gelişmesine yol açmıştır (Federov 1972, bölüm 2; Wynn 1970). Bununla beraber, D_N -optimum tasarımın oluşturulmasına daha çok önem verilmiştir. Bu, uyumu yapılmış model için bilgi matrisi $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ 'in determinantını, maksimum yapan, N adet denemeden oluşan geleneksel bir cevap yüzeyi tasarımıdır. D_N -optimum tasarımların oluşturulması için birkaç algoritma bulunmaktadır. Mitchell (1974) tarafından önerilen DETMAX algoritması ve Federov (1972, s.160-165) tarafından önerilen bir algoritma, verilen bir N için $|\mathbf{X}'\mathbf{X}|$ değerlerinin azalmadığı bir dizi N -noktalı tasarımları üretmektedir. Mitchell'in algoritmasında bir iyileşme Galil ve Kiefer (1980)

tarafından sağlanmıştır. Burada optimum tasarımların bulunması için bilgisayar-arama yöntemlerinin bir ailesi geliştirilmiştir. D_N -optimum tasarımların kurulması için geliştirilen algoritmalar Cook ve Nachtshiem (1980) tarafından gözden geçirilmiştir. (Myers, Khuri ve Carter, 1989: ss. 140, 141).

2.7.2 Cevap Yüzeyi Tasarımlarının Etkinliği

Eşitlik (2.93)'deki sürekli tasarım oranının bir kullanımı da, değişik tipteki cevap yüzeyi tasarımı konfigürasyonlarının karşılaştırılmasını içermektedir. Lucas (1976), deney bölgesini yarıçapı 1 olan k -boyutlu bir hiperküre olarak tanımlayarak, ikinci derece modelin uyumunu yapmak için kullanılan merkezi bileşik tasarımları ile, Box-Behnken ve tekdüzen kabuk (uniform shell) tasarımlarını ile karşılaştırılmıştır. Deney bölgesinin k -boyutlu bir hiperküp olduğu durumda, Lucas, Hoke tasarımlarını, Pesotchinsky (1975) tarafından tanıtılan tasarımlar ve M. J. Box ve Draper tarafından tanıtılan doyurulmuş tasarımlar ile karşılaştırmıştır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 379). Her bir tasarım oranı ζ için D - ve G - etkinlikleri şu şekilde tanımlanmaktadır (Atkinson ve Donev, 1992: s. 116):

$$D\text{- etkinliği} = \left(\frac{|\mathbf{M}(\zeta)|}{\max_{\zeta \in H} |\mathbf{M}(\zeta)|} \right)^{1/p}$$

$$G\text{- etkinliği} = \frac{p}{\max_{\mathbf{x} \in R} d(\mathbf{x}, \zeta)} \quad (2.97)$$

Burada p , uyumu yapılmış modeldeki terim sayısı ve H , tüm tasarım oranlarının sınıfıdır.

Tasarım etkinliğinin bir ölçüsü olarak, M. J. Box ve Draper (1971), $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ 'in determinantının maksimize edilmesinin baz alındığı tasarım seçimi üzerinde durmuşlardır. M. J. Box ve Draper, seviyeleri $\pm g$ olan 2^{k-m} faktöriyel nokta, $\pm \alpha$ 'lardan oluşan $2k$ yıldız noktası ve n_0 merkez noktası tekrarından oluşan bir MBT için, $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ 'in determinantının

$$|\mathbf{X}'\mathbf{X}|_{\text{MBT}} = (2^{k-m} g^2 + 2\alpha^2)^k (2^{k-m} g^4)^{k(k-1)/2} (2\alpha^4)^{k-1} \\ \times \{n_0(2\alpha^4 + 2^{k-m} kg^4) + 2^{k-m+1}(\alpha^2 - kg^2)^2\} \quad (2.98)$$

olduğunu göstermişlerdir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 122).

$k \geq 2$ durumlarında, $|\mathbf{X}'\mathbf{X}|_{\text{MBT}}$ 'yi maksimize etmek için, M. J. Box ve Draper, faktöriyel ve yıldız noktalarının, $|g| \leq 1$ için $x_i = \pm 1$ ile sınırlandırılmış kübük bölgenin sınırlarında pozisyonlanması gerektiğine işaret etmiştir. Lucas (1974), $|\mathbf{X}'\mathbf{X}|_{\text{MBT}}$ 'nin α 'nın artan bir fonksiyonu olduğunu göstermiştir. Böylece, yıldız noktalarının, deney bölgesinin uç noktalarına hareket etmesi gereklidir (Khuri ve Cornell, 1987: ss. 122,123).

Bir MBT'nin D - etkinliği (D_{eff}),

$$D_{\text{eff}} = \left(\frac{|\mathbf{X}'\mathbf{X}_{\text{MBT}}|}{N^p \max_{\zeta} |\mathbf{M}(\zeta)|} \right)^{1/p} \quad (2.99)$$

şeklinde tanımlanır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 123). Burada p , ikinci derece modeldeki parametre sayısı ve $\mathbf{M}(\zeta)$, bir tasarım oranı ζ için bilgi matrisidir. $|\mathbf{M}(\zeta)|$ 'nin maksimum değeri tasarım oranı D - optimum olduğunda elde edilir. Kesikli bir tasarım oranı için bilgi matrisi $\mathbf{X}'\mathbf{X} / N$ 'e eşittir.

Lucas (1974, 1976, 1977), MBT içerisinde yer alan çeşitli tasarımların D - etkinliğini sınamıştır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 123). MBT durumunda, D -etkinliği ve G -etkinliği değerleri, $x_i = \pm 1$ ile sınırlandırılmış bir hiperkübik deney bölgesi için Tablo 2.12'de, yarıçapı 1 olan bir hiperküresel deney bölgesi için Tablo 2.13'de verilmiştir.

Tablo 2.12'den $k \leq 5$ için (burada faktöryel kısım bir tam faktöryel dizinden oluşmaktadır) bir MBT'nin D -etkinliğinin yüksek olduğu görülmektedir. Ayrıca faktör sayısı arttığında D -etkinliğinin azaldığı görülmektedir. Tablo 2.12 ise bir MBT'nin D - etkinliğinin ele alınan tüm k değerleri için yüksek olduğuna işaret etmektedir. Lucas (1974, 1976, 1977), deneysel hata varyansının daha iyi bir tahminini elde etmek için merkez noktalarının sayısı artırıldığında, D - ve G -etkinliklerinde önemsiz düşüşler olduğunu gözlemiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 123).

Lucas'ın buldukları özetlenecek olursa, tasarımların büyük bir kısmı, k -boyutlu hiperkürede yüksek D - ve G -etkinliklere sahiptirler (mesela, $D > 80.0$ ve $G > 50.0$). $k = 3$ için tekdüzen kabuk tasarımları MBT ve Box-Behnken tasarımları etkindir. Ancak $k \geq 4$ için tekdüzen kabuk tasarımlarının göreceli etkinliği düşmektedir. Box-Behnken ve merkezi bileşik tasarımların üstünlüğü, tasarımdaki nokta sayısı kadar değişken sayısına da bağlıdır ve k -boyutlu hiperkürede $3 \leq k \leq 8$ için bu tasarımlar arasında çok az bir fark

olduğu görülmektedir (*D*- ve *G*-etkinlikleri terimleri cinsinden), (Khuri ve Cornell, 1987: ss. 379,380).

Tablo 2.12 Bir Hiperküpteki MBT'nin *D*- ve *G*-etkinlikleri^a

Faktör Sayısı	Nokta Sayısı ^b	<i>D</i> -Etkinliği	<i>G</i> -Etkinliği
2	9	0.974	0.828
3	15	0.942	0.836
4	25	0.911	0.780
5	43	0.885	0.602
5 ^c	27 (<i>I</i> = <i>ABCDE</i>)	0.842	0.749
6	77	0.853	0.417
6 ^c	45 (<i>I</i> = <i>ABCDEF</i>)	0.852	0.625
6 ^d	29 (<i>I</i> = <i>ABC</i> = <i>DEF</i>)	0.485	0.074
7	143	0.813	0.264
7 ^c	79 (<i>I</i> = <i>ABCDEFG</i>)	0.845	0.442
7 ^d	47 (<i>I</i> = <i>ABCDE</i> = <i>AFG</i>)	0.645	0.108
8	273	0.790	0.155
8 ^c	145 (<i>I</i> = <i>ABCDEFGH</i>)	0.821	0.283
8 ^d	81 (<i>I</i> = <i>ABCDE</i> = <i>ABFGH</i>)	0.833	0.469

^aHiperküp $x_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$) ile sınırlandırılmıştır ve MBT'nin yıldız kısmı için $\alpha = 1$ alınmıştır.

^bBir merkez noktası dahil edilmiştir.

^cFaktöryel kısım yarım tekrardan oluşmaktadır.

^dFaktöryel kısım çeyrek tekrardan oluşmaktadır.

Kaynak: A. I. Khuri ve J. A. Cornell (1987).

Tablo 2.13 Bir Hiperküredeki MBT'nin *D*- ve *G*-Etkinlikleri^a

Faktör Sayısı	Nokta Sayısı ^b	<i>D</i> -Etkinliği	<i>G</i> -Etkinliği
2	9	0.9862	0.6667
3	15	0.9914	0.6667
4	25	0.9923	0.6000
5	43	0.9860	0.4884
5 ^c	27 (<i>I</i> = <i>ABCDE</i>)	0.9843	0.7778
6 ^c	45 (<i>I</i> = <i>ABCDEF</i>)	0.9955	0.6222
7 ^c	79 (<i>I</i> = <i>ABCDEFG</i>)	0.9888	0.4557
8 ^c	145 (<i>I</i> = <i>ABCDEFGH</i>)	0.9640	0.3104
8 ^d	81 (<i>I</i> = <i>ABCDE</i> = <i>ABFGH</i>)	0.9968	0.5556

^aHiperkürenin merkezi orijindedir ve yarıçapı bire eşittir. Faktöryel kısmın seviyeleri $\pm 1 / \sqrt{k}$ şeklindedir ve MBT'nin yıldız kısmı için $\alpha = 1$ alınmıştır.

^bBir merkez noktası dahil edilmiştir.

^cFaktöryel kısım yarım tekrardan oluşmaktadır.

^dFaktöryel kısım çeyrek tekrardan oluşmaktadır.

Kaynak: A. I. Khuri ve J. A. Cornell (1987).

Lucas (1974) , deney bölgesi *k*-boyutlu bir hiperküp olduğunda, $k = 5, 6$ ve 7 faktör için Hoke tasarımlarının en iyi bileşik tasarımlar ile karşılaştırıldığında tercih edilebilir olduğunu belirtmiştir. Ancak $k = 8, 9, 10$ ve 11 için Hoke tasarımlarının, bileşik tasarımlar ile karşılaştırıldığında, görece olarak etkinliği azalmaktadır. Bununla birlikte, Hoke tasarımları, en iyi bileşik tasarımlardan daha az sayıda nokta içermektedir. Bu

durumda tasarım etkinliği ile tasarımın büyüklüğü arasında bir tercih yapılabilir. Pesotchinsky (1975) tasarımları $k = 4, 5, 6$ ve 7 faktör için daha etkindir; ancak daha fazla sayıda tasarım noktası gerektirmektedir. Ayrıca $k \geq 4$ durumları için Hoke tasarımlarının D -etkinliği Box-Draper tasarımlarına göre daha yüksektir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 380).

2.8 SAYISAL VE NİTELİKSEL DEĞİŞKENLER İÇİN CEVAP YÜZEYİ TASARIMLARI

Bu bölümde cevabın hem niteliksel hem de sayısal (sürekli) değişkenlere bağlı olması durumunda deneylerin tasarlanması problemi ele alınmıştır. Örneğin kimyasal bir süreçte proses çıktısı, yalnızca sıcaklık ve basınç gibi iki sayısal değişkene bağlı olmayıp, reaktör tipi ve solvent tipi gibi niteliksel bir değişkene de bağlı olabilir. Başka bir örnek olarak bir antibiyotiğin etki süresi, antibiyotiğin kompozisyonu ve dozajı gibi sayısal değişkenlere ve antibiyotiğin oral olarak mı yoksa enjeksiyon ile mi alındığı gibi bir niteliksel değişkene bağlı olabilir. Bir fırın ürünü (kek, pasta gibi) içerisine atılan suni tatlandırıcıların etkileri üzerine bir araştırma yapıldığında, suni tatlandırıcı tipi (Nutrasweet ve saccharin) bir niteliksel değişkendir. Draper ve John (1988), niteliksel değişkenlerin varlığı durumunda standart cevap yüzeyi tasarımlarının uygun olmadığını belirtmiştir. Aşağıdaki kesimlerde Draper ve John (1988)'in standart tasarımlar ile ilgili düşünceleri ve önerdiği tasarımlar verilmiştir. Draper ve John'un yaklaşımından başka Atkinson ve Donev (1992: Bölüm 13) niteliksel değişkenlerin varlığı durumunda N denemeli kesikli D -optimum tasarımları vermiştir.

2.8.1 Standart Tasarımların Uygun Olmamasının Nedenleri

İkinci derece bir cevap yüzeyinin incelendiği bir durumda, sayısal değişkenler x_1, x_2, \dots, x_k ve niteliksel değişkenler z_1, z_2, \dots, z_r olsun. Draper ve John (1988), standart tasarımların uygun olmamasının nedenlerini aşağıdaki örnekleri ile açıklamıştır:

$k = 2, r = 1$ durumu ele alındığında, z_1 hakkında araştırma yapmadan oluşturulan bir bileşik tasarım aşağıdaki gibidir:

küp $[(x_1, x_2, z_1) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)]$

yıldız $[(x_1, x_2, z_1) = (\pm\alpha, 0, 0), (0, \pm\alpha, 0), (0, 0, \pm\alpha)]$

merkez noktaları $[(0, 0, 0)]$ 'da n_0 adet gözlem alınabilir]

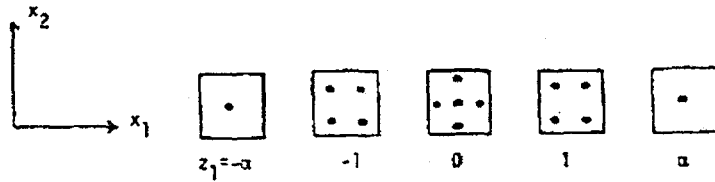
Burada örneğin $n_0 = 1$ olarak alınabilir. Tasarımın döndürülebilir olması için $\alpha = 2^{2/4} = 1.682$ olarak seçilir ve Şekil 2.17'de gösterilen aşağıdaki tasarım noktaları elde edilir:

$z_1 = \pm\alpha$ 'daki noktalar $(x_1, x_2) = (0, 0)$;

$z_1 = \pm 1$ 'deki noktalar $(x_1, x_2) = (\pm 1, \pm 1)$; ve

$z_1 = 0$ 'daki noktalar $(x_1, x_2) = (\pm\alpha, 0), (0, \pm\alpha)$

Böyle bir tasarımın pratikte uygulanmasıyla bazı problemler ortaya çıkacaktır. Herşeyden önce niteliksel değişken z_1 'in beş ayrı seviyesinin kullanılması gerekecektir. Eğer bir fırın ürünü (kek, pasta gibi) içerisine katılan suni tatlandırıcıların etkileri üzerine bir araştırma yapılıyorsa, yalnızca iki ayrı seviye Nutrasweet ve saccharin incelenebilir. Oysa tasarım, beş ayrı seviyeyi gerektirmektedir. Beş ayrı tatlandırıcının olduğu varsayılsa bile, z seviyelerini $(-\alpha, -1, 0, 1, \alpha)$ şeklinde belirlemek imkansız olabilir. Eğer z seviyeleri anlamsız ise, x uzayındaki yüzeylerdeki değişmelerin, niteliksel değişkenlerin değişik değerleri ile nasıl ilişkilendirilebileceği bulunamayabilir. Genellikle, böyle bir durumda, z_1 'in her bir değerinde (x_1, x_2) 'deki değişik yüzeylerin uyumunun yapıp yapılmayacağı ele alınmak zorunda kalınabilir. Bununla beraber, mevcut tasarım ile, z_1 'in hiçbir seviyesinde bir tam ikinci derece tasarım mevcut değildir. Böylece, ekstra varsayımlar yapılmadığı takdirde, z_1 'in herhangi bir seviyesi için ikinci derece bir yüzeyin uyumunu yapmak imkansız olacaktır.

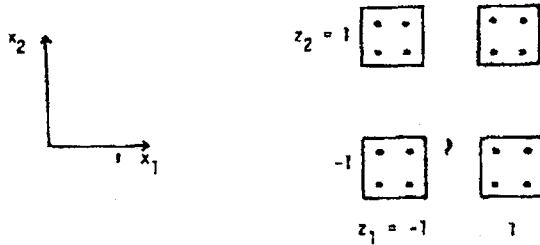


Şekil 2-17. (x_1, x_2, z_1) 'de ikinci derece bileşik tasarım

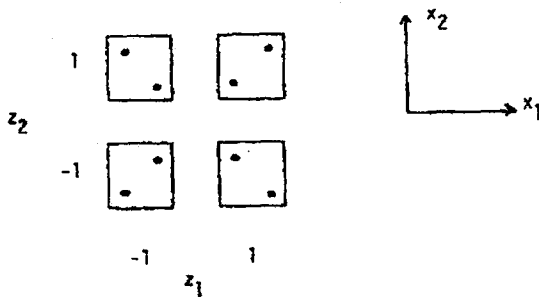
$r > 1$ olduğunda da aynı problemler ortaya çıkar. Bunun anlamı, ikinci derece etkilerin varlığı sezilense bile, bazı değişkenler niteliksel olduğunda standart bir ikinci derece tasarımın adapte edilemeyeceğidir.

Standart birinci derece tasarımlar ele alındığında $k = 2, r = 2$ olsun. Şekil 2.18'deki 2^4 tasarım, $(z_1, z_2) = (\pm 1, \pm 1)$ alt kısımlarının her birinde birinci derece modelin uyumunun yapılmasına imkan vermektedir. Bundan başka, z_1 ve z_2 'nin iki seviyesi, -1 ve 1 şeklinde kodlanabildiği için, birinci derece model kurulabilir. Bununla beraber, niteliksel değişkenlerin her bir kombinasyonunda kuadratik uyum yetersizliği kontrol edilmek istenebilir. Ardından, (x_1, x_2) uzayında gösterilen her bir 2^2 tasarımda *merkez noktaları* na ihtiyaç vardır. Bu ekstra 2^k olmayan noktalar, orijinal formülasyondaki merkez noktaları olmaz. Bu durumda standart birinci derece tasarımlar uygun değildir.

Orijinal tasarımın 2^{k-m} şeklindeki bir kesirli faktöryel olması durumu ele alındığında, $k = 2, r = 2$ olsun ve $x_1x_2z_1z_2 = 1$ olan bir 2_{IV}^{4-1} faktöryel ile başlansın. Bu noktaların yerleşimi Şekil 2.19'da verilmiştir. Burada tasarım, niteliksel değişkenlerin dört seviyesinde de, bireysel düzlemlerin uyumunun yapılmasına imkan vermemektedir. Böyle bir tasarımı kullanmak için bazı ekstra varsayımlara ihtiyaç duyulacaktır: Örneğin, x_1 ve x_2 'deki dört düzlemin sabit terimleri farklıdır, ancak eğimleri aynıdır gibi...



Şekil 2-18. (x_1, x_2, z_1, z_2) 'de birinci derece tasarım



Şekil 2-19. Bir 2_{IV}^{4-1} Tasarım: $x_1x_2z_1z_2 = 1$

2.8.2 Sayısal ve Niteliksel Değişkenli Modeller

Draper ve John (1988) aşağıdakileri gerçekleştirme imkanı veren tasarımları seçmeyi amaç edinmiştir:

1. k adet sayısal değişken x_1, x_2, \dots, x_k 'nin cevaba, en küçük kareler yöntemi ile bir doğrusal model (birinci veya ikinci derece bir model) uyumunu yapmak.
2. Niteliksel değişkenler z_1, z_2, \dots, z_r 'nin doğrusal modelin formu üzerindeki etkilerini hesaba katmak.
3. Herhangi bir karmaşık yapıda verilen bir model için, daha basit bir modelin verileri yeterli derecede açıklayıp açıklayamayacağını test etmek.

Eğer yalnızca birinci ve ikinci derece modeller ele alınacaksa, en genel model formülasyonu

$$E(y) = \sum_{z=1}^m W_z f_z(\mathbf{x}, \beta_z) \quad (2.100)$$

şeklindedir. Burada f ikinci derece bir polinomdur ve z indisi, z seviyelerinin her bir seçimi için β 'ların değişik setlerini göstermektedir:

$$f_z(\mathbf{x}, \beta_z) = \beta_{0z} + \sum_{i=1}^k \beta_{iz} x_i + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \geq i}}^k \beta_{ijz} x_i x_j \quad (2.101)$$

W_z ($z = 1, 2, \dots, m$) m adet kukla değişkenin seçilmiş seviyelerini göstermektedir. Bu kukla değişkenler, niteliksel değişkenlerin tüm olası kombinasyonlarını birbirinden ayırt edecek şekilde seçilmektedirler. Örneğin, iki seviyeli bir niteliksel değişken mevcutsa (Nutrasweet ve saccharin gibi), Nutrasweet için $W_z = 0$ saccharin için $W_z = 1$ seçilebilir. Gerçekte herhangi iki seviye (0, 1), (-1, 1) veya (-3, 7) seçilse bile aynı işi görürler. Genelde kukla değişkenlerinin seviyeleri sonsuz ayrı şekilde seçilebilir.

Eğer her biri iki seviyeli iki niteliksel değişken mevcutsa, dört olası kategoriye Tablo 2.14'te verildiği gibi ayırt etmek mümkündür:

Tablo 2.14. Dört Kategorinin Kukla Değişkenler İle Temsili

Kategori	W_1	W_2	W_3	W_4
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	1	0	1	0
4	1	0	0	1

Tablo 2.15. Dört Kategori İçin Alternatif Kukla Yerleşimi

Kategori	$W_1 = 1$	$W_2 = z_1$	$W_3 = z_2$	$W_4 = z_1 z_2$
1	1	-1	-1	1
2	1	1	-1	-1
3	1	-1	1	-1
4	1	1	1	1

Bu örnekte, z_1 (-1, 1) ve z_2 (-1, 1) şeklinde kodlandığında alternatif bir W_2 temsili Tablo 2.15'te verilmiştir. Bu temsil yalnızca dört kategoriyi birbirinden ayırmaz, ayrıca doğrudan z seviyeleri (-1, 1) ile ilişkilendirilebilir.

Eşitlik (2.100)'de kullanılan prensip, Draper ve Smith (1981: ss. 247-248; ayrıca bkz. 241-246) tarafından açıklanan *kukla değişkenler ile etkileşim* fikridir. Böylece ekstrem bir durum olarak her bir z seviyesi seçiminde değişik bir ikinci derece yüzey elde etmek mümkün olabilmektedir. $k = r = 2$ için, z_1 ve z_2 'nin seviyeleriyle tanımlanan dört adet x uzayının her biri, örneğin, küp + yıldız + merkez noktaları içermelidir. Başka bir ekstrem durum olarak her bir z uzayında cevap, aynı ikinci derece yüzey ile yeterli derecede temsil edilebilir. Draper ve John (1988) pratikte bir çok durumda, her iki ekstrem durumun da uygun olmadığını belirtmiştir.

Eşitlik (2.100)'deki gibi bir modelin uyumunu yapmak amacıyla bir deneyin tasarlanmasında, yalnızca model parametrelerinin tahminlenmesi ve değerlendirilmesine izin veren değil, aynı zamanda bu modelin uyum iyiliğinin sınanmasına da imkan veren bir tasarım seçilmesi gerekmektedir.

2.8.3 Sayısal Ve Niteliksel Değişkenli Modeller İçin Tasarım Örnekleri

Bu kesimde, Draper ve John (1988) tarafından önerilen, belli modellerin uyumunu yapmak için ve uyum yetersizliğini tespit etmeye imkan veren tasarımların nasıl kurulabileceği, bazı basit örnekler ile açıklanmıştır. Ayrıca, daha karmaşık modellerin uyumunu yapmak için bu tasarımların nasıl genişletilebileceğine değinilmiştir. Box ve Draper (1975, s. 347) iyi bir cevap yüzeyi tasarımın taşıması gereken özellikleri sıralamıştır; bu özellikler elbette niteliksel değişkenler var olduğunda da aynı derecede önemlidir (Draper ve John, 1988: s. 425).

İki sayısal değişken x_1 , x_2 ve iki seviyeli bir niteliksel değişken z ($z = \pm 1$ şeklinde kodlanmıştır) olsun. İlk olarak

$$E(y) = \beta_0 + \beta_0 z + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \quad (2.102)$$

modelinin uyumunu yapmak için olası tasarımlar ele alınsın. Bu modele göre birbirine paralel (ancak üstüste gelebilir) düzlemlerin uyumu z 'nin her bir seviyesinde yapılacaktır. Bu model birkaç değişik şekilde genişletilebilir: İkinci derece terimler dahil edildiğinde

$$E(y) = \beta_0 + \beta_0 z + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 \quad (2.103)$$

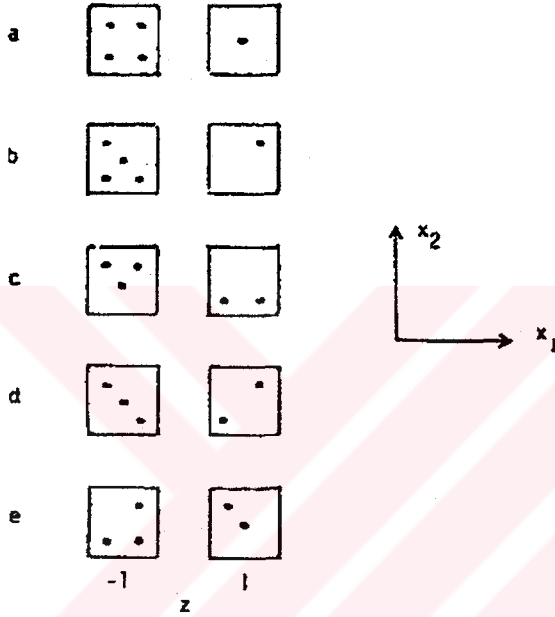
veya düzlemlerin paralelliği bozulduğunda,

$$E(y) = \beta_0 + \beta_0 z + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{1z} x_1 z + \beta_{2z} x_2 z \quad (2.104)$$

elde edilir. Eşitlik (2.102)'nin uyumunu yapmak için bir tasarım seçerken, bu modelin uyum yetersizliğinin hangi modele göre değerlendirileceği hakkındaki bir ön bilgi sahibi olmak uygundur. (Model (2.103) veya (2.104)'e karşı). Şekil 2.20'de beş olası tasarım verilmiştir. $\beta_0 z$ 'yi tahminlemek için, z 'nin her seviyesinde en az bir gözlem olması zorunludur. β_1 ve β_2 eğimlerini tahminlemek için, z 'nin bir seviyesindeki noktalar diğer noktalardakiler ile üstüste kurulduğunda, birinci derece modelin uyumu yapılabilir. Şekil 2.20'deki her bir tasarım beş tasarım noktasından oluşmaktadır ve herbirinin model (2.102)'nin dört parametresini tahminlemeye imkan verdiği kolaylıkta doğrulanabilir.

Bu tasarımları birbirinden ayıran, beşinci serbestlik derecesinin kullanımınıdır. Eşitlik (2.103)'deki etkileşim terimi $\beta_{12} x_1 x_2$, beş tasarımın her biri için modele eklenebilir. Alternatif olarak, tasarım 2.20c'de eşitlik (2.104)'ün $\beta_{1z} x_1 z$ terimi eklenebilir. Gerçekte

tasarım 2.20c ile $\beta_{22}x_2z$ terimi de eklenebilir. Ancak bu durumda x_2 ve z arasındaki korelasyon büyük olduğu için x_2z , sabit terimle yüksek korelasyonlu olacaktır. Bu yüzden x_2z 'nin katsayı tahmininin varyansı büyük olacaktır. Ayrıca tasarım 2.20e'de $\beta_{12}x_1z$ veya $\beta_{22}x_2z$ eklenebilir. Bununla beraber son tasarım, (2.102)'den sapmalara en duyarlı olanıdır (Draper ve John, 1988: s. 425).



Şekil 2-20. Model (2.102) için beş ayrı tasarım

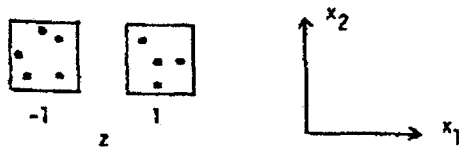
Tasarım 2.20e, modelde olası eğrisellik hakkında bilgi sağlarken, model (2.104)'ün uyumunu yapmak için genişletilsin. Diğer bir deyişle, (2.104)'ün uyma iyiliği,

$$E(y) = \sum_{z=1}^2 W_z (\beta_{0z} + \beta_{1z}x_1 + \beta_{2z}x_2) + (\beta_{11}x_1^2 + \beta_{22}x_2^2 + \beta_{12}x_1x_2) \quad (2.105)$$

modeline göre değerlendirmek istenebilir. Eşitlik (2.104)'ün uyumunu yapmak için z 'nin her bir seviyesinde bir birinci derece tasarıma gereksinim vardır. Bunu sağlamak için, tasarım 2.20e'ye ekstra noktalar eklenebilir: köşelere $(x_1, x_2) = (\pm 1, \pm 1)$ ve merkez noktasına $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Bu tasarım eşitlik (2.105)'deki $\beta_{12}x_1x_2$ 'nin eşitlik (2.104)'e eklenebilmesine de imkan vermektedir.

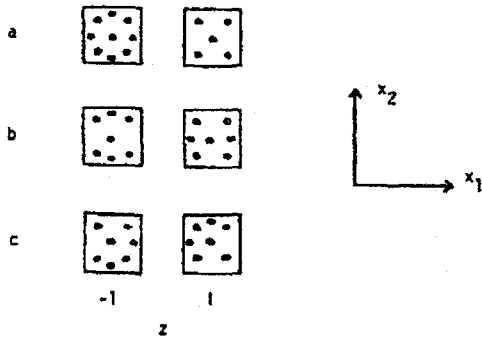
Alternatif olarak, yıldız noktaları $(x_1, x_2) = (\pm\alpha, 0), (0, \pm\alpha)$ yalnızca (2.104)'ün uyumu değil, (2.105)'deki ikinci derece parametrelerin bazıları ya da hepsi hakkında bilgi

vermesi amacıyla eklenebilir. (2.105)'deki ekstra parametrelerin uyumunu yapmak için, noktalar z 'nin seviyeleri üzerinden toplandığında, bir ikinci derece tasarım elde edilmelidir. Tasarım 2.20e'ye yıldız noktaları eklendiğinde Şekil 2.21'deki tasarım elde edilir. Bu tasarım ile z 'nin her bir seviyesinde bir birinci derece model uyumu yapılabilir ve noktalar z üzerinden toplandığında, tasarım bir bileşik ikinci derece tasarım olur. Aynı etkiye sahip olmak için dört yıldız noktası daha değişik şekillerde de eklenebilir.



Şekil 2-21. Model (2.104) ve (2.105) İçin Tasarım.

Model (2.105)'in uyumunun yapılması için bir tasarımın kurulması ele alınsın. Şekil 2.21'deki tasarım model (2.105)'in uyumunu yapmak için yeterlidir; ancak uyum iyiliği hakkında bilgi vermez. (Tasarım noktaları sayısı ile model (2.105)'deki parametre sayısı eşit olduğu için) Eğer ekstra noktalar bu tasarıma veya benzer doyurulmuş tasarımlara eklenirse, etkileşim terimleri x_1^2z, x_2^2z ve x_1x_2z ile ortaya çıkan parametrelerin tamamı veya bazıları hakkında bilgi elde edilebilir. Şekil 2.22 üç olası tasarımı vermektedir; bunlardan 2.22c, Şekil 2.21'deki tasarımın genişletilmesiyle elde edilmiştir. Buradaki her bir tasarım 14 tasarım noktasından oluşmaktadır. Ayrıca z 'nin her bir seviyesinde birinci derece model uyumu yapılabilmektedir ve z üzerinden toplandığında, bu tasarımlar bileşik ikinci derece tasarımlara dönüşmektedir.



Şekil 2-22. Model (2.105) İçin Tasarımlar.

Tasarım 2.22a için Model (2.105)'deki terimlerin ve x_1^2z, x_2^2z ve x_1x_2z terimlerinin tasarım noktası değerleri Tablo 2.16'da verilmiştir. Tablo 2.16'daki ilk dokuz kolon doğrusal bağımsızdır. Böylece Model (2.105)'in uyumu yapılabilir. 12 kolon arasında ise aşağıdaki gibi bir doğrusal bağımlılık vardır:

$$x_1^2 - x_2^2 = x_2^2z - x_1^2z \quad (2.106)$$

x_1x_2z parametresi ve x_1^2z ve x_2^2z 'nin biri ile ortaya çıkan parametrelerden biri tahminlenebilir.

Tablo 2.16. Tasarım 2.22a ile ortaya çıkan tahminleme kolonları

I	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	z	x_1z	x_2z	x_1^2z	x_2^2z	x_1x_2z
1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	$-\alpha$	0	α^2	0	0	-1	α	0	$-\alpha^2$	0	0
1	α	0	α^2	0	0	-1	$-\alpha$	0	$-\alpha^2$	0	0
1	0	$-\alpha$	0	α^2	0	-1	0	α	0	$-\alpha^2$	0
1	0	α	0	α^2	0	-1	0	$-\alpha$	0	$-\alpha^2$	0
1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Kaynak: N. R. Draper ve J. A. John (1988).

Tasarım 2.22b için, benzer şekilde eşitlik (2.106)'nın gerçekleştiği gösterilebilir. Bununla beraber, tasarım 2.22c için, karşılık gelen ilk 12 kolon doğrusal bağımsızdır. Bu yüzden bu tasarım, diğer iki tasarıma tercih edilebilir. Tasarım 2.22c, z 'nin her bir seviyesinde bir ikinci derece modelin uyumunun yapılmasına imkan vermektedir. Böylece

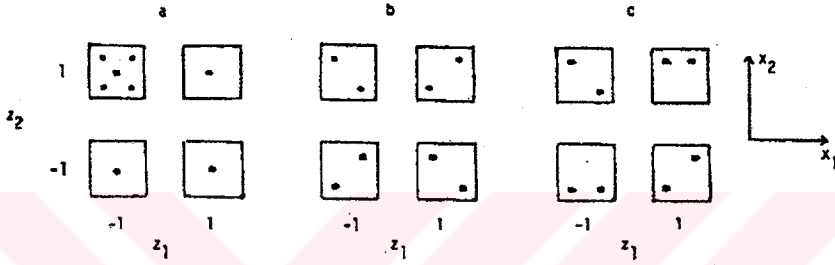
$$E(y) = \sum_{z=1}^2 W_z (\beta_{0z} + \beta_{1z}x_1 + \beta_{2z}x_2 + \beta_{11}x_1^2 + \beta_{22}x_2^2 + \beta_{12}x_1x_2) \quad (2.107)$$

modelinin uyumu yapılabilir.

İki sayısal değişken x_1 ve x_2 ve iki seviyeli iki niteliksel değişken z_1 ve z_2 için olası modeller ve tasarımlar ele alınsın ($z_i = \pm 1, i = 1, 2$) ve niteliksel faktörlerin dört değişik kombinasyonunda paralel düzlemlerin uyumu yapılmak istensin. Diğer bir deyişle

$$E(y) = \beta_0 + \beta_{01}z_1 + \beta_{02}z_2 + \beta_{012}z_1z_2 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 \quad (2.108)$$

modelinin uyumu yapılsın. Değişik sabit terimleri tahminlemek için, z_1 ve z_2 'nin her bir kombinasyonunda en az bir tasarım noktası bulunmalıdır. Paralel düzlemlerin uyumunu yapmak için, tasarım noktalarının z_1 ve z_2 'nin tüm kombinasyonları üzerinde toplamı, bir birinci derece tasarım oluşturulmalıdır. Bunun için olası tasarımlardan üç tanesi Şekil 2.23'de verilmiştir. Tüm tasarımlar sekiz tasarım noktasına sahiptir; tasarım 2.23b ve 2.23c benzer yapıdadır. Tasarım 2.23b, Şekil 2.19'da verilen $x_1x_2z_1z_2 = I$ tanımlama ilişkili 2_{IV}^{4-1} kesirli faktöryeldir.



Şekil 2-23. Model (2.108) için üç tasarım.

Düzlemlerdeki paralelliğin bozulması hakkında bilgi sahibi olmak için 2.23b ve 2.23c tasarımlarından biri seçilebilir. Tasarım 2.23a, x_1x_2 etkileşimindeki terimin uyumunun yapılmasına imkan vermektedir. Ancak x_iz_j etkileşimlerinin tahminlenmesine imkan vermemektedir. Tasarım 2.23b için (2.108)'in uyumunun yapılmasından sonra geriye kalan 2 serbestlik derecesi x_1z_j ve x_2z_j 'nin uyumunun yapılmasına imkan vermektedir. ($j = 1$ veya 2). Tasarım 2.23c, daha büyük bir esneklik vermektedir, herhangi bir x_iz_j ($i, j = 1, 2$) terimlerinden ikisinin uyumu yapılabilir.

Son bir örnek olarak, $k = 3$ ve $r = 1$ şeklinde bir tasarım ele alınsın. Üç kodlanmış sayısal değişken $x_1 =$ fırın sıcaklığı, $x_2 =$ fırındaki nem, $x_3 =$ pişirme zamanı ve bir niteliksel faktör $z =$ Nutrasweet ve saccharin'in, ekmeğin bir özelliği, y üzerindeki etkisi incelensin. (x_1, x_2, x_3) 'deki bir ikinci derece modelin uyumunu yapmak için her bir tatlandırıcı seviyesinde 15 tasarım noktalı bir bileşik tasarım kurulabilir, ancak bu bir çok ekmek demektir. İkinci derece

$$E(y) = \sum_{z=1}^2 W_z (\beta_{0z} + \beta_{1z}x_1 + \beta_{2z}x_2 + \beta_{3z}x_3) + \beta_{11}x_1^2 + \beta_{22}x_2^2 + \beta_{33}x_3^2 + \beta_{12}x_1x_2 + \beta_{13}x_1x_3 + \beta_{23}x_2x_3 \quad (2.109)$$

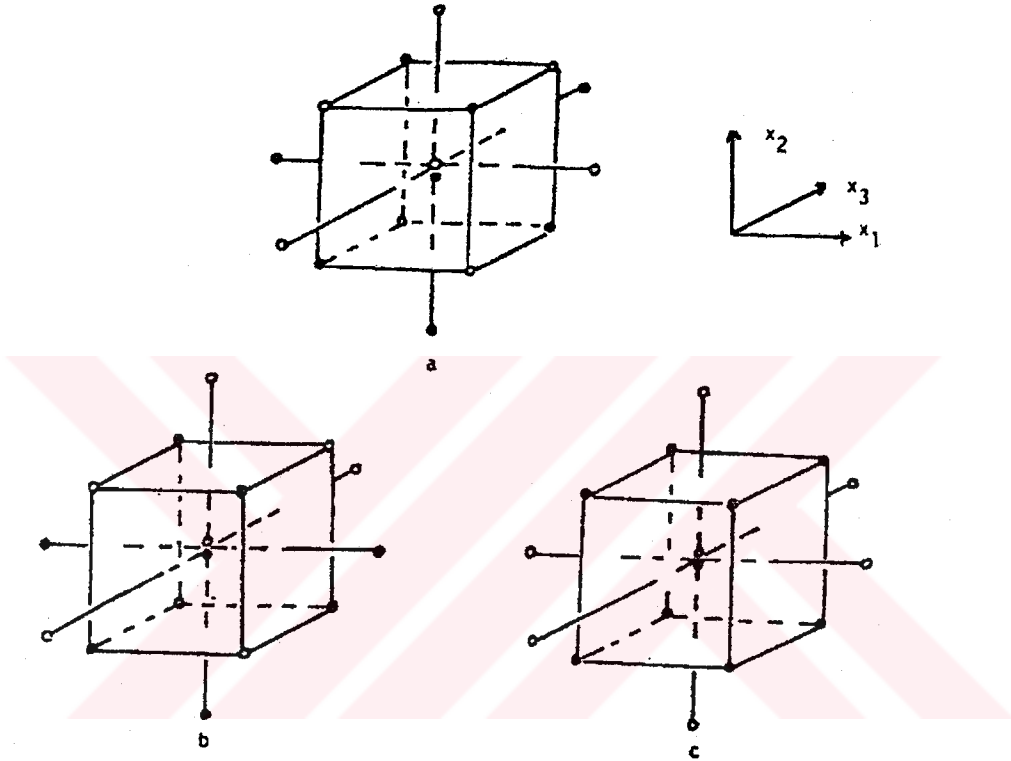
modelinin uyumunu yapmak ve ikinci derece etkileşim terimleri (x_1^2z ve x_1x_2z gibi) hakkında fikir sahibi olmak istensin.

Eşitlik (2.109)'daki 14 parametrenin tahminlenmesi için z 'nin her bir seviyesinde bir birinci derece modelin kurulmasına imkan verecek bir tasarıma ihtiyaç vardır. Ayrıca bu tasarım, noktalar z üzerinden toplandığında bir ikinci derece tasarım türetmelidir. Küp, yıldız ve merkez noktalarını kullanan çeşitli tasarımlar kullanılabilir. Şekil 2.24'deki a ve b tasarımları, $x_1x_2x_3 = \pm 1$ etkileşiminin karışması ile iki bloğa ayrılmış bir 2^3 tasarımı kullanmaktadır. Bu bloklar z 'nin iki seviyesine (± 1) karşılık gelmektedir. Ayrıca bu tasarımlar, z 'nin her bir seviyesinde üç tane olmak üzere 6 yıldız noktası ve z 'nin her bir seviyesinde birer merkez noktasından oluşmaktadır. Üçüncü tasarım 2.24c'de, tüm küp noktaları $z = -1$ 'de, tüm yıldız noktaları $z = 1$ 'de ve birer merkez noktası z 'nin tüm seviyelerinde bulunmaktadır. Böylece tüm tasarımlar, 16 tasarım noktasından oluşmaktadır. Model (2.109)'un uyumu 2.24b ve 2.24c tasarımları kullanılarak yapılabilir (tasarım 2.24a hariç). Tasarım 2.24b'de, geriye kalan 2 serbestlik derecesi, x_1x_3z ve x_i^2z ($i = 1, 2$ veya 3) terimlerinin uyumunu yapmak için kullanılabilir. Tasarım 2.24c ise yalnızca x_i^2z formundaki terimlerin uyumunun yapılmasına imkan vermektedir. Bununla birlikte, tasarım 2.24b, yalnızca model (2.109)'un uyumunun yapılmasına değil, x değişkenlerindeki ikinci derece terimler ile niteliksel değişken z arasındaki olası etkileşimler hakkında bilgi vermektedir.

Yukarıda verilen örneklerde sayısal ve niteliksel değişkenleri içeren cevap yüzeyi tasarımlarının, eşitlik (2.100)'deki formdaki modelin uyumunun yapılması ve sınanması için nasıl kurulabileceği verilmiştir. Bu örnekler iki seviyeli niteliksel değişkenleri içermesine rağmen, buradaki temel fikirler herhangi bir seviye sayılı değişkenlere uyarlanabilir.

Seçilen bir modeldeki terimlerin sınanması ile, niteliksel değişkenlerin değişik seviyelerinde birinci derece veya ikinci derece tasarımın gerekliliği açığa çıkmaktadır. Örneğin, niteliksel değişken z 'nin üç seviyesinin her birinde paralel hiper düzlemlerin uyumu yapılmak istendiğinde, z 'nin her bir seviyesinde sabit terimin tahminlenmesi için en az bir tasarım noktası ve z 'nin üç seviyesi üzerinden toplam alındığında bir birinci derece tasarıma sahip olmak gerekmektedir. z 'nin bazı veya tüm seviyelerinde bazı ekstra

noktaların eklenmesi, paralellik dışı veya eğriselliğin varlığının değerlendirilmesini mümkün kılar. Bundan başka genellikle σ^2 'nin bir tahminini elde etmek gerekmektedir. Bu da bazı veya tüm denemelerin tekrarlanması ile saf hata tahmini elde edilerek sağlanabilir.



Şekil 2-24. Model (2.109) için üç tasarım: ○, $z = 1$; ●, $z = -1$

2.9 CEVAP YÜZEYİ TASARIMLARINDA DİĞER KONULAR

İzleyen kesimlerde cevap yüzeyi tasarımının seçiminde dikkate alınan, Box ve Draper (1975)'in kriterlerini sağlamak amacı ile kullanılan diğer tasarımlar, karışım deneylerinin tasarımı, doğrusal olmayan modeller için tasarımlar, eğim ile ilgili tasarımlar ve cevap yüzeyi tasarımlarında döndürülebilirliğin ölçülmesi konuları kısaca tanıtılmıştır.

2.9.1 Sapmayı Dikkate Alan Tasarımlar

Box ve Draper (1959, 1963), modelin yanlış belirlenmesine karşı kurt (robust) olan cevap yüzeyi tasarımları fikrini ortaya atmıştır. Box-Draper'in çalışmasının temel

felsefesi, bütünleşik ağırlıklı ortalama karesel hata (integrated weighted mean squared error) etrafında odaklanmıştır:

$$J = \frac{NK}{\sigma^2} \int_R w(\mathbf{x}) E[\hat{y}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} \quad (2.110)$$

Burada $\hat{y}(\mathbf{x})$, uyumu yapılan d_1 'inci dereceden bir polinomial ve $g(\mathbf{x})$ $d_2 > d_1$ 'inci dereceden ve bilinmeyen parametreleri içeren *gerçek* ortalama cevap modelidir. Ayrıca R deney bölgesi; $K^{-1} = \int_R d\mathbf{x}$ deney bölgesi R 'nin hacmi, N gözlem sayısı, $w(\mathbf{x})$ bir ağırlık fonksiyonu ve σ^2 hata varyansıdır. J ifadesi, deney bölgesi R 'de ortalaması alınmış ağırlıklı varyans ve karesel sapmanın toplamı olarak yazılabilir. Eşitlik (2.110)'dan J 'yi minimize eden tasarım bulunamayabilir; ancak deliller J 'nin sapma kısmının daha önemli olduğunu ve sapma kısmının minimizasyonu ile yaklaşık olarak J 'yi minimize eden kurt tasarımın elde edilebileceğini göstermektedir (bkz. Khuri ve Cornell, 1987: s.215, Tablo 6.1). Benzer çalışmalar küresel olmayan deney bölgeleri için Draper ve Lawrance (1965) ve Draper ve Guttman (1986) tarafından yapılmıştır.

Sapma kriteri, *gerçek model* olarak kabul edilen modele bağlı olarak, model yetersizliğinin spesifik bir formuna karşı koruma sağlamaktadır. Kiefer (1975: ss. 284-286), sapma ile ilgili şüphelerin bazı yönlerini, sapma kriterinin hatırı için varyans kriterinden ödün verildiği için eleştirmiştir. Ancak gerek Kiefer gerekse Box, tasarım seçiminin birden daha fazla sayıda kritere göre gerçekleştirilmesi gerektiği konusunda aynı düşüncededirler (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 141).

2.9.2 Cevap Yüzeyi Tasarımlarının Kuntluğu

Modelin yanlış belirlenmesinden başka, cevap yüzeyi tasarımlarının kuntluğu (robustness) şu kategorileri içermektedir (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 141): (a) Verilerdeki sapanlara karşı kuntluk, (b) tasarım seviyelerindeki hatalara karşı kuntluk, (c) modelin yanlış belirlenmesi durumunda ekstrapolasyon için tasarımlar. (ekstrapolasyondaki hatalara karşı dirençli tasarımlar).

Box ve Draper (1975) sapanların $\hat{y}(\mathbf{x})$ üzerindeki etkilerini minimize eden tasarımları vermiştir. Herzberg ve Andrews (1976) kayıp gözlemler ve sapanların olması

gibi durumlarda optimum tasarımları elde etmişlerdir. Hem modelin yanlış belirlenmesine hem de sapanlara karşı eş anlı olarak koruma sağlanması ile ilgili bir çalışmada Draper ve Herzberg (1979), Box ve Draper (1959, 1963) tarafından verilen kritere benzer bir bütünleşik ortalama karesel hata kriterini kullanmışlardır (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 141).

Kuntluk fikri ile ilgili bir diğer çalışma, faktör seviyelerindeki hatalar ile ilgilidir. Vuchkov ve Boyadjieva (1983) bu problemi ele almışlardır ve kunt tasarımlar ailesini bulmaya çalışmışlardır. Box (1963), birinci derece ve ikinci derece modellerde faktör seviyelerindeki hataların etkisini ele almıştır. Box'un makalesinde herhangi bir tasarım kriteri verilmemesine rağmen, tasarım değişkenlerindeki hataların verdiği zararların miktarını hesaba katmaktadır (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 141).

Ekstrapolasyondaki hatalara karşı dirençli tasarımlar, cevap yüzeyleri sık sık ekstrapolasyon amaçlı olarak kullanıldığı için cevap yüzeyi yönteminde önemli bir yere sahiptirler. Draper ve Herzberg (1973, 1979) bu anlamda kunt olan tasarımları, birinci derece ve ikinci derece uyumu yapılmış modellerin kullanılması durumlarında tartışmıştır. Burada bu modellerin ekstrapolasyon yeteneğinin sistemin gerçek yapısındaki daha yüksek dereceli terimlerin varlığından etkilendiği varsayılmaktadır (Myers, Khuri ve Carter, 1989: ss. 141, 142).

Kunt tasarımlar ile ilgili olarak daha geniş bir literatür Steinberg ve Hunter (1984) tarafından verilmiştir.

2.9.3 Karışım Deneylerinin Tasarımı

İlk kez Scheffé (1958) tarafından tanıtılan karışım deneyleri, cevabın bir karışımdaki bileşenlerin görelî oranlarına dayandığı deneylerdir. Bu deneyler şu şekilde tanımlanır: x_i ($i = 1, 2, \dots, k$), bir k faktör kombinasyonunda i 'inci bileşenin oranını temsil ediyorsa, her bir deneme için $0 \leq x_i \leq 1$ ve $\sum_{i=1}^k x_i = 1$ olmaktadır. Deneylerin gelişmesi ve bu kısıtlar altında toplanan verilerin analizi, bir çok araştırmanın konusu olmuştur. Karışım deneyleri geniş çaplı olarak kimya, petrol, gıda, tütün endüstrilerinde uygulanmaktadır (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 142). Karışım deneyleri ile ilgili

detaylar Cornell (1990)'da bulunmaktadır. Ayrıca geniş birer literatür Cornell (1973, 1979), Mead ve Pike (1975) ve Steinberg ve Hunter (1984)'te bulunmaktadır

2.9.4 Eğim İçin Tasarımlar

Cevap yüzeyi yöntem biliminin birçok uygulamasında, cevap fonksiyonunun türevlerinin iyi bir tahmini, en az ortalama cevabın tahmini kadar önemli olabilir (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 142). Gerçekte, bir ikinci derece modelin analizine durağan noktanın hesaplanması veya en hızlı artış ve sırt (ridge) analizi gibi gradient tekniklerin kullanılması, tahminlenmiş cevap fonksiyonuna bağlıdır. Tahminlenmiş cevap $\hat{y}(\mathbf{x})$ için istenilen özelliklere ulaşılan tasarımlar, tahminlenmiş türevler (eğimler) için aynı özelliklere sahip olmayabilir.

Atkinson (1970), birinci derece bir cevap fonksiyonu olduğunda sabit bir noktadaki veya bir bölgedeki eğimin tahminlenmesi için tasarımları ele almıştır. Bu çalışmada yetersiz bir modelin kullanılması durumu hesaba katılmıştır. Atkinson, tahminlenmiş eğimin ortalama karesel hatasını minimize eden tasarımları seçmiştir (Mead ve Pike, 1975: s. 834). Burada ortalama karesel hata, Box ve Draper (1959)'un önerdiğine benzer şekilde, varyans ve sapma terimlerine ayrılmaktadır.

Hader ve Park (1978) döndürülebilirlik fikrini ikinci derece modellerin eğimlerini içerecek şekilde genişletmişlerdir (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 142). Hader ve Park tarafından *eğim döndürülebilirliği* olarak adlandırılan bu düşünceye göre tahminlenmiş türevlerin varyansları tasarım merkezinden eşit uzaklıktaki tüm noktalarda sabittir. Eğim için tasarımlar ile ilgili daha detaylı literatür Myers, Khuri ve Carter (1989) ve Mead ve Pike (1975)'te bulunmaktadır.

2.9.5 Doğrusal Olmayan Modeller İçin Tasarımlar

Doğrusal olmayan bir model

$$y = f(\mathbf{x}, \theta) + \varepsilon$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)'$, girdi değişkenleri vektörü, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ bilinmeyen parametreler vektörü, ε şansa bağlı hata ve $f(\mathbf{x}, \theta)$ ise θ 'nın en az bir

elemanı cinsinden doğrusal olmayan bilinen bir fonksiyondur. Myers, Khuri ve Carter (1989: s. 143) özellikle biyoloji ve kimya bilimlerinde olmak üzere birçok alanda uygulanmasına rağmen doğrusal olmayan modellerin cevap yüzeyi yönteminde fazla ilgi görmediğini belirtmiştir.

Doğrusal olmayan modeller için ana tasarım kriteri D -optimalite kriteridir ve gerçekte doğrusal olmayan bir modelin doğrusallaştırılmış bir formuna uygulanmaktadır (Box ve Lucas, 1959). $f(\mathbf{x}, \theta)$, $\theta = \theta_0$ etrafında θ cinsinden yaklaşık olarak doğrusal ise, bir tasarım \mathbf{D} , determinant $|F'(\mathbf{D}, \theta) F(\mathbf{D}, \theta_0)|$ maksimum olacak şekilde seçilir. Burada $F(\mathbf{D}, \theta_0)$, $N \times p$ boyutlu ve (i, j) 'inci elemanı

$$f_{ij} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}_i, \theta)}{\partial \theta_j} \right|_{\theta=\theta_0} \quad i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, p$$

şekindedir. Burada $\partial f / \partial \theta_j$, f 'nin θ_j 'ye göre kısmi türevi, x_i , \mathbf{x} 'in i 'inci denemedeki değeri ve N deneme sayısıdır. Bu kriter gereğince elde edilen optimum tasarım Chernoff (1953) tarafından D -optimum tasarım olarak adlandırılmıştır. Parametre vektörünün yalnızca bir alt seti ile ilgilenildiğinde benzer bir tasarım kriteri M. J. Box (1971) ve Hill ve Hunter (1974) tarafından verilmiştir (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 143).

Doğrusal olmayan modeller için D -optimum tasarımlar, θ 'nın bilinmeyen değerlerine bağlıdır. Bu durum doğrusal olmayan modellerin cazip olmayan bir özelliğidir ve en iyi Cochran (1973) tarafından tanımlanmıştır (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 143): "Bana θ 'nın değerini söylüyorsunuz ve ben de θ 'nın tahminlenmesi için en iyi deneyin tasarlanmasını vaat ediyorum." Tasarım bağımlılığı problemini çözmek veya en azından hafifletmek için birkaç prosedür mevcuttur. Bunlardan birisi, bir ilk tahmin θ_0 ile başlayan ardışık bir prosedürdür (bkz. Box ve Hunter, 1965). Silvey (1980), θ 'ya olan tasarım bağımlılığını doğrusal olmayan modeller ile ilgili birkaç örnek kullanarak tartışmıştır (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 143).

Tasarım bağımlılığı ile ilgili alternatif bir strateji ise bir Bayesian yaklaşımın uyarlanmasıdır. Zacks (1977), θ 'nın bir deney öncesi (prior) dağılışı kısıtı altında $|F'(\mathbf{D}, \theta) F(\mathbf{D}, \theta)|$ determinantının beklenen değerinin maksimizasyonunu ele almıştır. Ayrıca

Bayes ardışık tasarımları, Box ve Hunter'ın önerdiği prosedüre benzer prosedürler kullanılarak elde edilebilmektedir (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 143).

Optimum doğrusal olmayan tasarımın, parametre vektörü θ 'ya olan bağımlılığı, model kısmen doğrusal olmayan bir model olduğunda daha azdır. Diğer bir deyişle model içerisinde θ 'nın bazı elemanları doğrusal, bazıları doğrusal olmayan olarak görünmektedir (bkz. Hill, 1980; Khuri, 1984) (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 143).

2.9.6 Uyum Yetersizliği Testinin Gücünü Arttırmak İçin Kullanılan Tasarımlar

Cevap yüzeyi yöntem biliminde uyumu yapılmış modelin yeterliliğinin testi önemli bir yer tutmaktadır. Draper ve Herzberg (1971), en az bir tasarım noktasında tekrarlı gözlemler elde edilebildiğinde, uyum yetersizliği testi ile test edilen hipotezlerin yapısı hakkında fikir vermektedir. Myers, Khuri ve Carter (1989: s. 144) deneysel sürecin ilk safhalarında, bir modeldeki uyum yetersizliğinin tespit edilme yeteneğinin de aynı derecede önemli olduğunu belirtmişlerdir. Bu durum ise uyum yetersizliği testinde, belirli bir duyarlılık derecesini sağlayan bir tasarımın kullanımını gerektirmektedir. Bunu başarmak için tasarım, uyum yetersizliği testinin gücünü maksimize edecek şekilde seçilmelidir (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 144). Ancak bu kritere göre seçilen tasarımlar gerçek modelin bilinmeyen parametrelerine bağlıdır. Bu problemin üstesinden gelmek için birkaç yaklaşım bulunmaktadır. Bu tip tasarımlar ile ilgili detaylar için Atkinson (1972), Atkinson ve Federov (1975), Jones ve Mitchell (1978) ve Morris ve Mitchell (1983)'e başvurulabilir (Myers, Khuri ve Carter, 1989: s. 144).

2.9.7 Cevap Yüzeyi Tasarımlarında Döndürülebilirliğin Ölçülmesi

Box-Hunter (1957) tarafından ortaya atılan döndürülebilirliğin cazip özelliklerinden birisi, $\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})]$ 'in büyüklüğü ile ölçülen kestirim kalitesi, girdi değişkenleri uzayındaki koordinat eksenlerinin döndürülmesine karşı invariant olmasıdır. Eğer belli bir deney bölgesinde ortak merkezli hiperkürelerin üzerinde $\hat{y}(\mathbf{x})$ 'in optimizasyonuna çalışılıyorsa, tasarımın döndürülebilir olması tercih edilir. Aksi halde, optimumun zayıf tahminleri ile karşılaşılabılır. Bir cevap yüzeyi tasarımının döndürülebilirliğinin üç farklı ölçüsü Khuri

(1988), Draper ve Guttman (1988) ve Draper ve Pukelsheim (1990) tarafından verilmiştir. Khuri (1988) ve Draper ve Pukelsheim (1990), döndürülebilir olmayan bir tasarımın döndürülebilir (veya yaklaşık döndürülebilir) hale getirilmesi ile ilgili birer prosedür vermişlerdir.



Üçüncü Bölüm

CEVAP YÜZEYLERİNİN ANALİZİ

Bu bölümde, en çok istenen cevap değerini türetecek girdi değişkenleri setini bulmak için kullanılacak birkaç prosedür anlatılmıştır. Arzu edilen cevap değerleri maksimum çıktı veya bir üretim hattının sonucu olarak en yüksek kalite seviyesi olabilir. Benzer şekilde, bir ürünün elde edilmesinin maliyetini veya toplam üretim süresini minimize edecek değişken seviyeleri araştırılabilir. Bu durumda, en çok arzu edilen cevap değerlerini veren girdi değişkenleri seviyeleri, *optimum koşullar* olarak adlandırılır. Optimum koşulları arama sürecindeki adımlar birinci bölümde verildiği gibidir. Ancak bulunan optimum koşulların yanlış sonuçlar vermemesi kurulan birinci veya ikinci derece modelin yeterliliğine bağlıdır.

3.1 MODEL YETERLİLİĞİNİN KONTROLU

Her zaman (a) uyumu yapılmış modelin gerçek sisteme yeterli bir yaklaşım sağladığının sınanması ve (b) en küçük kareler varsayımlarının hiç birinin zayıfladığının doğrulanması gerekmektedir. Model yeterli değil ise uyumu yapılan cevap yüzeyinin incelenmesi ve optimizasyonu yanlış sonuçlar verecektir. Bu kesimde modelin yeterliliğinin kontrolünde kullanılan bazı teknikler kısaca tanıtılmıştır.

3.1.1 Artıkların Analizi

En küçük kareler uyumundan elde edilen artıklar (residuals) $e_i = y_i - \hat{y}_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, N$ model yeterliliğinin değerlendirilmesinde önemli bir rol oynarlar. Normallik varsayımının kontrolü artıkların normal olasılık kağıdının kurulmasıyla gerçekleştirilebilir. Artıklar yaklaşık olarak bir doğru şeklinde dağılıyor ise normallik varsayımı sağlanıyor demektir. Normallik varsayımı sağlanmadığında cevap ve / veya girdi değişkenlerinin transformasyonu ile bu problem ortadan kaldırılabilir. Değişkenlerin transformasyonları

ile ilgili detaylar Atkinson (1985) ve Box ve Draper (1987)'de bulunmaktadır. Cevabın transformasyonu ile ilgili olarak bazı açıklamalar ise kesim 3.4'te verilmiştir. Artıkları kestirilmiş cevap $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ 'lere karşı, artıkların her bir girdi değişkenine karşı ve yine artıkların denemelerin uygulanış sırasına göre dağılıma diyagramları oluşturulduğunda, bu diyagramlardaki şansa bağlı olarak görülmeyen şekiller model yetersizliğine işaret ederler. Artıkların analizi ile ilgili detaylar için Draper ve Smith (1981), Myers (1990) ve Rawlings (1988)'e başvurulabilir.

3.1.2 Uyum Yetersizliği Testi

Cevap yüzeyi yönteminde tasarlanmış deneyden elde edilen verilere bir regresyon modelinin uyumu yapılmaktadır. Aynı girdi değişkenleri seviye kombinasyonunda en az iki gözlem alındığında modelin yeterliliği için bir test uygulanabilmektedir.

Uyum yetersizliği testi girdi değişkenleri x_1, x_2, \dots, x_k 'nin en azından bir seviye kombinasyonunda tekrarlı gözlem alınmasını gerektirmektedir. Bu tekrarlı noktalar σ^2 'nin modelden bağımsız bir tahmininin elde edilmesi amacı ile kullanılır. Girdi değişkenlerinin i 'nci seviyesinde alınan gözlem sayısı n_i olsun. Ayrıca y_{ij}, x_i noktasında cevaptaki j 'nci gözlem olsun ($j = 1, 2, \dots, n_i$). Toplam gözlem sayısı $N = \sum_{i=1}^m n_i$ şeklindedir. Artık kareler toplamı aşağıdaki gibi iki bileşene ayrılabilir:

$$KT_A = KT_{SH} + KT_{UY}$$

Burada KT_{SH} saf hata kareler toplamı ve KT_{UY} uyum yetersizliği kareler toplamıdır. Saf hata kareler toplamı

$$KT_{SH} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \quad (3.1)$$

şeklinde hesaplanabilir. Sabit varyans varsayımı sağlandığında, yalnızca x_i seviyesindeki y 'lerin değişkenliği hesaba katıldığı için KT_{SH} , saf hatanın modelden bağımsız bir ölçüsüdür. Her bir x_i seviyesindeki saf hata için $n_i - 1$ serbestlik derecesi bulunduğu için, saf hata kareler toplamı için toplam serbestlik derecesi

$$\sum_{i=1}^m (n_i - 1) = N - m \quad (3.2)$$

şeklindedir. Uyum yetersizliği için kareler toplamı

$$KT_{UY} = \sum_{i=1}^m n_i [\bar{y}_i - \hat{y}_i(\mathbf{x})]^2 \quad (3.3)$$

şeklindedir. Uyumu yapılmış $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ değerleri karşılık geldiği \bar{y}_i değerlerine yakın ise modelin yeterli olduğuna dair kuvvetli bir gösterge var demektir. KT_{UY} ile ilgili olarak $m - p$ serbestlik derecesi bulunmaktadır.

Uyum yetersizliği için test istatistiği

$$F_0 = \frac{KT_{UY} / (m - p)}{KT_{SH} / (N - m)} = \frac{KO_{UY}}{KO_{SH}} \quad (3.4)$$

şeklindedir. Buradaki KO_{SH} , deneysel hata varyansının bir tahminleyicisidir. Model yeterli ise F_0 , $F_{m-p, N-m}$ dağılışı gösterir. $F_0 > F_{\alpha, m-p, N-m}$ ise modelin yetersiz olduğuna karar verilir. Uyum yetersizliği ile ilgili detaylar için Draper ve Smith (1981) ve Myers (1990)'a başvurulabilir.

3.2 BİRİNCİ DERECE CEVAP YÜZEYLERİNİN ANALİZİ: EN HIZLI ARTIŞ YÖNTEMİNİN SÜREÇ İYİLEŞTİRME AMACI İLE KULLANILMASI

Üzerinde çalışılan sistemin tamamı (işletilebilir bölge) üzerinde polinomial biçimdeki bir ampirik fonksiyonun uyumu yapılmaya kalkılırsa, oldukça karmaşık bir fonksiyona gerek duyulabilir. Böyle bir fonksiyonun uyumunun yapılması, çok sayıda deneyin uygulanmasını gerektirir. Bununla beraber, işletilebilir bölgenin incelenmesi hemen hemen hiç bir zaman mümkün veya makul olmayabilir. Bu bölgenin büyüklüğü çoğu zaman tam olarak bilinmeyebilir veya deneyi uygulayan araştırmacı, teorik olarak deneylerin düzenlenebileceği, ancak kazanç getirmeyeceği bilinen bölgeleri dikkate almayabilir. Bu durumda araştırmacı doğal olarak, tüm işletilebilir bölge yerine daha küçük bir bölgeyi açıklamak isteyecektir. Sonuç olarak daha küçük bir alt bölgede daha küçük dereceli bir ampirik fonksiyonun yeterli olması beklenir.

Bir modelin uyumu yapılırken, uyumun yapıldığı derecedeki tüm olası yüzeylerden, deney noktalarındaki cevap değerlerine en yakın olanı seçilir (en küçük kareler ile). Uyumu yapılmış yüzeyin, deneyin tasarlandığı bölgeden uzak olan noktalardaki tarafına ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu yüzden ampirik modelin yalnızca mevcut deney bölgesi içerisinde veya civarında kullanışlı olması beklenir. Maksimum (veya minimum) nokta deney bölgesi içerisinde veya civarında ise, ikinci derece bir modelin uyumu yapılarak deney bölgesi yerel olarak açıklanabilir; böylece maksimum (veya minimum) nokta tahminlenebilir. Bununla beraber, sistem ilk kez inceleniyorsa, başlangıçtaki deney koşulları böyle bir maksimum (veya minimum) genellikle yakın olmayabilir. Böylece araştırmacının genellikle ilk olarak, kendisine ikinci derece eşitliğin en kullanışlı olarak uygulanabileceği uygun bir bölgeye taşıyan bir ön prosedüre ihtiyacı vardır. Bir çok yazara göre, genellikle etkili ve ekonomik bir yöntem olan en hızlı artış (steepest ascent), uygun bir ön prosedürdür (Box ve Draper, 1987: s. 183).

3.2.1 En Hızlı Artış Yönünün Bulunması

En hızlı artış prosedürü, cevaptaki maksimum artışın yolu boyunca bir dizi deneyin uygulanmasından ibarettir. Cevabın minimize edilmesi istendiğinde, maksimum azalışın yolu (steepest descent) boyunca denemelerin uygulanması sözkonusudur. Prosedür, gerçek cevap yüzeyine bir hiperdüzlem eşitliği kullanılarak yaklaşıması ile başlar. Tahminlenmiş ve yeterliliği kabul edilmiş hiper düzlem ile sağlanan bilgi, cevap değerlerinde artış gözlenmesi beklenen bir yönün bulunması için kullanılır. Yüzeyde artan cevap değerleri yönünde hareket edildiğinde ve yüzeyde eğriliğin ortaya çıktığı bir bölgeye yaklaşıldığında, cevap değerlerindeki artış, yüzeyin özel bir yöndeki en yüksek noktasında sona erecektir. Bu yönde denemelerin uygulanmasına devam edilirse ve yüzey yüksekliği azalır, yeni bir deney seti uygulanır ve yeniden birinci derece modelin uyumu yapılır. Model yeterli ise cevap değerlerinin artış halinde olduğu yeni bir yön bulunur. Yeni denemeler dizisi, cevaptaki artış duruncaya veya çok azalınca kadar devam ettirilir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 159).

En hızlı artış yöntemini matematiksel olarak tanımlamak için, öncelikle gerçek cevap yüzeyine bir hiper düzlem eşitliği $\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i$ ile yerel olarak

yaklaşılabilirliği varsayılmaktadır. Veriler birinci derece tasarım noktalarından toplanır ve katsayı tahminleri, uyumu yapılmış birinci derece model

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i \quad (3.5)$$

yi elde etmek için hesaplanır. İzleyen adım ise, tasarımın merkezinden, örneğin r birim uzaklıkta, cevaptaki maksimum artış yönünde hareket etmektir. Merkezden r birim hareket etmek, $\sum_{i=1}^k x_i^2 = r^2$ kısıtı altında $b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i$ 'yi maksimize edecek (x_1, x_2, \dots, x_k) değerlerinin bulunması demektir.

Cevap fonksiyonunun maksimizasyonu Lagrange çarpanları kullanılarak gerçekleştirilebilir:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_k) = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i - \mu \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 - r^2 \right) \quad (3.6)$$

Burada μ Lagrange çarpanıdır. $\hat{y}(\mathbf{x})$ 'i yukarıda verilen kısıt altında maksimize etmek için, ilk olarak

$$\frac{\partial Q(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

ve

$$\frac{\partial Q(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial \mu}$$

kısmi türevleri sıfıra eşitlenir. Kısmi türevler sıfıra eşitlendiğinde

$$\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial x_i} = b_i - 2\mu x_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.7)$$

ve

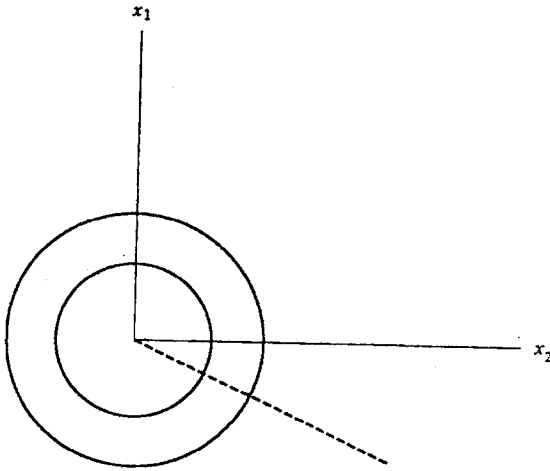
$$\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mu} = -\sum_{i=1}^k x_i^2 + r^2 = 0 \quad (3.8)$$

elde edilir. Eşitlik (3.7) ve (3.8)'den

$$x_i = \frac{b_i}{2\mu} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.9)$$

bulunur. Eşitlik (3.9)'dan x_i 'nin önerilen izleyen değerinin b_i değeriyle doğru orantılı olduğu görülmektedir. Bu değer x_i 'nin değişim aralığına bağlı olduğundan ve x_i 'nin değişim aralığı, orijinal girdi değişkenlerinin, $x_i = (\xi_i - \bar{\xi}_i) / S_i$ transformasyonu ile ölçümünün birimlerine bağlı olduğundan, ξ_i orijinal değişkeninin izleyen değeri için yön, aynı zamanda S_i 'ye bağlıdır.

Eşitlik (3.9)'daki yönün ξ_i ile bağlantılı olarak x_i 'nin ölçeğine olan bağımlılığına değinildiğinde, örneğin bir x_2 değişkeni için ± 1 seviyeleri yerine $\pm \theta$ ($\theta \neq 1$) değerleri seçilmiş olsun. μ 'nün sabit bir değeri için, örneğin $\mu = 1/2$ olsun, eşitlik (3.9)'daki x_2 'nin değeri $b_{2\theta} = b_2 / \theta$ olarak elde edilir ve bu yüzden ξ_2 'deki karşılık gelen değişme $\xi_2 = (S_2 b_2 / \theta^2) + \bar{\xi}_2$ olur. Bu sonuç $\theta \neq 1$ iken $\xi_2 = (s_2 b_2 + \bar{\xi}_2)$ 'den farklı bir değerdir. Uygulamalarda, orijinal faktörlerin artan yönünde hareket edildiğinde, cevapta beklenen değişme miktarı hakkında uygulayıcının varsayılan bilgisi dikkate alınarak x_i 'lerin ölçekleri ve dolayısıyla en hızlı artış yönü belirlenmelidir. Diğer bir deyişle, en hızlı artış veya iniş yöntemi, otomatik bir biçimde uygulanmamalıdır. Ölçek birimlerinin büyüklüğünün en hızlı artışın yönü üzerindeki etkisi Box ve Wilson (1951)'in tartışma kısmında ele alınmıştır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 160).



Şekil 3-1 $\hat{y} = 2 + 3x_1 - 1.5x_2$ için en hızlı artış yönü

Eşitlik (3.9)'a bağlı olan yönün bulunmasına dönüldüğünde, x_i 'nin değerini hesaplamak için önce bir μ değeri elde edilmelidir. Ardından değişkenlerden birisi, örneğin ξ_j artırılır. ξ_j , Δ_j miktarı kadar değiştirildiğinde cevap değerinde bir artış olur. Bu değişim miktarı Δ_j 'ye dayanarak $x_j = \Delta_j / S_j$ hesaplanır. Burada S_j , $x_j = (\xi_j - \bar{\xi}_j) / S_j$ 'nin paydası olarak ele alınan ölçek faktörüdür. ξ_j için Δ_j / S_j 'nin değeri eşitlik (3.9)'da yerine konulursa μ 'nün değeri $\mu = b_j / 2x_j = b_j S_j / 2\Delta_j$ olur. μ 'nün değeri, geriye kalan x_i değerlerinin yerleşimini türetir ve x_1, x_2, \dots, x_k 'nin sonuçtaki değerleri en hızlı artış yolu üzerindeki birinci noktayı tanımlar. $k = 2$ değişkenli bir durum için en hızlı artış yönü Şekil 3.1'de verildiği gibi olabilir.

3.2.2 En Hızlı Artış Yönü İçin Güven Bölgesi

En hızlı artış yolu regresyon katsayılarına dayanmaktadır ve bu katsayılar standart hataları ile tanımlanan örnekleme özelliklerine sahiptirler. Sonuç olarak en hızlı artış yolunun bir örnekleme değişkenliği bulunmaktadır. Buradan en hızlı artış yönü için bir güven bölgesi elde edilebilir.

En hızlı artış yönü için güven aralığı Box ve Draper (1987: ss. 190-194) tarafından verilmiştir. Buna göre k değişkenli durumda, en hızlı artışın gerçek yönü için güven aralığı araştırıldığında, bu güven bölgesi doğrultu kosinüsleri ile tanımlanmaktadır ($\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots, \delta_k$). b_1, b_2, \dots, b_k tahminlenmiş birinci derece etkiler ise, bu değerlerin beklenen değerleri $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ ile doğru orantılıdır. Diğer bir deyişle,

$$E(b_i) = \gamma \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.10)$$

şeklinde. Burada γ bir sabittir. Bu ilişki b_i 'lerin cevap, δ_i 'lerin tek bir faktörün seviyeleri olduğu bir regresyon modeli olarak düşünülürse, $\gamma, b_1, b_2, \dots, b_k$ 'nin $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ üzerindeki regresyon katsayısı olur. Gerekli bölge, bir α seviyesinde, artık kareler ortalaması $V(b_i) = \sigma_b^2$ ile karşılaştırıldığında, anlamlı olduğu yere karşılık gelen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ ile sağlanır. Diğer bir deyişle,

$$\frac{\left\{ \sum_{i=1}^k b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k b_i \delta_i \right)^2 \sum_{i=1}^k \delta_i^2 \right\} / (k-1)}{s_b^2} \leq F_{\alpha, k-1, \nu_b} \quad (3.11)$$

eşitsizliğini sağlayan δ 'lar ile elde edilir. Burada s_b^2 , σ_b^2 'nin bir tahmini ve ν_b , s_b^2 'nin dayandığı serbestlik derecesidir. δ 'lar hariç bu eşitsizlikteki tüm değerler bilinmektedir. Böylece (3.11) eşitsizliği, kabul edilebilir δ 'lar için ve dolayısı ile en hızlı artış yönü için bir güven bölgesi tanımlar. Örnek olarak üç değişkenli bir problem ele alınsın. Ardından güven bölgesi, Şekil 3.2'deki gibi en hızlı artışın tahminlenmiş yönü etrafındaki üç boyutlu koni biçiminde olur. Üçten fazla değişkenin var olduğu durumlarda, Şekil 3.2'deki gibi bir diyagramın düzenlenmesi mümkün değildir. Bununla beraber, uygulamalarda bilinmesi gereken, en hızlı artış yönünün ilerlemek için yeterince doğru bulunup bulunmadığıdır. Bu konudaki iyi bir gösterge, tahminlenmiş vektör etrafındaki güven konisinin cisim açısının (solid angle) büyüklüğü ile elde edilebilir. Tekrar Şekil 3.2 ele alındığında, orijinde merkezlenmiş birim küredeki koyu renk ile gösterilen alanın, toplam küre alanına oranının ϕ olduğu varsayılınsın. Burada ϕ kesirli cisim açısıdır (Box ve Draper, 1987: s. 193). Bu güven konisi ile beraber, başka bir açı olan koninin tepesindeki θ yarı düzlem açısı ele alınsın. Bu açı koninin yüzeyindeki bir doğru ile koninin eksenindeki açıdır. Verilen belli sayıda boyut için, kesirli cisim açısı ϕ ve tepedeki yarı düzlem açısı θ arasında bire bir eşleme sözkonusu olacaktır.

Bu eşleme t dağılımının tabloları ile verilmektedir. Bu tablolar, $t = (k-1)^{1/2} \cot \theta$ terimleri cinsinden, kesirli cisim açısı 2ϕ 'nin listelenmesi ile eşdeğerdedir (Box ve Draper, 1987: s. 193). Bu yüzden kesirli cisim açısı ϕ , t tablosundaki ters interpolasyon ile elde edilebilir. Diğer bir ifadeyle, sayısal terimler cinsinden

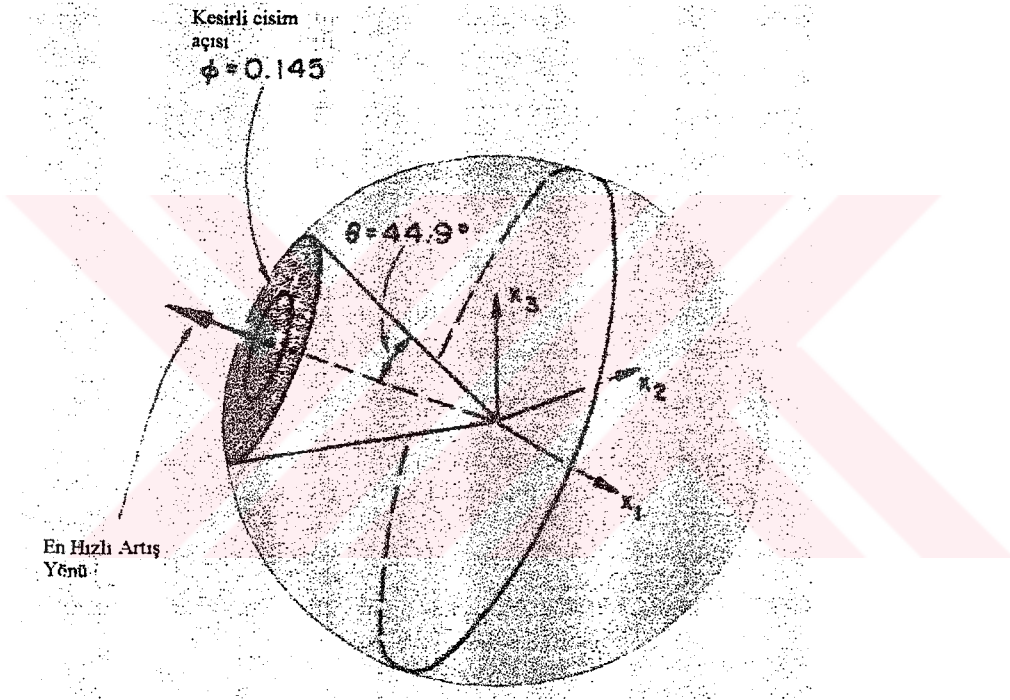
$$\sin \theta = \left\{ \frac{(k-1) s_b^2 F_{\alpha, k-1, \nu_b}}{\sum_{i=1}^k b_i^2} \right\}^{1/2} \quad (3.12)$$

ve

$$t_{2\phi} = (k-1)^{1/2} \cot \theta$$

$$= \left\{ \frac{\sum_{i=1}^k b_i^2}{S_b^2 F_{\alpha, k-1, v_b}} - (k-1) \right\}^{1/2} \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlanabilmektedir (Box ve Draper, 1987: s. 193). Böylece $\%(1 - \alpha)100$ güven konisinin olası tüm yönlerin yüzde kaçını içerdiği, yüzde kaçını hariç bıraktığı bulunabilmektedir.



Şekil 3-2. $k = 3$ durumunda en hızlı artış yönü için güven konisi
Kaynak: G.E.P. Box ve N. R. Draper (1987).

3.2.3 Bir Kısıt Altında En Hızlı Artış

Bazı problemlerde, değişkenler üzerindeki bazı kısıtlardan dolayı en hızlı artış yolu üzerinde ilerlenilemeyebilir. Böyle durumlarda, bir koşul altında düzeltilmiş en hızlı artış yönünün keşfedilmesi söz konusu olabilir. Şekil 3.3'te x_1 , x_2 ve x_3 değişkenlerinin bulunduğu uzayda bir 2^3 faktöryel tasarım ve en hızlı artış yönü verilmiştir. Burada en hızlı artış yönü işletilemeyen bir bölgeye doğru ilerlemektedir. İşletilemeyen bölgenin

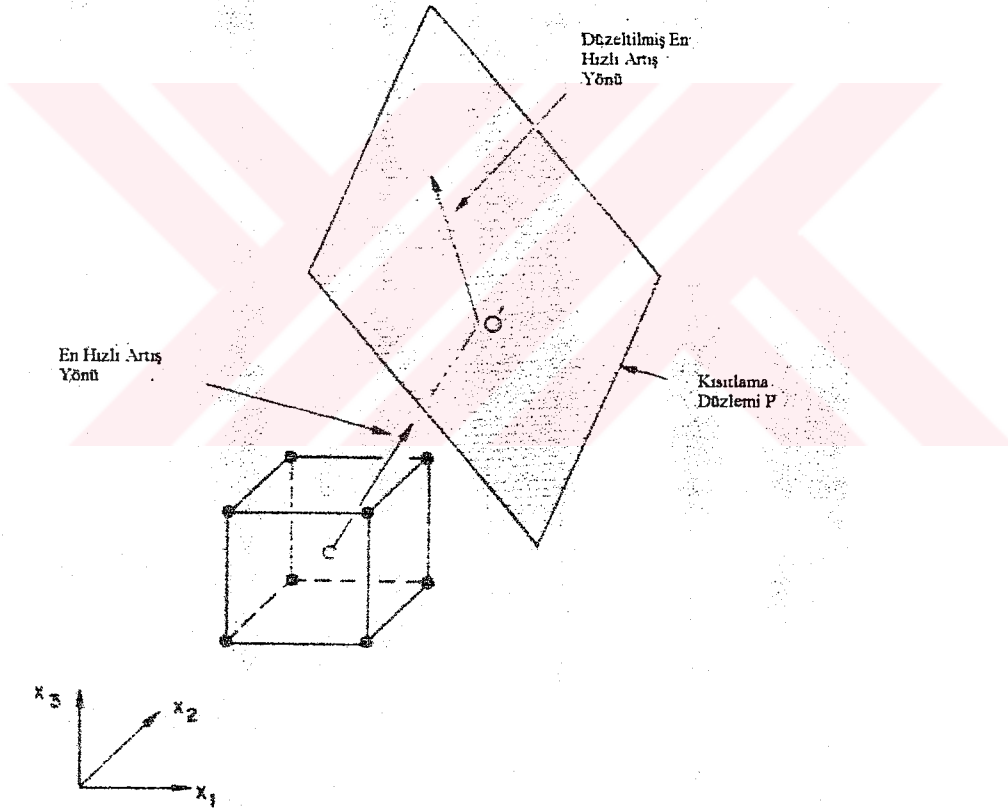
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k = 0 \quad (3.14)$$

düzleminle sınırlandırılabilir varsayalım. Bu düzleme dik olan vektör $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ ' şeklindedir. Düzeltilmemiş en hızlı artış vektörü $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ ' olsun. Ardından düzeltilmiş en hızlı artış vektörünün i 'inci elemanı

$$e_i = b_i - ca_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.15)$$

olarak elde edilebilir. Burada

$$c = \frac{\sum b_i a_i}{\sum a_i^2} \quad (3.16)$$



Şekil 3-3 Bir kısıt altında en hızlı artış.

şeklindedir. e_i 'ler, en hızlı artış vektörünün elemanlarının düzlemi temsil eden katsayılar üzerindeki regresyonundan elde edilen artıklar olarak ve c de tahminlenmiş regresyon katsayıları olarak görülebilir. Yukarıdaki hesaplama yalnızca düzeltilmiş vektörün yönünü vermektedir. Bundan başka başlangıç en hızlı artış vektörünün P kısıtlama düzlemine

çarptığı ve yeni yönün devreye girdiği O' noktasının hesaplanması gerekmektedir. Başlangıç en hızlı artış yönündeki herhangi bir noktanın koordinatları bir λ için

$$x_1 = \lambda b_1, x_2 = \lambda b_2, \dots, x_k = \lambda b_k \quad (3.17)$$

şeklinde. Bulunması gereken nokta, en hızlı artış yolu üzerinde ve aynı zamanda $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k = 0$ düzlemi üzerindeki noktadır. Böylece bu nokta, $a_0 + (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k)\lambda_0 = 0$ koşulunu sağlayan λ_0 değerine karşılık gelmektedir. Diğer bir deyişle

$$\lambda_0 = \frac{-a_0}{\sum a_i b_i} \quad (3.18)$$

noktasına karşılık gelmektedir.

3.2.4 2^k Tasarım Merkez Noktalarının Eklenmesi ve Yüzey Eğriselliği İçin Bir Serbestlik Dereceli Test

İki seviyeli faktöryel tasarımların kullanımında, faktör etkilerinin doğrusallığı varsayımının kontrolü yapılmak istenebilir. Etkileşim etkilerinin varlığı iki seviyeli faktöryel tasarımdan elde edilen gözlemlerden incelenebilir; ancak eğrisellik (kuadratik etkiler) hakkında bilgi vermez. 2^k faktöryele merkez noktalarının $(x_1, x_2, \dots, x_k) = (0, 0, \dots, 0)$ eklenmesiyle hata varyansının bir tahmini elde edilebilir ve yüzeyin eğriselliği test edilebilir. \bar{y}_1 , faktöryel kısımda uygulanan n_1 denemenin ortalaması ve \bar{y}_0 , merkez noktasında uygulanan n_0 adet denemenin ortalaması olsun. $\bar{y}_1 - \bar{y}_0$ farkı büyük ise eğriselliğin varlığından sözedilebilir.

Eğrisellik için bir serbestlik dereceli kareler toplamı aşağıdaki gibidir (Myers ve Montgomery, 1995: s.112):

$$KT_{Eğrisellik} = \frac{n_1 n_0 (\bar{y}_1 - \bar{y}_0)^2}{n_1 + n_0} \quad (3.19)$$

Buradaki değer eğriselliğin testi için, varyans analizinde saf hata kareler ortalaması KO_{SH} 'na bölüldüğünde elde edilen

$$F_0 = \frac{KT_{Eğrisellik}}{KO_{SH}}$$

değeri, $F_{\alpha,1,\nu}$ ile karşılaştırılabilir. $F > F_{\alpha,1,\nu}$ ise eğriselliğin varolduğuna karar verilir. Burada ν saf hata kareler ortalamasının serbestlik derecesidir. Faktöryel kısımda her bir nokta için birden fazla tekrarlı gözlem alınmıyorsa n , tasarım noktası sayısı olmak üzere $n_1 = rn$ yazılabilir. Burada r her bir faktöryel tasarım noktasındaki tekrar sayısıdır. Böylece $\nu = n_1 + n_0 - n - 1$ yazılabilir. Gerçekte β_{ii} ($i = 1, 2, \dots, k$) saf kuadratik etkiler olmak üzere test edilen hipotezler

$$H_0: \sum_{i=1}^k \beta_{ii} = 0$$

$$H_1: \sum_{i=1}^k \beta_{ii} \neq 0$$

şeklindedir. Ancak söz konusu yüzeyin bir minimaks (eğer noktasını) içermesi durumunda β_{ii} 'ler değişik işaretli olabileceği için eğrisellik varolduğu halde H_0 reddedilemeyebilir. Bununla beraber Box ve Draper (1987: s. 189) gerçek uygulamalarda minimaks yüzeylerin nadiren ortaya çıktığını ve β_{ii} 'lerin işaretlerinin genellikle aynı olduklarını belirtmişlerdir.

3.3 İKİNCİ DERECE CEVAP YÜZEYLERİNİN ANALİZİ

İkinci derece bir cevap yüzeyi modelinin elde edilmesi ve bu modelin incelenmesi aşamaları aşağıda verildiği gibidir:

1. Tahminlenmiş ikinci derece cevap yüzeyinin yeterli bir model temsilini elde etmek.
2. (1)'de elde edilen modeli, durağan nokta ($x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ks}$)'nin koordinatlarını bulmak için kullanmak. Bu noktada tahminlenmiş cevap yüzeyinin eğimi sıfırdır. Durağan nokta deney bölgesinin içinde bulunursa, adım 3'e geçilir. Eğer durağan nokta deney bölgesinin dışarısında ise, durağan noktanın bulunduğu yönde başka deneylerin uygulanması gerekmektedir.

3. Durağan noktanın bir maksimum mu, minimum mu yoksa bir minimaks mı (eğer noktası mı) olduğunu belirlemek.

4. Durağan nokta etrafındaki, cevap yüzeyinin yapısını (şeklini) tanımlamak.

Buradaki durağan nokta bir maksimum (minimum) veya bir minimaks noktası olabilir. Minimaks noktanın varlığı durumunda, tahminlenmiş yüzeyin yüksekliği, durağan noktadan belli yönlere hareket edildiğinde artar. Genellikle bir minimaks noktanın varlığı, maksimum içeren iki ayrı bölgenin varlığını göstermektedir.

3.3.1 Bir Cevap Sisteminde Durağan Noktanın Koordinatlarının Bulunması

Yaklaşık durağan bölge, yüzey eğimlerinin deneysel hata tahminiyle karşılaştırıldığında küçük olduğu bir bölge olarak tanımlanır. Yaklaşık durağan bölgedeki durağan nokta, cevap yüzeyinin eğiminin sıfır olduğu noktadır. Durağan noktanın koordinatlarını elde etmek için, k değişkenli tahminlenmiş ikinci derece model ele alınsın (basitlik açısından $\hat{y}(\mathbf{x})$ yerine \hat{y} yazılmıştır):

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i \leq j} b_{ij} x_i x_j$$

$$\hat{y} = b_0 + \mathbf{x}'\mathbf{b} + \mathbf{x}'\hat{\mathbf{B}}\mathbf{x} \quad (3.20)$$

Burada

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & \frac{1}{2}b_{12} & \cdots & \frac{1}{2}b_{1k} \\ \frac{1}{2}b_{12} & b_{22} & \cdots & \frac{1}{2}b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}b_{1k} & \frac{1}{2}b_{2k} & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

şeklinindedir. $k \times 1$ boyutlu \mathbf{b} vektörünün elemanları, eşitlik (3.21)'deki birinci derece terimlerin tahminlenmiş katsayılarıdır. Ayrıca $k \times k$ boyutlu simetrik $\hat{\mathbf{B}}$ matrisinin elemanları, eşitlik (3.21)'deki ikinci derece terimlerin tahminlenmiş katsayılarıdır. \hat{y} 'nin x_1, \dots, x_k 'ya göre kısmi türevleri

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} &= b_1 + 2b_{11}x_1 + \sum_{j=2}^k b_{1j}x_j \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} &= b_2 + 2b_{22}x_2 + \sum_{j=2}^k b_{2j}x_j \\ &\vdots \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_k} &= b_k + 2b_{kk}x_k + \sum_{j=2}^{k-1} b_{kj}x_j \end{aligned} \right\} = \mathbf{b} + 2\hat{\mathbf{B}}\mathbf{x}$$

olarak yazılabilir. k adet türevin hepsi sıfıra eşitlenip x_i değerleri için çözüldükten sonra, durağan noktanın koordinatları $k \times 1$ boyutlu

$$\mathbf{x}_S = -\frac{\hat{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{b}}{2} \quad (3.22)$$

vektörü olarak bulunur. Burada $\hat{\mathbf{B}}^{-1}$, eşitlik (3.21)'deki $\hat{\mathbf{B}}$ matrisinin tersidir.

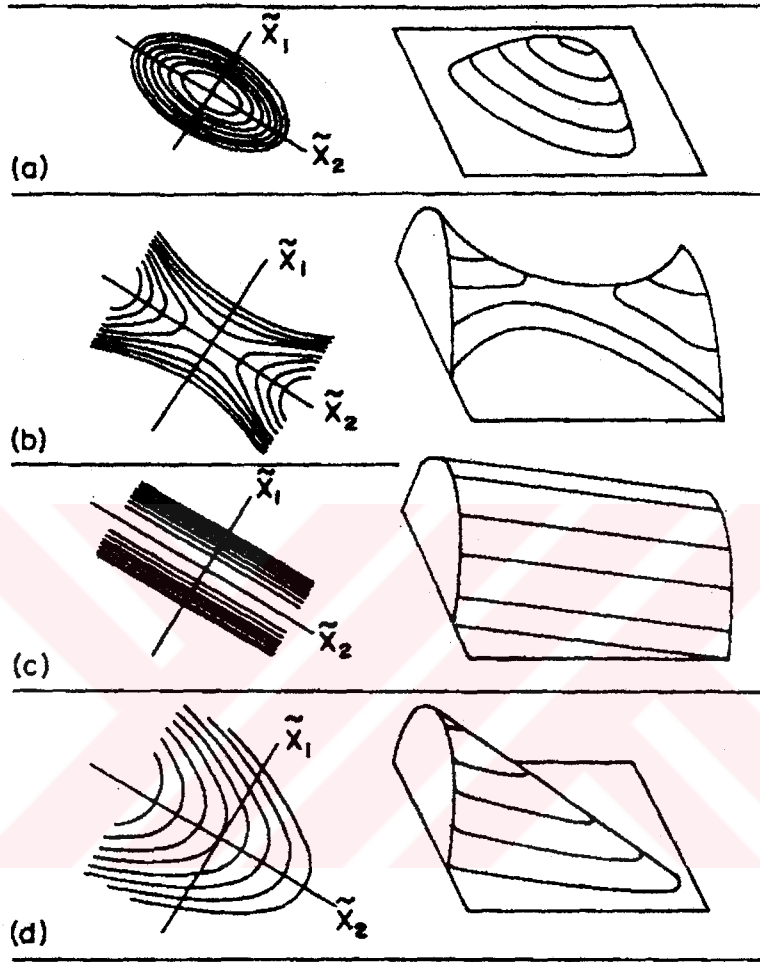
Eşitlik (3.22)'deki \mathbf{x}_S vektörünün elemanları, yüzeyin durağan noktadaki yapısı hakkında bilgi vermez. Örneğin $k = 2$ ise, $\mathbf{x}_S = (x_{1S}, x_{2S})'$ 'un elemanları, uyumu yapılmış yüzeyde bir maksimum (veya minimum) nokta (bkz. Şekil 3.4a) veya bir minimaks (eğer) nokta (bkz. Şekil 3.4b) olabilir. Bu durumların herbirinde durağan noktanın deney bölgesi içerisinde olduğu varsayılır. Diğer taraftan, durağan noktanın koordinatları deney bölgesinin dışında olduğunda, Şekil 3.4d'deki gibi artan sırt (rising ridge) yada azalan sırt (falling ridge) sistemi ile veya Şekil 3.4c'deki gibi durağan noktanın belirsiz olduğu bir durağan sırt (stationary ridge) sistemi ile karşılaşılabilir.

Durağan noktanın gerçek yeri için $\%(1 - \alpha) \times 100$ güven bölgesinin kurulması, ilk olarak Box ve Hunter (1954) tarafından gerçekleştirilmiştir. Böyle bir prosedür, durağan nokta deney bölgesinin civarında bir nokta olarak tahminlendiğinde uygulanabilmektedir. $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)'$, (x_1, x_2, \dots, x_k) 'nın gerçek durağan noktadaki koordinatları olsun. İkinci derece model gerçek yüzeyi temsil ediyorsa,

$$\beta + 2\mathbf{B}\zeta = 0$$

yazılabilir. Burada $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)'$ ve \mathbf{B} , $k \times k$ boyutlu gerçek ikinci derece katsayılar $\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{kk}$ 'ları içeren matristir. β ve \mathbf{B} 'nin elemanları tahminleri olan \mathbf{b} ve $\hat{\mathbf{B}}$ ile yer değiştirirse (burada \mathbf{b} ve $\hat{\mathbf{B}}$ 'nin elemanlarının çok değişkenli normal dağılışı gösterdiği varsayılmaktadır.), $k \times 1$ boyutlu

$$\delta = \mathbf{b} + 2\hat{\mathbf{B}}\zeta$$



Şekil 3-4. Uyumu yapılmış ikinci derece eşitlik için değişik tipteki yüzeyler ve kanonik eksenleri vektörü tanımlanabilir. Burada $\delta \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{V})$ ve $\sigma^2\mathbf{V}$, δ 'daki elemanların varyans-kovaryans matrisidir. Ayrıca σ^2 'nin bir tahmini $\hat{\sigma}^2$, \mathbf{b} ve $\hat{\mathbf{B}}$ tahminlerinden bağımsız kare dağılışı gösteriyorsa, ζ için $\%(1 - \alpha) \times 100$ güven bölgesi

$$\frac{\delta'\mathbf{V}\delta}{k\hat{\sigma}^2} \leq F_{\alpha, k, v} \quad (3.23)$$

şeklinde yazılabilir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 178). Burada v , $\hat{\sigma}^2$ 'nin serbestlik derecesidir.

3.3.2 Bir İkinci Derece Cevap Sisteminin Kanonik Eşitliği

Kanonik analiz, uyumu yapılmış bir ikinci derece eşitliğin, kolayca anlaşılabilir bir formda yeniden yazılması yöntemidir. Bu da eksenlerin, tüm çapraz çarpan terimlerinin elimine edilecek şekilde döndürülmesi ile elde edilir. Bu yaklaşım Box ve Draper (1987: ss.332-337) tarafından A kanonik formu olarak adlandırılmaktadır. Eğer istenirse, orijinin değiştirilmesi ile birinci derece terimleri de elemek mümkündür. Bu yaklaşım ise Box ve Draper (1987: ss. 337-339) tarafından B kanonik formu olarak adlandırılmaktadır.

3.3.2.1 A Kanonik Formu

Uyumu yapılmış ikinci derece model (3.21) ele alındığında, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_k$, simetrik matris \hat{B} 'nin özdeğerleri olsunlar. Ayrıca, $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_i, \dots, \mathbf{m}_k$, bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler olsunlar. Böylece tanımdan

$$\hat{B} \mathbf{m}_i = \mathbf{m}_i \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.24)$$

yazılabilir. Her bir özvektör standardize edilmiş ise (diğer bir deyişle $\mathbf{m}_i' \mathbf{m}_i = 1$ ise) ve \mathbf{m}_i , $k \times k$ boyutlu \mathbf{M} matrisinin i 'inci kolonu ise \mathbf{M} bir ortonormal matris olur ve k adet (3.24) eşitliği eş anlamlı olarak aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\hat{B} \mathbf{M} = \mathbf{M} \Lambda \quad (3.25)$$

Burada Λ , i 'inci köşegen elemanı λ_i olan köşegen bir matristir. Eşitlik (3.25)'in soldan $\mathbf{M}' (= \mathbf{M}^{-1})$ ile çarpımı ile

$$\mathbf{M}' \hat{B} \mathbf{M} = \Lambda \quad (3.26)$$

elde edilir. $\mathbf{M}' \mathbf{M} = \mathbf{I}$ olduğu dikkate alınarak eşitlik (3.20)

$$\hat{y} = b_0 + (\mathbf{x}' \mathbf{M})(\mathbf{M}' \mathbf{b}) + (\mathbf{x}' \mathbf{M}) \mathbf{M}' \hat{B} \mathbf{M} (\mathbf{M}' \mathbf{x}) \quad (3.27)$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{X} = \mathbf{M}' \mathbf{x}$ ve $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}' \mathbf{b}$ (veya $\mathbf{x} = \mathbf{M} \mathbf{X}$ ve $\mathbf{b} = \mathbf{M} \boldsymbol{\theta}$) olarak alınırsa bu eşitlik

$$\hat{y} = b_0 + \mathbf{X}' \boldsymbol{\theta} + \mathbf{X}' \Lambda \mathbf{X} \quad (3.28)$$

diğer bir deyişle

$$\hat{y} = b_0 + \theta_1 X_1 + \dots + \theta_k X_k + \lambda_1 X_1^2 + \dots + \lambda_k X_k^2 \quad (3.29)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, A kanonik formunun eksenleri döndürerek çapraz çarpan terimlerini elimine ettiği görülmektedir. Eşitlik (3.29)'un X_1, X_2, \dots, X_k 'ya göre türevleri alındığında durağan nokta ($X_{1S}, X_{2S}, \dots, X_{kS}$)

$$X_{iS} = \frac{-\theta_i}{2\lambda_i} \quad (3.30)$$

olarak bulunur. λ_i 'nin büyüklüğü ve işareti uyumu yapılmış ikinci derece yüzeyin tipini bulmaktadır. θ_i , döndürülmüş koordinat eksenleri X_1, X_2, \dots, X_k 'da orijinal orijin $\mathbf{x} = 0$ 'da yüzey eğimini ölçmektedir. X_{iS} 'lerin değerleri kanonik eksenler boyunca durağan nokta S 'e olan uzaklığı vermektedir.

Örnek 3.1: (Box ve Draper (1987: ss. 334-337)'den alınmıştır.)

Şekil 3.5'deki tasarımdan elde edilen verilerden aşağıdaki ikinci derece eşitliğin uyumu yapılmış olsun:

$$\hat{y} = 78.8988 + 2.272x_1 + 3.496x_2 - 2.08x_1^2 - 2.92x_2^2 - 2.88x_1x_2 \quad (3.31)$$

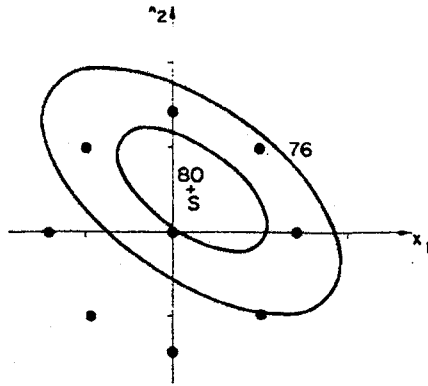
Modelin yeterli olduğu varsayıldığında, Şekil 3.5'teki eliptik eş yükselti eğrilerinden, uyumu yapılmış eşitliğin maksimumu olan bir yüzey tanımladığı görülmektedir. Maksimum nokta Şekil 3.5'teki S noktasıdır ve tasarım merkezine yakındır. Bu örnek için

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2.272 \\ 3.496 \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -2.08 & -1.44 \\ -1.44 & -2.92 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

matris formunda uyumu yapılmış eşitlik

$$\hat{y} = 78.8988 + \begin{bmatrix} x_1, x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.272 \\ 3.496 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1, x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.08 & -1.44 \\ -1.44 & -2.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 3-5. Eşitlik (3.31)'in $\hat{y}=76$ ve 79 için eş yükselti eğrileri
Kaynak: G. E. P. Box ve N. R. Draper (1987)

\hat{B} 'nin özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörler

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -1 \quad (3.34)$$

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

şeklindedir. Böylece

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

ve

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}'\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.272 \\ 3.496 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.16 \\ 0.28 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

bulunur. Buradan

$$X_{1s} = \frac{4.16}{(2 \times 4)} = 0.52$$

$$X_{2s} = \frac{0.28}{(2 \times 1)} = 0.14 \quad (3.38)$$

bulunur. Böylece A kanonik formu

$$\hat{y} = 78.8988 + 4.16X_1 + 0.28X_2 - 4X_1^2 - 1X_2^2 \quad (3.39)$$

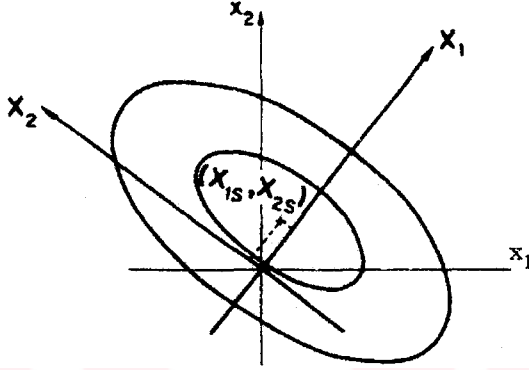
şeklini alır. Burada

$$X_1 = 0.6x_1 + 0.8x_2$$

$$X_2 = -0.8x_1 + 0.6x_2$$

(3.40)

şeklindedir.



Şekil 3-6. Eşitlik (3.39)'u veren A kanonik formu

Şekil 3.6'de gösterildiği gibi A kanonik indirgemesi uyumu yapılmış eşitliği, sistemin (durağan noktanın) ana eksenlerine paralel olacak şekilde seçilmiş olan döndürülmüş eksenler (X_1, X_2) 'ye göndermektedir.

Bu kanonik formda ele alınan önemli değerler şunlardır:

1. Özdeğerler λ_i 'lerin işaretleri ve göreceli büyüklükleri,
2. Durağan noktanın koordinatları X_{is} 'lerin büyüklükleri,
3. $\mathbf{X} = \mathbf{M}'\mathbf{x}$ transformasyonunun yapısı.

Bu noktalar örnek 3.1 için tartışıldığında şunlar söylenebilir:

1. Örnek 3.1'de, özdeğerler (kuadratik terimler X_1^2 ve X_2^2 'nin katsayıları) $\lambda_1 = -4$ ve $\lambda_2 = -1$ 'dir. (a) İşaretler negatif olduğu için her iki kanonik doğrultuda (yönde) da eğrisellik negatiftir. Bu yüzden bir maksimum nokta söz konusudur. Eğer λ_1 ve λ_2 pozitif olsaydı bir minimuma ve işaretleri farklı olsaydı bir minimaks noktasına sahip olunacaktı. (b) Elipslerin ana eksenlerinin uzunlukları $|\lambda_1|^{-1/2}$ ve $|\lambda_2|^{-1/2}$ ile doğru orantılıdır. Böylece örnek 3.1'de uyumu yapılmış yüzeyin etkisi X_2 eksenini boyunca daha azdır.

2. Cevap fonksiyonunun ölçeklenmesinde, uzaklık, $\mathbf{X} = \mathbf{M}'\mathbf{x}$ transformasyonu ile korunmaktadır. X_{1s} ve X_{2s} 'nin değerlerinin küçük olması, sistemin merkezinin, tasarım merkezine yakın olduğunu işaret etmektedir.
3. $\mathbf{X} = \mathbf{M}'\mathbf{x}$ veya $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{X}$ transformasyonu, kanonik eksenlerin yönlerini bulma imkanı verir. Örnek 3.1'de, eş yükselti eğrilerinin fazla etkilenmediği X_2 koordinatı $X_2 = -0.8x_1 + 0.6x_2$ şeklinde tanımlanmıştır. Buna dik olan eksen ise $X_1 = 0.6x_1 + 0.8x_2$ şeklinde tanımlanmıştır.

3.3.2.2 B Kanonik Formu

Eşitlik (3.20)'nin \mathbf{x} ve eşitlik (3.28)'in \mathbf{X} 'e göre türevleri alınıp sifıra eşitliğinde, durağan nokta S 'nin koordinatları

$$-2\hat{\mathbf{B}}\mathbf{x}_S = \mathbf{b} \quad \text{veya} \quad -2\Lambda\mathbf{X}_S = \theta \quad (3.41)$$

eşitliklerinin çözümü olur. Bu noktadaki uyumu yapılmış cevap

$$\hat{y}_S = b_0 + \frac{1}{2}\mathbf{x}'_S\mathbf{b} \quad \text{veya} \quad \hat{y}_S = b_0 + \frac{1}{2}\mathbf{X}'_S\theta \quad (3.42)$$

şeklindedir. $\tilde{x}_i = x_i - x_{is}$, $\tilde{X}_i = X_i - X_{is}$ ve karşılık geldikleri vektörler $\tilde{\mathbf{x}}$ ve $\tilde{\mathbf{X}}$ olsunlar. \tilde{x}_i 'ler ve \tilde{X}_i 'ler, yeni orijin durağan nokta S 'den ölçülen koordinatlar olurlar. Ayrıca eksenlerin döndürülmesiyle aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\hat{y} = \hat{y}_S + \tilde{\mathbf{X}}'\Lambda\tilde{\mathbf{X}} \quad (3.43)$$

diğer bir deyişle

$$\hat{y} = \hat{y}_S + \lambda_1\tilde{X}_1^2 + \dots + \lambda_k\tilde{X}_k^2 \quad (3.44)$$

Örnek 3.1 için $-2\mathbf{B}\mathbf{x}_S = \mathbf{b}$,

$$2 \begin{bmatrix} 2.08 & 1.44 \\ 1.44 & 2.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.272 \\ 3.496 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

şeklindedir. Buradan $x_{1s} = 0.2$ ve $x_{2s} = 0.5$ olarak bulunur. Ayrıca S 'de tahminlenen

cevap $\hat{y}_S = b_0 + \frac{1}{2}\mathbf{x}'_S\mathbf{b}$ formülünden

$$\hat{y}_s = 78.8988 + \frac{1}{2}(0.2 \ 0.5) \begin{bmatrix} 2.272 \\ 3.496 \end{bmatrix} = 80.0 \quad (3.46)$$

şeklinde hesaplanabilir. Böylece orijini S 'e doğru kaydırarak kanonik form $\hat{y} = \hat{y}_s + \tilde{\mathbf{X}}' \Lambda \tilde{\mathbf{X}}$,

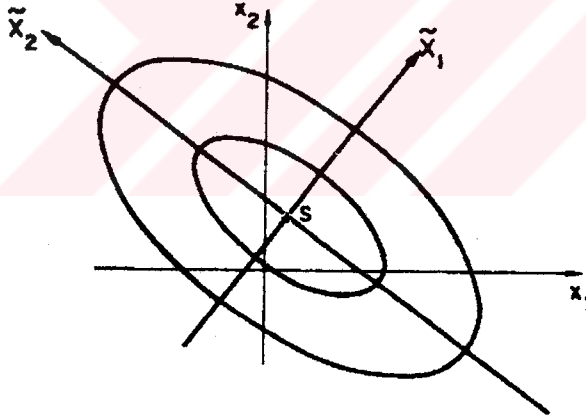
$$\hat{y} = 80 - 4\tilde{X}_1^2 - 1\tilde{X}_2^2 \quad (3.47)$$

olarak açıklanabilir. Burada $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{M}'\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$, diğer bir deyişle

$$\tilde{X}_1 = 0.6(x_1 - 0.2) + 0.8(x_2 - 0.5)$$

$$\tilde{X}_2 = -0.8(x_1 - 0.2) + 0.8(x_2 - 0.5) \quad (3.48)$$

şeklindedir. Şekil 3.7'den görüldüğü gibi, B kanonik formu, uyumu yapılmış eşitliği, orijini durağan nokta S 'e taşıyıp eksenleri döndürerek, yeni eksenler $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ 'i vermektedir.



Şekil 3-7. Eşitlik (3.47)'yi veren B kanonik formu

3.3.2.3 Kanonik Formlar A ve B 'nin Uygulanması

İki veya üç ($k = 2$ veya 3) açıklayıcı değişken için, çeşitli yapıdaki ikinci derece sistemleri anlamak kolaydır; ancak $k > 3$ için bu sistemleri anlamak daha zordur. Buna rağmen $k > 3$ için kanonik analiz sistemi anlaşılır duruma getirebilmektedir.

Tasarım birimleri cinsinden, sistem merkezi (durağan nokta) S 'nin tasarım merkezi O 'dan olan uzaklığı

$$D = OS = \left\{ \sum_{i=1}^k x_{iS}^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^k X_{jS}^2 \right\}^{1/2} \quad (3.49)$$

şeklindedir. S , O 'ya yakın olduğunda, B kanonik formu uyumu yapılmış yüzeyi anlamak için yeterlidir. Bununla beraber, özellikle sırt sistemleri ile birlikte, uyumu yapılmış sistemin merkezi S , tasarım merkezi O 'dan uzak olabilir. Bu durumda, Box ve Draper (1987: s.339) A kanonik formu ile yapılacak olan bir analizin daha uygun olduğunu belirtmişlerdir.

3.3.3 Sırt Sistemleri

Sırt sistemlerinin ortaya çıkmasının nedeni şunlar olabilir: Örneğin kimyada sıcaklık, zaman, basınç ve konsantrasyon faktörleri, *doğal* değişkenler olarak adlandırılmaktadır. Bunun nedeni bu değişkenlerin rahatlıkla ayrı ayrı ölçülebilmesidir. Ancak daha temel olan ve doğrudan ölçülemeyen bir değişken, iki veya daha fazla doğal değişkenin bir fonksiyonu olabilir (örneğin kimyada, özel bir moleküler çarpışma frekansı) (Box, Hunter ve Hunter, 1978; s. 532). Bundan dolayı, doğal değişkenlerin birçok kombinasyonu, temel değişkenin en iyi seviyesine karşılık gelebilir.

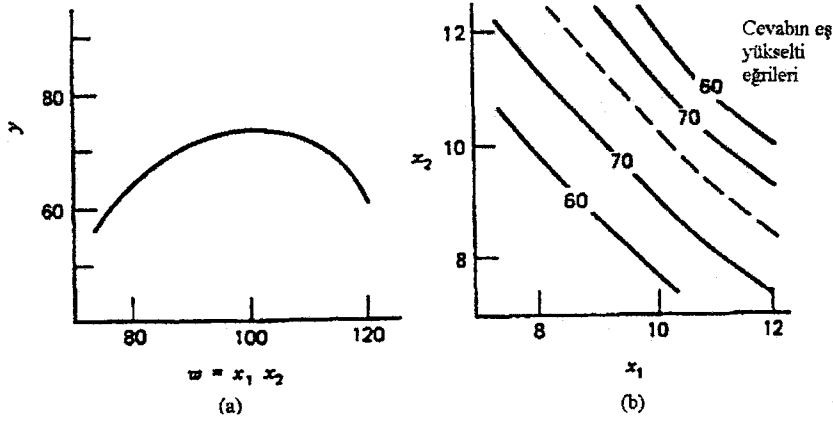
Bu tip $w = f(x_1, x_2)$ fonksiyonlarına örnek olarak

$$w = x_1 x_2 \quad (\text{Ohm kanunu}) \quad (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} w = a + bx_1 + cx_2 \\ w = ax_1^b x_2^c \\ w = ax_1^b e^{-(c/x_2)} \end{array} \right\} \quad a, b, c \text{ pozitif}$$

(*) haricindekilerin tamamı Şekil 3.8b'deki gibi sırt sistemlerini türetir. Bu sırt sistemleri x_1 ve x_2 arasındaki etkileşimler ile ortaya çıkmaktadır.

Box, Hunter ve Hunter (1978) Kanonik analizin bazen kaç tane bileşik değişkenin sistemi sürüklediği ve bunların yapısının ne olduğunu bulmayı mümkün kıldığını belirtmişlerdir. Bununla ilgili bir örnek Box ve Youle (1955)'te verilmiştir. Bir durağan sırtın ortaya çıkışı, bir *bilimsel kamuna* işaret edebilir (Box, Hunter ve Hunter, 1978; s. 534).



Şekil 3-8. (a) y 'nin $w = x_1, x_2$ 'ye karşı grafiği, (b) y 'nin x_1 ve x_2 'ye karşı grafiği

3.3.3.1 Durağan Sırt, $k = 2$

Bir ikinci derece eşitlik için B kanonik formu ele alınsın:

$$\hat{y} = \hat{y}_s + \lambda_1 \tilde{X}_1^2 + \lambda_2 \tilde{X}_2^2 \quad (3.50)$$

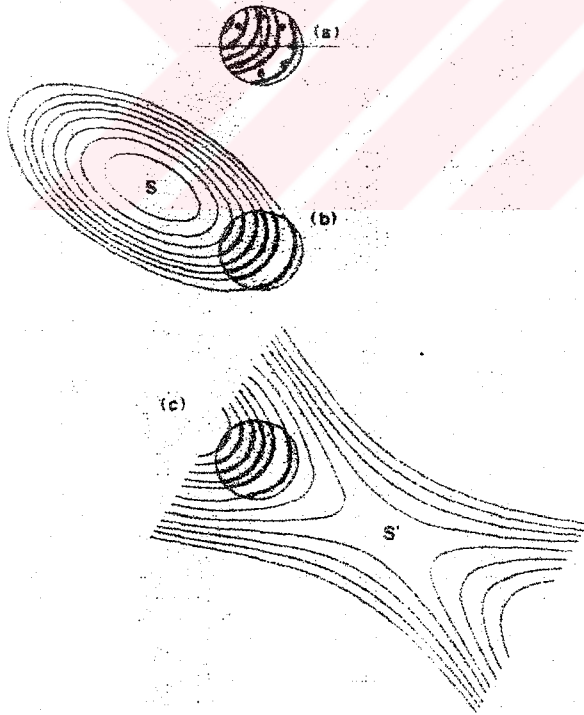
λ_1 ve λ_2 'nin negatif olduğu farkedilsin. (Bkz. Şekil 3.4a) Ayrıca λ_1 sabit tutulsun ve λ_2 mutlak değer olarak giderek küçültülsün. Ardından sonuçta elde edilen sistemin eş yükselti eğrileri Şekil 3.4c'deki gibi olur. Eğer λ_2 'nin sıfırı aşır pozitif olmasına imkan verilirse Şekil 3.4b'deki gibi bir minimaks noktası elde edilir. Böylece, Şekil 3.4c, Şekil 3.4b'nin, pozitif λ_2 'nin sıfır olma eğilimi gösterdiği limit durumu olarak algılanabilir. Pratikte, kesinlikle durağan olan bir sırt formu pek gerçekleşmez; deneysel hata ve hafifçe bir uyum yetersizliği yapının anlaşılmasını az çok güçleştirebilir. Böylece tahminlenmiş bir yüzey için, tamamen sıfır olan bir λ_2 katsayısı beklenmemelidir. (λ_1 ile karşılaştırılabilir ve standart hatası ile karşılaştırılabilir). Bu da yüzeyin \tilde{X}_2 yönünde zayıfladığının bir göstergesidir.

3.3.3.2 Artan Sırt, $k = 2$

Daha başka bir olası durum olarak,

$$\hat{y} = \hat{y}_s + \lambda_1 \tilde{X}_1^2 + \theta_2 \tilde{X}_2 \quad (3.51)$$

formundaki kanonik temsil ile Şekil 3.4d'deki artan sırta karşılık gelenebilir. Bu sistem Şekil 3.4c'ye benzerdir. Ancak eş yükselti eğrileri parabol şeklindedir. Böyle bir sistem Şekil 3.4a veya Şekil 3.4b'nin limit durumu olarak düşünebilir. Bu sistem, λ_1 sabit tutulur ve λ_2 küçültülürse, aynı anda sistemin merkezi sonsuza götürülürse meydana gelir. Pratikte, Şekil 3.4c ve 3.4d'ye karşılık gelen limit formlar, tam olarak gerçekleşmezler. Bununla beraber, bu formlar referans durumlar olarak alınabilir. Ampirik yüzeyin bir limit durumu olduğu söylenebildiğinde, bu durumlara yaklaşılabileceği düşünülür. Bir çeşit limit form ile yaklaşım, kanonik katsayılardan biri sıfıra yakın ve diğeriyle karşılaştırıldığında mutlak değer olarak küçük olduğunda tavsiye edilir. Bu durum gerçekleştiğinde, ayrıca uyumu yapılmış yüzey için durağan nokta tasarımın merkezinden uzakta olabilir. Sistem bir sırt içerdiğinde, en hızlı artış, deney bölgesini sırta yakınlştırabilir; ancak sırtı temsil eden sistemin merkezi uzak olabilir. Bu durumda \bar{X}_2 eksenini boyunca ek denemeler uygulanabilir.



Şekil 3-9. Veriler (a) gibi bir deney bölgesinde toplandığında, gerçek sistem (b)'deki gibi merkezi S olan elipslerden ya da (c)'deki gibi merkezi S' olan hiperbollerden oluşabilir.

Kaynak: G. E. P. Box ve N. R. Draper (1987)

Sırt sistemlerinin ortaya çıktığı sistemler ile ilgili ortaya çıkabilecek iki durum Şekil 3.9'da verilmiştir. Şekil 3.9a'daki gibi mevcut deney bölgesi civarında, gerçek yüzey bir

artan sırt olsun. Uyumu yapılan ikinci derece eşitlik, bir kaç değişik yapıyı kapsayabilir. Bizim yüzey uyum yöntemimiz, deneysel verileri en yakın olarak temsil eden sistemi (en küçük kareler yöntemi ile) seçmektir. Deney bölgesi, sistem merkezinin S olduğu (bkz. Şekil 3.9b) eliptik eş yükselti eğrilerinin bir parçası olabilir. Alternatif olarak bu bölge Şekil 3.9c'deki gibi merkezi S' olan bir minimaks sisteminin hiperbolik eş yükselti eğrilerinin bir parçası da olabilir. Deneysel hatanın yapısındaki küçük bir değişme, bu formlardan birini diğerine çevirebilir. Yalnızca cevaba deney bölgesi civarında yaklaşım isteniyorsa, her iki sistem de yeterli yaklaşım sağlayabilir. Her iki durumda da deney bölgesinde nasıl bir yapıda olduğu, en iyi A kanonik formu kullanılarak belirlenebilir (Ayrıca bkz. Şekil 3.11) (Box ve Draper , 1987: s. 349).

3.3.3.3.Sırtı Tanımlamak İçin A Formundaki Kanonik Analiz

Uyumun yapılmış sistemin merkezi S deney bölgesinden uzak olduğunda, indirgenmiş eşitliği A kanonik formu ile temsil etmek oldukça kullanışlıdır:

$$\hat{y} = b_0 + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \dots + \theta_k X_k + \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \dots + \lambda_k X_k^2 \quad (3.52)$$

$k = 3$ olduğunda bazı teorik ikinci derece yüzeyler için olası eş yükselti sistemleri Şekil 3.10'da verilmiştir. Tablo 3.1 ise bu şekildeki her bir teorik eşitlik için θ ve λ değerlerini ve hata kısıtı altındaki verilere uyumu yapılmış yüzeylerin olması beklenen karakteristiklerini göstermektedir. (En hızlı artışın uygulandığı, bu yüzden yakınlarda bir durağan bölgenin elde edildiği varsayılmaktadır.)

Eşitlik (3.52)'deki A kanonik formu, tasarımın merkezini orijin olarak kullanmaktadır; bu nokta *tasarım merkezi* O olarak adlandırılabilir. Ayrıca durağan veya artan sırtları tanımlamak için, sırt sisteminin tasarım merkezine ne kadar yakın olduğunu bilmek önemlidir. Sistemin merkezinin koordinatları

$$X_{is} = -\frac{\theta_i}{2\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.53)$$

şeklinde verilmiştir. Bu koordinatlar sistemin yapısı hakkında önemli ipuçları vermektedir ve θ ve λ 'lar ile birlikte incelenmelidir (Box ve Draper, 1987: s. 352).

Tablo 3.1 Teorik İkinci derece eşitliklerin karakteristikleri

Şekil 11.3'deki karşılığı	$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ işaretleri	Diyagramların işaret ettiği koşullar	Bir çapraz kesit sabit tutulduğunda Şekil 11.1a-d karşılığı $\bar{x}_1\bar{x}_2 \quad \bar{x}_1\bar{x}_3 \quad \bar{x}_2\bar{x}_3$ ^a			Sistem merkezinin uyumu yapılan merkeze uzaklığı	Pratikte karşılaşılan özel durumlar
(A)	0 0 0 - - -	$ \lambda_2 > \lambda_1 > \lambda_3 $	(a)	(a)	(a)	Yakın	—
(B)	0 0 0 - - +	$ \lambda_2 > \lambda_1 > \lambda_3 $	(a)	(b)	(b)	Yakın	λ_3 küçük olduğunda gerçek yüzey(C)'deki gibi olabilir.
(C)	0 0 0 - - 0	merkezlerin doğrusu \bar{x}_3 ekseninde	(a)	(c)	(c)	Belirsiz	λ_3 'ün değeri küçüktür. (negatif veya pozitif olabilir.)
(D)	0 0 + - - 0	merkez \bar{x}_3 üzerinde ve sonsuzda	(a)	(d)	(d)	Uzak	λ_3 'ün değeri küçüktür. (negatif veya pozitif olabilir.)
(E)	0 0 0 - 0 +	merkezlerin doğrusu \bar{x}_2 ekseninde	(c)	(b)	(c)	Belirsiz	λ_3 küçük olduğunda yüzey (F)'deki gibidir.
(F)	0 0 0 - 0 0	merkez düzlemi $\bar{x}_1 = 0$ şeklinde verilmiştir.	(c)	(c)	sabit cevap	Belirsiz	λ_2 ve λ_3 'ün değerleri küçüktür (negatif veya pozitif olabilir.)
(G)	0 0 + - 0 0	merkez \bar{x}_3 üzerinde ve sonsuzda	(c)	(d)	Paralel doğrular	Uzak	λ_2 ve λ_3 'ün değerleri küçüktür (negatif veya pozitif olabilir.)

^a $\bar{x}_1\bar{x}_2$ ifadesi bir çapraz kesit alındığında ($\bar{x}_3 = \text{sabit}$ iken) \bar{x}_1 ve \bar{x}_2 'deki eş yükselti eğrilerini göstermektedir.

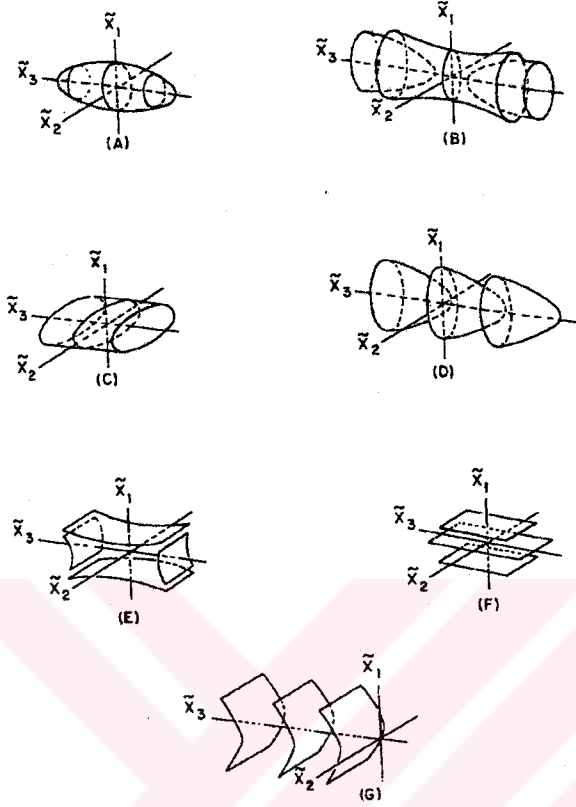
Kaynak: G. E. P. Box ve N. R. Draper (1987: s. 351)

3.3.3.4 Sırta Uzaklık

k değişkenli teorik bir sistemi ele alındığında, bu sistemde p adet sıfır özdeğer ile ortaya çıkan bir p -boyutlu sırt olsun. Tasarım merkezi O 'ya en yakın olan, sırttaki R noktasının koordinatları $(k - p)$ tane $\{X_{is}\}$ koordinatına sahip olur. Silinmiş p adet koordinat, sıfır özdeğerlere karşılık gelmektedir. böylece sırta olan en kısa uzaklık

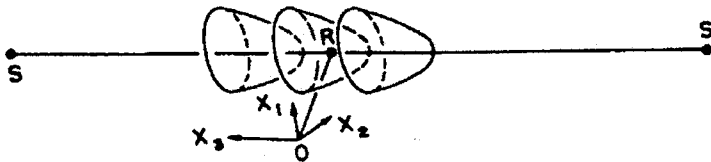
$$OR = \left\{ \sum X_{is}^2 \right\}^{1/2} \quad (3.54)$$

olarak yazılabilir. Burada i , sıfır olmayan özdeğerler içindir. Uyumu yapılmış yüzeyler için, özdeğerler tamamen sıfır olmazlar ve eşitlik (3.54)'deki karşılık gelen toplam, özdeğerleri küçük olan indisler dahil edilmeden yazılabilir.



Şekil 3-10. $k = 3$ durumu için bazı ikinci derece eşitliklerin eş yükselti sistemleri.
Kaynak: G. E. P. Box ve N. R. Draper (1987).

Şekil 3.11 ele alındığında, buradaki artan sırt sistemine, Şekil 3.10A'daki gibi merkezi \tilde{X}_3 ekseninde uzaktaki S noktasında bulunan bir elipsoidler sistemi ile yaklaşılabilir. Böylece yaklaşım sistemi için λ_1 ve λ_2 , λ_3 'e göre oldukça büyük ve negatif değerler alırken, λ_3 sıfıra yakın bir negatif (Durum A için) veya bir pozitif (Durum B için) değer alır. Her iki durumda da tasarım orijini O 'ya sırttaki en yakın nokta R 'nin koordinatları $(X_{1S}, X_{2S}, 0)$ olur ve böylece uzaklık $OR = (X_{1S}^2 + X_{2S}^2 + 0^2)^{1/2}$ şeklinde hesaplanır.



Şekil 3-11 Merkezi S olan bir elipsoid veya merkezi S' olan bir hiperboloid ile yaklaşılan bir artan sırt.
Kaynak: G. E. P. Box ve N. R. Draper (1987).

3.3.3.5 Sırttaki Durağanlık

p küçük özdeğerli $\lambda_{k-p-1}, \dots, \lambda_k$ bir şüpheli sırt sistemi için, $(X_{1S}, \dots, X_{k-p}, 0, \dots, 0)$ koordinatlarına sahip bir R noktası, *sırtta en yakın* nokta olarak seçilecektir. R noktasından itibaren, p küçük özdeğer içinde i 'incisinin boyunca her iki yönde de bir birim hareket edelim. Bu noktalar da R_{i1}, R_{i2} olsun. Buradan üç adet hesaplanmış cevap

$$\begin{aligned} \hat{y}_R & & R \text{ 'de} \\ \hat{y}_R + \theta_i + \lambda_i & & R_{i1} \text{ 'de} \\ \hat{y}_R - \theta_i + \lambda_i & & R_{i2} \text{ 'de} \end{aligned} \quad (3.55)$$

olur. Bu üç cevabın ortalaması $\hat{y}_R + \frac{2}{3}\lambda_i$ ve örnek varyansı $\theta_i^2 + \frac{1}{3}\lambda_i^2$ olur. Eğer normal dağılımda alınmış üç gözlemlik bir örnek söz konusu ise dağılımın standart sapmasına (örnek değişim aralığı) / $3^{1/2}$ ile yaklaşılabilir. Böylece bu üç cevap için örnek değişim aralığına

$$r_i = \{3\theta_i^2 + \lambda_i^2\}^{1/2} \quad (3.56)$$

ile yaklaşılabilir (Box ve Draper, 1987: s.353). Bu eşitlik, *yaklaşık sıfır özdeğer* eksenleri boyunca, hesaplanmış cevapta ne kadarlık bir değişimin olduğunu bir ölçüsünü sağlamaktadır. Gerçek değişim aralığı yerine (3.56)'nın kullanılmasının sebebi, her bir i için (3.55)'te gerçek değerlerin bulunmasındaki zorluktur. r_i 'nin (3.56)'daki gibi hesaplanması pratikte yeterli olmaktadır (Box ve Draper, 1987: s. 353).

3.3.3.6 Sonuçların Özeti

Kanonik analizin sonuçları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Eğimler	θ_1	θ_2	...	θ_k
Eğrisellik	λ_1	λ_2	...	λ_k
O 'dan sistem				
merkezine uzaklık	X_{1S}	X_{2S}	...	X_{kS}
\hat{y} 'daki				
değişmeler	r_1	r_2	...	r_k

3.3.3.7 θ_i ve λ_i İçin Yaklaşık Standart Hatalar

Döndürülmüş eksenler koordinat sisteminde (X_1, X_2, \dots, X_k), θ_i doğrusal etkileri, λ_i ise kuadratik etkileri temsil etmektedir. Kullanılan ikinci derece tasarımlar yaklaşık ya da tam döndürülebilir olduğunda, buradan katsayıların varyansları yaklaşık olarak $V(\theta) = V(b_i)$ ve $V(\lambda_i) = V(b_{ii})$ olur.

Örnek 3.2 (Box ve Draper, 1987: s.354)

$k = 2$ durumu Örnek 3.1'deki suni veriler analiz edildiğinde şu eşitliğin uyumu yapılmıştır:

$$\hat{y} = 78.8988 + 2.272x_1 + 3.496x_2 - 2.08x_1^2 - 2.92x_2^2 - 2.88x_1x_2$$

Buradan aşağıdaki tablo elde edilmiştir:

Tanımlama	İndis		"Standart Hata"
	1	2	
Eğimler θ	4.2	0.3	0.3
Eğrisellik λ	-4.0	-1.0	0.4
Uzaklıklar X_S	0.5	0.1	
\hat{y} 'deki değişmeler r	8.3	1.1	

λ 'lar sıfırdan anlamlı derecede farklıdır ve bunların büyüklükleri, X_2 (veya \tilde{X}_2)'den daha çok X_1 (veya \tilde{X}_1) yönünde cevap değişikliğinin olduğunu göstermektedir.

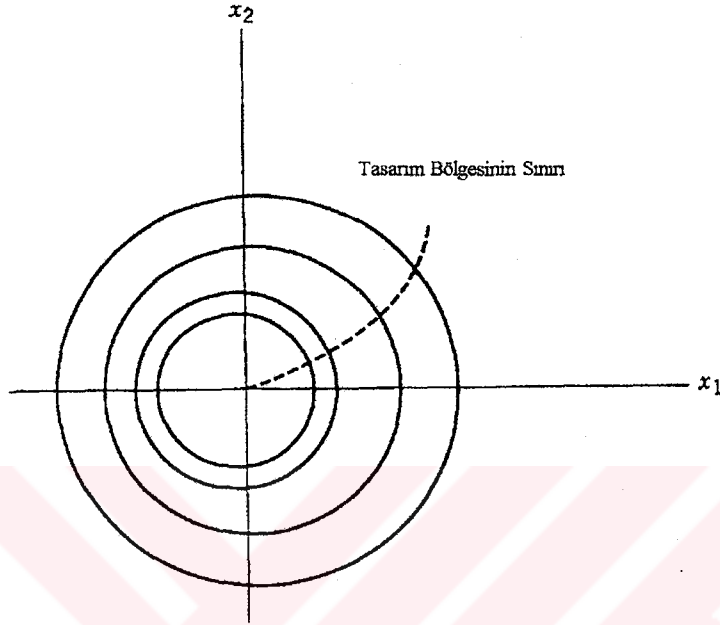
Artan sırt ve durağan sırt sistemleri ile ilgili çeşitli örnekler Box (1954) ve Box ve Draper (1987: ss. 355-372)'de verilmiştir.

3.3.4 Sırt Analizi Yöntemi

Sırt analizi tekniği A. E. Hoerl (1959) tarafından önerilmiştir ve daha sonra R. W. Hoerl (1985) tarafından bir literatür taraması yapılmıştır. Bir bakıma, sırt analizi, kanonik indirgemeye bir alternatiftir. Daha doğru bir ifadeyle, sırt analizi, ikinci derece yüzeylere en hızlı artışın uygulanmasıdır (Box ve Draper, 1987: s. 375).

Durağan noktanın deney bölgesinin içerisinde olmadığı durumlarda, yine deney bölgesinin sınırları içerisinde optimum cevap değerinin bulunması istenebilir. Örnek olarak $k = 2$ için deney bölgesinin sınırı, Şekil 3.12'deki en büyük çember ile temsil edilsin. Eğer yüzey, bir artan sırt sistemi ise, tahminlenmiş cevap \hat{y} 'nın deney bölgesi

içerisinde mutlak maksimum (minimum) değeri hesaplanmak istenebilir. Optimum \hat{y} değeri için bu tip bir araştırma sırt analizi yöntemi ile mümkündür.



Şekil 3-12. $k = 2$ için eş merkezli çemberler ve \hat{y} 'nin maksimum değerlerinin yerleşimi

Genel olarak, bu yöntem, merkezi $(x_1, x_2, \dots, x_k) = (0, 0, \dots, 0)$ olan, ortak merkezli ve değişen yarıçap R_l 'ye sahip ($l = 1, 2, \dots$) kürelerde, \hat{y} 'nin mutlak maksimum (veya minimum) değerini bulmak için kullanılır. Burada R_l yarıçapları deney bölgesinin içerisinde yer almaktadır. Şekil 3.12'de, değişik yarıçaplı dört adet çember ($l = 1, 2, 3, 4$) çizilmiştir. Burada amaç hem \hat{y} 'nin maksimum değerini bulmak, hem de her bir çemberin üzerinde \hat{y} 'nin maksimum değerinin yerini bulmaktır.

Uyumu yapılmış k değişkenli ikinci derece model aşağıdaki gibi olsun:

$$\hat{y} = b_0 + \mathbf{x}'\mathbf{b} + \mathbf{x}'\hat{\mathbf{B}}\mathbf{x} \quad (3.57)$$

Ayrıca, durağan noktanın araması, yarıçapı R olan kürenin sınırı üzerine düşen bir nokta olarak sınırlandırılabilir. Diğer bir deyişle,

$$\sum_{i=1}^k x_i^2 = R^2 \quad (3.58)$$

kısıtı altında \hat{y} 'yi maksimize edecek değişken koordinatlarının bulunması istensin. Bu koordinatlar özel bir R değeri için bulunur ve R değiştirildiğinde, prosedür devam ettirilir.

Değişik R değerleri için prosedür devam ettirildiğinde ve bir kez bu koordinatlar, R 'nin özel bir değeri için bulunduğu, R 'nin değeri değiştirilebilir ve bu prosedür tekrarlanabilir. R 'nin değişik değerleri için seçildiğinde ve bu R değerlerinin x_1, x_2, \dots, x_k ve \hat{y} değerlerine karşı grafiği çizildiğinde, tasarım merkezinden değişik uzaklıklar için maksimum \hat{y} değerlerinin grafikleri elde edilmiş olur.

Eşitlik (3.57)'deki \hat{y} 'yı eşitlik (3.58)'deki kısıt altında maksimize etmek için,

$$F = \hat{y} - \mu(\mathbf{x}'\mathbf{x} - R^2) \quad (3.59)$$

fonksiyonu ele alınır. Burada μ Lagrange çarpanıdır. Eşitlik (3.59)'un her bir x_i 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{b} + 2\hat{\mathbf{B}}\mathbf{x} - 2\mu\mathbf{x} \quad (3.60)$$

elde edilir. Bu eşitlik de sıfıra eşitlendiğinde

$$(\hat{\mathbf{B}} - \mu\mathbf{I})\mathbf{x} = \frac{-\mathbf{b}}{2} \quad (3.61)$$

elde edilir. x_1, x_2, \dots, x_k değerleri, μ için bir değer (3.61)'de yerine konularak bulunur. Burada μ , $\hat{\mathbf{B}}$ 'nin bir özdeğeri değildir. Daha sonra R 'nin ve \hat{y} 'nin değerleri eşitlik (3.57) ve (3.58)'den bulunabilir.

μ değerinin seçimi, bulunan durağan noktanın yapısı üzerinde etkili olabilir. Diğer bir deyişle, bazı μ değerleri maksimum tahminlenmiş cevabın durağan noktasını, bazı μ değerleri de minimum tahminlenmiş cevabın durağan noktasını verebilir. Eşitlik (3.61)'de kullanılan değişik μ değerleri aynı R değerlerini verebilir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 196).

Özel tipte bir durağan nokta türetmek amacıyla μ 'nün seçimi aşağıda verildiği gibi gerçekleştirilebilir:

n adet

$$h_j(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.62)$$

kısıtı altında k değişkenli $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun durağan noktalarını elde etmek için kullanılan bir yöntem şu şekildedir:

$$F = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \mu_j h_j(\mathbf{x}) \quad (3.63)$$

fonksiyonu ele alınsın. Burada μ_j 'ler Lagrange çarpanlarıdır. (3.63) eşitliğinin her bir x_i 'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde, k adet

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \mu_j \frac{\partial h_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.64)$$

eşitliği elde edilir. $n + k$ adet eşitlik (eşitlik (3.62) ve (3.64)), x_1, \dots, x_k ve $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ değerleri için çözülebilir. Gerçekte, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ değerlerinin x_1, x_2, \dots, x_k 'nin hesaplanmasında kullanılmasından başka bir önemi yoktur. Bu yüzden genellikle, μ_j değerlerini hesaplamak yerine, elimine edilip x_i değerlerinin hesaplanması üzerinde durulur. Bu prosedür şu şekildedir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 196):

Sırt analizi probleminde $n = 1$ ve tek bir kısıt eşitlik (3.58) olsun. $(x_1, x_2, \dots, x_k) = (a_1, a_2, \dots, a_k)$, μ 'nün eliminizasyonundan sonra eşitlik (3.58) ve (3.61)'in çözümü olsun.

Аyrıca

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} \end{bmatrix} = 2(\hat{\mathbf{B}} - \mu \mathbf{I}_k) \quad (3.65)$$

$k \times k$ boyutlu ikinci derece türevlerden oluşan simetrik matris olsun. $\mathbf{M}(\mathbf{a})$ da, $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_k = a_k$ 'daki $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ olarak tanımlansın. Ardından durağan noktanın yapısı, $\mathbf{M}(\mathbf{a})$ 'nın özelliklerine bağlıdır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 197):

1. Eğer $\mathbf{M}(\mathbf{a})$ pozitif tanımlı ise, yani tüm \mathbf{d} 'ler için $\mathbf{d}'\mathbf{M}(\mathbf{a})\mathbf{d} > 0$ ise (burada \mathbf{d} sıfır olmayan $k \times 1$ boyutlu bir reel vektördür), $\hat{y}, \mathbf{x} = \mathbf{a}$ noktasında bir yerel minimumu verir.
2. Eğer $\mathbf{M}(\mathbf{a})$ negatif tanımlı ise, yani $\mathbf{d} \neq 0$ için $\mathbf{d}'\mathbf{M}(\mathbf{a})\mathbf{d} < 0$ ise, $\hat{y}, \mathbf{x} = \mathbf{a}$ 'da bir yerel maksimumunu verir.
3. Eğer $\mathbf{M}(\mathbf{a})$ tanımsız ise, elde edilen durağan noktanın tipini bulmak için, $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ noktası civarında ortalama cevabın araştırılması gerekmektedir.

Eşitlik (3.65)'ten görüldüğü gibi, $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ matrisinin özelliği, reel simetrik $\hat{\mathbf{B}}$ matrisinin yapısına ve μ değerinin seçimine bağlıdır. μ 'nin değeri ve x_1, x_2, \dots, x_k

değerlerine karşılık gelen R ve \hat{y} ile ilgili sonuçlar aşağıda ifade edilmiştir. Bu sonuçlarının ispatları için Myers (1976) ve Draper (1963)'e başvurulabilir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 197).

Sonuç 1. Eşitlik (3.61)'in iki μ_1 ve μ_2 değerine karşılık gelen iki çözümü \mathbf{x}_1 ve \mathbf{x}_2 olsun. Eğer \mathbf{x}_1 ve \mathbf{x}_2 ile elde edilen \hat{y}_1 ve \hat{y}_2 tahminleri R_1 ve R_2 yarıçaplı kürelerin üzerinde ise, ayrıca $R_1 = R_2$ ve $\mu_1 > \mu_2$ ise, $\hat{y}_1 > \hat{y}_2$ olur. Bu sonuca göre, tasarım merkezinden eşit uzaklıkta olan iki durağan nokta için, cevap tahmini, daha büyük olan μ değerine karşılık gelen durağan nokta için daha büyük olur.

Sonuç 2. Eğer $R_1 = R_2$ ve $\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)$ pozitif tanımlı ancak $\mathbf{M}(\mathbf{x}_2)$ tanımsız ise, $\hat{y}_1 < \hat{y}_2$ olur.

Sonuç 3. μ_1 seçilmiş bir μ değeri olsun ve \mathbf{x}_1 de çözüm olsun (karşılık geldiği yarıçap R_1 ile). λ_i , $\hat{\mathbf{B}}$ 'nin i 'inci özdeğeri olmak üzere, eğer tüm i 'ler için $\mu_1 > \lambda_i$ ise, \mathbf{x}_1 , R_1 üzerinde bir yerel maksimumu verir. Diğer taraftan eğer tüm i 'ler için $\mu_1 < \lambda_i$ ise, \mathbf{x}_1 , R_1 üzerinde bir yerel minimum verir.

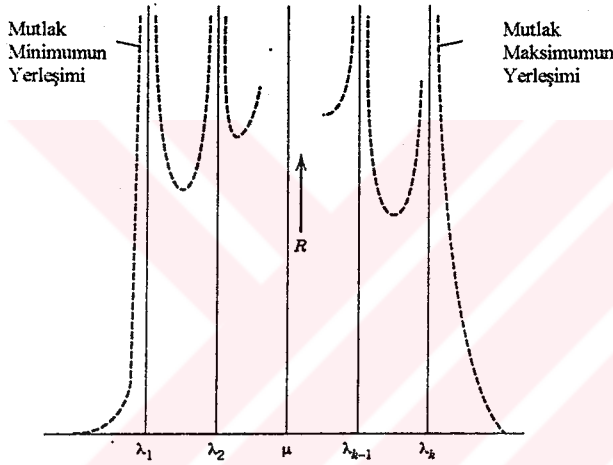
Sonuç 4. Varsayalım, R arttırıldıkça, karşılık gelen durağan noktaların koordinat değerleri elde edilsin. Ardından, R arttırıldığında, \hat{y} değeri aşağıda verildiği şekilde değişebilir (cevap yüzeyinin kuadratik olduğu varsayımı altında):

1. \hat{y} monotonik olarak azalır.
2. \hat{y} monotonik olarak artar.
3. \hat{y} bir maksimumdan (veya minimumdan) geçer ve monotonik olarak azalır (veya artar).

Koşul 3'ün ispatı Draper (1963)'te verilmiştir.

Yukarıdaki dört sonuç şunlara işaret etmektedir: Araştırmacının, sırt analizi için kullanılan durağan noktaların yerel maksimum olduğundan emin olması için, eşitlik (3.61)'de kullanılan μ değeri, $\hat{\mathbf{B}}$ matrisinin en büyük özdeğerinden daha büyük olmalıdır (Gerçekte, elde edilen \mathbf{x} değerleri, yalnızca yerel maksimum değil, mutlak maksimum noktaları olacaktır.) Yerel minimum aranırken, seçilen μ değerleri $\hat{\mathbf{B}}$ 'nin en küçük özdeğerinden daha küçük olmalıdır. (\mathbf{x} 'in sonuçtaki değerleri \hat{y} 'nin mutlak minimumunu verir). R 'nin μ değerlerine karşı bir grafiği ($-\infty < \mu < \infty$) Şekil 3.13 ile verilmiştir.

\hat{B} matrisinin en küçük özdeğeri λ_1 ve en büyük özdeğeri λ_k olsun. Şekil 3.13'e bakıldığında, $\mu > \lambda_k$ ve $\mu < \lambda_1$ olan bölgede, R 'nin, μ 'nün monoton bir fonksiyonu olduğu görülmektedir. Cevabın maksimizasyonu amaçlandığında, μ ($\mu > \lambda_k$) değerleri sürekli arttırılarak (5.61) eşliğinde yerine konulur. μ 'nün arttırılmasına, R değerleri deney bölgesinin yarıçapı civarına ulaşıncaya kadar devam ettirilir. Bu aşamadan sonra μ 'nün arttırılmasına devam edilirse, elde edilen maksimumların koordinatları, tasarım merkezine yaklaşacaktır. Cevabın minimumu amaçlandığında, aynı prosedür $\mu < \lambda_1$ için μ değerleri sürekli azaltılarak uygulanabilir.



Şekil 3.13. Sırt Analizinde R ile μ arasındaki ilişki.
Kaynak: R. H. Myers ve D. C. Montgomery (1995).

3.4 CEVAP İÇİN METRİK SEÇİMİ

Gerçek cevap yüzeyinde eğrisellik sözkonusu olduğunda ikinci derece cevap fonksiyonunun kullanımı gerçek yüzeye yaklaşımda kullanışlıdır. Bununla birlikte, veri transformasyonlarının sisteme daha iyi bir uyum sağladığı durumlar sözkonusu olabilir. Cevabın değişim aralığının büyük olduğu durumlarda (örneğin $y_{\max} / y_{\min} > 3$ olduğunda) ölçüldüğü metrikte bir değişiklik, sistem için daha iyi bir uyum sağlayabilmektedir. Metrik seçimi için bir prosedür Box ve Cox (1964) tarafından önerilmiştir ve cevap üzerindeki

$$y^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda} & (\lambda \neq 0) \\ \log y & (\lambda = 0) \end{cases} \quad (3.66)$$

şeklindeki bir kuvvet transformasyonunun kullanılmasına dayanmaktadır. Eşitlik (3.66)'da verilen transformasyon ile bir varyans analizinin sonuçları farklılık göstermeyeceği için bu transformasyon

$$y^{(\lambda)} = \begin{cases} y^\lambda & (\lambda \neq 0) \\ \log y & (\lambda = 0) \end{cases} \quad (3.67)$$

şeklindeki transformasyon ile denktir. y^λ ifadesi

$$y^\lambda = e^{\lambda \log y} \cong 1 + \lambda \log y + \frac{1}{2} \lambda^2 (\log y)^2 + \dots \quad (3.68)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{y^\lambda - 1}{\lambda} \right) = \log y \quad (3.69)$$

olduğu için, diğer bir deyişle eşitlik (3.66) ile verilen transformasyon $\lambda = 0$ 'da sürekli olduğu için, bu transformasyon eşitlik (3.67) ile verilen transformasyona tercih edilebilir.

Buradaki λ 'nın tahmini, transforme edilmiş modeldeki hata terimlerinin normal dağılışı gösterdiği varsayımı altında en yüksek olasılık tahminleme yöntemi ile türetilir. Box ve Cox (1964: s.216), λ 'nın en yüksek olasılık tahmininin, transforme edilmiş modeldeki minimum artık kareler toplamını veren λ 'ya eşit olduğunu göstermişlerdir. Bununla beraber bu prosedür çalışılırken ölçek için bir düzeltme yapılması gerekmektedir. Bunun nedeni ise, örneğin cevabın y olduğu model için artık kareler toplamı ile cevabın $\log y$ olduğu model için artık kareler toplamının karşılaştırılmayacağıdır. Sonuç olarak, eşitlik (3.66)'dan elde edilen $y^{(\lambda)}$ için bir ölçek düzeltmesi yapılması gerekmektedir. Box ve Cox (1964: s. 216), ölçek düzeltmesini içeren bir kuvvet transformasyonunun

$$z^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda y^{\lambda-1}} & (\lambda \neq 0) \\ \dot{y} \log y & (\lambda = 0) \end{cases} \quad (3.70)$$

şeklinde olduğunu göstermişlerdir. Burada $\dot{y} = \left\{ \prod_{i=1}^N y_i \right\}^{1/N}$, cevap gözlemlerinin geometrik ortalamasıdır.

λ için yaklaşık $\%(1 - \alpha)$ güven aralığı

$$\log S(\lambda) - \log S(\hat{\lambda}) = \frac{\chi_{\alpha,1}^2}{v_r} \quad (3.71)$$

şeklinde verilmiştir (Box ve Draper, 1987: s.290). Burada $S(\lambda)$ ve $S(\hat{\lambda})$, λ ve $\hat{\lambda}$ 'nin en yüksek olabilirlik tahmini $\hat{\lambda}$ için artık kareler toplamıdır. Ayrıca v_r , artıklar için serbestlik derecesi sayısıdır. $\log S(\hat{\lambda}) + \frac{\chi_{\alpha,1}^2}{v_r}$ doğrusu $\log S(\lambda)$ eğrisini iki noktada keser. Bu noktalardan elde edilen λ değerleri, $\%100(1 - \alpha)$ güven aralığının alt ve üst sınırlarını oluşturur.

Cevap üzerinde bir transformasyon, modelin uyumunun iyileştirilmesinden başka, model varsayımlarının zayıflaması durumunda da uygulanmaktadır. Bu varsayımlar,

- (i) $E(y)$ 'nin yapısının basitliği,
- (ii) Hata varyansının sabitliği ve
- (iii) Hataların normal dağılışı göstermesidir.

Regresyon ve cevap yüzeyi çalışmalarında, log ve karekök transformasyonlarının genellikle hata varyansının sabitleştirilmesinde etkili oldukları görülmüştür (bkz. Bartlett, 1947). Gerçekte, cevaptaki değişim aralığı büyük olduğunda, homojen olmayan varyans sözkonusu ise, uygun bir Box-Cox transformasyonu varyansın sabitliğini de sağlamaktadır (Myers ve Montgomery, 1995: s.262).

Verilere daha iyi bir uyum ve hata varsayımlarının sağlanmasından başka, transforme edilmiş bir cevap, yorumlanması daha kolay olan, daha basit bir model ile açıklanabilir. Örneğin cevap yüzeyi çalışmalarında sisteme yaklaşmak için ikinci derece bir model kullanıldığında, eğer sistem bir eğrisellik içeriyorsa, bu eğrisellik bir kare, log veya karekök transformasyonu ile açıklanabilir. Bu durumda genellikle daha yüksek dereceli terimlere ve hatta etkileşim terimlerine ihtiyaç duyulmaz. Böylece analizler daha kolay bir şekilde gerçekleştirilebilir. Transformasyonların uygulanması ile ilgili detaylar için Box ve Cox (1964), Bartlett (1947), Box ve Draper (1987: Bölüm 8 ve 13) ve Atkinson (1985)'e başvurulabilir.

Dördüncü Bölüm

ÇOK CEVAPLI DENEYLERİN ANALİZİ

Ürün geliştirme aşamalarında ortaya çıkan bir problem, ürün özelliklerinin arzu edilen kombinasyonunu veren koşulların seçimidir. Bu da, birden çok sayıda cevap değişkeninin eşanlı optimizasyonunu (özelliklerin arzu edilen kombinasyonu) içeren bir problemdir. Derringer ve Suich (1980) tarafından incelenen lastik endüstrisindeki bir yüzey-dişi bileşimi probleminde cevap değişkenleri (y 'ler), PICO Aşınma İndeksi (y_1), yüzde 200 modül (y_2), kopma uzaması (y_3) ve sertlik (y_4) olarak ele alınmıştır. Cevap değişkenlerinin her biri şu girdi değişkenlerine bağlıdır: hidratlı silis seviyesi (ξ_1), silan kavrama seviyesi (ξ_2) ve kükürt seviyesi (ξ_3). Burada amaç, y_1 ve y_2 'yi maksimize edecek ve y_3 ve y_4 'ü bir hedef değere yaklaştıracak ξ 'lerin seviyelerinin seçimidir. Başka bir örnek olarak bir gıda mühendisi, konserve balık kalitesinin iyileştirilmesi üzerinde çalıştığında üç girdi değişkeni yıkama sıcaklığı (ξ_1), yıkama zamanı (ξ_2) ve yıkama oranının (ξ_3), dört cevap değişkeni üzerindeki etkilerini inceleyebilir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 299): Bu cevap değişkenleri elastikiyet (y_1), tiyobitürik asit (TBA) sayısı (y_2), yüzde cinsinden pişme kaybı (y_3) ve beyazlık indeksi (y_4)'ni içermektedir. Burada ise amaç, y_1 ve y_4 'ü maksimize, y_2 ve y_3 'ü minimize etmektir.

Çok cevaplı bir deneyden elde edilen verilerin analizi, verilerin çok değişkenli yapısının dikkatli bir şekilde ele alınmasını gerektirmektedir. Diğer bir deyişle, cevap değişkenleri bireysel ve diğerlerinden bağımsız olarak incelenmemelidir. Cevaplar arasında var olabilecek ilişkiler, bu tip tek değişkenli incelemelerin anlamsız olmasına neden olur. Bu durumda, bir kaç cevap fonksiyonu eşanlı olarak optimize edilmek isteniyorsa, ayrı ayrı optimumların elde edilmesi anlamsızdır. Bir cevap için optimal olan koşullar, diğer cevaplar için optimumdan uzak, hatta fiziksel olarak uygulanması olanaksız olabilir. Keşifsel bir yaklaşım olarak, tüm cevapların eş yükselti eğrilerinin üst üste koyularak, koşulların tüm cevaplar için *yaklaşık* optimum olduğu bir bölge

belirlenebilir (bkz. Lind vd., 1960). Bununla birlikte, bu prosedür, çok sayıda girdi değişkeni ve cevap içeren sistemlerde sınırlıdır. Bundan başka, bir koşullar setini (veya deney bölgesindeki bir noktayı) böyle bir prosedür ile optimum olarak tanımlamak zordur.

4.1 DOĞRUSAL VE GENEL ÇOK CEVAPLI MODEL

Çok cevaplı bir deneyde amaçlardan birisi, söz konusu bir bölgede (deney bölgesinde), girdi değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak cevap değişkenlerinin davranışının eşanlı olarak modellenmesidir. Böyle bir fonksiyon ile ortaya çıkan model, bir *çok cevaplı model* olarak adlandırılır.

4.1.1 Doğrusal Çok Cevaplı Model

Deneme (experimental run) sayısı N ve k adet kodlanmış değişken (x_1, x_2, \dots, x_k) grubunun her bir kombinasyonu için ölçülecek cevap değişkeni sayısı r olsun. Ayrıca bir deney bölgesi R 'de, cevap değişkenleri, x_j değişkenlerinin oluşturduğu polinomial regresyon modelleri ile temsil edilsin. Buradan, i 'inci cevap modeli vektör formunda,

$$y_i = Z_i \beta_i + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada y_i , i 'inci cevaptaki $N \times 1$ boyutlu gözlemler vektörü; Z_i , kodlanmış değişkenlerin kombinasyonlarının bilinen fonksiyonlarından oluşan, rankı p_i olan $N \times p_i$ boyutlu matris; β_i , bilinmeyen parametrelerin oluşturduğu $p_i \times 1$ boyutlu vektör ve ε_i , i 'inci cevap ile ortaya çıkan $N \times 1$ boyutlu şansa bağlı hata vektörüdür. Ayrıca,

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_i) &= 0 \\ \text{Var}(\varepsilon_i) &= \sigma_{ii} I_N \quad , \quad i = 1, 2, \dots, r \\ \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) &= \sigma_{ij} I_N \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, r; \quad i \neq j \end{aligned} \quad (4.2)$$

olduğu varsayılmaktadır. (i, j) 'inci elemanı σ_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, r$) olan $r \times r$ boyutlu matris Σ ile gösterilir.

Eşitlik (4.1) ile verilen r adet eşitlik,

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.3)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $\tilde{\mathbf{y}} = [\mathbf{y}'_1; \mathbf{y}'_2; \dots; \mathbf{y}'_r]'$, $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}'_1; \boldsymbol{\beta}'_2; \dots; \boldsymbol{\beta}'_r]'$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}'_1; \boldsymbol{\varepsilon}'_2; \dots; \boldsymbol{\varepsilon}'_r]'$ ve \mathbf{Z} , blok-köşegen bir matristir, $\text{diag}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_r)$. Örneğin, $r = 3$ cevap için model (4.3)

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{N1} \\ \dots \\ y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{N2} \\ \dots \\ y_{13} \\ y_{23} \\ \vdots \\ y_{N3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{01} \\ \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{p_1,1} \\ \dots \\ \beta_{02} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{p_2,2} \\ \dots \\ \beta_{03} \\ \beta_{13} \\ \vdots \\ \beta_{p_3,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N1} \\ \dots \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N2} \\ \dots \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N3} \end{bmatrix}$$

$(3N \times 1) \quad (3N) \times (p_1 + p_2 + p_3) \quad (p_1 + p_2 + p_3) \times 1 \quad (3N \times 1)$

olarak görülür. Burada y_{ui} ve ε_{ui} , y_i ve ε_i 'nin u 'uncu elemanıdır ($l = 0, 1, \dots, p_i$; $i = 1, 2, \dots, r$).

Eşitlik (4.2)'den, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 'nin varyans-kovaryans matrisinin

$$\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_N \quad (4.4)$$

olduğu görülebilir. Burada \otimes sembolü, matrislerin Kronecker çarpımını göstermektedir. Boyutları $n_1 \times n_2$ ve $m_1 \times m_2$ olan iki matris \mathbf{A} ve \mathbf{B} 'nin Kronecher çarpımı, $n_1 m_1 \times n_2 m_2$ boyutlu $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ matrisini verir. Bu matris $[a_{ij}\mathbf{B}]$ şeklinde parçalandığında, a_{ij} , \mathbf{A} matrisinin (i,j) 'inci elemanı olmaktadır. $\boldsymbol{\beta}$ 'nin en iyi doğrusal sapmasız tahminleyicisi

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{Z}'\boldsymbol{\Delta}^{-1}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\boldsymbol{\Delta}^{-1}\tilde{\mathbf{y}} \quad (4.5)$$

şeklinde. Burada $\Delta = \Sigma \otimes \mathbf{I}_N$ ve $\Delta^{-1} = \Sigma^{-1} \otimes \mathbf{I}_N$ olmaktadır. $\hat{\beta}$ 'nin varyans-kovaryans matrisi

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = (\mathbf{Z}'\Delta^{-1}\mathbf{Z})^{-1} \quad (4.6)$$

olarak bulunabilir Eşitlik (4.5) ve (4.6), Σ 'nin bilinmesini gerektirmektedir. Eğer Σ bilinmiyorsa (genellikle bilinmez), β 'nin bir tahmini, Σ 'nin yerine tekil olmayan bir $\hat{\Sigma}$ tahmini konulmasıyla elde edilebilir. Böyle bir tahminleyici Zellner (1962) tarafından önerilmiştir ve $\hat{\Sigma} = (\hat{\sigma}_{ij})$, olmak üzere

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\mathbf{y}_i' [\mathbf{I}_N - \mathbf{Z}_i(\mathbf{Z}_i'\mathbf{Z}_i)^{-1}\mathbf{Z}_i'] [\mathbf{I}_N - \mathbf{Z}_j(\mathbf{Z}_j'\mathbf{Z}_j)^{-1}\mathbf{Z}_j'] \mathbf{y}_j}{N} \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (4.7)$$

şeklinde verilmiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 260). Burada $\hat{\sigma}_{ij}$, tek cevaplı modellerin karşılık geldikleri verilerle en küçük kareler uyumu yapılması sonucu ortaya çıkan artık (residual) vektörlerinden hesaplanmaktadır. Σ 'nin bu tahmini eşitlik (4.5)'te yerine konulursa,

$$\beta^* = (\mathbf{Z}'\Delta^{*-1}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\Delta^{*-1}\tilde{\mathbf{y}} \quad (4.8)$$

elde edilir. Burada $\Delta^* = \hat{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_N$ 'dir. Zellner β^* 'in sapmalı, ancak bu sapmanın en fazla $1/N$ 'inci dereceden olduğunu göstermiştir. β^* 'in asimtotik varyans-kovaryans matrisi $\hat{\beta}$ 'nin ki ile aynıdır. Ayrıca, belli koşullar altında, $\sqrt{N}(\beta^* - \beta)$ 'nin asimtotik dağılışı normaldir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 260). Kakwani (1967), β^* 'in, ortalamasının varolması ve şansa bağlı hata vektörleri $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$ 'lerin bir sürekli dağılışa sahip olması koşuluyla, sapsız olabileceğini göstermiştir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 260).

4.1.2 Genel Çok Cevaplı Model

u 'uncu deney noktasındaki i 'inci cevap değerinin

$$y_{ui} = f_i(\mathbf{x}_u, \beta) + \varepsilon_{ui} \quad u = 1, 2, \dots, N \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.9)$$

eşitliği ile temsil edildiği varsayalım. Burada $\mathbf{x}_u, (x_{u1}, x_{u2}, \dots, x_{uk})'$ vektörüdür. x_{uj} , j 'inci kodlanmış değişkenin u 'uncu seviyesidir. β bilinmeyen parametreler vektörü; ε_{ui} şansa

bağlı hata ve f_i i 'inci cevap için formu bilinen bir fonksiyondur ve sürekli olduğu varsayılmaktadır. Şansa bağlı hatalar ile ilgili olarak eşitlik (4.2)'deki varsayımlar burada da yapılmaktadır. Eğer f_i , β 'nin elemanları cinsinden doğrusal ise, eşitlik (4.9)'daki model doğrusal çok cevaplı modele indirgenmiş olur.

Genellikle f_i , β 'nin elemanları cinsinden doğrusal değildir. Bu durumda β 'nin bir tahmini, bir ağırlıklı doğrusal olmayan en küçük kareler prosedürü kullanılarak elde edilebilir. Σ bilindiğinde, ağırlıklandırma faktörleri, şansa bağlı hataların varyans-kovaryans matrisinin tersinin elemanları olmaktadır ($\Sigma^{-1} = (\sigma^2)^{-1}$), (Khuri ve Cornell, 1987: s. 261). Diğer taraftan, Σ bilinmediğinde Box ve Draper (1965), Σ hakkında bilgiye gerek duymadan β 'yi tahminlemek için bir yöntem geliştirmişlerdir. Bunun için Box ve Draper, $|V(\beta)|$ 'nin minimize edilmesi gerektiğini göstermişlerdir (Khuri ve Cornell, 1987: s. 261). Burada

$$V(\beta) = (\mathbf{y} - \mathbf{F})'(\mathbf{y} - \mathbf{F}) \quad (4.10)$$

ve $\mathbf{y} = [y_1: y_2: \dots: y_r]$, $N \times r$ boyutlu veri matrisi ve \mathbf{F} , (u, i) 'inci elemanı $f_i(\mathbf{x}_u, \beta)$ olan $N \times r$ boyutlu matristir. Khuri ve Cornell (1987:s.261) determinant $|V(\beta)|$ 'nin minimizasyonunun, Stewart ve Sorensen (1976)'in düzeltilmiş Newton algoritmasının veya Price (1977)'in kontrollü şansa bağlı arama prosedürünün kullanılarak sağlanabileceğini belirtmiştir. Bu tahminlere süreci, *Box-Draper tahminleme kriteri* olarak adlandırılmaktadır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 261).

4.1.2.1 Cevaplar Arasındaki Doğrusal Bağımlılıklar

Box-Draper tahminleme kriteri, cevaplar arasında kesin doğrusal ilişki olduğunda anlamsız sonuçlar verebilmektedir. Genellikle bu ilişkiler, bazı fiziksel ve kimyasal kuralların bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır. Örneğin, özel bir kimyasal mekanizmada, karbon dengesini korumak için tüm denemelerde substituent miktarları arasında kesin bir doğrusal ilişkinin var olması gerekmektedir. Bu tip ilişkiler *stoichiometric* olarak adlandırılır. (Bkz. Box vd., 1973; Khuri ve Cornell, 1987, s: 262)

Örneğin, varsayalım cevaplar arasında m tane doğrusal ilişki var olsun ve

$$\mathbf{B}(y_{u1}, y_{u2}, \dots, y_{ur})' = \mathbf{c} \quad u = 1, 2, \dots, N \quad (4.11)$$

şeklinde gösterilsin. Burada \mathbf{B} , $m \times r$ boyutlu rankı $m < r$ olan sabit katsayılarından oluşan matris; $(y_{u1}, y_{u2}, \dots, y_{ur})$, $N \times r$ boyutlu veri matrisi \mathbf{y} 'nin u 'uncu satırı; ve \mathbf{c} , $m \times 1$ boyutlu sabitler vektörüdür. Eşitlik (4.11),

$$\mathbf{B}\mathbf{y}' = \mathbf{1}'_N \otimes \mathbf{c} \quad (4.12)$$

olarak da açıklanabilir. Burada $\mathbf{1}'_N$, $N \times 1$ boyutlu birlerden oluşan bir vektördür. Eşitlik (4.9)'dan $E(\mathbf{y}) = \mathbf{F}$ olduğu için, daha sonra eşitlik (4.12)'den

$$E(\mathbf{B}\mathbf{y}') = \mathbf{B}\mathbf{F}' = \mathbf{1}'_N \otimes \mathbf{c} \quad (4.13)$$

elde edilir. Eşitlik (4.12) ve (4.13)'ten

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}' - \mathbf{F}') = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

sonucu çıkar. Burada $\mathbf{0}$, $m \times N$ boyutlu sıfır matristir. Eşitlik (4.14), $\mathbf{y} - \mathbf{F}$ matrisinin kolonları arasında m adet doğrusal ilişkinin var olduğunu göstermektedir. Bu yüzden, eşitlik (4.10)'daki $V(\beta)$ matrisi tekil olur. Diğer bir deyişle, parametre vektörü β 'nin alabileceği tüm değerler için $|V(\beta)| = 0$ olur. Böylece buradaki durumda $V(\beta)$ 'nin determinantını minimize etme çabası anlamsızdır.

Sayısal çalışmalarda, genellikle gözlenmiş cevap değerleri belli bir ondalık değerine göre yuvarlanır. Bu yuvarlamalar cevap değerinin ölçüldüğü ekipmanların hassasiyetlerinden kaynaklanabilir. Örneğin bir ölçüm ekipmanının hassasiyeti 0.01 birim olduğunda, gerçek değeri 20.236 birim olan bir karakteristik bu ekipmandan 20.24 birim olarak okunacaktır. Cevaplar arasında kesin doğrusal ilişkiler olduğunda bile, bu tip yuvarlama hataları $|V(\beta)|$ 'nin sıfırdan farklı olmasına neden olur. Bu durumda parametre değerleri değişmektedir. Bu koşullar altında, Box-Draper tahminleme kriteri ile β 'nin tahminlenmesi çabası, doğru olmayan sonuçları ortaya çıkarır. Box vd. (1973) bu problemi detaylı olarak tartışmıştır ve çok cevaplı verilerin önce dikkatle gözden geçirilmesini ve daha önce tanımlanan tipteki doğrusal ilişkilerin olup olmadığının kontrol edilmesini önermiştir. Bu da \mathbf{DD}' matrisinin özdeğerlerinin incelenmesi ile sağlanabilmektedir (Khuri ve Cornell, 1987: ss. 262-263). Burada \mathbf{D} ,

$$\mathbf{D} = \mathbf{y}' \left[\mathbf{I}_N - \frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}'_N}{N} \right] \quad (4.15)$$

$$= [y_1 - \bar{y}_1 \mathbf{1}_N, \dots, y_r - \bar{y}_r \mathbf{1}_N]'$$

şeklinde $r \times N$ boyutlu matristir. Cevaplar arasında m adet doğrusal bağımsız ilişki, yalnız ve yalnız \mathbf{DD}' 'un m 'nin çokluğu kadar sıfır özdeğeri olduğunda var olur. Ayrıca burada, cevap değerlerindeki yuvarlama hataları, cevaplar doğrusal olarak ilişkili olduğunda bile, \mathbf{DD}' 'un özdeğerinin tam olarak sıfır olmasını önleyebilir. Bu yüzden, \mathbf{DD}' 'un küçük özdeğerleri, gerçekte sıfır olup olmadığını bulmak için ekstra analize tabi tutulmalıdır (Khuri ve Cornell, 1987: s.263).

4.1.2.2 Doğrusal Bağımlılıkların Özdeğer Analizi İle Tespit Edilmesi

Cevap değerlerinde yuvarlama hataları var olsun ve $(-\delta, \delta)$ aralığında bağımsız ve tekdüzen dağılım gösterirler. δ değeri, kaydedilen son dijitin yarısıdır (tüm cevap değerleri aynı sayıya yuvarlanmaktadır). λ , yuvarlama hatası olmadığına sıfır olan, \mathbf{DD}' 'un küçük özdeğeri olsun. Box vd. (1973), δ yeterince küçük olduğunda, λ 'nın beklenen değeri μ_λ 'nın yaklaşık olarak

$$\mu_\lambda = (N - 1) \sigma_{re}^2 \quad (4.16)$$

olduğunu göstermiştir (Khuri ve Conlon, 1981, s: 365). Burada $\sigma_{re}^2 = \delta^2 / 3$, yuvarlama hatası varyansdır (Bkz. Box vd., 1973: s. 44). μ_λ 'ya ek olarak, λ 'nın standart sapması σ_λ hakkında bilgi sahibi olunması gerekmektedir. Böylece \mathbf{DD}' 'un hesaplanmış bir özdeğerinin μ_λ 'dan sapması, σ_λ 'nın birimi ile bulunabilir. Khuri ve Conlon (1981: Ek A) yaklaşık olarak ve yeterince küçük bir δ için

$$\sigma_\lambda^2 \leq \left[\frac{9Nr}{5} + Nr(Nr - 1) - (n - 1)^2 \right] \sigma_{re}^4 \quad (4.17)$$

olduğunu göstermiştir. \mathbf{DD}' 'un bir özdeğerinin hesaplanan değeri, μ_λ 'dan beşte dört σ_λ sapma kadar olan aralığın içerisine düşüyorsa, cevaplar arasında doğrusal ilişkinin olduğu bir göstergesi olarak, bu özdeğerin bir sıfır özdeğer olduğu kabul edilir. \mathbf{DD}' 'un m adet

küçük özdeğeri, sıfır özdeğer olarak belirlendiğinde, DD' , m çokluğunda sıfır özdeğere sahip olarak tanımlanır.

4.1.2.3 Doğrusal Bağımlılıkların Özvektör Analizi İle Tespit Edilmesi

Özdeğer analizi, cevaplar arasında doğrusal ilişkinin olup olmadığını bulmaya yaramaktadır. Bununla beraber, bu ilişkilerin ne olduğunu tanımlamaz. Khuri ve Cornell (1987: ss. 264-267) böyle bir tanımlamanın, DD' 'un sıfır özdeğere karşılık gelen özvektörlerinin sınanmasını gerektirdiğini söylemişlerdir ve doğrusal bağımlılıkların özvektör analizi ile tespit edilmesi için bir prosedür vermişlerdir. Böyle bir özvektör, η ,

$$DD' \eta = 0 \quad (4.18)$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitlik,

$$D' \eta = 0 \quad (4.19)$$

ile aynı anlamdadır. Eşitlik (4.15) ve (4.19)'dan

$$\left(I_N - \frac{1_N 1_N'}{N} \right) y \eta = 0$$

ve

$$y \eta = \gamma 1_N \quad (4.20)$$

yazılabilir. Burada $\gamma = \sum_{i=1}^r \eta_i \bar{y}_i$; $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, η 'nin elemanları ve \bar{y}_i , i 'inci ($i = 1, 2, \dots, r$) cevaptaki N değerinin ortalamasıdır.

Eşitlik (4.20)'den, η 'nin elemanlarının r adet cevap arasındaki doğrusal bir ilişkiyi tanımladığı görülmektedir:

$$\sum_{i=1}^r y_{ui} \eta_i = \gamma, \quad u = 1, 2, \dots, N \quad (4.21)$$

Burada γ , N denemede de sabittir. Eğer sıfır özdeğerler m çokluğunda gerçekleşiyorsa, karşılık gelen m adet doğrusal bağımsız özvektör ve bu yüzden, cevaplar arasında m adet doğrusal bağımsız ilişki olacaktır. Bu özvektörler,

$$DD' = PAP' \quad (4.22)$$

teoreminden bulunabilir. Burada Λ , DD' 'un özdeğerlerinden oluşan köşegen bir matris (ilk m köşegen eleman sıfıra eşittir), ve P özvektörlerden oluşan ortogonal bir matristir (ilk m kolon sıfır özdeğere karşılık gelmektedir.)

Khuri ve Cornell (1987: s. 265), DD' 'un bazı özdeğerlerine, özdeğer analizi sonucu sıfır gözüyle bakıldığında, karşılık gelen özvektörlerin, cevaplar arasındaki yalnızca *yaklaşık* ilişkileri temsil edeceğini belirtmiştir. Khuri ve Cornell, yuvarlama hatalarının varlığı durumunda bu özvektörlerin elemanlarının ortalama ve varyanslarının incelenmesinin, özdeğer analizine benzer şekilde gerçekleştirilebileceğini, ancak bu incelemenin oldukça karmaşık olduğunu vurgulamıştır.

DD' matrisinin m adet sıfır özdeğeri olduğunda, aralarında doğrusal fonksiyonel ilişki bulunmayan $r - m$ adet cevap bulmak mümkündür. Bu da kalan $r - m$ cevabın doğrusal fonksiyonu olan m adet cevabın atılmasını gerektirmektedir (Khuri ve Conlon, 1981: s. 365). Khuri ve Conlon (1981: Ek B), çok cevaplı verilerdeki yuvarlama hatalarını en aza indirecek şekilde m cevabın çıkartılması için bir prosedür vermişlerdir. Box vd. (1973), bir çok durumda incelenen problemin yapısının, cevapların çıkartılması için doğal bir yol gösterebileceğini belirtmişlerdir. Ayrıca, Khuri ve Conlon (1981), hangi cevabın çıkartılacağına karar verme de teknik hususların da kullanılmasını tavsiye etmişlerdir.

4.2 ÇOK CEVAPLI DENEYLERİN TASARIMI

Çok cevaplı bir durumdaki tasarım problemi, tek cevaplı bir durumdakinden daha karmaşıktır. Bir cevap için etkin olan bir tasarım diğer cevaplar için etkin olmayabilir. Khuri ve Cornell (1987: s. 270) çok cevaplı bir durumda, bir tasarımın seçiminin, tüm cevaplarınkine ait olan etkinlik ölçülerini dahil eden bir kritere dayanması gerektiğini vurgulamıştır.

Myers, Khuri ve Carter (1989: s. 145), çok cevaplı analizlerde en az gelişmenin deney tasarımlarında olduğunu belirtmişlerdir. Draper ve Hunter (1966, 1967), genel çok cevaplı modellerin parametrelerinin tahminlenmesi için tasarım kriterlerini vermişlerdir. Bu kriterler, r cevap için Σ' 'nin bilinmesini gerektirmektedir. Federov (1972), bir doğrusal

çok cevaplı model için, D -optimum tasarımların kurulmasını sağlayan bir algoritma vermişlerdir. Bu algorithmada tasarım noktaları ardışık olarak seçilmektedir. Federov'un algoritması da yine Σ 'nın bilinmesini gerektirmektedir. Khuri ve Cornell (1987: ss. 275, 276), Σ 'nın bilinmediği durumlarda D -optimum tasarımların elde edilmesi için Federov'un algoritmasında bir düzeltme gerçekleştirmişlerdir.

4.3 ÇOK CEVAPLI DOĞRUSAL BİR MODELİN UYUM YETERSİZLİĞİ İÇİN BİR TEST

Khuri (1985), çok cevaplı doğrusal bir modelin uyum yetersizliği için bir test önermiştir. Khuri (1985: s. 213), cevaplar korelasyonlu olabileceği için, bir cevaptaki uyum yetersizliğinin diğer cevapların uyumunu etkileyebileceğini ve bu yüzden cevapların bağımsız olarak analiz edilebileceği varsayımının doğru olmadığını iddia etmektedir. Khuri'nin önerdiği test Roy'un birleşim-kesişim prensibine (bkz. Morrison, 1976: Bölüm 4 ve 5) dayanmaktadır. Eşitlik (4.1)'de tanımlanan doğrusal modeller yeniden ele alındığında, bu modellerin çok değişkenli bir formülasyonu

$$y = W\Gamma + \delta \quad (4.23)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $y = [y_1: y_2: \dots: y_r]$, $W = [Z_1: Z_2: \dots: Z_r]$, $\Gamma = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$ ve $\delta = [\epsilon_1: \epsilon_2: \dots: \epsilon_r]$ 'dir. δ 'nın satırlarının birbirinden bağımsız $N(0, \Sigma)$ dağılışı gösterdiği varsayılmaktadır. Ayrıca, bu modellerin uyumunu yapmak için kullanılan tasarımın, deney bölgesindeki bazı noktalarda r cevap için de tekrarlı gözlemler alınmasına imkan verdiği ve cevapların aynı derecede olması gerekmeyen polinomieller ile temsil edilebileceği varsayılmaktadır. Burada tekrarlı denemelerinin, tasarımın ilk n noktasının her birinde yapıldığı durumu ele alınmıştır ($1 \leq n < N$). Böyle bir modelin yetersizliğinin kontrolü, verilerin çok değişkenli yapısının incelenmesini gerektirmektedir. Tek cevaplı modellerde kullanılan uyum yetersizliği testleri cevaplar arasındaki korelasyonları hesaba katmaz.

4.3.1 Çok Değişkenli Uyum Yetersizliği Testinin Geliştirilmesi

$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_r)'$, $r \times 1$ boyutlu sıfır olmayan vektör olsun. Eşitlik (4.23)'den

$$\mathbf{y}_c = \mathbf{W}\boldsymbol{\gamma}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_c \quad (4.24)$$

modeli elde edilir. Burada $\mathbf{y}_c = \mathbf{y}\mathbf{c}$, N gözlemin tek değişkenli cevap üzerindeki bir vektördür: $\mathbf{y}_c = \sum_{i=1}^r c_i \mathbf{y}_i$, $\boldsymbol{\gamma}_c = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{c}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_c = \boldsymbol{\delta}\mathbf{c}$. $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ 'nin $N(\mathbf{0}, \sigma_c^2 \mathbf{I}_N)$ şeklinde çok değişkenli normal dağılışa sahip olduğu görülebilir. Burada $\sigma_c^2 = \mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c}$ olmaktadır.

Yalnız ve yalnız eşitlik (4.24)'deki çok değişkenli modeller $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ için yeterli ise, eşitlik (2.23)'deki çok cevaplı model yeterlidir (Khuri, 1985: s. 214). Diğer bir deyişle, bazı $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ için model (4.24) yetersiz ise, çok cevaplı model (4.23) de yetersizdir. $\mathbf{y}_c \sim N(\mathbf{0}, \sigma_c^2 \mathbf{I}_N)$ şeklinde çok değişkenli normal dağılış gösterdiği için ve ilk n tasarım noktasının herbirinde tek değişkenli cevap \mathbf{y}_c üzerinde tekrarlı gözlemleri içerdiği için, tek cevaplı durum için tanımlanan uyum yetersizliği testi, eşitlik (4.24)'ün yeterliliğini kontrol etmek için de kullanılabilir. $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ için test istatistiği

$$F(\mathbf{c}) = \frac{\nu_{SH} KT_{UY}(\mathbf{c})}{\nu_{LY} KT_{SH}(\mathbf{c})} \quad (4.25)$$

şeklinde yazılabilir (Khuri, 1985: s. 215). Burada $KT_{SH}(\mathbf{c})$ ve $KT_{UY}(\mathbf{c})$, saf hata ve uyum yetersizliği kareler toplamlarıdır ve ν_{SH} ve ν_{LY} kareler toplamlarının serbestlik dereceleridir. Bu kareler toplamları şu şekilde açıklanabilir (Khuri, 1985: s. 214):

$$KT_{SH}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}'\mathbf{y}'\mathbf{K}\mathbf{y}\mathbf{c} \quad (4.26)$$

$$KT_{UY}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}'\mathbf{y}'\left[\mathbf{I}_N - \mathbf{W}(\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}' - \mathbf{K}\right]\mathbf{y}\mathbf{c} \quad (4.27)$$

Burada $\mathbf{K} = \text{diag}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_n, \mathbf{0})$, \mathbf{K}_i ,

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{I}_{\nu_i} - \left(\frac{1}{\nu_i}\right)\mathbf{J}_{\nu_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.28)$$

\mathbf{J}_{ν_i} , $\nu_i \times \nu_i$ boyutlu birlerden oluşan matris ve ν_i , i 'inci tekrarlayan tasarım noktasındaki gözlem sayısıdır ($i = 1, 2, \dots, n$). Burada n adet tasarım noktasında tekrarlı gözlem alınmaktadır. i 'inci noktada ν_i adet gözlem alınmaktadır. Khuri (1985: s. 214) eşitlik

(4.27)'de, W 'nin tam ranklı olma zorunluluğu bulunmadığını ve bu yüzden $W'W$ 'nin genelleştirilmiş tersinin kullanılabileceğini belirtmiştir. Eşitlik (4.26) ve (4.27)'deki kuadratik formların matrisleri G_2 ve G_1 ile gösterildiğinde ve saf hata ve uyum yetersizliği matrisleri olarak adlandırıldığında,

$$G_1 = y' [I_N - W(W'W)^{-1}W' - K] y \quad (4.29)$$

$$G_2 = y'Ky \quad (4.30)$$

elde edilir. Eşitlik (4.25)'deki istatistik

$$F(c) = \frac{v_{SH} c'G_1 c}{v_{UY} c'G_2 c} \quad (4.31)$$

olarak yazılabilir.

Eğer model (4.24) doğru ise, ardından $F(c)$, v_{UY} ve v_{SH} serbestlik dereceli F dağılışı gösterir. $F(c)$ 'nin büyük değeri, diğer bir deyişle, $c'G_1 c / c'G_2 c$ 'nin yüksek bir değeri, eşitlik (4.24)'ün yetersiz olduğuna işaret eder. Bir $c \neq 0$ için yalnız ve yalnız eşitlik (4.24)'deki modellerden en az birisi yetersiz olduğunda, eşitlik (4.23) yetersiz olarak ele alındığı için, $\max(c'G_1 c / c'G_2 c)$ kritik bir değeri aştığında model (4.26) anlamlı bir uyum yetersizliğine sahiptir (Khuri, 1985: s. 215). Ancak $\max(c'G_1 c / c'G_2 c) = e_{\max}(G_2^{-1}G_1)$ olmaktadır. Burada $e_{\max}(G_2^{-1}G_1)$, $r \times r$ boyutlu $G_2^{-1}G_1$ matrisinin en büyük özdeğeridir. Eğer λ_α , model (4.23) doğru iken $e_{\max}(G_2^{-1}G_1)$ 'in dağılışının üst %100 noktasını gösterir ise, anlamlı bir uyum yetersizliği

$$e_{\max}(G_2^{-1}G_1) \geq \lambda_\alpha \quad (4.32)$$

olduğunda α seviyesinde tespit edilebilir. Eşitsizlik (4.32) ile verilen uyum yetersizliği testi, tek bir cevap için genel uyum yetersizliği testinin çok değişkenli karşılığıdır ve Roy'un en büyük kök testi olarak bilinmektedir (Khuri, 1985: s. 215). Kritik değer λ_α için tablolar Morrison (1976), Roy vd. (1971) ve Seber (1984)'den elde edilebilir.

Khuri (1985: s. 215) diğer çok değişkenli test istatistiklerinin model (4.23)'ün uyum yetersizliğini test etmek için kullanılabileceğini belirtmiştir. Bunlar Wilks'in olabilirlik oranı, $|G_2| / |G_1 + G_2|$, Hotelling-Lawley'in izi, $\text{tr}(G_2^{-1}G_1)$ ve Pillai'nin izi,

$\text{tr}[\mathbf{G}_1(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2)^{-1}]$ 'dir. Wilks'in olabilirlik oranının küçük değerleri anlamlıdır. Bu üç test için kritik değerlerin bulunduğu tablolar Seber (1984)'te verilmiştir.

4.3.2 Cevapların Uyum Yetersizliğine Katkısı Olan Alt Setlerinin Seçimi

Eşitlik (4.35) ile verilen çok değişkenli uyum yetersizliği testinin anlamlılığı, hangi cevabın uyum yetersizliğine katkısı olduğunu göstermez. Khuri (1985: s. 215) bu problemin üstesinden gelmek için $\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{G}_1$ matrisinin en büyük özdeğerine karşılık gelen özvektör \mathbf{c}^* 'in incelenmesini önermiştir. \mathbf{c}^* 'in aşağıdaki eşitliği sağladığı kolaylıkla görülebilir:

$$\left[\mathbf{G}_1 - \max_c \left(\frac{\mathbf{c}'\mathbf{G}_1\mathbf{c}}{\mathbf{c}'\mathbf{G}_2\mathbf{c}} \right) \mathbf{G}_2 \right] \mathbf{c}^* = 0$$

veya diğer bir ifadeyle, \mathbf{G}_2 tekil olmadığı için

$$\left[\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{G}_1 - \max_c \left(\frac{\mathbf{c}'\mathbf{G}_1\mathbf{c}}{\mathbf{c}'\mathbf{G}_2\mathbf{c}} \right) \mathbf{I}_r \right] \mathbf{c}^* = 0$$

yazılabilir.

$$\max_c \left(\frac{\mathbf{c}'\mathbf{G}_1\mathbf{c}}{\mathbf{c}'\mathbf{G}_2\mathbf{c}} \right) = e_{\max}(\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{G}_1)$$

olduğu için,

$$\left[\mathbf{G}_1 - e_{\max}(\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{G}_1)\mathbf{G}_2 \right] \mathbf{c}^* = 0 \quad (4.33)$$

yazılabilir. \mathbf{c}^* 'in elemanları aşağıdaki doğrusal kombinasyonu üretir:

$$y_c = \sum_{i=1}^r c_i^* y_i \quad (4.34)$$

Bu doğrusal kombinasyonda yer alan cevaplar, uyum yetersizliğine etkisi olan cevaplar olarak ele alınır (Khuri, 1985: s. 215). Cevaplar, değişik birimlerde ölçülebileceği için,

(4.34)'deki doğrusal kombinasyonun, standardize edilmiş cevap değişkenleri cinsinden açıklanması gerekmektedir:

$$y_c = \sum_{i=1}^r d_i^* z_i \quad (4.35)$$

Burada $z_i = y_i / \|y_i\|$ 'dir. $\|y_i\|$ i 'inci cevabın gözlem vektörü y_i 'nin Öklid normu $(y_i' y_i)^{1/2}$ 'dir. $d_i^* = c_i^* \|y_i\|$ 'dir. ($i = 1, 2, \dots, r$)

d_i^* katsayılarının herbirinin büyüklüğü, cevapların uyum yetersizliğine katkısını bulmaktadır. d_i^* 'nin mutlak olarak büyük değerleri, uyum yetersizliğinde etkisi olan cevaplar ile ortaya çıkmaktadır Khuri (1985: s. 215).

4.4 DUAL CEVAP SİSTEMLERİ İÇİN OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ

Myers ve Carter (1973), iki cevaptan oluşan bir dual cevap sistemi için bir optimizasyon problemi ele almışlardır. Bu cevaplardan birisi birincil cevap, diğeri ikincil cevap olarak adlandırılır. Myers ve Carter, ikincil cevabın belli veya istenen bir değeri alması kısıtı altında, birincil cevabı maksimize (veya minimize) eden girdi değişkenlerinin kombinasyonunu bulmak için bir algoritma geliştirmişlerdir. Diğer bir deyişle, ikincil cevap fonksiyonu, birincil cevap fonksiyonunun optimizasyonu üzerinde bazı kısıtlar koymaktadır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 285).

Birincil ve ikincil cevap fonksiyonları için, kodlanmış k adet girdi değişkeni x_1, x_2, \dots, x_k 'nin bölgesinde uyumu yapılmış modeller ikinci dereceden olduğunda

$$\hat{y}_p(\mathbf{x}) = b_{01} + \mathbf{x}'\mathbf{b}_1 + \mathbf{x}'\hat{\mathbf{B}}_1\mathbf{x} \quad (4.36)$$

$$\hat{y}_s(\mathbf{x}) = b_{02} + \mathbf{x}'\mathbf{b}_2 + \mathbf{x}'\hat{\mathbf{B}}_2\mathbf{x}$$

şeklinde ifade edilirler. Burada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)'$ olmaktadır. Dual cevap yöntemi, sırt analizinin bir uzantısıdır. R , söz konusu küresel deney bölgesi ve ρ , bu bölgenin yarıçapı olduğunda, dual cevap problemi birincil cevap \hat{y}_p 'yi, ikincil cevabın $\hat{y}_s = \tau$ olması kısıtı altında optimize eden koşullar seti $\mathbf{x}^* \in R$ 'nin bulunması ile ilgilenmektedir. Burada τ , ikincil cevap için kabul edilebilir bir değerdir.

Sırt analizinin uygulandığı durumlarda olduğu gibi, \mathbf{x}^* , dual cevap probleminde de R 'nin sınırları üzerine düşebilir. Böyle bir durumda, Myers ve Carter \mathbf{x}^* 'in bulunması için Lagrange çarpanlarını uygulamıştır (Vining ve Myers, 1990: s. 44). λ_τ , $\hat{y}_s = \tau$ kısıtıyla ortaya çıkan Lagrange çarpanı ve λ_ρ , $\mathbf{x}'\mathbf{x} = \rho^2$ kısıtıyla ortaya çıkan Lagrange çarpanı olsun. \hat{y}_p 'yi optimize etmek için verilen bu iki kısıt için

$$L = \hat{y}_p - \lambda_\tau(\hat{y}_s - \tau) - \lambda_\rho(\mathbf{x}'\mathbf{x} - \rho^2) \quad (4.37)$$

fonksiyonunun ele alınması gerekmektedir. Myers ve Carter, durağan bir noktanın

$$(\hat{\mathbf{B}}_1 - \lambda_\tau \hat{\mathbf{B}}_2 - \lambda_\rho \mathbf{I})\mathbf{x} = \frac{\lambda_\tau \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1}{2} \quad (4.38)$$

koşulunu sağlaması gerektiğini göstermiştir (Vining ve Myers, 1990: s. 44). $\lambda_\tau = 0$ için, dual cevap problemi, sırt analizine dönüşmektedir.

Myers ve Carter, bu sistemin, ilk olarak λ_τ 'ya sabit bir değer verilip, ardından λ_ρ 'un, $\hat{\mathbf{B}}_1 - \lambda_\tau \hat{\mathbf{B}}_2$ 'nin en büyük özdeğerinden daha büyük veya en küçük özdeğerinden daha küçük olacak şekilde seçilerek (problemin amacına göre sırt analizinde olduğu gibi hangisi uygunsa) çözülmesini önermektedir. λ_ρ birincil cevabın maksimizasyonu ile ilgileniliyorsa $\hat{\mathbf{B}}_1 - \lambda_\tau \hat{\mathbf{B}}_2$ 'nin tüm özdeğerlerinden küçük olacak şekilde seçilir. Bu prosedür λ_τ 'un $(-\pi \leq \lambda_\tau \leq \pi)$ aralığındaki değişik değerleri için tekrarlanabilir (Vining ve Myers, 1990: s. 44). Aslında seçilen bir λ_τ değeri, küresel deney bölgesinin hacmini ve cevapların gradyanları ile birlikte $\mathbf{x} = 0$ 'dan \mathbf{x} 'in optimal değerine doğru hareket edildiğinde, arama yönünü tanımlamaktadır.

Myers ve Carter (1973)'in dual cevap probleminin daha genel bir biçimi Biles (1975) tarafından ele alınmıştır. Biles, belirli aralıklar içerisinde, bir birincil cevap fonksiyonunu birkaç ikincil cevap fonksiyonu olması kısıtı altında optimize etmek için bir prosedür tanımlamıştır. Biles'in prosedürü, en hızlı artış yönteminin bir modifikasyonunu kullanmaktadır (Khuri ve Cornell, 1987: s. 287).

Myers ve Carter'ın dual cevap problemini eşitsizlik kısıtları altında optimize etmek için, DelCastillo ve Montgomery (1993), doğrusal olmayan programlama tekniklerinden genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan (generalized reduced gradient) algoritmasını

kullanılmışlardır. Genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan (GİG) yönteminin avantajı, birden fazla sayıda kısıtın (cevap fonksiyonları) veya bu kısıtların daha genel yapılarının ele alınabilmesine imkan vermesidir. Örneğin, ikincil cevap için

$$A \leq \hat{y}_s \leq \bar{U} \quad (4.39)$$

şeklinde bir kısıt ele alınabilir. Burada A ve \bar{U} , ikincil cevap için alt ve üst sınırlardır.

GİG yönteminin başka bir avantajı, araştırmacıya, doğrudan söz konusu küresel deney bölgesinin yarıçapı ρ 'yu belirleme olanağı vermesidir. Myers ve Carter'ın yaklaşımında yarıçap, Lagrange çarpanı λ_r ile dolaylı olarak belirlenmektedir. Birçok cevap yüzeyi tasarımı için (merkezi bileşik tasarımlar gibi), küresel deney bölgeleri uygundur.

Bazı uygulamalarda, söz konusu bölgeyi tanımlayan kısıtlar veya sınırlamalar, değişik biçimlerde olabilir. Eğer bir faktöryel deney tasarımı kullanılıyorsa,

$$-1 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.40)$$

sınırlamalarıyla verilen küp, mevcut işletim koşulları içerisinde söz konusu bir deney bölgesi tanımlamak için daha iyi bir seçim olabilir. Bu tip problemlerin üstesinden GİG algoritması ile gelinebilir. GİG algoritması ile ilgili açıklamalar DelCastillo ve Montgomery (1993) ve Bazaraa vd. (1993)'te detaylı olarak verilmektedir.

4.5 ÇEKİCİLİK FONKSİYONU YAKLAŞIMI İLE SÜREÇ OPTİMİZASYONU

r adet cevap değişkeninin herbirisi k adet bağımsız değişken ile ilişkili olduğu varsayımı altında,

$$y_{ui} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_k) + \varepsilon_{ui}, \quad u = 1, 2, \dots, N_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.41)$$

şeklinde ifade edilir. Burada f_i , y_i ile x_1, x_2, \dots, x_k arasındaki fonksiyonel ilişkidir ve her bir y_i için farklı yapıda olabilir. Her bir i için $E(\varepsilon_{ui}) = 0$ genel varsayımı yapılırsa, ortalama veya beklenen cevaplar olan η_i 'nin k adet bağımsız değişken ile ilişkisi,

$$\eta_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

olur.

Önce Harrington (1965) tarafından tanımlan ve ardından Derringer ve Suich (1980) tarafından geliştirilen çekicilik (desirability) fonksiyonu, her bir tahminleşmiş cevap değişkeni \hat{y}_i 'yi, bir çekicilik değeri d_i 'ye transforme etmektedir. Burada çekicilik değeri $0 \leq d_i \leq 1$ aralığındadır. Söz konusu cevabın çekiciliği arttığında (cevap, arzu edilen değerine yaklaştığında), karşılık geldiği çekicilik değeri d_i de artmaktadır. Ardından bireysel çekicilik değerleri, geometrik ortalama kullanılarak birleştirilebilir (Derringer ve Suich, 1980: s.215):

$$D = (d_1 \times d_2 \times \dots \times d_r)^{1/r} \quad (4.42)$$

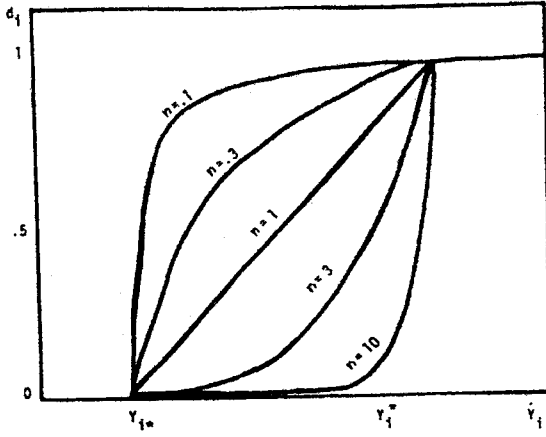
Burada tek bir D değeri, birleşik cevap seviyelerinin çekiciliğinin genel bir değerini vermektedir. D , $[0,1]$ aralığında bir değer alır ve karakteristikler daha arzu edilir seviyede olduklarında D 'nin değeri artar. $d_i = 0$ olduğunda (cevap değişkenlerinden birisi kabul edilemez seviyede olduğunda), $D = 0$ olur. Bu yüzden d_i 'lerin geometrik ortalamasının alınması tercih edilmektedir.

4.5.1 Tek Taraflı Transformasyonlar

\hat{y}_i 'nin d_i 'ye transformasyonu tek-taraflı ve çift-taraflı çekicilik transformasyonları olmak üzere iki ayrı şekilde gerçekleştirilebilir (Derringer ve Suich, 1980). Tek-taraflı durum için, \hat{y}_i arttığında d_i de artmaktadır ve \hat{y}_i maksimize edildiğinde $d_i = 1$ olmaktadır. (\hat{y}_i 'nin minimizasyonu $-\hat{y}_i$ 'nin maksimizasyonu ile denktir). Derringer ve Suich (1980) tek-taraflı durumlar için şu transformasyonu kullanmışlardır:

$$d_i = \begin{cases} 0 & \hat{y}_i \leq y_{i^*} \\ \left[\frac{\hat{y}_i - y_{i^*}}{y_i^* - y_{i^*}} \right]^n & y_{i^*} < \hat{y}_i < y_i^* \\ 1 & \hat{y}_i \geq y_i^* \end{cases} \quad (4.43)$$

Eşitlik (4.43) ile verilen d_i 'nin değişik n değerleri için grafiği Şekil 4.1 ile verilmiştir.



Şekil 4-1. Değişik n değerleri için (4.43) transformasyonu

y_{i^*} değeri, \hat{y}_i 'nin minimum kabul edilebilir değeridir. Uygulayıcı, $\hat{y}_i \leq y_{i^*}$ olduğunda, ürünün kabul edilemez olacağını dikkate alarak y_{i^*} 'in değerini belirler. $\hat{y}_i \leq y_{i^*}$ olduğunda $d_i = 0$ ve böylece $D = 0$ olmaktadır. Örneğin y_i , bir radyatör hortumunun gerilme kuvveti ise ve y_i 'nin $y_{i^*} = 1500$ psi altındaki bir değeri kabul edilemez bir değer ise, diğer cevap değişkenlerinin çekicilik değerleri ne kadar yüksek olursa olsun, ürün kabul edilemez olacaktır.

y_i^* değeri, \hat{y}_i 'nin en yüksek değerini vermektedir. Gerçekte, burada tek taraflı transformasyonu ele aldığımız için, \hat{y}_i 'nin en yüksek değeri yoktur. Bununla beraber, uygulamalara bakılacak olursa, \hat{y}_i için bir y_i^* değeri seçilebilir. Burada y_i^* değerinin aşılması uygulayıcılar açısından fazla bir anlam ifade etmeyebilir. Örneğin, gerilme kuvveti örneğinde, aşıldığı zaman hortum kalitesi üzerinde fazla bir etkisi olmayan bir y_i^* değeri tespit edilebilir. Böylece y_i^* aşıldığında çekicilik değeri 1 olarak kalır.

Transformasyonda kullanılan n değeri de yine uygulayıcı tarafından belirlenebilir. Şekil 4.1'e bakıldığında, \hat{y}_i 'nin arzu edildiği değere çok yakın olması isteniyorsa, n 'in büyük bir değerinin seçilmesi gerektiği görülmektedir. Diğer bir deyişle, y_{i^*} ürünün kabul edilebilir olması için yeterli olsa bile, \hat{y}_i 'nin y_{i^*} 'dan dikkate değer ölçüde büyük olması durumunda, ürünün çekicilik değeri büyük ölçüde artar. Yine radyatör hortumu örneğine dönersek, $y_{i^*} = 1500$ psi'nin üzerindeki gerilme kuvveti kabul edilebilir olsa bile kalite karakteristiği için karar verici konumunda bulunan yönetim 1500 psi'nin çok üzerindeki

değerleri arzu edebilir. Bu durumda n 'in oldukça yüksek bir değeri, örneğin $n = 10$ seçilebilir. Görüldüğü gibi, çekicilik derecesi d_i , \hat{y}_i 'nin artışına göre daha yavaş bir hızla artmaktadır. Bundan dolayı, d_i 'yi ve D 'yi maksimize etmek için, \hat{y}_i , y_{i^*} 'in çok üzerinde olmalıdır. Diğer taraftan, \hat{y}_i 'nin, y_{i^*} 'in çok üzerinde olması fazla bir anlam ifade etmiyorsa n 'in küçük bir değeri belirlenebilir. Örneğin $n = 0.1$, y_{i^*} 'in üzerindeki herhangi bir \hat{y}_i değerinin, y_{i^*} 'in üzerindeki diğer başka \hat{y}_i 'lerle hemen hemen aynı çekicilik derecesinde olduğu anlamına gelmektedir.

4.5.2 Çift Taraflı Transformasyonlar

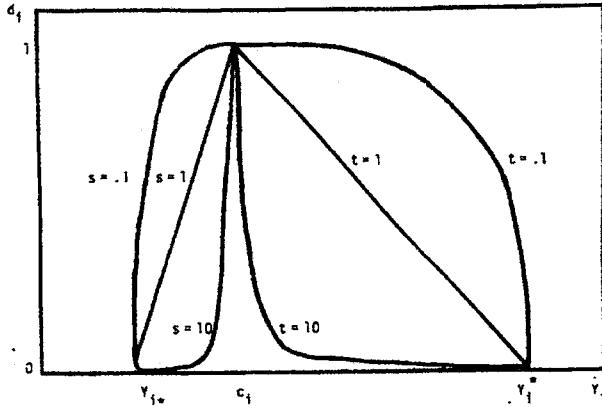
Çift taraflı transformasyonlar, cevap değişkeni y_i , hem bir minimum hem de bir maksimum kısıtına sahip olduğu durumda ortaya çıkar. Burada

$$d_i = \begin{cases} \left[\frac{\hat{y}_i - y_{i^*}}{c_i - y_{i^*}} \right]^s & y_{i^*} \leq \hat{y}_i \leq c_i \\ \left[\frac{\hat{y}_i - y_i^*}{c_i - y_i^*} \right]^t & c_i < \hat{y}_i \leq y_i^* \\ 0 & \hat{y}_i < y_{i^*} \text{ veya } \hat{y}_i > y_i^* \end{cases} \quad (4.44)$$

şeklindeki bir transformasyon ele alınır. Buradaki durumda y_{i^*} , \hat{y}_i 'nin minimum kabul edilebilir değeri ve y_i^* , y_i 'nin maksimum kabul edilebilir değeridir. Bu sınırların dışındaki \hat{y}_i değerleri ürünü kabul edilemez duruma getirmektedir. c_i için seçilen değer, \hat{y}_i için en çok arzu edilen değerdir ve y_{i^*} ile y_i^* arasındadır. s ve t değerleri, tek taraflı transformasyondaki n ile aynı rolü oynamaktadır.

Şekil 4.2'de t ve s 'nin bir kaç değişik değeri çizilmiştir. Örnek olarak c_i , y_{i^*} ile y_i^* arasındaki uzaklığın ilk % 25'lik kısmında seçilmiştir. Bu şekile göre, \hat{y}_i 'nin c_i 'ye çok yakın olması isteniyorsa, s ve t 'nin büyük değerleri seçilmelidir. Bu durumda çekicilik derecesi d_i , \hat{y}_i , c_i 'ye çok yakın olmadıkça, fazla büyük olmayacaktır. Diğer taraftan, \hat{y}_i 'nin y_{i^*} ve y_i^* arasındaki bütün değerleri hemen hemen aynı derecede kabul edilebilir ise, s ve t 'nin küçük değerleri seçilebilir. s ve t 'nin 1 civarındaki değerleri, yukarıda bahsedilen bu iki aşırı durum arasında bir uzlaşmayı temsil etmektedir. Ayrıca, \hat{y}_i 'nin

c_i 'ye doğru hızla artması arzu edildiği halde, \hat{y}_i 'nin c_i 'nin üzerinde ancak y_i^* 'in altındaki herhangi bir değeri kabul edilebilir ise, s 'nin büyük bir değeri, bunun yanında t 'nin küçük bir değeri seçilebilir.



Şekil 4-2. Değişik s ve t değerleri için (4.44) transformasyonu

Harrington (1965) tarafından önerilen orijinal transformasyon, tek taraflı durum için $d_i = \exp(-\exp(-y_i))$ ve çift yönlü durum için $d_i = \exp(-|y_i|^s)$ şeklindedir. Gatza ve McMillan (1972), Harrington'un kabul edilemez özellikler için d_i 'nin negatif değerler veren yaklaşımını, d_i için $d_i = \{\exp[-\exp(-y_i)] - \exp(-1)\} / [1 - \exp(-1)]$ kullanarak düzeltilmiştir. Bu kesimde bahsedilen transformasyonlar, yukarıda bahsedilenlerin genelleştirilmiş bir hali olarak görülebilir. Harrington'un ve Gatza ve McMillan'ın transformasyonlarına, eşitlik (4.46) ve (4.47)'deki n , s ve t parametrelerinin uygun seçimleri ile yaklaşılabılır (Derringer ve Suich, 1980: s.216).

4.6 GENELLEŞTİRİLMİŞ UZAKLIK YAKLAŞIMI İLE SÜREÇ OPTİMİZASYONU

Çekicilik fonksiyonu yaklaşımının temel özelliklerinden birisi, uygulayıcının, çekicilik derecesini (n , s ve t) belirlemedeki subjektifliktir. Uygun olmayan şekilde seçilen çekicilikler, doğru olmayan sonuçlar verebilirler. Ayrıca bu yaklaşım, cevapların varyans heterojenliklerini ve aralarında olabilecek korelasyonları hesaba katmamaktadır. Bundan dolayı, bu güçlükleri yenmek amacıyla Khuri ve Conlon (1981), çok cevaplı optimizasyon için başka bir prosedür vermiştir. Bu prosedürde, çok cevaplı bir sistemde

tüm cevap fonksiyonlarının aynı girdi değişkenlerine bağlı olduğu ve deney bölgesinde aynı derecedeki polinomiyal regresyon modelleri ile temsil edilebileceği varsayılmaktadır.

r , söz konusu cevapların sayısı olsun. Ardından yukarıda verilen varsayımlar altında, i 'inci cevap modeli şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_0 \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.45)$$

Burada \mathbf{X}_0 , $N \times p$ boyutlu rankı p olan bir matristir; $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ değerlerinin ortalaması sıfırdır ve eşitlik (4.2)'deki gibi bir varyans-kovaryans yapısına sahiptir. Varyans-kovaryans matrisinin ($\boldsymbol{\Sigma}$) sapmasız bir tahmini

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\mathbf{y}' [\mathbf{I}_N - \mathbf{X}_0 (\mathbf{X}_0' \mathbf{X}_0)^{-1} \mathbf{X}_0'] \mathbf{y}}{N - p} \quad (4.46)$$

şeklinde verilmiştir (Khuri ve Conlon, 1981: s. 384). Burada $\mathbf{y} = [y_1: y_2: \dots: y_r]$ şeklindedir ve r cevabın hiçbirinin birbiriyle doğrusal bağımlı olmadığı varsayılmıştır.

i 'inci cevap için kestirim eşitliği,

$$\hat{y}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{z}'(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\beta}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.47)$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)'$ ve $\mathbf{z}'(\mathbf{x})$, \mathbf{X}_0 matrisinin bir satırıdır. ($\mathbf{z}'(\mathbf{x})$, ilk eleman 1, kalan $p - 1$ elemanı x_1, x_2, \dots, x_k 'lerin kuvvetleri ve çarpaz - çarpımlarından oluşan bir satır vektörüdür). $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i = (\mathbf{X}_0' \mathbf{X}_0)^{-1} \mathbf{X}_0' \mathbf{y}_i$, ($i = 1, 2, \dots, r$) $\boldsymbol{\beta}_i$ 'nin en küçük kareler tahminleyicisidir. Ayrıca,

$$\text{Var}[\hat{y}_i(\mathbf{x})] = \mathbf{z}'(\mathbf{x}) (\mathbf{X}_0' \mathbf{X}_0)^{-1} \mathbf{z}(\mathbf{x}) \sigma_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\text{Cov}[\hat{y}_i(\mathbf{x}), \hat{y}_j(\mathbf{x})] = \mathbf{z}'(\mathbf{x}) (\mathbf{X}_0' \mathbf{X}_0)^{-1} \mathbf{z}(\mathbf{x}) \sigma_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, r, i \neq j$$

olmaktadır. Burada σ_{ij} , varyans-kovaryans matrisi $\boldsymbol{\Sigma}$ 'nin (i, j) 'inci elemanıdır. Buradan,

$$\text{Var}[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})] = \mathbf{z}'(\mathbf{x}) (\mathbf{X}_0' \mathbf{X}_0)^{-1} \mathbf{z}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Sigma} \quad (4.48)$$

yazılabilir. Burada $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = (\hat{y}_1(\mathbf{x}), \hat{y}_2(\mathbf{x}), \dots, \hat{y}_r(\mathbf{x}))'$, \mathbf{x} noktasında kestirilmiş cevaplar vektörüdür. $\text{Var}[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})]$ 'in sapmasız bir tahminleyicisi,

$$\text{Vâr}[\hat{y}(\mathbf{x})] = \mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}'_0\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})\hat{\Sigma} \quad (4.49)$$

şeklindedir. Burada $\hat{\Sigma}$, eşitlik (4.46)'da verildiği gibidir.

ϕ_i , deney bölgesinde bireysel olarak optimize edilen $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ 'in optimum değeri olsun. Ayrıca $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r)'$ olsun. Eğer tüm tahminlenmiş cevaplar bireysel optimumlarına işletim koşullarının aynı seti \mathbf{x} 'de ulaşıyorsa *ideal* optimum elde edilmiş demektir. Bu durumda çok cevaplı optimizasyon problemi kolaylıkla çözülür ve başka bir çalışmaya gerek yoktur. Ancak böyle bir ideal optimum çok seyrek olarak gerçekleşir. Daha genel durumlarda, cevapların tamamı için yaklaşık uygun olan, girdi değişkenlerindeki uzlaşmış koşulların bulunması ele alınır. *Uygun* koşullar ile, çok cevaplı fonksiyonun ideal optimumdan mümkün olduğu kadar az sapma gösterdiği koşullar kastedilmektedir. Böyle bir sapma, $\hat{y}(\mathbf{x})$ 'in (r -boyutlu Öklid uzayında bir nokta) ϕ 'den (bireysel optimumun vektörü) uzaklığının bir ölçüsü olan bir uzaklık fonksiyonunun ortalaması ile formüle edilebilir. Bu uzaklık fonksiyonu $\rho[\hat{y}(\mathbf{x}), \phi]$ şeklinde gösterilir. Ardından, çok cevaplı optimizasyon, deney bölgesinde bu uzaklık fonksiyonunu minimize eden \mathbf{x} 'deki koşulların bulunmasını içeren bir yapıya dönüşmektedir.

4.6.1 Uzaklık Ölçüsünün Tanımlanması

Uzaklık fonksiyonu ρ birkaç değişik şekilde seçilebilir. Olası bir seçim ağırlıklı uzaklık olabilir (Khuri ve Conlon, 1981: s.366):

$$\rho[\hat{y}(\mathbf{x}), \phi] = \left[(\hat{y}(\mathbf{x}) - \phi)' \{ \text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})] \}^{-1} (\hat{y}(\mathbf{x}) - \phi) \right]^{1/2} \quad (4.50)$$

$\hat{y}(\mathbf{x})$ 'in varyans-kovaryans matrisinin eşitlik (4.49)'da verilen tahminini kullanarak

$$\rho_1[\hat{y}(\mathbf{x}), \phi] = \left[\frac{(\hat{y}(\mathbf{x}) - \phi)' \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{y}(\mathbf{x}) - \phi)}{\mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}'_0\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})} \right]^{1/2} \quad (4.51)$$

şeklindeki uzaklık fonksiyonu elde edilir. Eğer varyans-kovaryans matrisi köşegen ise (bu sonuç biliniyor veya istatistiksel bir teste dayanarak ulaşılmış olabilir) uzaklık fonksiyonu ρ_1 şu şekilde yazılabilir:

$$\rho_2[\hat{y}(\mathbf{x}), \phi] = \left[\sum_{i=1}^r \frac{(\hat{y}_i(\mathbf{x}) - \phi_i)^2}{\{\hat{\sigma}_i \mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}_0' \mathbf{X}_0)^{-1} \mathbf{z}(\mathbf{x})\}} \right]^{1/2} \quad (4.52)$$

Burada $\hat{\sigma}_i$, $\hat{\Sigma}$ 'nin i 'inci köşegen elemanıdır ($i = 1, 2, \dots, r$). Bireysel optimumdan (maksimumdan) görelî değişimleri ele almak isteyenler için başka bir uzaklık fonksiyonu, Khuri ve Conlon (1981) tarafından

$$\rho_3[\hat{y}(\mathbf{x}), \phi] = \left[\sum_{i=1}^r \frac{(\hat{y}_i(\mathbf{x}) - \phi_i)^2}{\phi_i^2} \right]^{1/2} \quad (4.53)$$

şeklinde verilmiştir.

Yukarıda bahsedilen uzaklık fonksiyonlarının hepsi de Khuri ve Conlon (1981) tarafından geliştirilmiş uzaklık olarak adlandırılmaktadır. Eğer \mathbf{x}_0 , $\rho[\hat{y}(\mathbf{x}), \phi]$ 'yi deney bölgesinde mutlak minimuma ulaştıran nokta ise ve m_0 bu minimumun değeri ise, \mathbf{x}_0 noktasındaki deneysel koşullar, r cevap fonksiyonunun herbiri için yaklaşık optimum olarak tanımlanabilir. m_0 'ın değeri küçüldükçe, bu koşullar *ideal* optimuma yaklaşır.

4.6.2 ϕ 'nin Değişkenliğini Dikkate Alan Bir Uzaklık Ölçüsü

Genelleştirilmiş uzaklık $\rho[\hat{y}(\mathbf{x}), \phi]$ 'in geliştirilmesinde ϕ 'nin değerlerinin şans değişkenleri olup olmadığı hesaba katılmamaktadır. ϕ 'deki herhangi bir değişkenlik, çok cevaplı fonksiyonun optimumunun bulunmasına etki edebilir. Bu yüzden ϕ 'nin değişkenliği de ele alınmalıdır (Khuri ve Conlon, 1981: s. 366). Bu da şu şekilde yapılabilir: ζ_i , i 'inci cevabın ortalamasının optimum değeri olsun. (deney bölgesinde bireysel olarak optimize edilerek bulunur) Ayrıca $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r)'$ olsun. Eğer D_ζ , ζ için bir güven bölgesi ise, $\zeta \in D_\zeta$ olduğunda

$$\rho[\hat{y}(\mathbf{x}), \zeta] \leq \max_{\eta \in D_\zeta} \rho[\hat{y}(\mathbf{x}), \eta] \quad (4.54)$$

olur. Eşitsizlik (4.54)'ün sağ tarafı, $\rho[\hat{y}(\mathbf{x}), \zeta]$ 'in bir aşırı tahmini (overestimate) olarak görülmektedir ve $\rho[\hat{y}(\mathbf{x}), \phi]$ 'dan ziyade minimize edilmesi gereken fonksiyondur (Khuri ve Conlon, 1981: s. 366). ζ , bilinmediği için, eşitsizlik (4.54)'nin sağ tarafı deney

bölgesinde minimize edilir. Bu fonksiyon, ϕ 'nin şansa bağlı olmasını hesaba katan bir genelleştirilmiş uzaklık ölçüsü olarak ele alınır:

$$d_0 = \min_{\mathbf{x} \in R} \left\{ \max_{\eta \in D_\zeta} \rho[\hat{y}(\mathbf{x}), \eta] \right\} \quad (4.55)$$

Böylece R bölgesinde, $\hat{y}(\mathbf{x})$ ve ζ arasındaki uzaklığın minimumu, d_0 'dan küçüktür veya eşittir.

Khuri ve Conlon (1981: Ek C),

$$\gamma_{1i} \leq \zeta_i \leq \gamma_{2i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.56)$$

eşitsizliklerinin, yaklaşık olarak en azından $1 - \alpha^*$ güven katsayısı ile eşanlı olarak sağlandığını göstermiştir. Burada

$$\begin{aligned} \gamma_{1i} &= \phi_i - g_i(\mathbf{X}_0, \hat{\xi}_i) \sqrt{KO_i} t_{\alpha/2, N-p} \\ \gamma_{2i} &= \phi_i + g_i(\mathbf{X}_0, \hat{\xi}_i) \sqrt{KO_i} t_{\alpha/2, N-p} \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.57)$$

ve $\alpha^* = 1 - (1 - \alpha)^r$ olmaktadır. Eşitlik (4.57)'deki KO_i , i 'inci cevap için verilen hata kareler ortalamasıdır:

$$KO_i = \frac{\mathbf{y}'_i [\mathbf{I}_N - \mathbf{X}_0 (\mathbf{X}'_0 \mathbf{X}_0)^{-1} \mathbf{X}'_0] \mathbf{y}_i}{N - p}$$

$\hat{\xi}_i, \hat{y}_i(\mathbf{x})$ 'in bireysel optimumu ϕ_i 'ye ulaştığı noktadır ve

$$g_i(\mathbf{X}_0, \hat{\xi}_i) = \left[\mathbf{z}'(\hat{\xi}_i) (\mathbf{X}'_0 \mathbf{X}_0)^{-1} \mathbf{z}(\hat{\xi}_i) \right]^{1/2} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

olmaktadır. (4.56)'daki eşitsizlikler, en azından $1 - \alpha^*$ 'lık yaklaşık güven katsayısı ile, ζ için bir dikdörtgen güven bölgesi bulmaktadır.

Özet olarak, r cevaptan oluşan çok cevaplı fonksiyonun optimizasyonu için izlenmesi gereken adımlar şunlardır (Khuri ve Conlon, 1981: s. 367):

1. Eşitlik (4.51), (4.52) veya (4.53)'teki uzaklık ölçülerinden (ρ) birisi seçilir.
2. Eşitlik (4.47)'deki kestirilmiş eşitlikler, çok cevaplı veriler ve en küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilir.

3. Kestirilmiş cevaplar, tahminlenmiş bireysel optimum vektörü ϕ 'yi elde etmek için, deney bölgesi R 'de bireysel olarak optimize edilir. Örneğin, kestirim eşitlikleri ikinci-derece modeller ise, sırt analizi yöntemi, ϕ 'nin elemanlarının bulunması için kullanılabilir. Daha yüksek derecedeki polinomial modeller için, kontrollü şansa bağlı arama optimizasyon prosedürü (Price, 1977) kullanılabilir.
4. (4.56) eşitsizlikleri ve (4.57) eşitsizlikleri kullanılarak bir dikdörtgen güven bölgesi D_ζ kurulur.
5. Adım 1'de seçilen uzaklık fonksiyonu $\rho[\hat{y}(\mathbf{x}), \eta]$, $\eta \in D_\zeta$ kısıtı altında R 'deki sabit bir \mathbf{x} için maksimize edilir.
6. Adım 5'te elde edilen maksimum (yalnızca \mathbf{x} 'in bir fonksiyonudur) R bölgesinde minimize edilir.

ϕ 'nin elemanları ile ortaya çıkan varyasyon ihmal edilirse, yaklaşık bir çok cevaplı optimum, adım 4-6'nın uygulanması yerine, adım 1'de seçilen uzaklık ölçüsünün R 'de doğrudan minimizasyonu ile elde edilebilir.

4.7 GÖRELİ UZAKLIK FONKSİYONU İLE SÜREÇ OPTİMİZASYONU

Khuri ve Conlon (1981) tarafından önerilen uzaklık ölçülerinden birisi, eşitlik (4.53) ile verilen, cevap değerlerinin ideal değerlerinden görelî uzaklıklarını ölçen fonksiyondur. Ancak bu uzaklık fonksiyonu, kolaylıkla farkedilebileceği gibi tüm cevapların maksimize edilmesi istendiğinde kullanılacak bir yapıdadır. Bu uzaklık fonksiyonu

$$\rho_3[\hat{y}(\mathbf{x}), \phi] = \left[\frac{(\hat{y}_1(\mathbf{x}) - \phi_1)^2}{\phi_1^2} + \frac{(\hat{y}_2(\mathbf{x}) - \phi_2)^2}{\phi_2^2} + \dots + \frac{(\hat{y}_r(\mathbf{x}) - \phi_r)^2}{\phi_r^2} \right]^{1/2}, \quad (4.58)$$

şeklinde daha açık bir şekilde yazılabilir. Burada her bir $(\hat{y}_i(\mathbf{x}) - \phi_i)^2 / \phi_i^2$ ($i = 1, 2, \dots, r$) değeri, $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ ideal değer ϕ_i 'ye ulaştığında 0, $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ sifira ulaştığında 1 değerini alır.

Çok cevaplı süreçlerde, eş anlı olarak, bazı cevapların maksimizasyonu, bazılarının minimizasyonu ve bazılarının da bir hedef değer T 'ye yaklaşması arzu edildiğinde, bu tip

süreçlerin optimizasyonu için ideal değerlerden görelî uzaklıkların dikkate alındığı bir uzaklık fonksiyonu geliştirilebilir. Bu uzaklık fonksiyonu

$$H = \left[\sum_{i=1}^r h_i \right]^{1,2} \quad (4.59)$$

şeklinde tanımlansın. Burada herhangi bir i 'inci cevap maksimize edilmek isteniyorsa

$$h_i = \frac{(\hat{y}_i(\mathbf{x}) - A_i)^2}{(A_i - B_i)^2} \quad (4.60)$$

yazılabilir. Burada A_i ve B_i , $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ 'in deney bölgesinde kanonik analiz, sırt analizi veya bir doğrusal olmayan programlama tekniği ile elde edilen *maksimum* ve *minimum* değerleridir. A_i değeri $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ için *ideal* değer olup eşitlik (4.53)'teki ϕ_i 'ye eşittir. $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ maksimum (ideal) değeri A_i 'ye ulaştığında $h_i = 0$ değerini alır. $\hat{y}_i(\mathbf{x})$, *en arzu edilmeyen* değer B_i 'ye (minimuma) ulaştığında $h_i = 1$ değerini alır.

Herhangi bir i 'inci cevap minimize edilmek isteniyorsa,

$$h_i = \frac{(\hat{y}_i(\mathbf{x}) - B_i)^2}{(A_i - B_i)^2} \quad (4.61)$$

yazılabilir. Burada $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ 'in *minimum* değeri B_i , aynı zamanda *ideal* değerdir ve bu değere ulaşıldığında $h_i = 0$ olur. Söz konusu cevap, *en arzu edilmeyen* değer A_i 'ye (*maksimuma*) ulaştığında $h_i = 1$ değerini alır.

Cevap değerlerinden herhangi birinin bir hedef değer T 'ye yakın olması istendiğinde

$$h_i = \frac{(\hat{y}_i(\mathbf{x}) - T)^2}{d^2} \quad (4.62)$$

yazılabilir. Burada,

$$d = \max\{A_i - T, T - B_i\} \quad (4.63)$$

şeklinindedir. Diğer bir deyişle, $A_i - T$ ve $T - B_i$ ifadelerinden büyük olanı, d değeri olarak seçilir. Eşitlik (4.62)'de $\hat{y}_i(\mathbf{x})$, hedef değer T 'ye ulaştığında $h_i = 0$ değerini alır. Burada h_i 'nin alabileceği en büyük değer 1'dir.

Görelilik uzaklık yaklaşımının canlandırılması için $r = 3$ cevaplı bir süreç ele alınsın. Bu cevaplardan y_1 'in maksimizasyonu, y_2 'nin minimizasyonu ve y_3 'ün bir hedef değer T 'ye yaklaştırılması, küresel deney bölgesi R 'de istensin. Bu durumda optimizasyon problemi,

$$H = \left[\frac{(\hat{y}_1(\mathbf{x}) - A_1)^2}{(A_1 - B_1)^2} + \frac{(\hat{y}_2(\mathbf{x}) - B_2)^2}{(A_2 - B_2)^2} + \frac{(\hat{y}_3(\mathbf{x}) - T)^2}{d^2} \right]^{1/2} \quad (4.64)$$

olmak üzere,

Min H

$$\text{Kısıt: } \mathbf{x}'\mathbf{x} \leq \rho^2 \quad (4.65)$$

şeklinde yazılabilir. Bu tip bir süreç optimizasyonu problemi doğrusal olmayan programlama teknikleri yardımı ile (örneğin GİG algoritması kullanılarak) çözülebilir.

Beşinci Bölüm

CEVAP YÜZEYİ YÖNTEMLERİNİN TAGUCHI'NİN PARAMETRE TASARIMINA ALTERNATİF OLARAK KULLANILMASI

1980'lerde, Genichi Taguchi (Taguchi ve Wu (1980), Taguchi vd. (1989)) Birleşik Devletler'de kalite iyileştirme üzerine yeni fikirler ortaya atmıştır. Taguchi ürün ve süreçlerdeki değişkenliğin indirgenmesi için parametre tasarımı yaklaşımını önermiştir. Taguchi'nin yöntemleri ve felsefesi, kalite mühendisleri ve istatistikçiler arasında ilgi toplamıştır ve bu yöntemler AT&T Bell Laboratories, Ford Motor Company, Xerox ve Amerika'da daha bir çok dev endüstri kuruluşlarında yaygın bir şekilde uygulanmışlardır. Bu yöntemlere duyulan ilgi, istatistiksel araştırmacıların parametre tasarımı ile bilinen istatistik tekniklerin bütünleştirilmesi üzerine çalışmalarına yol açmıştır. Sonuç olarak cevap yüzeyi yaklaşımı, analizler için daha güçlü bir istatistiksel yaklaşım sağlarken, Taguchi'nin prensiplerinin de uyarlanmasına imkan veren araçlar olarak önerilmektedir (Myers ve Montgomery, 1995: s. 462).

5.1 KALİTE VE KAYIP FONKSİYONU

Taguchi kaliteyi "ürünün müşteriye gönderilmesinden itibaren topluma verilen kayıp" olarak tanımlanmaktadır. Bu kayıplara örnekler şunları içermektedir: Kullanım için müşteri ihtiyaçlarına uyumda karşılaşılan eksikler, ideal performans ile ilgili eksikler ve üründen kaynaklanan zararlı etkiler. Kackar (1986: s.4)'a göre ürünün kötü performansından kaynaklanan tüm toplumsal kayıplar ürünün kalitesine atfedilmelidir. Bundan başka Kackar (1986: s. 4)'a göre Taguchi'nin bu tanımı eksiktir ve ürünün imalatı esnasında da topluma malolan kayıplar sözkonusudur. Kullanışsız ürünlerin üretiminde kullanılan hammaddeler, enerji ve işgücü toplumsal kayıplara örnek olarak verilebilir. Ayrıca imalat sonrasında ortaya çıkan zararlı kimyasallar toplumsal kayıba

neden olabilir. Kackar, Taguchi'nin tanımının imalat sırasında ortaya çıkan toplumsal kayıpları da içerecek şekilde genişletilmesi gerektiğini iddia etmektedir.

Taguchi, ürünün performansındaki değişkenlik sebebiyle ortaya çıkan kaybın, yaklaşık olarak kalite karakteristiğinin hedef değerden sapmasının karesi ile doğru orantılı olduğunu belirtmiştir. Kalite karakteristiği hedef değerinden uzaklaştıkça topluma malolan kayıp artmaktadır. y , sürekli bir ölçekte ölçülmüş kalite karakteristiği ve y 'nin hedef değeri T olsun. L , y 'nin T 'den sapmasından dolayı, ürünün yaşam süresi esnasında herhangi bir zamanda herhangi bir müşterinin parasal açıdan uğradığı kaybı göstermektedir. Genellikle y 'nin hedef değer T 'den sapması, müşteri kaybı L 'nin daha büyük olmasına sebep olur. Bununla beraber, genellikle L 'nin gerçek formunun belirlenmesi zordur. Genellikle, L 'ye yapılan kuadratik bir yaklaşım, y 'nin T 'den sapmasından kaynaklanan ekonomik kaybı yeterince temsil etmektedir (Kackar, 1986: s.7). En basit kuadratik kayıp fonksiyonu

$$L = k(y - T)^2 \quad (5.1)$$

şekindedir. Burada k bir sabittir ve y 'nin özel bir değeri için L değeri bilindiğinde belirlenebilir.

Ürün performans değişkenliği sebebiyle müşterilerin ortalama kaybı, karesel kaybın *istatistiksel ortalamasının (beklenen değerinin)* alınmasıyla elde edilebilir:

$$E(L) = kE[(y - T)^2] \quad (5.2)$$

Ürün performans değişkenliği sebebiyle ortaya çıkan ortalama kayıp, y 'nin hedef değeri T etrafındaki ortalama karesel hatası ile doğru orantılıdır.

5.2 PARAMETRE TASARIMININ TANIMI

Taguchi'ye göre ürün veya imalat süreci tasarımının üç aşaması bulunmaktadır (Kackar, 1986: ss. 12, 13):

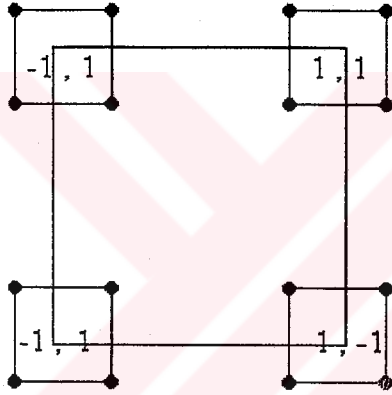
1. *Sistem Tasarımı*. Bilimsel ve mühendislik bilgilerinin bir temel prototip tasarımın üretilmesi amacı ile uygulanması sürecidir. Sistem tasarımı, hem müşteri ihtiyaçlarının hem de imalat koşullarının iyi anlaşılmasını gerektirmektedir.

2. *Parametre Tasarımı*. Mühendislik tasarımlarının değişkenlik kaynaklarına karşı duyarlılığını indirgeyecek ürün veya süreç parametrelerinin uygun seviyelerinin belirlenmesi sürecidir.
3. *Tolerans Tasarımı*. Parametre tasarımı ile tanımlanan seviyeler etrafındaki toleransların bulunması sürecidir. Dar toleranslar imalat maliyetlerini, geniş toleranslar ise ürünün performans değişkenliğini artırır. Tolerans tasarımı müşterinin performans değişkenliği nedeniyle uğradığı kayıp ile imalat maliyetlerindeki artış arasında bir uzlaşmayı içermektedir.

Parametre tasarımı veya kurt (robust) parametre tasarımı esas olarak, bir ürünün imalatı süresince kontrol edilebilir faktörlerin (Taguchi'nin terminolojisine göre parametrelerin) uygun seçimi üzerinde odaklanmaktadır. Faktör seviyelerinin seçimi prensibi ise büyük ölçüde süreç cevabı için seçilmiş bir hedef değer etrafındaki değişkenlik üzerine odaklanmaktadır. Bu kontrol edilebilir değişkenler kontrol faktörleri olarak adlandırılmaktadır. Hedef değer etrafındaki değişkenliğin büyüklüğünün, gürültü faktörleri veya gürültü değişkenleri olarak adlandırılan ikinci bir faktörler grubunun varlığından kaynaklandığı varsayılmaktadır. Gerçekte bu durum, kontrol yetersizliğinden dolayı süreç cevabına değişkenlik olarak yansımaktadır. Sonuç olarak, kurt parametre tasarımı terimi, gürültü değişkenlerindeki kaçınılmaz değişmelere karşı duyarsız olmasını sağlayacak bir sürecin tasarlanmasını ifade etmektedir. Taguchi'nin süreç optimizasyonu ile Taguchi öncesinde kullanılan yaklaşım arasındaki en önemli fark, Taguchi'nin süreç değişkenliğinin indirgenmesi ve süreç değişkenliğine neden olan faktörlerin deney tasarımı içerisine dahil edilmesinin gerekliliği üzerinde yoğunlaşmasıdır. Gürültü faktörleri genellikle çevre koşullarının (nem, hammadde özellikleri, ürünün eskimesi vb.) fonksiyonudur. Bazı uygulamalarda bu faktörler ürünün kullanım şekli ile ilgili olabilir. Gürültü değişkenleri genellikle araştırma ve geliştirme seviyesinde kontrol edilebilmektedir; ancak üretim esnasında kontrol edilememektedir.

5.3 ÇAPRAZLANMIŞ DİZİN TASARIMLARI VE SİNYAL-GÜRÜLTÜ ORANLARI

Taguchi'nin kunt parametre tasarımı yöntemleri, kontrol faktörlerini içeren bir ortogonal dizinin, gürültü faktörlerini içeren başka bir ortogonal dizinle çaprazlaştırıldığı ortogonal tasarımların kullanılması etrafında dönmektedir. Taguchi'nin ortogonal dizinleri yüksek kesirli faktöryel tasarımlardır. Örneğin $2^2 \times 2^2$ 'de, kontrol faktörleri için 2^2 içsel dizin, gürültü faktörleri için 2^2 dışsal dizin olarak adlandırılır. Sonuçta elde edilen 16 deney tasarım noktalı tasarım, çaprazlanmış dizin olarak adlandırılır. Bu dizin Şekil 5.1'de gösterildiği gibidir.



Şekil 5-1. $2^2 \times 2^2$ çaprazlanmış dizin

İçsel dizinin köşeleri kontrol faktörleri için $(-1, -1)$, $(-1, +1)$, $(+1, -1)$ ve $(+1, +1)$ noktalarını temsil etmektedir. Dışsal dizindeki noktalar (büyük noktalar) gözlemlerin yerleşimini temsil etmektedir. Şekil 5.2 başka bir çaprazlanmış dizini göstermektedir ve toplam 32 gözlem bulunmaktadır. Buradaki içsel dizin 2^4 'ün yarı tekrarıdır ($1/2$ 'sidir) ve bu tasarım 2^3 'ün yarı tekrarı olan bir dışsal dizin ile çaprazlanmıştır.

Taguchi her bir dışsal dizin noktasındaki gözlemleri özetleyen özet istatistikler önermiştir. Bu özet istatistikler sinyal-gürültü (SN) oranları olarak adlandırılmaktadır. Bir çok SN oranı geliştirilmiş olmasına rağmen Taguchi tarafından önerilen dört SN oranı en yaygın olanlarıdır. Kullanılacak SN oranının seçimi deneyin amaçlarına bağlıdır. Bu amaçlar şunlardır (Myers ve Montgomery, 1995: ss. 466-468):

1. Daha küçük daha iyidir: Cevabın minimize edilmesine çalışılmaktadır.
2. Daha büyük daha iyidir: Cevabın maksimize edilmesine çalışılmaktadır.

3. Hedef değeri en iyidir. Özel bir hedef değere ulaşılmaya çalışılmaktadır.

Deneme	x_1	x_2	x_3	x_4
1	-	-	-	-
2	+	+	-	-
3	+	-	+	-
4	+	-	-	+
5	-	+	+	-
6	-	+	-	+
7	-	-	+	+
8	+	+	+	+

z_1	z_2	z_3
-	-	-
+	+	-
+	-	+
-	+	+
⋮		
-	-	-
+	+	-
+	-	+
-	+	+

Şekil 5-2. Başka bir çaprazlanmış dizin

1. **Daha Küçük Daha İyidir.** Taguchi cevap için hedef değeri sıfır olduğu durumları daha küçük daha iyidir durumu olarak görmektedir. Böylece kuadratik kayıp fonksiyonu $E_z(y - 0)^2$ 'den aşağıdaki performans kriteri elde edilir:

$$SN_s = -10 \log \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i^2}{n} \right] \quad (5.3)$$

Bu oran, beklenen karesel kayıp $E_z(y^2)$ 'yi minimize edecek kontrol faktörleri seviyesi x 'i bulma ihtiyacından gelmektedir. Burada E_z gürültü faktörlerinin dağılışı boyunca beklenen değere karşılık gelmektedir. SN oranı ise her bir içsel dizin tasarım noktası için hesaplanmış olacaktır. $-10 \log$ transformasyonu kullanıldığı için, SN oranının maksimizasyonuna çalışılmaktadır.

2. **Daha Büyük Daha İyidir.** Burada eşitlik (5.3)'te y_i yerine $1 / y_i$ konularak, daha küçük daha iyidir durumunda olduğu gibi bir yol izlenebilir. Böylece karesel hata kriteri $E_z(1 / y)^2$ 'den hareketle bir SN oranı kullanılabilir:

$$SN_l = -10 \log \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{y_i^2} \right] / n \quad (5.4)$$

Burada daha küçük daha iyidir durumunda olduğu gibi, SN oranını maksimize edecek kontrol faktörleri değerleri aranmaktadır.

3. **Hedef Değer En İyidir.** Burada cevap için hedef bir değeri $y = T$ sağlamak amacıyla uygun x değerlerinin bulunması istenmektedir. Hedef değer her iki yönündeki sapmalar da arzu edilmemektedir. Buradaki durumda iki ayrı SN oranı ele alınmaktadır. Uygun SN oranı ise sistemin yapısına bağlı olarak seçilmektedir. Cevabın ortalaması ve varyansı birbirinden bağımsız olarak değişebiliyorsa, Taguchi bir ya da daha fazla sayıda ayar (tuning) veya düzeltme (adjustment) faktörünün sapmayı elimine etmek için kullanılmasını önermiştir. Buradaki sapmayı elimine etmek, $E_z(y) = T$ 'yi sağlayacak bir düzeltmeyi sağlamak demektir. Ayar faktörleri ise yalnızca ortalamayı değiştiren, ancak bu esnada varyans üzerinde değişikliğe yol açmayan faktörlerdir. Sonuç olarak buradaki analiz iki aşamalı bir süreçtir: $y = T$ 'yi sağlayan ayar faktörlerinin seçimi ve SN oranını maksimize eden diğer kontrol faktörlerinin seviyesinin seçimi. Bunun başlanabileceğini varsayarak, karesel hata kayıp fonksiyonu $E_z(y - T)^2$, $\text{Var}(y)$ 'ye indirgenmiş olur. Taguchi'nin kullandığı SN oranı aşağıdaki gibidir:

$$\text{SN}_{T1} = -10 \log s^2 \quad (5.5)$$

Burada $s^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 / (n - 1)$ 'dir. Diğer bir deyişle dışsal dizin tasarım noktaları üzerinden hesaplanan örnek varyansdır. Burada x değerleri SN oranını maksimize edecek şekilde seçilir.

Cevap standart sapmasının ortalama ile ilişkili olduğu durumlar için bir SN oranı Taguchi tarafından önerilmiştir. Bu oran ilişkinin doğrusal olduğu durumlarda kullanılmaktadır. Buradaki durumda sapmayı elimine eden, ancak göreceli olarak değişkenlik katsayısı σ_y / μ_y 'yi etkilemeyen düzeltme veya ayar faktörleri aranır. Sonuç olarak, SN oranı örnek değişkenlik katsayısı s/\bar{y} 'yi içermektedir. Bu durum için Taguchi'nin SN oranı

$$\text{SN}_{T2} = 10 \log \left(\frac{\bar{y}^2}{s^2} \right) \quad (5.6)$$

şeklinde verilmiştir. Burada yine iki - adım prosedürü uygulanır. $y = T$ yi sağlayan ayar faktörleri seçilir. Bu ayar faktörleri ortalama cevap üzerinde etkili ancak SN oranı üzerinde az etkili olan veya etkisiz olan faktörlerdir.

Taguchi'nin kurt parametre tasarımı yaklaşımında SN oranlarının kullanılmasındaki maksat, süreç ortalaması ve varyansını dikkate alan kullanımı kolay bir performans kriteri sağlamasıdır. SN oranlarının eleştirildiği bir çok çalışma da mevcuttur. Örneğin bkz. Box (1988) ve Welch vd. (1990). Editörlüğü Nair (1992) tarafından yapılan bir panelde, SN oranlarının kullanılması, birkaç araştırmacının bakış açısıyla dile getirilmiştir. Amaç, bu oranları, cevap ortalamasını ve varyansını hesaba katan performans karakteristikleri olarak kullanmak olduğunda, bir çok yazar sürecin daha iyi anlaşılmasını sağlayacak bir yol olarak süreç ortalaması ve varyansı için ayrı modellerin kullanılmasını önermişlerdir.

SN oranlarının kullanılması uygulamacı bilim adamlarına, süreç ortalaması ve süreç varyansının rolleri hakkında değerli bilgi bulma garantisi vermemektedir. Kontrol faktörlerini, ortalamayı etkileyenler (yer etkileri) ve varyansı etkileyenler (yayılma etkileri) olarak ayırmak, süreci anlamada oldukça önemlidirler. Örneğin, eşitlik (5.6)'daki SN oranı

$$SN_{T2} = 10\log \bar{y}^2 + 10\log s^2$$

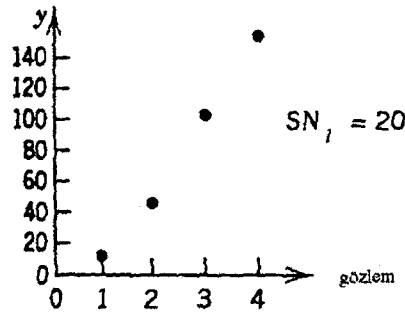
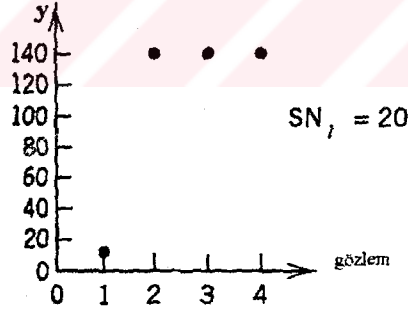
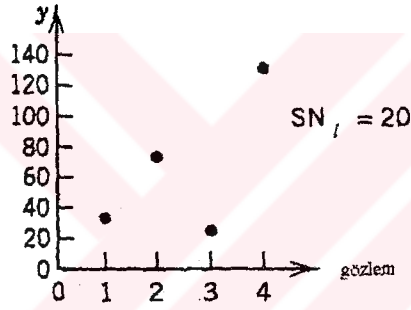
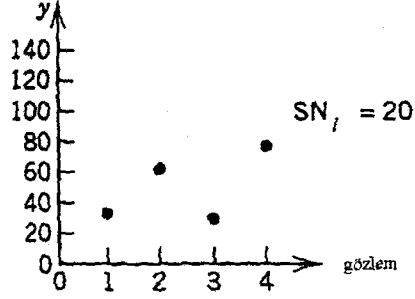
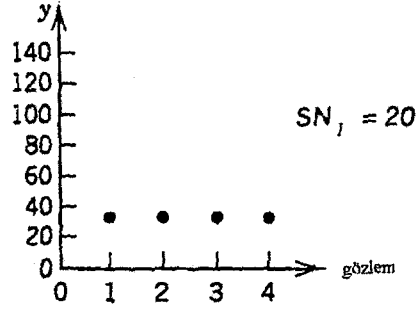
şeklinde de yazılabilir. Bu SN oranının maksimizasyonu hangi kontrol faktörünün yer etkisi hangisinin yayılma etkisi olduğunun ayırt edilmesine imkan vermemektedir. Başka bir örnek olarak eşitlik (5.3)'deki SN oranı ele alınsın:

$$SN_s = -10\log\left(\sum y_i^2 / n\right)$$

$\sum y_i^2 / n$, hedef değer sıfır etrafındaki değişkenliği ölçtüğü için, bu SN oranının kullanılması yer etkilerinin yayılma etkilerinden ayrılmasına imkan vermeyecektir. Gerçekten,

$$\frac{\sum y_i^2}{n} = \bar{y}^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)s^2$$

olduğu için, bu SN oranındaki ortalama ve varyansın etkileri karışmaktadır. Şekil 5.3 ele alındığında, buradaki şekiller aynı SN_T 'yi türeten beş değişik veri setini göstermektedir



Şekil 5-3. Aynı SN_1 'yi veren beş veri seti.
Kaynak: G. E. P. Box (1988).

($SN_i = 20$). Bu beş değişik durum için ortalama ve varyans özellikleri farklılıklar göstermektedir.

5.4 TAGUCHI ANALİZİ

Kalite iyileştirmede Taguchi yaklaşımı, varyans indirgemesi üzerinde yoğunlaşmaktadır. Taguchi'nin varyans indirgemesi yaklaşımı istatistik ve mühendisliğe çok önemli bir katkı olarak kabul görmektedir. Bir kaç yazar Taguchi'den önce gürültü faktörlerinin kullanılmasını önermekle birlikte, Taguchi'nin bu önerileri varyans indirgemesinde kullanımı ile ilgili fikirleri orijinaldir ve çok büyük etkiye sahiptir (Myers ve Montgomery, 1995: s. 471).

Taguchi analizinin arkasındaki mantığı anlamak için, parametre tasarımının maksadının, bir kurt ürün veya süreci ortaya çıkaracak kontrol faktörleri koşullarının bulunması olduğu hatırlanmalıdır. Kontrol faktörleri sayısal veya niteliksel olabilir. Sonuç olarak, Taguchi analizi, performans kriterinin SN oranı olduğu süreç optimizasyonuna indirgenmiştir.

Analiz yöntemi basit ve çaprazlanmış dizin kavramıyla bağlantılıdır. Burada SN oranı maksimize edilmeye çalışılır. Taguchi nadiren kontrol faktörleri arasındaki etkileşimleri ele almaktadır. Taguchi tarafından ortaya konan tasarımların bir çoğu bu etkileşimlerin tahminlenmesine imkan vermemektedir. Standart varyans analizi teknikleri SN oranını etkileyen kontrol faktörlerinin tanımlanması için kullanılır. Ayrıca, varyans analizi olası düzeltme faktörlerinin araştırılması için \bar{y} üzerinde de uygulanır. SN oranını etkileyen faktörler SN oranını maksimize eden seviyelere getirilirken, \bar{y} 'yi etkileyen faktörler ortalamayı hedefe yaklaştırdığı seviyelere getirilirler.

Taguchi tarafından kullanılan tasarımların çoğu, etkileşimlerin tahminlenmesine imkan vermemektedir. Taguchi'nin önerdiği tasarımların (ortogonal dizinler olarak adlandırılmaktadır) çoğu doyurulmuş veya yaklaşık olarak doyurulmuş Plackett - Burman tasarımlarıdır ve kontrol faktörleri arasındaki etkileşimlerin tahminlenmesine imkan vermemektedir.

Taguchi'nin kurt tasarımının ayrılmaz bir parçası, tavsiye edilen işletim koşullarında doğrulama denemelerinin yapılmasıdır.

5.5 PARAMETRE TASARIMINDA TASARIM VE ANALİZ ÜZERİNE DİĞER YORUMLAR

Batı dünyasındaki istatistikçiler tarafından eleştiriler almasına rağmen, Taguchi'nin yöntemleri Birleşik Devletler'deki bir çok uygulayıcı tarafından kullanılmış ve başarılı sonuçlar alınmıştır. Yöntemlerin zayıf yönleri bulunmasına rağmen, iyi sonuçların alındığı gerçek yaşam uygulamalarının sayısı az değildir. Taguchi'nin katkıları üzerine mükemmel bir çalışma olarak Pignatiello ve Ramberg (1991)'in makalesi referans verilebilir (Myers ve Montgomery, 1995: s. 478).

Çaprazlanmış dizin, veya çarpım dizin, biri gürültü faktörleri, diğeri kontrol faktörleri için olmak üzere iki deney tasarımı ile kurulur. Bu iki tasarım her ikisi de doyurulmuş ya da yaklaşık doyurulmuş olduğu için genellikle ekonomiktir. Bununla beraber iki tasarımın çarpımı çoğu kez ekonomik bir tasarımı türetmeyebilir.

A , B ve C faktörlerinin bulunduğu 2^{3-1} içsel dizinin, D , E ve F faktörlerinin bulunduğu 2^{3-1} dışsal dizin ile çaprazlandığı bir çaprazlanmış dizin ele alınsın. Buradan tahminlenecek etkiler ve karşılık geldiği serbestlik dereceleri aşağıdaki gibidir:

Etki	Serbestlik Derecesi	Etki	Serbestlik Derecesi
A	1	D	1
B	1	E	1
C	1	F	1
AD	1	CD	1
AE	1	CE	1
AF	1	CF	1
BD	1		
BE	1		
BF	1		

Tüm serbestlik derecelerinin ana etkiler ve kontrol \times gürültü etkileşimleri için oldukları görülmektedir. Gürültü \times gürültü veya kontrol \times kontrol etkileşimlerini hesaba katan serbestlik derecesi mevcut değildir. Bu etkileşimlerin tahminlenmesinde ortaya çıkan yetersizlik, çaprazlanmış dizinlerin olumsuz yönlerinden birisidir. Ekonomiklik açısından bakıldığında, her bir dizin yüksek kesirli olmasına rağmen sonuçtaki

çaprazlanmış dizin ekonomik değildir. Kontrol \times kontrol etkileşimleri ise kontrol \times gürültü etkileşimlerinin uğruna feda edilmiştir. Bu durum kontrol \times gürültü etkileşimlerinin önemsiz olduğu anlamına gelmemektedir. Bununla beraber, birçok uygulama konusu alanlarda kontrol \times kontrol etkileşimleri önemli etkiye sahip olabilir. Bu durumda marjinal ortalamalar analizinde (kontrol faktörlerinin her bir seviyesindeki \bar{y} 'ların kontrol faktörlerinin seviyelerine karşı grafiği) kontrol \times kontrol etkileşimlerinin varlığının gözardı edilmesi yanlış sonuçlara yol açabilir.

Box (1988), Easterling (1985) ve Pignatiello ve Ramberg (1985;1991) Taguchi'nin katkılarını ve Batıda geliştirilen istatistiksel yöntemler bağlamında eleştiriler sunmuşlardır. Box (1985), standart veri transformasyonu yöntemlerinin, Taguchi'nin sinyal - gürültü oranlarından nasıl daha etkin olabileceğini göstermiştir. Box, Taguchi'nin kunt tasarım yaklaşımında ardışık araştırmaların yetersizliğine değinmiştir. Ayrıca Taguchi'nin tasarım seçimindeki gereksiz sınırlamaları bulunduğunu ifade etmiştir. Lucas (1994), Vining ve Myers (1990), Box ve Jones (1992), Del Castillo ve Montgomery (1993) ve Myers, Khuri ve Vining (1992) ortalama ve varyansın ayrı ayrı modellenmesinin, uygulamalarda süreç hakkında daha fazla bilgi verici olabileceğini belirtmişlerdir.

5.6 KUNT PARAMETRE TASARIMI İÇİN DENEY TASARIMLARI: BİRLEŞİK DİZİNLER

Birleşik dizinler (combined arrays) gürültü faktörlerinin kontrol faktörleri ile birlikte tasarım matrisine dahil edildiği tasarımlardır. Birleşik dizin kavramı, Welch vd. (1990), Shoemaker vd. (1991), Lucas (1994), Montgomery (1991a, b), Myers Khuri ve Vining (1992) ve Box ve Jones (1992) dahil olmak üzere birçok yazar tarafından tavsiye edilmektedir.

Birleşik dizinler, deneme sayısında tasarruf sağlarken, diğer taraftan etkilerin tahminlenmesinde daha fazla esneklik getirmektedir. Seçilen birleşik dizinler genellikle *karma kararlılık* kavramını sunan tasarımlardır (bkz. Lucas (1994)). Kontrol \times gürültü etkileşimleri yaşamsal öneme sahip oldukları için, bu etkileşimler için tasarımın kararlılığı, genellikle önemli olduğu düşünülmeyen gürültü \times gürültü etkileşimler için olandan daha

yüksektir. Kontrol × kontrol etkileşimlerinin kararlılığı, bu etkileşimlerin önemli olduğu biliniyor ise yüksek olabilir.

Örnek 5.1: Bu örnek Shoemaker vd. (1991) ve Myers ve Montgomery (1995: s.512)'de bulunmaktadır ve birleşik dizinin üstünlüğünü göstermektedir. Üç kontrol faktörü x_1, x_2, x_3 ve üç gürültü faktörü z_1, z_2, z_3 bulunan bir durum ele alındığında çaprazlanmış dizin aşağıdaki gibidir:

$$2_{III}^{3-1} \times 2_{III}^{3-1} \quad (\text{Tasarım 1})$$

Bu tasarımda toplam 16 deney tasarım noktası mevcuttur. Bu çaprazlanmış dizin, tanımlama ilişkisinin $I = x_1x_2x_3 = z_1z_2z_3 = x_1x_2x_3z_1z_2z_3$ olduğu bir birleşik dizin gibi görülebilir. Birleşik dizin, 2^6 'nın 1 / 4 tekrarı olup, kontrol faktörleri arasındaki etkileşimlerin tahminlenemediği görülebilir. Burada herhangi bir iki kontrol faktörü etkileşimi önemli değil ise altı ana etki tahminlenebilir. Altı ana etkiye ek olarak dokuz serbestlik derecesi mevcuttur ve bu serbestlik dereceleri kontrol × gürültü etkileşimlerinin tahminlenmesi için kullanılırlar.

Tasarım 1'e alternatif olarak, birleşik dizin daha fazla esneklik sunmaktadır. Bir 2^{6-2} tasarım için tanımlama ilişkisi aşağıdaki gibi olabilir:

$$I = x_1x_2x_3z_1 = z_1z_2z_3 = x_1x_2x_3z_2z_3 \quad (\text{Tasarım 2})$$

Bu tasarım, karma kararlılık kavramına örnek olarak gösterilebilir. Tasarım, gürültü × gürültü etkileşimleri ile ilgili olarak kararlılık III ve diğer etkileşimler ile ilgili olarak kararlılık IV tasarımıdır. Gerçekte, burada kontrol × kontrol etkileşimlerinden üç tanesi, x_1z_1, x_2z_1 ve x_3z_1 etkileşimlerinin gözardı edilebilir oldukları varsayımı yapıldığında tahminlenebilir. Başka bir deyişle, bu tip varsayımlar yapılabildiğinde böyle bir tasarım ile kontrol × kontrol etkileşimleri ile kontrol × gürültü etkileşimleri arasında tercih yapılabilir.

Örnek 5.2: Dört kontrol faktörü x_1, x_2, x_3, x_4 ve iki gürültü faktörü z_1, z_2 'nin bulunduğu bir durum ele alınsın. Ayrıca x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4 etkileşimlerinin önemli olduğu varsayılınsın. Bu durumda kullanılabilecek bir çaprazlanmış dizin 32 deney tasarım noktasından oluşan

$$2_{IV}^{+1} \times 2^2 \quad (\text{Tasarım 1})$$

şeklindeki bir tasarımıdır. Elde edilebilen 31 serbestlik derecesi tüm altı ana etkiyi ve 12 iki faktör etkileşimi x_1x_2 , x_1x_3 , x_1x_4 , z_1z_2 , x_1z_1 , x_2z_1 , x_3z_1 , x_4z_1 , x_1z_2 , x_2z_2 , x_3z_2 ve x_4z_2 'yi içermektedir. Bu durum 18 serbestlik derecesini temsil etmektedir. Bu da 13 serbestlik derecesinin yüksek derecedeki kontrol \times gürültü etkileşimlerini tahminlemek için kullanıldığı anlamına gelmektedir. Diğer taraftan 32 tasarım noktasından oluşan ve aşağıdaki tanımlama ilişkisini kullanan bir 2_{VI}^{6-1} birleşik dizini daha uygundur:

$$I = x_1x_2x_3x_4z_1z_2 \quad (\text{Tasarım 2})$$

Bu tasarım altı ana etkinin tamamı ve 15 iki faktör etkileşimlerinin tamamının tahminlenmesine imkan vermektedir. Böylece tasarım 1'deki üç yüksek-dereceli etkileşim, daha önemli olması olası olan üç kontrol \times kontrol etkileşimi ile yer değiştirmiştir.

Kontrol faktörleri ve hatta gürültü faktörlerinin ikinci-derece terimlerinin bulunduğu modellerin kullanımı için, birleşik dizinlerin esnek yapısı ve bileşik tasarımlar, Box-Behnken tasarımları (BBT) ve bilgisayar destekli tasarımlar (kesikli optimum tasarımlar) kullanılabilir. Burada MBT'lar için karma kararlılık düşüncesi oldukça önemlidir. Üç kontrol faktörü ve iki gürültü faktörünün olduğu bir çaprazlanmış dizin ele alındığında, kontrol dizini bir 3^3 'ün 1 / 3 tekrarı ve gürültü dizini bir 2^2 (toplam 36 deneme) olabilir. 3^3 'ün 1 / 3 tekrarı (Taguchi tarafından L_9 olarak adlandırılmaktadır) bir Latin Kare tasarımından aşağıda verildiği gibi kurulabilir (Myers vd., 1992: s.134):

x_1	x_2	x_3
-1	-1	-1
-1	0	0
-1	1	1
0	-1	0
0	0	1
0	1	-1
1	-1	1
1	0	-1
1	1	0

Bu dizinlerden kontrol değişkenlerinin ikinci-derece terimleri, z_1 , z_2 ve z_1z_2 terimleri ve kontrol \times gürültü etkileri tahminlenebilir. Aşağıda verilen bir MBT'da ise 22 + merkez noktası kadar deneme bulunmaktadır:

(i) $I = x_1x_2x_3z_1z_2$ tanımlama ilişkisini kullanan 2^{5-1} kesirli faktöryel

(ii) eksen (yıldız) noktaları:

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2
$-\alpha$	0	0	0	0
α	0	0	0	0
0	$-\alpha$	0	0	0
0	α	0	0	0
0	0	$-\alpha$	0	0
0	0	α	0	0

(iii) merkez noktaları:

0	0	0	0	0
---	---	---	---	---

Bu tasarım ile kontrol faktörlerinin doğrusal ve kuadratik etkilerinin yanısıra kontrol faktörleri arasındaki iki-faktör etkileşimleri de tahminlenebilmektedir. Ayrıca gürültü faktörlerinin doğrusal etkileri, gürültü değişkenleri arasındaki iki-faktör etkileşimleri ve en önemlisi kontrol \times gürültü etkileşimleri tahminlenebilmektedir. Bu örnekten birleşik dizinin daha etkin olduğu görülmektedir.

Karma kararlılık kavramını daha iyi canlandırmak için, dört kontrol faktörlü ve üç gürültü faktörlü bir durum ele alınsın. Burada cevap modelinin, kontrol faktörlerinin ikinci derece terimlerini (sabit terim de dahil olmak üzere 15 terim), z_1 , z_2 , z_3 ve 12 kontrol \times gürültü etkileşimini içermesi istensin. Faktöryel kısımda karma kararlılığa sahip bir merkezi bileşik tasarım oldukça kullanışlıdır. Burada faktöryel kısım için 2^{7-2} tasarım uygun görünmektedir. Tanımlama ilişkisi olarak

$$I = x_1x_2x_3z_1z_2 = z_1z_2z_3x_4 = x_1x_2x_3x_4z_3$$

alındığında merkezi bileşik tasarım aşağıdaki bileşenlerden oluşur:

(i) Yukarıdaki tanımlama ilişkisinden elde edilen 2^{7-2}

(ii) Eksen (yıldız) noktaları:

x_1	x_2	x_3	x_3	z_1	z_1	z_1
$-\alpha$	0	0	0	0	0	0
α	0	0	0	0	0	0
0	$-\alpha$	0	0	0	0	0
0	α	0	0	0	0	0
0	0	$-\alpha$	0	0	0	0
0	0	α	0	0	0	0
0	0	0	$-\alpha$	0	0	0
0	0	0	α	0	0	0

(iii) merkez noktası:

0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---

Sonuç olarak 40 + merkez noktası deneme, modeldeki 30 terimi tahminlemek için kullanılmaktadır. Tanımlama ilişkisinden görüleceği gibi, faktöryel kısmın kararlılığı IV'tür. Bununla beraber kontrol faktörlerindeki kararlılık, hiç bir $x_i x_j$ etkileşimi eş yapı içerisinde bulunmadığı için daha yüksektir. Bundan başka, bu tasarım, hiç bir kontrol \times gürültü etkileşimi birbirleri ve kontrol \times kontrol etkileşimleri ile eşyapılı olmadığından dolayı, kontrol \times gürültü etkileşimleri için de daha yüksek kararlılığa sahiptir.

Genellikle merkezi bileşik tasarımda merkez noktası denemelerinin kullanılması, homojen hata varyansı varsayımı yapıldığında uygun bir yaklaşım olarak görülebilir. Ancak bu varsayım kurt parametre tasarımı ile uyumlu değildir. Bununla beraber, deneyde sabitlenmiş olan gürültü faktörleri, süreçte heterojen varyans türetmektedir ve bu değişkenlik modellenmektedir. Merkez noktası denemelerinden tahminlenen varyans ise, gürültü faktörleri tarafından türetilenin dışında farklı kaynaklı bilinmeyen (ya da ölçülemeyen) değişkenliği hesaba katmaktadır.

5.7 PARAMETRE TASARIMI PROBLEMLERİ İÇİN CEVAP YÜZEYİ ALTERNATİFLERİ

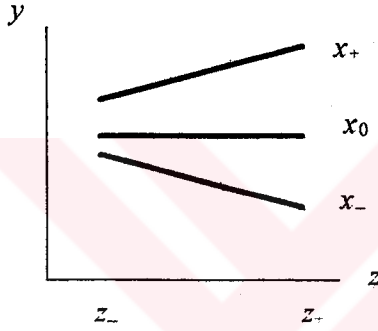
Deney tasarımının seçiminden başka, verilerin analizi için Taguchi yaklaşımına birçok alternatif ortaya atılmıştır. Myers, Khuri ve Vining (1992) ve kesim 5.5.2'de belirtilen yazarlar, süreç ortalaması ve varyansının, yapısı gereği yorumlanması zor olabilen bir istatistik ile beraber ele almak yerine, ayrı ayrı modellenmesinin avantajını vurgulamışlardır. Sonuç olarak cevap ortalaması ve varyansının uyumunu yapmak için kullanılan yöntemler araştırmacılara, deneysel veriler üzerinde daha az bir masraf ile sürecin daha iyi tanınması imkanı verecektir.

Ortalama cevabın modellenmesi ile ilgili yöntemler klasiktir ve bu konuda çok sayıda yayın bulunmaktadır. Son yıllarda, yapılan çalışmalar varyans modellemesi üzerinedir. Hatta bu çalışmalar gürültü faktörleri üzerinde ölçüm yapılamadığı ve tekrarlı gözlemlerin alınamadığı durumları bile kapsamaktadır. Endüstrideki kuantal parametre tasarımı problemlerinde süreç varyansının modeli, ortalamanın modelinden daha önemli olabilmektedir. Box ve Meyer (1986) ve Nair ve Pregibon (1988) tarafından yapılan çalışmalar süreç varyansını etkileyen faktörlerin tespit edilmesi problemleri ile ilgilidir. Bu faktörler *yayılma etkileri (dispersion effects)* olarak adlandırılmaktadır. Box ve Meyer tekrarsız faktöryel deneylerde, Nair ve Pregibon ise tekrarlı deneylerde yayılma etkilerinin tespit edilmesini tartışmışlardır. Oldukça ilginç ve uygulanabilir bir yaklaşım olan *genelleştirilmiş doğrusal modeller* süreç varyansının modellenmesi için kullanılabilir. Bu yöntemler kalite ile ilgili birçok mühendis tarafından genellikle bilinmemektedir. Bununla beraber, potansiyel olarak oldukça kullanışlıdır (Myers, Khuri ve Vining, 1992: s. 135). Aitkin (1987), GLIM (generalized linear interactive modelling) yazılımının, hataların normal dağılışı gösterdiği varsayımı altında, ortalama ve varyansın eşanlı olarak modellenmesi amacıyla kullanılabileceğini göstermiştir. Carroll ve Ruppert (1988) ve McCullagh ve Nelder (1989) değişkenliğin modellenmesi ile ilgili yöntemleri tartışmaktadır.

Gürültü faktörleri gerçekte süreç içerisinde şans değişkenleri olmasına rağmen, deney yapılan ortamda (örneğin laboratuvar ortamında) sabit tutulduğunda ve kontrol faktörleri ile birlikte modellendiğinde, süreç ortalaması ve varyansı için cevap yüzeyleri,

gerek çaprazlanmış dizin, gerekse birleşik dizin yaklaşımları için kolaylıkla kurulabilmektedir.

Kontrol faktörleri ve gürültü faktörleri birlikte modellendiğinde, gürültü ve kontrol faktörleri arasında etkileşim bulunursa, süreç değişkenliği kontrol faktörlerinin değişik seviyelerine bağlı demektir. Örnek olarak Şekil 5.4'deki etkileşim grafiği ele alınsın. x kontrol faktörü, z gürültü faktörü olsun; ayrıca her iki faktör sürekli olsun. z süreç içerisinde şans değişkeni ise, x_0 civarındaki kontrol seviyesi minimum süreç varyansını verecektir.



Şekil 5-4. xy etkileşimi

5.7.1 Süreç Ortalaması ve Varyansının Modellenmesi

Bir çok uygulamada, kontrol ve gürültü faktörlerinin bulunduğu model, x 'lerin kuadratik terimlerini içerebilir. Burada merkezi bileşik tasarımlar ve Box-Behnken tasarımları gibi cevap yüzeyi tasarımları kullanılabilir. Sonuç olarak *uyumu yapılmış cevap yüzeyi* Myers ve Montgomery (1995: s.492) tarafından aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\hat{y}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = b_0 + \mathbf{x}'\mathbf{b} + \mathbf{x}'\hat{\mathbf{B}}\mathbf{x} + \mathbf{z}'\mathbf{c} + \mathbf{x}'\hat{\Delta}\mathbf{z} \quad (5.7)$$

Eşitlik (5.7)'deki uyumu yapılmış model aşağıdaki modelin en küçük kareler uyumunu temsil etmektedir:

$$y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \beta_0 + \mathbf{x}'\beta + \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{z}'\gamma + \mathbf{x}'\Delta\mathbf{z} + \varepsilon \quad (5.8)$$

Burada gürültü faktörleri arasındaki etkileşimler ve gürültü faktörlerindeki ikinci derece terimlerin kullanılmaması ile ilgili bir kural sözkonusu değildir. Bununla beraber, eşitlik

(5.8) ile verilen model uygulamalarda bir çok duruma uymaktadır (Myers ve Montgomery, 1995: s.492). Bu modeldeki \mathbf{z} , $r_z \times 1$ ve \mathbf{x} , $r_x \times 1$ boyutlu vektörler ve Δ , $r_x \times r_z$ etkileşimlerinin katsayıları δ_{jk} 'leri içeren ($j = 1, 2, \dots, r_x; k = 1, 2, \dots, r_z$) $r_x \times r_z$ boyutlu matristir. Eşitlik (5.8)'deki ε terimi, ikinci ve üçüncü bölümlerde bahsedilen cevap yüzeyi modellerindeki hata terimleriyle aynı rolü oynamaktadır. Diğer bir deyişle $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ şeklindedir. Burada araştırmacıların şans değişkeni \mathbf{z} hakkında makul miktarda bilgi sahibi olduğu varsayımının yapılması gerekmektedir (Myers ve Montgomery, 1995: s. 493). Deneyde z_j gürültü faktörünün, geçmişteki z_j ile ilgili tecrübelerden, ortalaması etrafında merkezlendiği ve ± 1 seviyelerinin $\mu_{z_j} \pm \sigma_{z_j}$ üzerine gelecek şekilde ölçeklendiği varsayımı yapılabilir. Araştırmacı ± 1 'leri $\pm 2\sigma_z$ 'ye karşılık gelecek şekilde de belirleyebilir. Sonuç olarak süreç varyansı cevap yüzeyinin geliştirilmesi, σ_z 'nin bilinmesi varsayımı altında gerçekleştirilir. Pratikte σ_z , $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ gibi değerler alabilir. Gürültü faktörlerinin seviyeleri $\mu_{z_j} \pm \sigma_{z_j}$ üzerine gelecek şekilde seçildiğinde \mathbf{z} ile ilgili varsayımlar

$$E(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad , \quad \text{Var}(\mathbf{z}) = \sigma_z^2 \mathbf{I}_{r_z} \quad (5.9)$$

şeklinde özetlenebilir. Eşitlik (5.9) gürültü faktörlerinin varyanslarının bilindiği ve birbirleriyle korelasyonsuz olduklarına işaret etmektedir. Myers (1991), gürültü faktörlerinin bu seviyelerde seçilmesinin, gürültü faktörlerinin normal dağılış göstermesi durumunda uygun olduğunu belirtmiştir. Böylece $\sigma_z = 1$ olarak elde edilir. Diğer taraftan, gürültü faktörlerinin tekdüzen dağılış gösterdiği biliniyorsa, ± 1 seviyeleri sınır noktalarda seçilebilir. Böylece $\sigma_z = 1 / 3$ değeri kullanılabilir.

Bu noktada eşitlik (5.8)'in beklenen değer ve varyansı bulunabilir. $E(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ olduğu için beklenen değer alınması ile aşağıdaki cevap yüzeyi elde edilir:

$$E_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \beta_0 + \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} \quad (5.10)$$

Süreç varyansı ise

$$\text{Var}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \text{Var}_z[\boldsymbol{\gamma}' + \mathbf{x}'\boldsymbol{\Delta}]z + \sigma^2$$

şeklinde elde edilir. Burada $[\boldsymbol{\gamma}' + \mathbf{x}'\boldsymbol{\Delta}] = \mathbf{a}'$ bir sabitler vektörüdür. Varyans işlemleri ile ilgili kurallardan

$$\text{Var}_z[\mathbf{a}'\mathbf{z}] = \mathbf{a}'[\text{Var}(\mathbf{z})]\mathbf{a}$$

olduğu bilinmektedir. Burada $\text{Var}(\mathbf{z})$, \mathbf{z} 'nin varyans-kovaryans matrisidir. Sonuç olarak,

$$\text{Var}_z[\boldsymbol{\gamma}' + \mathbf{x}'\boldsymbol{\Delta}]\mathbf{z} = \sigma_z^2 [\boldsymbol{\gamma}' + \mathbf{x}'\boldsymbol{\Delta}] [\boldsymbol{\gamma}' + \mathbf{x}'\boldsymbol{\Delta}]' \quad \text{ve}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] &= \sigma_z^2 [\boldsymbol{\gamma}' + \mathbf{x}'\boldsymbol{\Delta}] [\boldsymbol{\gamma}' + \mathbf{x}'\boldsymbol{\Delta}]' + \sigma^2 \\ &= \sigma_z^2 \mathbf{l}'(\mathbf{x})\mathbf{l}(\mathbf{x}) + \sigma^2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\gamma}' + \mathbf{x}'\boldsymbol{\Delta}$ 'dir.

Eşitlik (5.10), süreç ortalaması için cevap yüzeyi ve eşitlik (5.11) süreç varyansı için cevap yüzeyini temsil etmektedir. Model hatasının varyansı σ^2 'den bağımsız olarak, süreç varyansı $\|\mathbf{l}(\mathbf{x})\|^2$ olmaktadır. Burada $\mathbf{l}(\mathbf{x})$, $y(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 'nin \mathbf{z} 'ye göre kısmi türevlerinin oluşturduğu bir vektördür. Diğer bir deyişle,

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \frac{\partial y(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \quad (5.12)$$

şeklinindedir (Myers ve Montgomery, 1995: s. 494). Türevler vektörü $\partial y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) / \partial \mathbf{z}$ arttıkça, süreç varyansının artacağı söylenebilir. Burada \mathbf{xz} etkileşim katsayılarını oluşturduğu $\boldsymbol{\Delta}$ matrisi, süreç varyansı cevap yüzeyinde önemli bir yere sahiptir. $\boldsymbol{\Delta} = 0$ ise, süreç varyansı \mathbf{x} 'e bağlı değil demektir ve bu yüzden kontrol faktörlerinin seviyelerinin seçimi ile bir kurt sürecin elde edilmesi mümkün değildir. Bu durumda kurt parametre tasarım problemi söz konusu değildir. Diğer taraftan eşitlik (5.11)'e tekrar bakıldığında, süreç varyansının minimizasyonu için σ_z^2 'lerin bilinmesine gerek olmadığı görülmektedir. Ancak değişik \mathbf{x} değerleri için süreç varyansı kestirilmek istendiğinde σ_z^2 değerlerinin bilinmesi gerekmektedir.

Süreç ortalaması ve varyansı için tahminlenmiş cevap yüzeyleri, eşitlik (5.7) ile verilen uyumu yapılmış modeldeki tahminler, eşitlik (5.10) ve (5.11)'deki parametrelerin yerine konulduğunda elde edilebilir. Sonuç olarak tahminlenmiş süreç ortalaması ve varyansı cevap yüzeyleri

$$\hat{E}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \hat{\mu}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = b_0 + \mathbf{x}'\mathbf{b} + \mathbf{x}'\hat{\mathbf{B}}\mathbf{x} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned}
\text{Vâr}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] &= \sigma_z^2 \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{x})' \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) + \hat{\sigma}^2 \\
&= \sigma_z^2 (\mathbf{c}' + \mathbf{x}' \hat{\Delta}) (\mathbf{c}' + \mathbf{x}' \hat{\Delta})' + \hat{\sigma}^2
\end{aligned} \tag{5.14}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\hat{\sigma}^2$ uyumu yapılmış modeldeki ortalama karesel hatadır.

5.7.2 Optimum Koşulların Bulunmasında Dual Cevap Yaklaşımlarının Kullanılması

Vining ve Myers (1990) Taguchi problemlerinin çözümünde, esas olarak iki cevaplı süreçlerin optimizasyonunda kullanılan ve dördüncü bölümde tanıtılan bir kısıtlı optimizasyon tekniği olan dual cevap yaklaşımını önermiştir. Vining ve Myers (1990: s. 40) ortalama ve varyans cevap yüzeyleri kullanılarak, Taguchi problemlerindeki üç temel durumun aşağıda verildiği şekilde ele alınabileceğini belirtmiştir:

1. *Hedef değer en iyidir durumu*: Varyansı minimize ederken ortalamayı belirlenmiş bir hedef değerde tutmak anlamına gelmektedir. Diğer bir deyişle,

$$\begin{aligned}
&\text{Min } \text{Vâr}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] \\
&\text{kısıt: } \hat{E}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = T
\end{aligned}$$

yazılabilir.

2. *Daha büyük daha iyidir durumu*: Varyansı kontrol altında tutarken, ortalamanın mümkün olduğu kadar büyük olmasını sağlamak anlamına gelmektedir. Diğer bir deyişle,

$$\begin{aligned}
&\text{Max } \hat{E}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] \\
&\text{kısıt: } \text{Vâr}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \sigma_0^2
\end{aligned}$$

yazılabilir.

3. *Daha küçük daha iyidir durumu*: Varyansı kontrol altında tutarken, ortalamanın mümkün olduğu kadar küçük olmasını sağlamak anlamına gelmektedir. Diğer bir deyişle,

$$\begin{aligned}
&\text{Min } \hat{E}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] \\
&\text{kısıt: } \text{Vâr}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \sigma_0^2
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Daha büyük daha iyidir ve daha küçük daha iyidir durumlarında Vining ve Myers, ortalamanın birincil cevap olarak alınmasını önermişlerdir. Burada varyans için kabul edilebilir birkaç değer verilerek, bir kaç adet kabul edilebilir σ_0^2 sırayla denenerek, varyans üzerindeki kısıtlar altında ortalama için optimum değer elde edilmesi söz konusudur. Dual cevap yaklaşımında kısıtların eşitlik olarak ele alınabilmesinden dolayı, DelCastillo ve Montgomery (1993) dual cevap problemlerinin optimizasyonunda doğrusal olmayan programlama yaklaşımlarının kullanımını önermişlerdir. DelCastillo ve Montgomery, daha büyük daha iyidir ve daha küçük daha iyidir durumları için optimizasyon problemlerine eşitsizlik kısıtlarının dahil edilmesine imkan veren geliştirilmiş indirgenmiş gradyan (GİG) algoritmasının kullanılabileceğini belirtmişlerdir. GİG algoritmasının kullanımının, dual cevap yaklaşımına göre avantajları dördüncü bölümde belirtildiği gibidir ve Taguchi problemlerinin optimizasyonunda da dual cevap yaklaşımına karşı daha avantajlı bir yaklaşım olduğu söylenebilir. Daha büyük daha iyidir durumu için optimizasyon problemi

$$\text{Max } \hat{E}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})]$$

$$\text{kısıt: } \text{Vâr}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] \leq \sigma_0^2$$

ve daha küçük daha iyidir durumu için optimizasyon problemi

$$\text{Min } \hat{E}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})]$$

$$\text{kısıt: } \text{Vâr}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] \leq \sigma_0^2$$

şeklinde yazılabilir. Vining ve Myers'in önerdiği dual cevap yaklaşımı yalnızca küresel deney bölgelerini ($\rho^2 = \mathbf{x}'\mathbf{x}$) dikkate almaktadır. DelCastillo ve Montgomery'nin önerdiği yaklaşımda küresel deney bölgelerinin yanında, daha değişik biçimdeki (örneğin kübik) deney bölgelerin de bulunduğu durumlar dikkate alınabilmektedir.

Myers ve Montgomery (1995: s.495) daha büyük daha iyidir ve daha küçük daha iyidir durumları için optimizasyon problemlerini aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$\text{Min } \text{Vâr}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})]$$

$$\text{kısıt: } \hat{\mu}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = m$$

Burada kısıtta bulunan m bir hedef değer olmayıp, daha büyük daha iyidir durumları için kabul edilebilir kadar büyük, daha küçük daha iyidir durumları için kabul edilebilir kadar küçük bir değerdir. Bu problemde birkaç m değeri seçilerek sırayla denenebilir.

Myers ve Montgomery'nin önerdiği yaklaşım, süreç varyansının indirgenmesinin daha önemli olduğu durumlarda kullanışlıdır. Örneğin ortalama modelinde görünüp, varyans modelinde görünmeyen yer etkileri var olduğunda, bu etkiler düzeltme faktörleri olarak kullanılabilir. Sonuç olarak, optimizasyon problemi varyans modelinin minimizasyonu ile çözülmektedir. Eşitlik (5.14) ile verilen süreç varyansının minimum değerini veren veya sıfır yapan \mathbf{x} noktası (\mathbf{x}_0),

$$\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{c} + \hat{\Delta}'\mathbf{x}_0 = 0 \quad (5.15)$$

eşitliğinden elde edilebilir. Eşitlik (5.15), r_x bilinmeyenli r_z eşitliği temsil etmektedir. $r_x > r_z$ ise, tahminlenmiş süreç varyansını sıfır yapan koşullar bir doğru veya bir düzlem verir. $r_x = r_z$ ise eşitlik (5.15)'i sağlayan tek bir \mathbf{x}_0 noktası vardır. $r_x < r_z$ ise, eşitlik (5.15)'in çözümü olmayabilir. Tabi ki en büyük ilgi, \mathbf{x}_0 noktalarının oluşturacağı bölgenin (nokta, eğri veya yüzey), kontrol faktörlerinin deney bölgesinden geçip geçmediği üzerinde olacaktır (Myers ve Montgomery, 1995: s. 496).

5.7.3 Minimum Varyans Koşullarında Güven Bölgeleri

Süreç varyansının minimizasyonu önemli olduğunda, minimum varyans koşullarındaki tahminlerin hassasiyetinin incelenmesi çok önemli olabilir. Myers ve Montgomery (1995: ss.497-498) minimum varyans koşullarındaki güven bölgelerinin elde edilmesi için, bir cevap yüzeyinin olduğu durumlarda durağan noktalar için güven bölgelerinin elde edilmesindeki (bkz. Kesim 3.3.1) yaklaşımı kullanmıştır. Gerçek minimum varyans koşullarını \mathbf{t}_0 temsil etsin:

$$\mathbf{I}(\mathbf{t}_0) = \boldsymbol{\gamma} + \Delta'\mathbf{t}_0 = 0$$

Buna göre eşitlik (5.8)'deki hataların normal dağılım gösterdiği varsayımı altında

$$\frac{[\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{t}_0) - \mathbf{0}]' [\hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{t}_0)]^{-1} [\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{t}_0) - \mathbf{0}]}{r_z} \sim F_{r_z, \nu}$$

yazılabilir. Burada $\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{c} + \hat{\Delta}'\mathbf{t}_0$ ve $\text{Var}\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{t}_0), \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{t}_0)$ 'nin varyans-kovaryans matrisidir ve σ^2 yerine $\hat{\sigma}^2$ konularak elde edilir. (Myers ve Montgomery, 1995: s. 498). Ayrıca burada v , uyumu yapılmış modelden elde edilen $\hat{\sigma}^2$ tahminleyicisi için (hata) serbestlik derecesidir. Sonuç olarak,

$$\frac{[\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{t}_0) - \mathbf{0}]' [\text{Var}\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{t}_0)]^{-1} [\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{t}_0) - \mathbf{0}]}{r_z} \leq F_{\alpha, r_z, v} \quad (5.16)$$

eşitsizliğini sağlayan koşullar (\mathbf{t}_0) , $\%(1 - \alpha)100$ güven bölgesini temsil etmektedir. Burada r_z , kontrol faktörleri ile etkileşimli olan gürültü faktörü sayısıdır ve $F_{\alpha, r_z, v}, F_{r_z, v}$ 'nin üst yüzde noktasıdır.

5.7.4. Gürültü Faktörlerinin Korelasyonlu Olması Durumu ve Süreç Varyansı İçin Sırt Analizi

Birçok örnekte veya uygulamada türevlerin sıfır olduğu ($\hat{f}(x) = 0$) koşulların bulunması prosedürü, pratikte uygun olmayan koordinatları verebilirler. Burada elde edilen durağan noktanın deney bölgesine düşeceğinin bir güvencesi yoktur. Sonuç olarak Myers ve Montgomery (1995: s.504) ortalama ve varyans cevap yüzeylerinin ele alınmasında makul bir yaklaşım olarak sırt analizinin kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Bu yaklaşım ortalama ve varyans için, iki ayrı kısıtlı optimum koşullarını verir.

Gürültü faktörlerinin korelasyonsuz olduğu durumlarda varyans cevap yüzeyi eşitlik (5.11)'de verildiği şekildedir. Gürültü faktörleri korelasyonlu olduğunda, diğer bir deyişle $\text{Var}(\mathbf{z}) = \mathbf{V}$ olduğunda, süreç varyansı

$$\text{Var}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \mathbf{I}'(\mathbf{x})\mathbf{V}\mathbf{I}(\mathbf{x}) + \sigma^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada \mathbf{V} $r_z \times r_z$ boyutlu varyans-kovaryans matrisidir. σ^2 , uyumu yapılmış modelden elde edilen ortalama karesel hata ile ve $\mathbf{I}(\mathbf{x})$ verilerden elde edilen $\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{x})$ ile yer değiştirildiğinde, süreç varyansının bir tahminleyicisi elde edilebilir (bkz. Myers ve Montgomery (1995: s.504):

$$\text{Vâr}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{x})\mathbf{V}\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) + \hat{\sigma}^2 \quad (5.17)$$

Eşitlik (5.17)'deki sonuç $E[\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{x})\mathbf{V}\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{x})] \neq \mathbf{I}'(\mathbf{x})\mathbf{V}\mathbf{I}(\mathbf{x})$ olduğu için sapmalı bir tahminleyicidir. Burada

$$E\{\text{Vâr}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})]\} = \mathbf{I}'(\mathbf{x})\mathbf{V}\mathbf{I}(\mathbf{x}) + \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{V}\mathbf{C}) + \sigma^2 \quad (5.18)$$

şeklinde ve \mathbf{C} matrisi $\text{Var}(\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{x}))/\sigma^2$ 'ye eşittir. Standart deney tasarımları için c_i ve $\hat{\delta}_{jk}$ 'lar korelasyonsuz olmalarından dolayı bu matris köşegen bir matristir. Bununla beraber, köşegen elemanlar diğer bir deyişle $\hat{I}_i(\mathbf{x})$ 'lerin varyansları \mathbf{x} 'e bağlıdır. Eşitlik (5.18)'den süreç varyansının sapmasız bir tahminleyicisi

$$s_z^2[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{x})\mathbf{V}\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) + \hat{\sigma}^2(1 - \text{tr}\mathbf{V}\mathbf{C}) \quad (5.19)$$

şeklinde elde edilebilir. Gürültü faktörlerinin korelasyonsuz olması ve varyanslarının 1'e eşit olması durumunda eşitlik (5.19)

$$s_z^2[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{x})\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) + \hat{\sigma}^2(1 - \text{tr}\mathbf{C}) \quad (5.20)$$

şeklinde yazılabilir. Myers ve Montgomery, eşitlik (5.20) ile verilen tahminleyicinin, eşitlik (5.17) ile verilen sapmalı tahminleyiciden önemli bir farkı olmadığını, bununla beraber, bu iki tahminleyici arasındaki farklılıkların ihmal edilemeyeceği durumların olabileceğini belirtmişlerdir. İki tahminleyici arasındaki farklılığın ihmal edilemeyeceği durumlara örnek olarak Myers ve Montgomery, süreç varyansının tasarım sınırları üzerinde veya yakınlarında hesaplandığı durumları vermiştir. Bunun nedeni tasarım sınırlarına yaklaştıkça $\text{tr}\mathbf{C}$ 'nin büyümesidir. Bu durumda $s_z^2[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})]$ süreç varyansının bir tahminleyicisi olarak gözardı edilemez.

Eşitlik (5.17)'deki sapmalı tahminleyici ile eşitlik (5.20)'deki sapmasız tahminleyici karşılaştırıldığında, eşitlik (5.8)'deki orijinal modelin uyumunun yapılmasındaki hata serbestlik derecesi 2 veya daha az olmadıkça, eşitlik (5.20)'deki sapmasız tahminleyici tercih edilebilir (Myers ve Montgomery, 1995: s.505).

Kesim 3.4'te belirtildiği gibi sırt analizinin amacı cevap üzerinde kısıtlı optimum sonuçlarını veren noktalar bölgesini türetmektir. Bu yaklaşım, tasarım uzayında bir sırt

türetir. Bu sırt ise gelecekte yapılabilecek deneyler için yön verebilir veya deney bölgesindeki ilginç koşullar hakkında bilgi verebilir. Aynı notasyonun süreç varyansına uygulanması sonucu optimizasyon problemi aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \min & \left[s_z^2 y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \right] \\ \text{kısıt: } & \mathbf{x}'\mathbf{x} = R^2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Lagrange çarpanları kullanılarak

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{x})\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) + \hat{\sigma}^2(1 - \text{trC}) - \lambda(\mathbf{x}'\mathbf{x} - R^2) \right] \quad (5.22)$$

hesaplanabilir. Eğer deney tasarımı gürültü ana etkilerinin kontrol \times gürültü etkileşimlerinden ve kontrol \times gürültü etkileşimlerinin birbirlerinden bağımsız tahminlenmesine imkan veriyorsa C matrisi

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'\mathbf{D}_{11}\mathbf{x} + \text{Var}c_1 & & & 0 \\ & \mathbf{x}'\mathbf{D}_{22}\mathbf{x} + \text{Var}c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{x}'\mathbf{D}_{r_x, r_x}\mathbf{x} + \text{Var}c_{r_x} \end{bmatrix}$$

haline dönüşür. Burada \mathbf{D}_{ij} , i 'inci ana köşegen üzerinde $\text{Var}(\hat{\delta}_{ij})/\sigma^2$ 'yi içeren $r_x \times r_x$ boyutlu bir matristir. Ayrıca $\mathbf{x}' = [x_1, x_2, \dots, x_{r_x}]$ şeklindedir. Böylece trC

$$\text{tr}(\mathbf{C}) = \sum_{j=1}^{r_x} \mathbf{x}'\mathbf{D}_{jj}\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{r_x} c_j$$

şeklini alır. (5.22) ile verilen ifadenin kısmi türevleri alınıp $\mathbf{0}$ 'a eşitlendiğinde

$$\left[\hat{\Delta}\hat{\Delta}' - \hat{\sigma}^2 \sum_{j=1}^{r_x} \mathbf{D}_{jj} - \mu\mathbf{I} \right] \mathbf{x} = -\hat{\Delta}\mathbf{c} \quad (5.23)$$

elde edilir (Myers ve Montgomery, 1995: s.506). Burada $\mathbf{c}' = [c_1, c_2, \dots, c_{r_x}]$ şeklindedir.

Optimizasyon probleminin çözümünün minimum varyans noktalarını vermesi için, eşitlik (5.23)'de $\hat{\Delta}\hat{\Delta}' - \hat{\sigma}^2 \sum_{j=1}^{r_x} \mathbf{D}_{jj}$ 'nin en küçük özdeğerinden daha küçük olan μ değerleri kullanılmalıdır.

5.7.5 Alternatif Modellerin Kullanılması

Önceki kesimde açıklanan yaklaşımda, deney bölgesinde kontrol ve gürültü faktörlerinin davranışının eşitlik (5.8)'de verilen ikinci derece model ile temsil edilebileceği varsayılmıştır. İzleyen alt kesimlerde alternatif modeller üzerinde durulmuştur.

5.7.5.1 Myers, Khuri ve Vining'in Modeli

Süreç cevabı için daha genel bir model Myers, Khuri ve Vining (1992) tarafından

$$y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \beta_0 + \mathbf{g}'(\mathbf{x})\beta + \mathbf{z}'\gamma + \mathbf{g}'(\mathbf{x})\Lambda\mathbf{z} + \varepsilon \quad (5.24)$$

şeklinde verilmiştir. Burada $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$, \mathbf{X} matrisinin bir satırı olup (ilk eleman bir hariç), kontrol faktörlerinin etkileşimlerini ve polinomiyal etkilerini içerebilir. Λ matrisi ise gürültü faktörleri ile kontrol faktörleri arasındaki etkileşimleri içermektedir. Myers, Khuri ve Vining bir çok durumda araştırmacının Λ matrisini tamamen belirleyemeyebileceğini, ancak en azından iki-faktör etkileşimlerini hesaba katacak bir deneyi planlaması gerektiğini vurgulamışlardır. Λ matrisi yalnızca iki-faktör etkileşimlerini içerdiğinde, bu matris eşitlik (5.8)'de verilen Δ matrisine eşit olur. Gürültü faktörlerinin beklenen değerleri sıfır, varyansları $\text{Var}(\mathbf{z}) = \mathbf{V}$ ve ε 'den bağımsız oldukları varsayıldığında, buradan süreç ortalaması ve varyansı

$$E_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \beta_0 + \mathbf{g}'(\mathbf{x})\beta \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] &= \text{Var}[\gamma' + \mathbf{g}'(\mathbf{x})\Lambda]\mathbf{z} + \text{Var}(\varepsilon) \\ &= [\gamma' + \mathbf{g}'(\mathbf{x})\Lambda]\mathbf{V}[\gamma' + \mathbf{g}'(\mathbf{x})\Lambda]' + \sigma^2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

şeklinde yazılabilir.

5.7.5.2 Box ve Jones'un Modeli

Box ve Jones (1992: s.269), bir çok durumda hem kontrol faktörleri hem de gürültü faktörleri için eğrisel cevap ilişkilerinin olabileceğini ve kontrol faktörlerinin diğer kontrol faktörleri ile, gürültü faktörlerinin diğer gürültü faktörleri ile ve kontrol faktörleri

ve gürültü faktörlerinin birbirleri ile etkileşimli olabileceğini belirtmiştir. Bu bağlamda deney bölgesinde kontrol ve gürültü faktörlerinin davranışının bir genel ikinci derece model ile temsil edilebileceği varsayılmıştır:

$$y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \beta_0 + \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{z}'\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}'\boldsymbol{\Theta}\mathbf{z} + \mathbf{z}'\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} + \varepsilon \quad (5.27)$$

Burada $\boldsymbol{\Theta}$ matrisi

$$\boldsymbol{\Theta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\theta_{11} & \theta_{12} & \cdots & \theta_{1r_z} \\ \theta_{12} & 2\theta_{22} & \cdots & \theta_{2r_z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{1r_z} & \theta_{2r_z} & \cdots & 2\theta_{r_z r_z} \end{bmatrix}$$

şekindedir ve bu matristeki θ_{ij} 'ler gürültü faktörleri i ve j arasındaki etkileşim katsayıları ve θ_{ii} 'ler gürültü faktörü i 'nin kuadratik etkileridir. Box ve Jones (1992: s.280), gürültü faktörlerinin birbirlerinden bağımsız tekdüzen dağılım gösterdiği varsayımı altında süreç ortalamasını,

$$E_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = k \int_{R_z} y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \beta_0 + \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} + \frac{1}{3} \text{tr}\boldsymbol{\Theta} \quad (5.28)$$

şeklinde elde etmiştir. Burada

$$k^{-1} = \int_{R_z} d\mathbf{z}$$

şekindedir. Aynı varsayımlar altında süreç varyansı Box ve Jones (1992: s. 281) tarafından

$$\begin{aligned} \text{Var}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] &= k \int_{R_z} \left\{ y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - E_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] \right\}^2 d\mathbf{z} \\ &= A + \frac{1}{3} (\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x})' (\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.29)$$

olarak elde edilmiştir. Burada, $\boldsymbol{\Theta}$ matrisinin elemanları θ_{ij} 'lerden oluştuğunda ($i, j = 1, 2, \dots, r_z$),

$$A = \frac{1}{45} \left\{ 4 \sum_{i=1}^{r_z} \theta_{ij}^2 + 5 \sum_{i=1}^{r_z-1} \sum_{j=i+1}^{r_z} \theta_{ij}^2 \right\}$$

şeklindedir ve bu eşitlik \mathbf{x} 'den bağımsızdır. Eşitlik (5.28) ve (5.29) incelendiğinde β_0 , β , γ , $\text{tr}\Theta$ ve Δ 'nin sapmasız tahminlerinin bulunması gerektiği görülmektedir. Böylece eşitlik (5.27)'deki gibi bir ikinci derece model varsayımı yapıldığında, gürültü faktörleri için bireysel kuadratik terimlerin ve etkileşim etkilerinin bilinmesine gerek olmadığı, yalnızca $\text{tr}\Theta = \theta_{11} + \theta_{22} + \dots + \theta_{r,r}$ 'nin bilinmesinin yeterli olduğu görülmektedir.

Box ve Jones (1992: s. 276-278) eşitlik (5.27)'den başka aşağıdaki modellerin de kullanılabileceğini belirtmiştir:

$$y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \beta_0 + \mathbf{x}'\beta + \mathbf{z}'\gamma + \mathbf{z}'\Delta\mathbf{x} + \varepsilon \quad (5.30)$$

$$y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \beta_0 + \mathbf{x}'\beta + \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{z}'\gamma + \mathbf{z}'\Theta\mathbf{z} + \mathbf{z}'\Delta\mathbf{c} + (\mathbf{z}^2)'\mathbf{H}\mathbf{x} + \varepsilon \quad (5.31)$$

Box ve Jones (1992: s. 278) eşitlik (5.31)'den, Θ matrisindeki yalnızca kuadratik terimlerin tahminlenmesinin gerektiğini ifade etmişlerdir.

5.7.5.3 Lucas'ın Modeli

Lucas (1994: s.252), Deming (1946) tarafından verilen hata yayılımı (propagation of error) formülünün kullanılarak, değişkenlik hakkındaki tüm bilgilerin elde edilebileceğini vurgulamıştır. Bu yüzden Lucas kullandığı modeli *hata yayılımı modeli* olarak adlandırmıştır. Ayrıca Lucas, içsel dizinin bir doyurulmuş üç seviyeli eleme tasarımı ve dışsal dizinin iki seviyeli bir eleme tasarımı olduğu Taguchi tasarımına uyumu yapılabilecek en kapsamlı modelin, hata yayılımı modeli olduğunu ifade etmiştir. Hata yayılımı modeli

$$y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \beta_0 + \sum_i \beta_i x_i + \sum_i \beta_{ii} x_i^2 + \sum_j \gamma_j z_j + \sum_i \sum_j \delta_{ij} x_i z_j + \sum_i \sum_j \delta_{ij} x_i^2 z_j + \varepsilon \quad (5.32)$$

şeklindedir (Lucas, 1994: s. 253). Lucas, kullanılan tasarımların doyurulmuş olmadığı durumlarda bu modele daha yüksek derecedeki bazı terimlerin de eklenebileceğini belirtmiştir.

5.7.5.4 Engel ve Huele'nin Modeli

Engel ve Huele (1996), Myers, Khuri ve Vining (1992) tarafından varsayılan ve eşitlik (5.24) ile verilen modeli, gürültü faktörlerinin kuadratik ve kendi aralarındaki etkileşim etkilerini de hesaba katacak şekilde genişletmişlerdir. Süreç ortalaması ve varyansı için elde edilen formüller gürültü faktörleri cinsinden ikinci derece modele dayanmaktadır (Engel ve Huele, 1996: s. 97):

$$y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \beta_0 + \mathbf{g}'(\mathbf{x})\beta + \mathbf{z}'\gamma + \mathbf{g}'(\mathbf{x})\Lambda\mathbf{z} + \mathbf{z}'\Theta\mathbf{z} + \varepsilon \quad (5.33)$$

Gürültü faktörlerinin ortalaması sıfır, varyans-kovaryans matrisi \mathbf{V} ve ε 'lerden bağımsız olduğu varsayımı altında ve gürültü faktörleri için ± 1 seviyeleri $\pm\sigma_z$ noktalarında seçildiğinde süreç ortalaması,

$$E_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \beta_0 + \mathbf{g}'(\mathbf{x})\beta + \text{tr}(\Theta\mathbf{V}) \quad (5.34)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki varsayımlardan başka $\mathbf{z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$ ise,

$$\text{Var}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = [\gamma + \Lambda' \mathbf{g}(\mathbf{x})]' \mathbf{V} [\gamma + \Lambda' \mathbf{g}(\mathbf{x})] + 2\text{tr}\{(\Theta\mathbf{V})^2\} + \sigma^2 \quad (5.35)$$

yazılabilir (Engel ve Huele, 1996: s. 97). Engel ve Huele'nin vardığı bu sonuç Searle (1982: s. 355)'teki eşitlik (34)'e dayanmaktadır: \mathbf{x} vektörü normal dağılışa sahip gözlemlerden oluştuğunda ve \mathbf{A} herhangi bir simetrik matris ise kuadratik form $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ için

$$\text{Var}(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}) = 2\text{tr}\{(\mathbf{A}\mathbf{V})^2\} + 4\mu'\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{A}\mu \quad (5.36)$$

yazılabilir. Burada μ ve \mathbf{V} , \mathbf{x} vektörünün beklenen değeri ve varyans-kovaryans matrisidir. Eşitlik (5.33)'teki $\mathbf{z}'\Theta\mathbf{z}$ kuadratik formu eşitlik (5.36)'daki $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ yerine konulduğunda eşitlik (5.35) ile verilen süreç varyansı elde edilebilir.

5.7.6 Gürültülü Kontrol Faktörlü Durumlar

Endüstriyel süreçlerde, bir ocağın sıcaklığı veya bir sıvıdaki asit yüzdesi gibi bazı kontrol faktörlerinin ayarlandıkları değerler etrafında değişkenlik göstermeleri olasıdır. Örneğin bir ocak sıcaklığı 200°C 'ye ayarlandığında, bu sıcaklığın gerçekte örneğin 198°C ile 202°C arasında değişmesi olasıdır. Bu tip kontrol faktörleri Engel ve Huele (1996: s. 97) tarafından *gürültülü tasarım faktörleri* (veya *gürültülü kontrol faktörleri*) olarak

adlandırılmaktadır. Bu faktörlerin ortalama (nominal) değerleri kontrol edilebilir olduğu halde, gerçekleşen değerler sabitlenen seviyeler etrafında değişkenlik göstermektedir.

Gürültülü kontrol faktörleri stokastik olmasından dolayı, bu faktörler gürültü faktörleri gibi görülebilir. Ancak gürültülü kontrol faktörleri ile gürültü faktörleri arasındaki tek fark genellikle, kodlanmış gürültülü kontrol faktörlerinin ortalamasının sıfır olmamasıdır. Engel ve Huele, gürültü faktörleri vektörü z 'nin, gürültülü kontrol faktörlerini de kapsayacak şekilde genişletilmesini önermiştir. Böylece z vektörünün tüm bileşenlerinin ortalamasının -1 ve 1 arasında olduğu varsayılmaktadır (Engel ve Huele, 1996: s. 97).

$E(z) = v$ ve $\text{Var}(z) = V$ olduğunu varsayarak, eşitlik (5.24) ile verilen Myers, Khuri ve Vining'in modeli için süreç ortalaması ve varyansı aşağıdaki gibi elde edilir (Engel ve Huele; 1996: s. 97):

$$E_z[y(x,z)] = \beta_0 + g'(x)\beta + v'\gamma + g'(x)\Lambda v \quad (5.37)$$

$$\text{Var}_z[y(x,z)] = [\gamma + \Lambda'g(x)]' V [\gamma + \Lambda'g(x)] + \sigma^2 \quad (5.38)$$

Gürültü faktörleri cinsinden ikinci derece model için süreç ortalaması

$$E_z[y(x,z)] = \beta_0 + g'(x)\beta + v'\gamma + g'(x)\Lambda v + v'\Theta v + \text{tr}(\Theta V) \quad (5.39)$$

şeklinde. Ayrıca $z \sim N(v, V)$ varsayımı altında süreç varyansı

$$\text{Var}_z[y(x,z)] = [\gamma + \Lambda'g(x) + 2\Theta v]' V [\gamma + \Lambda'g(x) + 2\Theta v] + 2\text{tr}\{(\Theta V)^2\} + \sigma^2 \quad (5.40)$$

şeklinde yazılabilir (Engel ve Huele, 1996: s. 97). $v = 0$ olduğunda eşitlik (5.40)'ın eşitlik (5.35)'e dönüşür.

5.7.7 Doğrusal Yaklaşım

Engel ve Huele (1996)'nın ele aldığı, gürültü faktörleri cinsinden ikinci derece modellerde, süreç varyansının eşitlik (5.35) ve (5.40)'taki gibi elde edilebilmesi için gürültü faktörleri vektörü z 'nin çok değişkenli normal dağılışa sahip olduğu varsayımının yapılması gerekmektedir. Bu varsayımın zayıfladığı durumlarda eşitlik (5.33)'teki $z'\Theta z$, v etrafında bir Taylor serisi açılımının ilk iki terimi kullanılarak doğrusallaştırılabilir

(Engel ve Huele, 1996: s. 97). Böylece bu kuadratik formun doğrusallaştırılması ile, gürültünün normalliği varsayımı yapılmaksızın, süreç varyansı için bir yaklaşım elde edilebilmektedir. $\mathbf{z}'\Theta\mathbf{z}$ 'nin \mathbf{v} etrafında doğrusallaştırılması ile

$$(\mathbf{z}'\Theta\mathbf{z})_{lin} = \mathbf{v}'\Theta\mathbf{v} + 2\mathbf{v}'(\mathbf{z} - \mathbf{v})$$

elde edilir. Burada $\mathbf{z}'\Theta\mathbf{z} = (\mathbf{z}'\Theta\mathbf{z})_{lin} + (\mathbf{z} - \mathbf{v})'\Theta(\mathbf{z} - \mathbf{v})$ şeklindedir. Eşitlik (5.33)'te $\mathbf{z}'\Theta\mathbf{z}$ yerine $(\mathbf{z}'\Theta\mathbf{z})_{lin}$ konulursa, süreç varyansı $\text{Var}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})]$ için aşağıdaki yaklaşım elde edilir (Engel ve Huele, 1996: s. 98):

$$\text{Var}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})]_{lin} = \text{Var}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] - 2\text{tr}\{(\Theta\mathbf{V})^2\} \quad (5.41)$$

Bu sonuç hem eşitlik (5.35) hem de (5.40) için geçerlidir.

Engel ve Huele (1996: s. 98), $\text{tr}\{(\Theta\mathbf{V})^2\}$ ile ilgili olarak şu yorumları yapmışlardır: Basitlik açısından gürültü faktörleri arasında etkileşim olmadığı, dolayısıyla Θ 'nın köşegen matris olduğu ve \mathbf{V} 'nin de köşegen matris olduğu varsayılınsın. $\text{tr}\{(\Theta\mathbf{V})^2\}$ küçük ise doğrusal yaklaşım geçerlidir. Bu durumda, burada $\text{tr}\{(\Theta\mathbf{V})^2\} = \sum_i (\theta_{ii}\varphi_{ii})^2$ olduğu için, φ_{ii} ve θ_{ii} değerleri küçük ise doğrusal yaklaşım geçerlidir. Burada φ_{ii} i 'inci gürültü faktörünün varyansıdır.

5.7.8 Tek Sayıdan Oluşan Performans Cevap Yüzeyi Kriterleri

Ortalama ve varyans cevabı nosyonu, araştırmacı cevabın maksimizasyonu, cevabın minimizasyonu veya hedef değer en iyidir senaryolarının hangisi ile ilgilenirse ilgilenin cazip bir yaklaşım sunmaktadır. Bununla beraber, Myers, Khuri ve Vining (1992: s.137) ve Box ve Jones (1992: s. 268) tek bir anlamlı kriter olarak

$$L(\mathbf{x}) = E_z[\hat{y}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - T]^2 \quad (5.42)$$

ölçüsünün kullanılabileceğini belirtmişlerdir. (5.42) ile verilen ölçü hedef değer T 'ye olan yakınlığın bir ölçüsüdür. Daha küçük daha iyidir durumu için $L(\mathbf{x}) = E_z[\hat{y}(\mathbf{x}, \mathbf{z})]^2$ yazılabilir. Welch vd. (1990) kayıp fonksiyonu olarak

$$L(\mathbf{x}) = \int [\hat{y}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - T]^2 p(\mathbf{z})d\mathbf{z} \quad (5.43)$$

eşitliğini kullanmıştır. Burada $p(\mathbf{z})$ 'nin gürültü faktörlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Bu kayıp istatistiği, gürültü faktörlerinin dağılışı üzerindeki kayıp ölçüsünün bir ortalamasıdır (Welch, 1990: s.16). Box ve Jones (1992: s.274) kurt ürün nosyonunu genelleştirmiştir ve aşağıdaki performans kriterini tavsiye etmiştir:

$$R(\mathbf{x}) = \lambda V(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)B(\mathbf{x}) \quad (5.44)$$

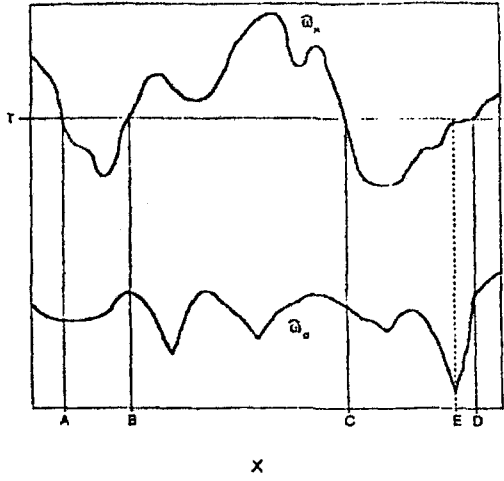
Burada $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere, $V(\mathbf{x}) = \text{Vâr}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})]$ süreç varyansı ve

$$B(\mathbf{x}) = \{E_z[\hat{y}(\mathbf{x}, \mathbf{z})] - T\}^2$$

hedef değerden sapmaların karesidir. Bu yaklaşımda varyans ve sapma değişik önem derecelerinde performans kriterine dahil edilebilmektedir. Box ve Jones (1992)'nin kriterine benzer bir kriter Lin ve Tu (1995: s. 38) tarafından verilmiştir:

$$L(\mathbf{x}) = \lambda_1 V(\mathbf{x}) + \lambda_2 B(\mathbf{x}) \quad (5.45)$$

Burada λ_1 ve λ_2 , varyans ve sapmanın önem derecelerine göre uygulamacı tarafından belirlenen pozitif sabitlerdir. $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = \infty$ olarak ele alındığında (5.45) eşitliği, Vining ve Myers (1990) ve DelCastillo ve Montgomery (1993) tarafından verilen optimizasyon problemine dönüşmektedir. Beklenen kaybın bir performans kriteri olarak kullanımının, Vining ve Myers (1990)'in dual cevap yaklaşımına göre olası avantajları Lin ve Tu (1995) tarafından belirtilmiştir. Bunun için Lin ve Tu (1995: s.35) hedef değer en iyidir durumu için Şekil 5.5'de verildiği şekilde ortalama ve varyans cevap yüzeylerini ele almışlardır. Burada hedef değer T 'dir. Vining ve Myers'in yaklaşımına göre $\hat{\mu}_z[y(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = T$ kısıt olarak alındığında dört nokta (A,B,C ve D) bu kısıtı sağlamaktadır. Bu noktalar arasında A minimum varyanslıdır ve böylece optimum koşulları vermektedir. Ancak Şekil 5.5 incelendiğinde E noktasının A'dan daha iyi bir seçim olabileceği görülmektedir. Hedef değerden küçük bir sapmaya göz yumulduğunda, varyansta büyük bir azalma söz konusudur. Eşitlik (5.44)'de verildiği şekilde bir kayıp yapısı söz konusu ise ve $\lambda = 0.5$ ise ya da eşitlik (5.45)'de verildiği gibi bir kayıp yapısı söz konusu ise ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ise, E noktasının kayıp $R(\mathbf{x})$ 'i veya $L(\mathbf{x})$ 'i minimize eden bir nokta olduğu söylenebilir.



Şekil 5-5. Örnek ortalama ve varyans cevap yüzeyleri (eğrileri).

Tek sayılı yaklaşımlar ile Taguchi yaklaşımı arasındaki farklılıklar, Myers, Khuri ve Vining (1992: s.137) tarafından şu şekilde açıklanmıştır: Taguchi'nin dışsal dizini bir bakıma sistemi mümkün olduğunca gürültülü yapmaktadır. Bu durumda sinyal-gürültü oranının maksimum yapılması, değişkenliğin en fazla olduğu durumda en iyi cevabın bulunması ile denktir. Diğer taraftan bu kesimde bahsedilen diğer teksayı yaklaşımları, ortalama ve varyans cevap yüzeylerinden hesaplanan beklenen kayıba dayanmaktadır. Bu yaklaşımlar, dışsal dizinin kullanımını gerektirmediği için, daha ekonomik olan bir birleşik dizin tasarımından elde edilen sonuçların analizi için kullanışlıdır.

5.7.9 Log Doğrusal Varyans Modeli

Bartlett ve Kendall (1946) klasik makalelerinde,

$$\log s_i^2 = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\gamma} + \varepsilon_i^* \quad , \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (5.46)$$

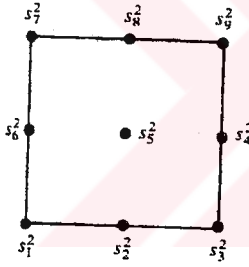
şeklindeki bir log doğrusal modelin kullanılmasıyla, varsayımlar ciddi bir şekilde zayıflamadığında, varyans modellemesinin başarılabileceğini ispatlamışlardır. Burada s_i^2 , d tasarım noktasının herbirinde alınan n gözlemden elde edilen örnek varyansdır. Ortalama modelin etrafındaki hatalar normal dağılış gösteriyorsa, diğer bir deyişle

$$y_{ij} = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{ij} \sigma_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, d; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ve burada $\varepsilon_{ij} \sim N(0,1)$ ve $\ln \sigma_i^2 = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\gamma}$ ise, eşitlik (5.46)'daki modelin kullanılmasıyla yaklaşık olarak sabit varyanslı normal dağılış gösteren hatalara ulaşılır. Böylece sıradan en küçük kareler, varyansın bir log doğrusal tip prosedür ile tahminlenmesi için uygun olabilir (Myers ve Montgomery, 1995: s. 508). Carroll ve Rubbert (1988) varyansın modellenmesi ile ilgili detayları tartışmaktadır.

1980'lerin başlarındaki kalite akımı ve Taguchi'nin süreç varyansının kontrolü nosyonu doğrultusundaki etkisi, log doğrusal yaklaşım ile varyans modellemesi fikrini yeniden canlandırmıştır. Örneğin bir $3^2 \times 2^2$ çaprazlanmış dizinde, örnek varyansları her bir içsel dizin noktasındaki dört gözlemden hesaplanmaktadır. Şekil 5.6'da da verildiği gibi dokuz adet örnek varyansı elde edilir ve örnek varyansları için model aşağıda verildiği gibi yazılabilir:

$$\ln s_i^2 = f(x_{1i}, x_{2i}) + \varepsilon_i^* \quad i = 1, 2, \dots, 9$$



Şekil 5-6. Dokuz adet varyans.

Bu modelde Myers ve Montgomery (1995: s.509) $f(x_{1i}, x_{2i})$ 'nin kontrol faktörleri cinsinden ikinci derece terimleri de içerebileceğini belirtmiştir.

Varyans homojenliği ve normallik varsayımı için rolünden başka, log doğrusal varyans modelinin kullanılması model yapısında basitliği sağlar. Log transformasyonu genellikle eğrisel ve etkileşim terimlerini indirgemektedir. Bu yaklaşım, gürültü faktörlerinin bilinmediği veya ölçülemediği durumlarda da kullanılabilir. Bu yaklaşımın bir dezavantajı kullanılan tasarımın bir çaprazlanmış dizin olması zorunluluğudur; ayrıca varyans modelinin kalitesi, dışsal dizindeki gözlem sayısı fazla olduğunda en iyi olduğu için, başarılı sonuçlar nispeten daha yüksek maliyetler ile elde edilmektedir (Myers ve Montgomery, 1995: s.509).

Bir log doğrusal varyans modelinin uyumu yapıldığında, dışsal dizindeki verilerden elde edilen aritmetik ortalamalar ile ortalama cevap yüzeyi modeli bulunabilir. Böylece Kesim 5.7.2’de açıklanan dual cevap yaklaşımı kullanılarak optimum koşullar bulunabilir.

5.8 YÜKSEK KESİRLİ TASARIMLARDA YAYILMA ETKİLERİNİN TESPİT EDİLMESİ VE HESAPLANMASI

Gürültü faktörlerinin kontrolunun yetersiz olduğu durumlarda varyansın modellenmesi söz konusu olabilir. Bununla beraber, araştırmacının gürültü faktörlerini ölçemediği veya gürültü faktörlerinin varlığının farkında olmadığı durumlar olabilir. Her durumda bir veya daha fazla kaynaktan gelen varyans heterojenliği söz konusu olmaktadır. Eğer bir pilot deneyin uygulanması ve gelecek deneyler için bir yön aranması söz konusu ise yayılma etkilerinin tespit edilmesi genellikle önemlidir. Faktörlerin A , B ve C olduğu bir 2^3 faktöryel deney ele alındığında, en hızlı artış yöntemi ile başka bir deney bölgesine hareket edilmek istenebilir. Hesaplanan etkiler aşağıdaki gibi olsun:

$$A: + 7.5$$

$$B: + 4.7$$

$$C: - 3.5$$

Bu hesaplanmış etkiler yer etkileridir. Bu durumda, gelecek deneyler A ’da artış, B ’de artış ve C ’de azalışı içeren bölgede gerçekleşecektir. Bununla beraber, A ’daki artış cevap varyansında artışa yol açabilir. Bu durumda A , yer etkisi olduğu gibi aynı zamanda bir yayılma etkisidir. Böylece A ’nın yüksek seviyelerine doğru ilerletilmesi düşünülürken, ortalama-varyans uzlaşmasının gerçekleşmesi gereklidir.

Önceki kesimlerde, bir kontrol faktörünün, herhangi bir gürültü faktörü ile etkileşimli olduğunda, bir yayılma faktörü olarak farkedilebildiği açıklanmıştı. Bu kesimde ele alınan konu ise, problemde bir gürültü faktörü bulunmasının zorunlu olmadığı ve hala yayılmayı etkileyen faktörlerin tespitinin gerekli olduğu durumlardır.

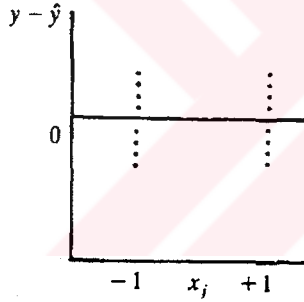
5.8.1 Artıkların Kullanılması

Artıklar (residuals) açıklanamayan değişkenlik hakkında dikkate değer bilgiler vermektedir. Artıklar grafiksel olarak incelendiğinde model varsayımlarındaki

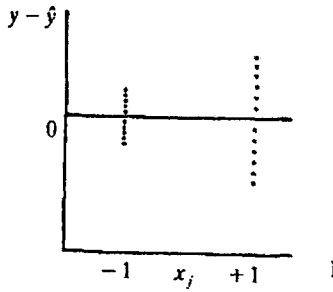
varsayımların zayıflayıp zayıflamadığı hakkında bilgi edinilebilir. Artıkların analizi ile ilgili detaylar için Draper ve Smith (1981: Bölüm 3) ve Myers (1990: Bölüm 5)'e başvurulabilir. En önemli varsayım zayıflamaları ise şunlardır (Myers ve Montgomery, 1995: s.516):

1. Modelin fonksiyonel biçimi yanlış belirlenmiştir.
2. Varyans heterojenliği varolabilir.

İki seviyeli bir tasarım olması durumunda artıkların bir faktörün seviyelerine karşı grafiği şekil 5.7'deki gibi olsun. Bu grafiğe bakıldığında x_j 'nin bir yayılma etkisi olduğuna dair bir gösterge yoktur. Diğer taraftan artıkların faktör seviyelerine karşı grafiği Şekil 5.8'deki gibi olabilir. Bu şekilde bakıldığında ise x_j 'nin yüksek seviyesindeki model hata varyansının, düşük seviyedekinden daha yüksek olduğu görülmektedir. Burada tutarlı bir ürün için x_j 'nin düşük seviyesi tercih edilir.



Şekil 5-7. Artıkların bir faktör seviyesine karşı grafiği.



Şekil 5-8. Artıkların bir faktör seviyesine karşı grafiği.

Artıkların, artık grafiklerinin ve diğer tanı araçlarının yayılma etkilerini bulmada kullanılması esas olarak uyumu yapılmış ortalama modelden etkilenmektedir. Bunun nedeni kullanılan artıkların ortalama modelden elde edilmesidir. Yayılma etkilerinin tespit edilmesi ortalama için uyumu yapılmış modelin fonksiyonel biçiminin doğru olması varsayımına bağlıdır.

5.8.2 Artıklardan Elde Edilen Diğer Tanısal Bilgiler

Önceki kesimde verilen örnekten açıkça görüldüğü gibi, ürün veya süreç varyansının homojen olmasından ziyade, faktör seviyelerine bağlı olup olmadığının bulunması önemlidir. Başka bir örnek olarak bir araştırmacı grafiklerden hata varyansının $x_3 = +1$ noktası haricinde sabit olduğu sonucuna varmış olsun. Böyle bir sonuç tespit edildiğinde araştırmacının bilimsel bir açıklaması olması beklenir. x_3 'ün bir yayılma etkisi olduğunu söylemek, varyanstaki değişimin anlamlı olduğunu göstermek ile mümkündür.

Bir faktörün (i faktörü) bir yayılma etkisi olup olmadığını tespit etmek için kullanılan bir tanısal istatistik Box ve Meyer (1986) tarafından

$$F_i^* = \ln \left(\frac{s_{i+}^2}{s_{i-}^2} \right) \quad (5.47)$$

şeklinde verilmiştir (Myers ve Montgomery, 1995: s.518). Burada s_{i+}^2 , i faktörü yüksek seviyede tutulduğunda artıkların örnek varyansı ve s_{i-}^2 , i faktörü düşük seviyede tutulduğunda artıkların örnek varyansıdır. Bu istatistiğin değerinin sıfır veya sıfır civarında olması, söz konusu faktörün iki seviyesi için artıklardaki yayılmanın anlamlı derecede farklı olmadığı anlamına gelir; pozitif veya negatif olarak büyük değerler alması durumunda, söz konusu faktörün bir yayılma etkisi olduğuna dair bir gösterge mevcuttur. Büyük pozitif değerler $\sigma_{i-}^2 > \sigma_{i+}^2$, büyük negatif değerler $\sigma_{i+}^2 < \sigma_{i-}^2$ olduğunun göstergesidir. Eşitlik (5.47)'deki F_i^* değerleri bir test istatistiği olarak kullanılmamakla beraber $H_0 : \sigma_{i-}^2 = \sigma_{i+}^2$ hipotezi altında F_i^* değerleri yaklaşık olarak ortalaması 0 ve varyansı sabit bir değer olan normal dağılım gösterdiği için oldukça kullanışlı bir tanısal istatistik olabilir. Bu istatistik bir nümerik tanısal istatistik olarak kullanılabilir ve F_i^* değerleri normal olasılık kağıdı ile incelenebilir (Myers ve Montgomery, 1995: s.518).

5.8.3 Varyans Modellemesi İle İlgili Diğer Yorumlar

Süreç değişkenliğinin ana kaynakları genellikle gürültü faktörlerinden gelmektedir. Bu durumda, bir birleşik dizinin kullanılması ile x ve z cinsinden bir cevap yüzeyi, bu cevap yüzeyinden ortalama ve varyans için cevap yüzeylerinin elde edilebileceği Kesim 5.7.1'de verilmiştir. Varyans modellemesinde başka bir yaklaşım log doğrusal modeldir. Burada $\ln(s^2)$ cevap olmaktadır ve s^2 çaprazlanmış dizindeki dışsal dizin ile ortaya çıkan örnek varyansı olarak görülmektedir; ancak s^2 her zaman bu şekilde bulunmayabilir. İki seviyeli bir tasarımda ve tekrarlı gözlemlerden s^2 hesaplanabilir. Diğer bir ifadeyle, tasarımda gürültü değişkenleri olmadığı veya ölçülemediğinde sabit olmayan bir varyans söz konusu olduğunda

$$\ln s_i^2 = f(x_i) + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (5.48)$$

modeli kullanılarak yayılma etkileri modellenebilir. Çok sayıda faktörün bulunduğu deneylerde mali kısıtlardan dolayı, tekrarlı gözlemlerin olmadığı yüksek kesirli bir iki seviyeli tasarım kullanılabilir. Bu durumda artıkların kullanımı yayılma etkileri hakkında fikir verebilir.

5.8.4 Tekrarlı Gözlemlenmiş Durumlarda Yayılma Etkileri

Myers ve Montgomery (1995: s.526) her bir noktada n gözlemin alındığı iki seviyeli bir faktöryel veya kesirli faktöryel tasarımı ele almıştır. Burada uyumu yapılacak model bir log doğrusal model olabilir:

$$\ln(s_i^2) = \gamma_0 + \gamma_1 x_{i1} + \gamma_2 x_{i2} + \dots + \gamma_k x_{ik} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (5.49)$$

Bu durumda Myers ve Montgomery, tekrarlı gözlemlerin süreç varyansı hakkında, artıklardan daha güvenilir bilgi verdiğini belirtmişlerdir.

Eşitlik (5.49)'daki γ_i 'lerin en küçük kareler tahminleyicileri

$$\hat{\gamma} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{e} \quad (5.50)$$

şeklinindedir. Burada \mathbf{e} , $\log s^2$ değerlerinden oluşan bir vektördür. \mathbf{X}' matrisinin satırları +1 ve -1 değerlerinden oluştuğu için ve dolayısıyla $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = (1/d)\mathbf{I}$ olduğu için, eşitlik (5.49)'daki parametre tahminleyicileri

$$\hat{\gamma}_0 = \overline{\ln s^2}$$

$$\hat{\gamma}_i = \left[\sum_{j=i-} \ln s_j^2 - \sum_{j=i+} \ln s_j^2 \right] / d \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (5.51)$$

şeklinde elde edilebilirler. Burada $\sum_{j=i-}$ ifadesi, i 'inci değişkenin +1 seviyesindeki $\ln s^2$ değerlerinin toplandığı, $\sum_{j=i+}$ ifadesi ise i 'inci değişkenin -1 seviyesindeki $\ln s^2$ değerlerinin toplandığı anlamına gelmektedir. Ayrıca $\overline{(\ln s^2)}$ tüm $\ln s^2$ 'lerin ortalamasıdır. Regresyon katsayıları ve etkiler arasındaki ilişkiden, yayılma etkileri

$$(\text{Yayılma etkisi})_i = \left[\overline{(\ln s^2)}_{i+} - \overline{(\ln s^2)}_{i-} \right], \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (5.52)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\overline{(\ln s^2)}_{i+}$, i 'inci değişkenin düşük seviyesindeki $\ln s^2$ 'lerin ortalamasıdır. Normal olasılık kağıdı önemli yayılma etkilerini ortaya çıkarmak için kullanılabilir. Bu etkiler için sabit varyanslı normallik varsayımı sağlanmaktadır.

Eşitlik (5.52)'deki yayılma etkisinden başka, başka bir yayılma etkisi Myers ve Montgomery (1995: s.527) tarafından önerilmiştir:

$$\begin{aligned} (\text{Yayılma etkisi}^*)_i &= \ln \left[\sum_{j=i+} s_j^2 \right] - \ln \left[\sum_{j=i-} s_j^2 \right] \\ &= \ln \left[\frac{\overline{s_{i+}^2}}{\overline{s_{i-}^2}} \right] \end{aligned} \quad (5.53)$$

Bu etki, önceki kesimde tekrarsız deneyler için önerilen yayılma etkisi F^* 'a benzemektedir.

5.8.5 Tekrarsız Deneylerde Yayılma Etkileri

İki seviyeli tekrarsız bir faktöryel deney ele alınsın ve N gözlemin modeli

$$y_i = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i^* \sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.54)$$

şeklinde kabul edilsin. Burada $\varepsilon_i^* \sim N(0,1)$ ve

$$\ln \sigma_i^2 = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\gamma} \quad (5.55)$$

olduğu varsayılmaktadır. Burada \mathbf{x} değiştikçe standart sapmanın da değişeceği açıktır. Eşitlik (5.55) ile verilen model, eşitlik (5.54)'deki tüm değişkenlerin varyans modelinde bulunması gerektiği anlamına gelmez. (5.54) modelindeki hatanın dağılışı diğer bir deyişle

$$\varepsilon_i = y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}$$

nın dağılışı ele alındığında $\varepsilon_i^2 \sim \sigma_i^2 \chi_1^2$ olduğu bilinmektedir. Buradan

$$\ln \varepsilon_i^2 = \ln \sigma_i^2 + \ln \chi_1^2 \quad (5.56)$$

yazılabilir (Myers ve Montgomery, 1995: s.528). Böylece eşitlik (5.56), i 'inci karesel artığın log'u için bir model olarak görülebilir. Sonuç olarak log karesel artık için yaklaşık model

$$\ln e_i^2 \cong \ln \sigma_i^2 + \ln \chi_1^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\ln \chi_1^2$, ortalaması yaklaşık olarak sıfır olan ve sabit varyanslı bir yaklaşık normal şans değişkenidir (Myers ve Montgomery, 1995: s.528). Myers ve Montgomery, eşitlik (5.56)'dan

$$\ln e_i^2 = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\gamma} + \tilde{\varepsilon}_i \quad (5.57)$$

yazılabileceğini ve burada $\tilde{\varepsilon}_i$ 'nin yaklaşık olarak beklenen değerinin 0, varyansının 2 olduğunu belirtmiştir. Eşitlik (5.57)'deki parametrelerin tahminleri ise aşağıdaki eşitliklerden elde edilebilir:

$$\tilde{\gamma}_0 = \overline{\ln e^2}$$

$$\hat{\gamma}_i = \left[\sum_{j=i+} \ln e_j^2 - \sum_{j=i-} \ln e_j^2 \right] / N$$

Sonuç olarak herhangi bir yayılma etkisi $2\hat{\gamma}_i$,

$$(\text{Yayılma etkisi})_i = \left[\overline{\ln e^2} \right]_{i+} - \left[\overline{\ln e^2} \right]_{i-} \quad (5.58)$$

şeklinde elde edilebilir. Burada $\overline{\ln e^2}$, log karesel artığın ortalamasını göstermektedir. Burada yine normal olasılık kağıdı kullanılarak, önemli yayılma etkilerinin olup olmadıkları incelenebilir.

Tekrarsız deneylerde başka bir olası yayılma etkisi, eşitlik (5.47)'deki F_i^* 'a benzer şekilde

$$F = \left[\ln \sum_{j=i+} e_j^2 - \ln \sum_{j=i-} e_j^2 \right] / N = \ln \left[\frac{\sum_{j=i+} e_j^2}{\sum_{j=i-} e_j^2} \right] \quad (5.59)$$

olarak hesaplanabilir (Myers ve Montgomery, 1995: s.528).

5.9 ÇEKİCİLİK FONKSİYONUNUN PARAMETRE TASARIMI PROBLEMLERİNE UYARLANMASI

Myers, Khuri ve Vining (1992), Vining ve Myers (1990), Montgomery ve DelCastillo (1993) ve Myers ve Montgomery (1995) Taguchi'nin parametre tasarımında dual cevap yaklaşımın ve doğrusal olmayan programlama tekniklerinin kullanımını önermişlerdir. Bu yaklaşımlar eşitlik veya eşitsizlik kısıtları altında bir amaç fonksiyonunun (birincil cevap) maksimizasyonu ile ilgilidir. Kesim 4.5'te verilen çekicilik fonksiyonu yaklaşımı ise aynı anda birden çok sayıda cevabın eş anlı maksimizasyonunu ve / veya minimizasyonunu sağlayan yaklaşımlar olarak önerilmiştir. Gerçekte parametre tasarımı problemlerinde amaç, daha büyük daha iyidir durumunda süreç ortalamasını maksimize ve süreç varyansını minimize etmektedir. Benzer şekilde daha küçük daha iyidir durumunda amaç hem süreç ortalamasını hem de süreç varyansını minimize etmektir. Hedef değer daha iyidir durumlarına ise Vining ve Myers'in yaklaşımı kalite karakteristiğinin hedef değeri etrafındaki toleransını dikkate almamaktadır.

Çekicilik fonksiyonu yaklaşımı, Vining ve Myers'in ve Myers ve Montgomery'nin kullandığı yaklaşımlardaki yukarıda bahsedilen dezavantajları ortadan kaldıracak bir yaklaşım olarak görünmektedir. Parametre tasarımı problemindeki durumlar için çekicilik fonksiyonunun uyarlanması aşağıdaki paragraflarda verildiği gibi gerçekleştirilebilir.

5.9.1 Daha Büyük Daha İyidir Durumu

Daha büyük daha iyidir durumu için iki cevap değişkeni süreç ortalaması ve süreç varyansının çekicilik değeri d_1 'ye transformasyonları aşağıdaki gibi gerçekleştirilebilir. Aşağıdaki eşitliklerde basitlik olması bakımından süreç ortalaması $\hat{E}(y)$, süreç varyansı $\text{Vâr}(y)$ ile gösterilmiştir.

Süreç ortalaması için çekicilik değeri d_1 aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$d_1 = \begin{cases} 0 & \hat{E}(y) \leq E(y)_* \\ \left[\frac{\hat{E}(y) - E(y)_*}{E(y)^* - E(y)_*} \right]^n & E(y)_* < \hat{E}(y) < E(y)^* \\ 1 & \hat{E}(y) \geq E(y)^* \end{cases} \quad (5.60)$$

Burada süreç ortalamasının $E(y)_*$ ve daha altında kalan değerleri ürünün kabul edilemez olmasına yol açar. Diğer bir deyişle $E(y)_*$ süreç ortalaması için alt tolerans sınırı olarak kabul edilebilir. $E(y)^*$ ise, $\hat{E}(y)$ 'nin bu değeri aşmasının ürün kalitesi üzerinde fazla önemli olmadığı, veya teknolojik kısıtlar nedeniyle aşılmasına imkan bulunmayan bir değerdir. Transformasyonda kullanılan n değeri Kesim 4.5.1'deki açıklamalar dikkate alınarak uygulayıcı tarafından belirlenebilir (Buradaki n değeri önceki kesimlerde verilen n ile karıştırılmamalıdır.). $\hat{E}(y)$ 'nin arzu edildiği değere çok yakın olması isteniyorsa, n 'in büyük bir değeri (örneğin $n = 10$) seçilir. Diğer bir deyişle $E(y)_*$ değerinin aşılması ürünün kabul edilebilir olması yeterli olsa bile, $\hat{E}(y)$ 'nin $E(y)_*$ 'dan önemli ölçüde büyük olması durumunda ürünün çekicilik değeri büyük ölçüde artar. Diğer taraftan $\hat{E}(y)$ 'nin $E(y)^*$ 'ın çok üzerinde olması fazla bir anlam ifade etmiyorsa n 'in küçük bir değeri (örneğin $n = 0.1$) belirlenebilir.

Süreç varyansının çekicilik değeri d_2 ise aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$d_2 = \begin{cases} 0 & \text{Vâr}(y) \geq \sigma_0^2 \\ \left[\frac{\sigma_0^2 - \text{Vâr}(y)}{\sigma_0^2 - \sigma_*^2} \right]^n & \sigma_0^2 > \text{Vâr}(y) > \sigma_*^2 \\ 1 & \text{Vâr}(y) \leq \sigma_*^2 \end{cases} \quad (5.61)$$

Burada σ_0^2 , varyansın üst tolerans sınırı olup, bu değerin aşılması durumunda ürün kabul edilmezdir. σ_*^2 ise varyans için bir alt sınırdır. Varyansın bu değerin altına düşmesi ürün kalitesi açısından fazla önemli değildir. Uygulamalarda bu değer sıfır veya sıfıra yakın bir değer olarak alınabilir. n değeri ise yine uygulayıcı tarafından belirlenebilir. Eğer σ_0^2 'nin çok altında bir değer olması fazla bir anlam ifade etmiyorsa n 'nin küçük bir değeri belirlenebilir. σ_0^2 'in çok altında bir varyans değeri arzu ediliyor ise n 'nin büyük bir değeri kullanılmalıdır. Buradan genel çekicilik fonksiyonu

$$D = (d_1 \times d_2)^{1/2} \quad (5.62)$$

şeklinde yazılabilir.

Kunt parametre tasarımında çekicilik fonksiyonu yaklaşımının dual cevap yaklaşımları yerine kullanılmasının olası bir avantajı, bir örnek ile açıklanabilir: Farzedelim ki bir radyatör hortumunun gerilme kuvvetinin maksimizasyonu istensin. Gerilme kuvvetinin ortalamasının kabul edilebilir en küçük değeri $E(y)^* = 1500$ psi olsun. Ayrıca kabul edilebilir en büyük varyans değeri $\sigma_0^2 = 100$ olsun. Bu durumda dual cevap yaklaşıma göre parametre tasarımı problemi çözülmek istendiğinde

$$\text{Max } \hat{E}(y)$$

$$\text{kısıt: } \hat{V}ar(y) \leq 100$$

şeklindeki bir optimizasyon probleminin çözülmesi söz konusudur. Parametre tasarımının böyle bir optimizasyon problemi şeklinde çözülmesi ile, örneğin $\sigma_0^2 = 100$ olduğunda $\hat{V}ar(y) = 100$ ile $\hat{V}ar(y) = 50$ gibi iki değer arasında hiçbir fark yoktur. Oysa gerçekte ürünün performansı açısından, $\hat{V}ar(y) = 100$ değeri kabul edilebilir olduğu halde, $\hat{V}ar(y) = 50$ gibi bir değer çok daha ideal olabilir. Dual cevap yaklaşımına göre $\hat{V}ar(y) \leq 100$ kısıtını sağlayan $\text{max } \hat{E}(y)$ değeri 1805 psi ise ve bu koşullar setinde $\hat{V}ar(y) = 100$ ise, örneğin $\hat{E}(y) = 1795$ psi ve $\hat{V}ar(y) = 50$ gibi daha ideal sayılabilecek bir sonuç veren koşullar setini seçme şansı olmayacaktır. Çekicilik fonksiyonu yaklaşımında ise d_i transformasyonunun yapısının uygulayıcı tarafından uygun bir şekilde belirlenmesi ile bu tip problemlerin üstesinden gelmek mümkündür.

5.9.2 Daha Küçük Daha İyidir Durumu

Daha küçük daha iyidir durumunda süreç ortalaması ve süreç varyansının eş anlı olarak minimizasyonu için d_i değerleri aşağıdaki gibi belirlenebilir:

Süreç ortalaması için d_1 transformasyonu

$$d_1 = \begin{cases} 0 & \hat{E}(y) \geq E(y)_* \\ \left[\frac{E(y)_* - \hat{E}(y)}{E(y)_* - E(y)^*} \right]^n & E(y)_* > \hat{E}(y) > E(y)^* \\ 1 & \hat{E}(y) \leq E(y)^* \end{cases} \quad (5.63)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $E(y)_*$, süreç ortalaması için üst tolerans sınırı ve $E(y)^*$, $\hat{E}(y)$ 'nin bu değerin altında olmasının ürün kalitesi üzerinde fazla önemli olmadığı veya teknolojik kısıtlar nedeniyle ortaya çıkan bir alt değerdir. n parametresi Kesim 5.9.1'de açıklandığı gibi seçilebilir.

Süreç varyansı için d_2 transformasyonu eşitlik (5.61)'de verildiği gibi yazılabilir. Burada genel çekicilik D , yine eşitlik (5.62)'de verildiği gibi hesaplanabilir.

5.9.3 Hedef Değer En İyidir Durumu

Hedef değer daha iyidir durumunda süreç ortalaması ve süreç varyansı için çekicilik değerleri d_i 'ler aşağıdaki gibi elde edilebilir:

Süreç ortalaması için çekicilik değeri d_1 ,

$$d_1 = \begin{cases} \left[\frac{\hat{E}(y) - E(y)_*}{T - E(y)_*} \right]^s & E(y)_* \leq \hat{E}(y) \leq T \\ \left[\frac{\hat{E}(y) - E(y)^*}{T - E(y)^*} \right]^t & T < \hat{E}(y) \leq E(y)^* \\ 0 & \hat{E}(y) < E(y)_* \text{ veya } \hat{E}(y) > E(y)^* \end{cases} \quad (5.64)$$

şeklinde yazılabilir. Burada T , süreç ortalaması için hedef değer; $E(y)_*$ alt tolerans sınırı ve $E(y)^*$ üst tolerans sınırıdır. Buradaki s ve t , hedef değere çok yakın bir ortalama değer elde edilmek isteniyorsa büyük olarak seçilmelidir. Hedef değere yakın olmanın çok

önemli olmadığı, diğer bir deyişle tolerans sınırları içerisinde kalmanın yeterli olduğu durumlarda s ve t için küçük değerler seçilebilir. Eşitlik (5.64)'deki transformasyon asimetrik toleranslar söz konusu olduğunda da kullanılabilir. Hedef değer T 'nin altında veya üstünde elde edilen $\hat{E}(y)$ 'ler için farklı yapıda kayıplar söz konusu ise, s ve t 'nin değerleri farklı olarak seçilebilir.

Süreç varyansı için çekicilik değeri d_2 , eşitlik (5.61)'de verilen transformasyon ile elde edilebilir. Genel çekicilik D ise yine eşitlik (5.62)'de olduğu gibi hesaplanabilir.

5.10 GENELLEŞTİRİLMİŞ UZAKLIK YAKLAŞIMININ PARAMETRE TASARIMI PROBLEMLERİNE UYARLANMASI

Kesim 4.6'da verilen genelleştirilmiş uzaklık, çok cevaplı süreçlerin optimizasyonunda kullanılan ve cevapların eş anlı maksimizasyonu ve / veya minimizasyonuna imkan veren bir yaklaşım olarak bilinmektedir. Parametre tasarımı problemlerine genelleştirilmiş uzaklık yaklaşımının uygulanabilmesi için öncelikle $\hat{E}(y)$ ve $V\hat{a}r(y)$ modellerinin aynı girdi değişkenlerinin aynı derecedeki terimlerine bağlı olması gerekmektedir. Örneğin bir çaprazlanmış dizin veya bir tekrarlı 3^k faktöryel tasarım kullanıldığında dışsal dizindeki veya tekrarlı gözlemlerden elde edilen \bar{y}_i ve $\log s_i^2$ 'ler ($i = 1, 2, \dots, d$) kontrol faktörleri cinsinden birinci ve ikinci derece terimleri içeren polinomlar ile temsil edilebiliyorsa, genelleştirilmiş uzaklık yaklaşımı kullanılabilir. \bar{y} ve $\log s^2$, ortalama ve varyans değerlerinin oluşturduğu vektörler olmak üzere $y = [\bar{y}; \log s^2]$ alındığında ve eşitlik (4.45), (4.46), (4.47), (4.48) ve (4.49)'da yerine konulduğunda, eşitlik (4.51) ve (4.52) ile verilen uzaklık fonksiyonları kullanılabilir. Burada seçilecek ϕ_i değerleri deneyin amaçlarına göre belirlenebilir. Daha büyük daha iyidir, daha küçük daha iyidir ve hedef değer en iyidir durumlarının herbirinde varyans minimize edilmek istendiği için, ϕ_i değeri varyansın sırt analizi ile elde edilen minimumu olabilir. Ayrıca daha büyük daha iyidir ve daha küçük daha iyidir durumlarında ortalama için ideal ϕ_i değeri yerine yine ortalamanın sırt analizinden elde edilen bireysel maksimum veya minimum değerleri kullanılabilir. Hedef değer en iyidir durumunda ise ϕ_i yerine hedef değer T kullanılabilir.

5.11 GÖRELİ UZAKLIK YAKLAŞIMININ PARAMETRE TASARIMI PROBLEMLERİNE UYARLANMASI

Kesim 4.7'de verilen görelî uzaklık fonksiyonu, çok cevaplı süreçlerin optimizasyonunda kullanılabilir bir yaklaşım olarak önerilmiştir. Görelî uzaklık fonksiyonu yaklaşımı, Taguchi problemlerinin çözümünde aşağıdaki alt kesimlerde açıklandığı şekilde kullanılabilir. Burada süreç ortalamasının ideal değerinden uzaklığı h_1 ve süreç varyansının ideal değerinden uzaklığı h_2 olmak üzere, genel görelî uzaklık,

$$H = \left[\sum_{i=1}^2 d_i \right]^{1/2} \quad (5.65)$$

şeklinde yazılabilir.

5.11.1 Daha Büyük Daha İyidir Durumu

Burada amaç, eş anlı olarak süreç ortalamasını büyütürken, varyansı indirmektedir. Böylece,

$$h_1 = \frac{(\hat{E}(y) - A_1)^2}{(A_1 - B_1)^2} \quad (5.66)$$

ve

$$h_2 = \frac{(\text{Vâr}(y) - B_2)^2}{(A_2 - B_2)^2} \quad (5.67)$$

yazılabilir. Burada A_1 ve B_1 süreç ortalamasının maksimum ve minimum değerleri ve A_2 ve B_2 süreç varyansının maksimum ve minimum değerleridir.

5.11.2 Daha Küçük Daha İyidir Durumu

Burada amaç, eş anlı olarak süreç ortalaması ve varyansını azaltmaktır. Böylece,

$$h_1 = \frac{(\hat{E}(y) - B_1)^2}{(A_1 - B_1)^2} \quad (5.68)$$

yazılabilir. h_2 ise eşitlik (5.67)'de verildiği gibidir.

5.11.3 Hedef Değer En İyidir Durumu

Burada amaç, süreç varyansını azaltırken, süreç ortalamasını hedef değer T 'ye yaklaştırmaktır. Böylece,

$$h_1 = \frac{(\hat{E}(y) - T)^2}{d^2} \quad (5.69)$$

yazılabilir. Burada,

$$d = \max\{A_1 - T, T - B_1\} \quad (5.70)$$

şeklinde. h_2 ise eşitlik (5.67)'de verildiği gibidir.

5.12 ÇOK CEVAPLI DURUMLARDA KUNT TASARIM

Birden çok sayıda cevap değişkeninin bulunduğu durumlarda kunt parametre tasarımı problemlerinin çözümü için Phadke vd. (1983), değişik cevap değişkenleri için herhangi bir faktörün değişik seviyelerinde optimuma ulaşıldığında, mühendislik bilgilerinin bu zıtlaşmaları önleme amacı ile kullanılabileceğini belirtmiştir. Ayrıca Phadke vd. (1983) bu tip süreçlerin optimizasyonunda aşağıdaki gibi bir iki-aşamalı prosedürün uygulanmasını önermiştir:

- (i) Her bir cevap değişkenine karşılık gelen kontrol faktörlerinden SN oranları üzerinde etkisi olanları bulunuz ve bu faktörlerin optimum seviyelerini ayrı ayrı bulunuz. Değişik cevap değişkenleri tarafından tavsiye edilen optimum seviyeler arasında zıtlıklar var ise, mühendislik bilgilerini bu zıtlıkları çözmek için kullanınız.
- (ii) Tüm cevap değişkenleri için SN oranları üzerinde en az etkisi olan (tercihen etkisi olmayan), ancak ortalama seviyeler üzerinde anlamlı bir etkisi olan bir faktörü (ayar faktörü) seçiniz. Ardından ortalama cevapları hedef değerlerine taşımak için ayar faktörünün seviyelerini belirleyin. Burada ortaya zıtlıkların çıkması durumunda mühendislik bilgilerini bu zıtlıkları çözmek için kullanınız.

Yukarıda verilen prosedür, uygulanması basit olmakla beraber, çok sayıda kontrol faktörü ve cevap değişkeni içeren sistemlerde, kontrol faktörlerini SN oranlarını etkileyenler ve ortalama cevabı etkileyenler şeklinde ayırmak mümkün olmayabilir.

Ayrıca, Taguchi yaklaşımı ile her zaman, deney için belirlenen kontrol faktörü seviyelerinden bazıları sonuçta optimum seviyeler olarak bulunduğu için, böyle bir prosedür ile elde edilen koşullar setinin optimum koşullar olarak tanımlanması zordur.

Bu güçlükleri ortadan kaldırmak için, tek cevaplı durumlarda olduğu gibi çok cevaplı durumlarda da cevap yüzeyi yöntemleri kullanılabilir. Bir ürünün r adet kalite karakteristiğinin (cevabın) herbirinin, r_x adet kontrol değişkeni ve r_z adet gürültü değişkeni ile ilişkili olduğu varsayımı altında,

$$y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_{r_x}, z_1, z_2, \dots, z_{r_z}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5.71)$$

şeklinde ifade edilebilir. r adet cevap bulunan bir durumda bilinmeyen kayıp fonksiyonu $L(\mathbf{y})$, cevap y_i 'lerin oluşturduğu vektör \mathbf{y} ve hedef değer T_i 'lerin ($i = 1, 2, \dots, r$) oluşturduğu vektör \mathbf{T} olmak üzere, kayıp $L(\mathbf{y})$ 'nin \mathbf{T} etrafındaki ikinci derece Taylor serisi açılımı

$$L(\mathbf{y}) = L(\mathbf{T}) + \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{T}} \right]' (\mathbf{y} - \mathbf{T}) + \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{T})' \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}'} \Big|_{\mathbf{T}} \right] (\mathbf{y} - \mathbf{T}) \quad (5.72)$$

şeklinde dir. \mathbf{T} 'deki kayıp sıfır ve birinci türev de \mathbf{T} 'de yine sıfır olduğu için eşitlik (5.72)

$$L(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{T})' \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}'} \Big|_{\mathbf{T}} \right] (\mathbf{y} - \mathbf{T}) \quad (5.73)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik (5.73)'de

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}'} \Big|_{\mathbf{T}} \right]$$

alınırsa çok değişkenli kayıp fonksiyonu

$$L(\mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \mathbf{T})' \mathbf{K} (\mathbf{y} - \mathbf{T}) \quad (5.74)$$

olarak yazılabilir. Burada \mathbf{K} , $r \times r$ boyutlu kuadratik formu türeten simetrik ve pozitif tanımlı bir matristir. Bu eşitlik, eşitlik (5.1) ile verilen tek değişkenli kayıp fonksiyonunun genelleştirilmiş bir biçimi olarak düşünülebilir. Eşitlik (5.74) ile verilen çok değişkenli kayıp fonksiyonu kavramı yeni olmayıp, daha önce Kotz ve Johnson (1993) tarafından

çok değişkenli süreç yeterlilik indekslerinin kurulmasında kullanılmıştır. Örneğin $r = 2$ için

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & \frac{k_{12}}{2} \\ \frac{k_{12}}{2} & k_{22} \end{bmatrix}$$

olmak üzere eşitlik (5.74),

$$\begin{aligned} L(\mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} y_1 - T_1 & y_2 - T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & \frac{k_{12}}{2} \\ \frac{k_{12}}{2} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - T_1 \\ y_2 - T_2 \end{bmatrix} \\ &= k_{11}(y_1 - T_1)^2 + k_{22}(y_2 - T_2)^2 + k_{12}(y_1 - T_1)(y_2 - T_2) \end{aligned} \quad (5.75)$$

şeklinde yazılabilir. Burada k_{11} , k_{22} ve k_{12} değerleri eşitlik (5.1)'deki k 'ya karşılık gelmektedir. Eşitlik (5.74)'den beklenen kayıp,

$$\begin{aligned} E[L(\mathbf{y})] &= E[(\mathbf{y} - \mathbf{T})' \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{T})] \\ &= E\{[\mathbf{y} - E(\mathbf{y}) + E(\mathbf{y}) - \mathbf{T}]' \mathbf{K}[\mathbf{y} - E(\mathbf{y}) + E(\mathbf{y}) - \mathbf{T}]\} \end{aligned} \quad (5.76)$$

eşitliğinden

$$E[L(\mathbf{y})] = \text{tr}(\mathbf{K}\mathbf{V}) + [E(\mathbf{y}) - \mathbf{T}]' \mathbf{K}[E(\mathbf{y}) - \mathbf{T}] \quad (5.77)$$

şeklinde yazılabilir. Burada \mathbf{V} , $r \times r$ boyutlu cevapların varyans-kovaryans matrisidir:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \text{Var}(y_1) & \text{Cov}(y_1, y_2) & \cdots & \text{Cov}(y_1, y_r) \\ \text{Cov}(y_1, y_2) & \text{Var}(y_2) & \cdots & \text{Cov}(y_2, y_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(y_1, y_r) & \text{Cov}(y_2, y_r) & \cdots & \text{Var}(y_r) \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

Yine $r = 2$ için beklenen kayıp

$$\begin{aligned} E[L(\mathbf{y})] &= k_{11}\{\text{Var}(y_1) + [E(y_1) - T_1]^2\} + k_{22}\{\text{Var}(y_2) + [E(y_2) - T_2]^2\} \\ &\quad + k_{12}\{\text{Cov}(y_1, y_2) + [E(y_1) - T_1][E(y_2) - T_2]\} \end{aligned} \quad (5.79)$$

şeklinde yazılabilir. $r = 2$ durumu için cevap modelleri

$$y_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \beta_{01} + \mathbf{x}'\beta_1 + \mathbf{x}'\mathbf{B}_1\mathbf{x} + \mathbf{z}'\gamma_1 + \mathbf{x}'\Delta_1\mathbf{z} + \varepsilon_1 \quad (5.80)$$

$$y_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \beta_{02} + \mathbf{x}'\beta_2 + \mathbf{x}'\mathbf{B}_2\mathbf{x} + \mathbf{z}'\gamma_2 + \mathbf{x}'\Delta_2\mathbf{z} + \varepsilon_2 \quad (5.81)$$

şeklinde olsunlar. \mathbf{z} ile ilgili varsayımlar eşitlik (5.9)'da verildiği gibi olduğunda ve hata terimleri ile ilişkili olmadığında, ayrıca hata terimleri ε_1 ve ε_2 ile ilgili varsayımlar eşitlik (4.2)'de verildiği gibi olduğunda,

$$E_z[y_1(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = E(y_1) = \beta_{01} + \mathbf{x}'\beta_1 + \mathbf{x}'\mathbf{B}_1\mathbf{x} \quad (5.82)$$

$$E_z[y_2(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = E(y_2) = \beta_{02} + \mathbf{x}'\beta_2 + \mathbf{x}'\mathbf{B}_2\mathbf{x} \quad (5.83)$$

$$\text{Var}_z[y_1(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \text{Var}(y_1) = \sigma_z^2 [\gamma_1' + \mathbf{x}'\Delta_1] [\gamma_1' + \mathbf{x}'\Delta_1]' + \sigma_1^2 \quad (5.84)$$

$$\text{Var}_z[y_2(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \text{Var}(y_2) = \sigma_z^2 [\gamma_2' + \mathbf{x}'\Delta_2] [\gamma_2' + \mathbf{x}'\Delta_2]' + \sigma_2^2 \quad (5.85)$$

$$\text{Cov}(y_1, y_2) = \sigma_z^2 [\gamma_1' + \mathbf{x}'\Delta_1] [\gamma_2' + \mathbf{x}'\Delta_2]' + \sigma_{12} \quad (5.86)$$

yazılabilir. Burada σ_1^2 ve σ_2^2 , ε_1 ve ε_2 'nin varyansıdır ve σ_{12} , ε_1 ile ε_2 arasındaki kovaryanstır. $\sigma_z^2 = 1$ olarak varsayıldığında ve bilinmeyen katsayılar ve varyansların yerine tahminleri konulduğunda,

$$\hat{E}(y_1) = b_{01} + \mathbf{x}'\mathbf{b}_1 + \mathbf{x}'\hat{\beta}_1\mathbf{x} \quad (5.87)$$

$$\hat{E}(y_2) = b_{02} + \mathbf{x}'\mathbf{b}_2 + \mathbf{x}'\hat{\beta}_2\mathbf{x} \quad (5.88)$$

$$\hat{\text{Vâr}}(y_1) = [\mathbf{c}'_1 + \mathbf{x}'\hat{\Delta}_1] [\mathbf{c}'_1 + \mathbf{x}'\hat{\Delta}_1]' + \hat{\sigma}_1^2 \quad (5.89)$$

$$\hat{\text{Vâr}}(y_2) = [\mathbf{c}'_2 + \mathbf{x}'\hat{\Delta}_2] [\mathbf{c}'_2 + \mathbf{x}'\hat{\Delta}_2]' + \hat{\sigma}_2^2 \quad (5.90)$$

$$\hat{\text{Côv}}(y_1, y_2) = [\mathbf{c}'_1 + \mathbf{x}'\hat{\Delta}_1] [\mathbf{c}'_2 + \mathbf{x}'\hat{\Delta}_2]' + \hat{\sigma}_{12} \quad (5.91)$$

eşitlikleri elde edilirler. Buradan tahminlenmiş beklenen kayıp

$$\begin{aligned} \hat{E}_p[L(\mathbf{y})] &= k_{11}\{\hat{\text{Vâr}}(y_1) + [\hat{E}(y_1) - T_1]^2\} + k_{22}\{\hat{\text{Vâr}}(y_2) + [\hat{E}(y_2) - T_2]^2\} \\ &\quad + k_{12}\{\hat{\text{Côv}}(y_1, y_2) + [\hat{E}(y_1) - T_1][\hat{E}(y_2) - T_2]\} \end{aligned} \quad (5.92)$$

şeklinde yazılabilir. k_{11} , k_{22} ve k_{12} değerleri en az üç değişik y_1 ve y_2 değeri için $L(\mathbf{y})$ bilindiğinde belirlenebilir. Böylece eşitlik (5.92)'de verilen ortalama kayıp fonksiyonunu

minimize eden kontrol faktörleri seviyelerinin seçimi, kurt süreç ve ürünlerin tasarımında bir yaklaşım olarak kullanılabilir.



Altıncı Bölüm

UYGULAMALAR

Bu bölümün 6.1 nolu kesiminde, kesim 4.7’de önerilen göreceli uzaklık fonksiyonu yaklaşımının çok cevaplı bir süreçte kullanılması ile ilgili bir örnek uygulama olarak, lastik endüstrisinde bir yüzey-dişi bileşimi problemi ele alınmıştır. Burada kullanılan veriler Derringer ve Suich (1980)’den alınmıştır. Ardından kesim 5.9, 5.10, 5.11 ve 5.12’de verilen yaklaşımların kurt parametre tasarımı problemlerinde kullanılması ile ilgili olarak üç örnek uygulama verilmiştir. Kesim 6.2’de daha önce Vining ve Myers (1990), daha sonra Del Castillo ve Montgomery (1993) ve Lin ve Tu (1995) tarafından kullanılan veriler ele alınmıştır. Bu verilere hedef değer en iyidir durumu için kesim 5.9, 5.10 ve 5.11’de verilen çekicilik fonksiyonu, genelleştirilmiş uzaklık ve göreceli uzaklık yaklaşımları uygulanarak, Vining ve Myers (1990)’ın, Box ve Jones (1992)’nin ve Del Castillo ve Montgomery (1993)’ün yaklaşımlarından elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Kesim 6.3’de, daha önce Myers ve Montgomery (1995: ss. 499-503)’de verilen daha büyük daha iyidir durumu ile ilgili bir örnek ele alınmıştır. Bu örneğe çekicilik fonksiyonu, göreceli uzaklık, dual cevap yaklaşımları ve Box ve Jones (1992)’nin $R(\mathbf{x})$ yaklaşımı uygulanarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Son olarak kesim 6.4’de ise çok cevaplı durumlarda kurt parametre tasarımı problemlerinin çözümünü canlandırmak için, iki cevaplı, türetilmiş verilerin kullanıldığı bir örnek ele alınmıştır. Bu verilere kesim 5.12’de verilen çok değişkenli beklenen kayıp fonksiyonu yaklaşımı uygulanmıştır.

Bu bölümde ele alınan tüm uygulamalarda optimizasyon problemlerinin çözümü için popüler bir elektronik hesap tablosu yazılımı olan Excel 7.0 içerisindeki “Solver” seçeneği kullanılmıştır. Solver seçeneği, genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan algoritmasını kullanmaktadır.

6.1 LASTİK ENDÜSTRİSİNDE BİR UYGULAMA

Derringer ve Suich (1980) tarafından incelenen lastik endüstrisindeki bir yüzey-dişi bileşimi probleminde cevap değişkenleri (y ’ler), PICO Aşınma İndeksi (y_1), yüzde 200

modül (y_2), kopma uzaması (y_3) ve sertlik (y_4) olarak ele alınmıştır. Cevap değişkenlerinin her biri şu girdi değişkenlerine bağlıdır: hidratlı silis seviyesi (ξ_1), silan kavrama seviyesi (ξ_2) ve kükürt seviyesi (ξ_3). Burada amaç, y_1 ve y_2 'yi maksimize edecek ve y_3 ve y_4 'ü bir hedef değere yaklaştıracak ξ 'lerin seviyelerinin seçimidir. Cevap değişkenleri üzerindeki kısıtlar aşağıdaki gibidir:

$$y_1 > 120$$

$$y_2 > 1000$$

$$600 > y_3 > 400$$

$$75 > y_4 > 60$$

Ayrıca y_3 ve y_4 için hedef değerler $T_1 = 500$ ve $T_2 = 67.5$ şeklindedir. Derringer ve Suich (1980) bu problemin çözümünde çekicilik fonksiyonu yaklaşımını kullanmıştır. Bu kesimde Derringer ve Suich (1980)'de sunulan tasarım, veriler ve modeller kullanılmış, ancak problem kesim 4.7'de önerilen göreceli uzaklık yaklaşımı kullanılarak çözülmüştür. Söz konusu deney tasarımı bir merkezi bileşik tasarımdır ve deney bölgesi küreseldir ($x'x \leq 3$). Bu tasarımdan elde edilen çok cevaplı veriler Tablo 6.1'de verilmiştir. Her bir cevap verisi için ikinci derece modellerin uyumu yapıldığında tahminlenen katsayılar ve cevapların standart hataları Tablo 6.2'de verilmiştir.

Tablo 6.1 Deney Tasarımı ve Veriler

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4
-1	-1	1	102	900	470	67.5
1	-1	-1	120	860	410	65
-1	1	-1	117	800	570	77.5
1	1	1	198	2294	240	74.5
-1	-1	-1	103	490	640	62.5
1	-1	1	132	1289	270	67
-1	1	1	132	1270	410	78
1	1	-1	139	1090	380	70
-1.633	0	0	102	770	590	76
1.633	0	0	154	1690	260	70
0	-1.633	0	96	700	520	63
0	1.633	0	163	1540	380	75
0	0	-1.633	116	2184	520	65
0	0	1.633	153	1784	290	71
0	0	0	133	1300	380	70
0	0	0	133	1300	380	68.5
0	0	0	140	1145	430	68
0	0	0	142	1090	430	68
0	0	0	145	1260	390	69
0	0	0	142	1344	390	70

Kaynak: G. Derringer ve R. Suich (1980).

Her bir modelden elde edilen A ve B değerleri (deney bölgesindeki maksimum ve minimum değerleri), ayrıca y_3 ve y_4 için T ve d (bkz. Eşitlik (4.63)) değerleri Tablo 6.3'de verilmiştir.

Tablo 6.2 Model Katsayıları ve Cevapların Standart Hataları

Terimler	Katsayılar			
	Model y_1	Model y_2	Model y_3	Model y_4
Sabit	139.12	1261.13	400.38	68.91
x_1	16.49	268.15	-99.67	-1.41
x_2	17.88	246.50	-31.40	4.32
x_3	10.91	139.48	-73.92	1.63
x_1x_2	5.13	69.38	8.75	-1.63
x_1x_3	7.13	94.13	6.25	0.13
x_2x_3	7.88	104.38	1.25	-0.25
x_1^2	-4.01	-83.57	7.93	1.56
x_2^2	-3.45	-124.82	17.31	0.06
x_3^2	-1.57	199.18	0.43	-0.32
Standart Hata	5.61	328.69	20.55	1.27

Kaynak: G. Derringer ve R. Suich (1980).

Tablo 6.3. A , B , T ve d değerleri

	Model y_1	Model y_2	Model y_3	Model y_4
A	195,5737	2296,9314	657,4572	80,9249
B	91,7967	394,1319	207,5263	60,5107
T			500	67,5
d			292,4737	13,4249

Görelilik uzaklık fonksiyonunun $x'x \leq 3$ kısıtı altında minimum değeri $H = 0,7439$ olarak $x = (0.4647, 0.6884, -1.2183)$ noktasında elde edilmiştir. Bu seviyelerdeki tahminlenmiş cevap değerleri

$$y_1 = 131.9748$$

$$y_2 = 1654.6171$$

$$y_3 = 431.2756$$

$$y_4 = 68.7482$$

şeklinde elde edilmiştir. Görüldüğü gibi elde edilen sonuçlar, cevaplar üzerindeki tüm kısıtları sağlamaktadır.

6.2 BİR BASIM İŞLEMİNDE KALİTE İYİLEŞTİRME ÇALIŞMALARI

Bu kesimde verilen uygulamanın verileri, Box ve Draper (1987)'deki bir örnekten alınmıştır. Vining ve Myers (1990), dual cevap sistemini bu veriler üzerine uygulamakla

beraber, söz konusu verilerin önerdiği yaklaşım için ideal veriler olmadığını ifade etmişlerdir. Ancak geleneksel cevap yüzeyi çalışmalarında tekrarlı gözlemler sık olarak alınmamaktadır ve dolayısı ile varyans modellenememektedir. Ayrıca Taguchi'nin önerdiği tasarımlar tam ikinci derece modellerin uyumunun yapılmasına imkan vermemektedir. Bu nedenlerden dolayı Vining ve Myers (1990) en azından önermiş oldukları yaklaşımın nasıl uygulanacağını göstermek amacı ile Box ve Draper (1987)'deki bu özel verileri kullanmışlardır.

Deneyin amacı, üç faktör x_1 (hız), x_2 (basınç) ve x_3 (aralık)'ün, bir basım işleminin kalitesi üzerindeki etkisini bulmaktır. Burada basım işleminin kalitesi, makinanın renkli mürekkepleri paket etiketlerine uygulama yeteneği ile değerlendirilmektedir. Söz konusu deney, her bir noktasında 3 tekrar bulunan bir 3^3 faktöryel tasarımıdır. Deneylerin uygulanması ile elde edilen veriler Tablo 6.4 ile verilmiştir.

Tablo 6.4. Basım Süreci Verileri.

u	x_1	x_2	x_3	y_{u1}	y_{u2}	y_{u3}	\bar{y}_u	S_u
1	-1	-1	-1	34	10	28	24.0	12.5
2	0	-1	-1	115	116	130	120.3	8.4
3	1	-1	-1	192	186	263	213.7	42.8
4	-1	0	-1	82	88	88	86.0	3.7
5	0	0	-1	44	178	188	136.7	80.4
6	1	0	-1	322	350	350	340.7	16.2
7	-1	1	-1	141	110	86	112.3	27.6
8	0	1	-1	259	251	259	256.3	4.6
9	1	1	-1	290	280	245	271.7	23.6
10	-1	-1	0	81	81	81	81.0	0.0
11	0	-1	0	90	122	93	101.7	17.7
12	1	-1	0	319	376	376	357.0	32.9
13	-1	0	0	180	180	154	171.3	15.0
14	0	0	0	372	372	372	372.0	0.0
15	1	0	0	541	568	396	501.7	92.5
16	-1	1	0	288	192	312	264.0	63.5
17	0	1	0	432	336	513	427.0	88.6
18	1	1	0	713	725	754	730.7	21.1
19	-1	-1	1	364	99	199	220.7	133.8
20	0	-1	1	232	221	266	239.7	23.5
21	1	-1	1	408	415	443	422.0	18.5
22	-1	0	1	182	233	182	199.0	29.4
23	0	0	1	507	515	434	485.3	44.6
24	1	0	1	846	535	640	673.7	158.2
25	-1	1	1	236	126	168	176.7	55.5
26	0	1	1	660	440	403	501.0	138.9
27	1	1	1	878	991	1161	1010.0	142.5

Kaynak: G. G. Vining ve R. H. Myers (1990).

Vining ve Myers (1990)'ın önerdiği dual cevap yöntemi, modellerin ikinci derece olmasını gerektirmektedir. İkinci derece modellerin yeterli olduğu varsayıldığında, Vining ve Myers (1990), kalite karakteristiğinin ortalaması ve standart sapması için aşağıdaki cevap yüzeylerini elde etmişlerdir:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_y = & 327.6 + 177.0x_1 + 109.4x_2 + 131.5x_3 + 32.0x_1^2 - 22.4x_2^2 - 29.1x_3^2 \\ & + 66.0x_1x_2 + 75.5x_1x_3 + 43.6x_2x_3\end{aligned}\quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_y = & 34.9 + 11.5x_1 + 15.3x_2 + 29.2x_3 + 4.2x_1^2 - 1.3x_2^2 + 16.8x_3^2 \\ & + 7.7x_1x_2 + 5.1x_1x_3 + 14.1x_2x_3\end{aligned}\quad (6.2)$$

Vining ve Myers (1990), iki tasarım noktasında standart sapma değerleri 0 olduğu için, varyans üzerinde log transformasyonu yerine karekök transformasyonunu tercih etmiştir. Vining ve Myers (1990) optimizasyon problemini

$$\begin{aligned}\text{Min } & \hat{\sigma}_y \\ \text{kısıt: } & \hat{\mu}_y = 500 \\ & \mathbf{x}'\mathbf{x} = \rho^2\end{aligned}\quad (6.3)$$

şeklinde tanımlamıştır. Vining ve Myers (1990) buradaki hedef değer en iyidir problemini dual cevap yöntemi ile çözmüştür. Vining ve Myers'in bulduğu sonuçlar Tablo 6.5'de verilmiştir. Aşağıdaki paragraflarda ise Vining ve Myers (1990) tarafından verilen veriler, modeller ve süreç ortalaması ile standart sapması üzerindeki kısıtlamalar dikkate alınarak, problemin, çekicilik fonksiyonu, genelleştirilmiş uzaklık, görelî uzaklık, Box ve Jones (1992)'nin $R(\mathbf{x})$ ve Del Castillo ve Montgomery (1993)'ün dual cevap yaklaşımları kullanılarak çözümlenmesine çalışılmıştır.

1. *Çekicilik Fonksiyonu Yaklaşımı (D)*: Bu tip bir problemi çekicilik fonksiyonu yaklaşımı ile çözebilmek için ortalama için toleransların, varyans için üst tolerans ve hedef minimum değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Ayrıca n , s ve t değerlerinin uygun bir şekilde seçilmesi gerekmektedir. Burada Vining ve Myers (1990)'ın verdiği model ve kısıtlamalardan başka, aşağıdaki eşitliklerin geçerli olduğu varsayalım:

$$\begin{aligned}E(y)^* = & 520, \quad E(y)_* = 480, \quad \sigma_0^2 = 3600, \quad \sigma_*^2 = 100, \\ n = & 10, \quad s = 0.2, \quad t = 0.2\end{aligned}\quad (6.4)$$

Ayrıca Vining ve Myers (1990) tarafından $T = 500$ olarak alınmıştır. (6.4) eşitliklerine bakıldığında süreç varyansının indirgenmesinin, ortalamayı hedefe yaklaştırmaktan daha önemli olduğu görülmektedir. Bu eşitlikler doğrudan eşitlik (5.64) ve (5.61)'de yerlerine konularak bireysel çekicilikler hesaplanabilir. Genel çekicilik ise eşitlik (5.62)'den hesaplanabilir.

2. *Genelleştirilmiş uzaklık yaklaşımı*: Genelleştirilmiş uzaklık yaklaşımı ile kurt tasarım probleminin çözümü için öncelikle ortalama ve standart sapma için ideal değerlerin tespit edilmesi gerekmektedir. Burada ortalama ve standart sapma için ideal değerler vektörü, diğer bir deyişle süreç ortalaması ve varyansının bireysel olarak optimum değerlerinden oluşan vektör,

$$\phi = \begin{bmatrix} 500 \\ 3.9855 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

şeklinde dir. Burada standart sapma için ideal değer, standart sapma cevap yüzeyinin küresel deney bölgesinde ($\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq 3$ olarak alınmıştır) minimizasyonu ile elde edilmiştir. Standart sapmanın minimum değeri, Excel 7.0'daki Solver seçeneği kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca varyans-kovaryans matrisi eşitlik (4.46)'dan,

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 5793.978 & 643.360 \\ 643.360 & 1920.705 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

şeklinde elde edilmiştir. $\bar{\mathbf{y}}$ ve \mathbf{s} , Tablo 6.4'deki ortalama ve standart sapma değerlerinin oluşturduğu vektörler olmak üzere $\mathbf{y} = [\bar{\mathbf{y}}:\mathbf{s}]$ olarak alındığında ve $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = (\hat{\mu}_y, \hat{\sigma}_y)'$ vektörü dikkate alındığında, genelleştirilmiş uzaklık eşitlik (4.51)'deki gibi ifade edilebilir.

3. *Görelî Uzaklık Fonksiyonu Yaklaşımı (H)*: Görelî uzaklık yaklaşımının buradaki problemin çözümünde kullanılabilmesi için ortalama ve varyans için maksimum (A_1, A_2) ve minimum (B_1, B_2) değerlerin elde edilmesi gerekmektedir. Burada süreç ortalaması için,

$$\begin{aligned} A_1 &= 952.0930 \\ B_1 &= 10.8656 \end{aligned} \quad (6.7)$$

ve süreç varyansı için,

$$\begin{aligned} A_2 &= 24049.5231 \\ B_2 &= 15.8839 \end{aligned} \quad (6.8)$$

değerleri küresel deney bölgesinde ($\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq 3$), Excel 7.0'daki Solver seçeneği kullanılarak elde edilmiştir. Burada süreç ortalaması için d değeri eşitlik (5.70)'ten,

$$d = 427.7131 \quad (6.9)$$

şeklinde elde edilmiştir. Bu değerler eşitlik (5.69) ve (5.67)'de yerine konulduğunda bireysel uzaklıklar elde edilir. Eşitlik (5.65)'den de genel görelilik uzaklık fonksiyonu elde edilir.

4. *Ağırlıklı Ortalama Karesel Hata (R(x))*: Kunt tasarım probleminin Box ve Jones (1992)'nin yaklaşımı ile çözülebilmesi için eşitlik (5.44)'deki λ katsayısının belirlenmesi gerekmektedir. Varyansın azaltılması daha önemli olduğunda, örneğin

$$\lambda = 0.8 \quad (6.10)$$

seçilebilir. Böylece optimizasyon problemi eşitlik (5.44)'deki ağırlıklandırılmış beklenen kayıp fonksiyonunun deney bölgesinde minimizasyonuna dönüşür.

5. *Dual Cevap Yaklaşımı (Del Castillo & Montgomery = D&M'nin Yaklaşımı)*: Problemin Del Castillo ve Montgomery (1993)'ün yaklaşımı ile çözülmesi için optimizasyon problemi,

$$\begin{aligned} \text{Min } \hat{\sigma}_y \\ \text{kısıt: } \hat{\mu}_y &= 500 \\ \mathbf{x}'\mathbf{x} &\leq \rho^2 \end{aligned} \quad (6.11)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $\rho = 3$ olarak alınmıştır.

Yukarıdaki optimizasyon problemlerinin Excel 7.0'daki Solver seçeneği ile çözülmesi sonucu Tablo 6.5'deki sonuçlar elde edilmiştir. Tablo 6.5'e bakıldığında şunlar söylenebilir:

◆ Tüm yöntemler Vining & Myers'in yaklaşımından daha iyi sonuçlar vermiştir. Vining & Myers yaklaşımı dışındaki bütün yöntemler birbirlerine yakın sonuçlar vermiştir. Ayrıca elde edilen sonuçların tamamı, tüm kısıtları sağlamaktadır.

◆ Bu örnekte varyansın indirgenmesinin daha önemli olduğu varsayılmıştır. $R(\mathbf{x})$ ve D , süreç hakkındaki bu tip ön bilgiler doğrultusunda ağırlıklandırılabilirdiği için, daha küçük standart sapma değerleri vermişlerdir. Bununla beraber bu iki yöntemden elde edilen süreç ortalamaları tolerans sınırları içerisindedir.

Tablo 6.5. Optimizasyon Sonuçları

Yöntem	Optimum Seviyeler			Optimum Seviyelerdeki					
	x_1	x_2	x_3	$\hat{\mu}_y$	$\hat{\sigma}_y$	$R(\mathbf{x})$	D	ρ	H
Dual Cevap (V&M) ^a	0.6140	0.2280	0.1000	500.0000	51.7780	2144.3560	0.0013	0.9524	0.1109
Dual Cevap (D&M) ^b	1.5717	-0.7226	-0.0865	500.0000	40.6443	1321.5658	0.0534	0.1862	0.0681
$R(\mathbf{x})$	1.5479	-0.7728	-0.0821	483.5471	38.8968	1264.5105	0.0634	0.2981	0.0732
Çekicilik	1.5501	-0.7684	-0.0825	485.0204	39.0527	1264.9676	0.0638	0.2822	0.0719
Genelleştirilmiş Uzaklık	1.5825	-0.6923	-0.1280	500.3234	40.7080	1325.7342	0.0526	0.1854	0.0683
Görevi Uzaklık	1.5656	-0.7359	-0.0855	495.6691	40.1828	1295.4752	0.0573	0.1967	0.0673

^a Vining & Myers Yaklaşımı (Vining ve Myers (1990) tarafından elde edilmiştir.)

^b Del Castillo & Montgomery Yaklaşımı

6.3 BİR RENKLİ TV GÖRÜNTÜ KALİTESİNİ İYİLEŞTİRME ÇALIŞMASI

Bu kesimdeki örnek uygulamada kullanılan deney tasarımı, veriler ve modeller Myers ve Montgomery (1995) tarafından verilmiştir. Bu örnekte, renkli TV sinyallerinin transmisyonunda, iletilen görüntüdeki güç sinyal-gürültü oranlarının iyileştirilmesi istenmektedir. Burada cevap, desibel cinsinden iletilen sinyallerin alınmasındaki kaliteye karşılık gelmektedir. Kontrol faktörleri x_1 (bir filtredeki tab sayısı) ve x_2 (örnekleme frekansı)'dir. Gürültü faktörleri z_1 (Görüntüdeki bit sayısı) ve z_2 (uygulanen voltaj)'dir. Kontrol faktörleri için 3^2 içsel dizin ve gürültü faktörleri için 2^2 dışsal dizin kullanılmıştır. Tasarımın tamamı ise $3^2 \times 2^2$ çaprazlanmış dizindir. Söz konusu tasarım ve veriler Tablo 6.6'da verilmiştir. Deney bölgesi küresel olarak tanımlanmıştır. Diğer bir deyişle $\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq \rho^2$ şeklindedir.

Kullanılan model eşitlik (5.8) ile verilen gibidir. Bu eşitlikteki modelin en küçük kareler uyumu

$$\hat{y}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 33.389 - 4.175x_1 + 3.748x_2 + 3.348x_1x_2 - 2.328x_1^2 - 1.867x_2^2 - 4.076z_1 + 2.985z_2 - 2.324x_1z_1 + 1.932x_1z_2 + 3.268x_2z_1 - 2.073x_2z_2 \quad (6.12)$$

şeklindedir. Myers ve Montgomery (1995: s. 500) tüm katsayıların anlamlı olduklarını göstermiştir. Gürültü faktörlerinin ± 1 seviyeleri $\pm\sigma_z$ noktalarında seçilmiştir. Eşitlik (5.13) ve (5.14)'den, tahminlenmiş süreç ortalaması ve varyansı cevap yüzeyleri

$$\hat{E}(y) = 33.389 - 4.175x_1 + 3.748x_2 + 3.348x_1x_2 - 2.328x_1^2 - 1.867x_2^2 \quad (6.13)$$

$$\text{Vâr}(y) = (-4.076 - 2.234x_1 + 3.268x_2)^2 + (2.985 + 1.932x_1 - 2.073x_2)^2 + 0.5509 \quad (6.14)$$

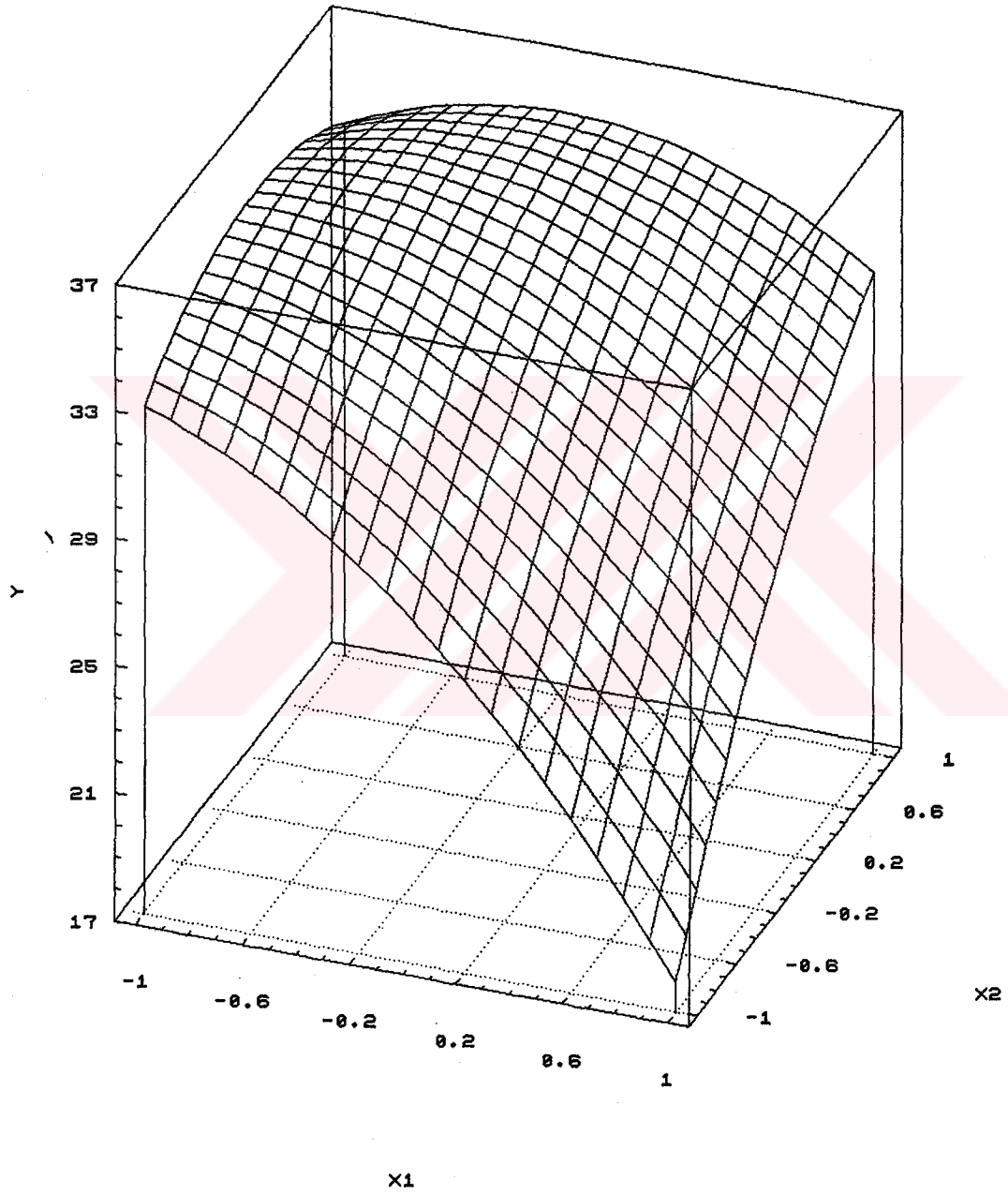
şeklinde elde edilebilir. Bu cevap yüzeyleri Şekil 6.1, 6.2, 6.3 ve 6.4 ile verilmiştir. Söz konusu şekiller STATGRAPHICS 6.0 istatistik paket programından elde edilmiştir.

Tablo 6.6. Renkli TV Görüntü Verileri

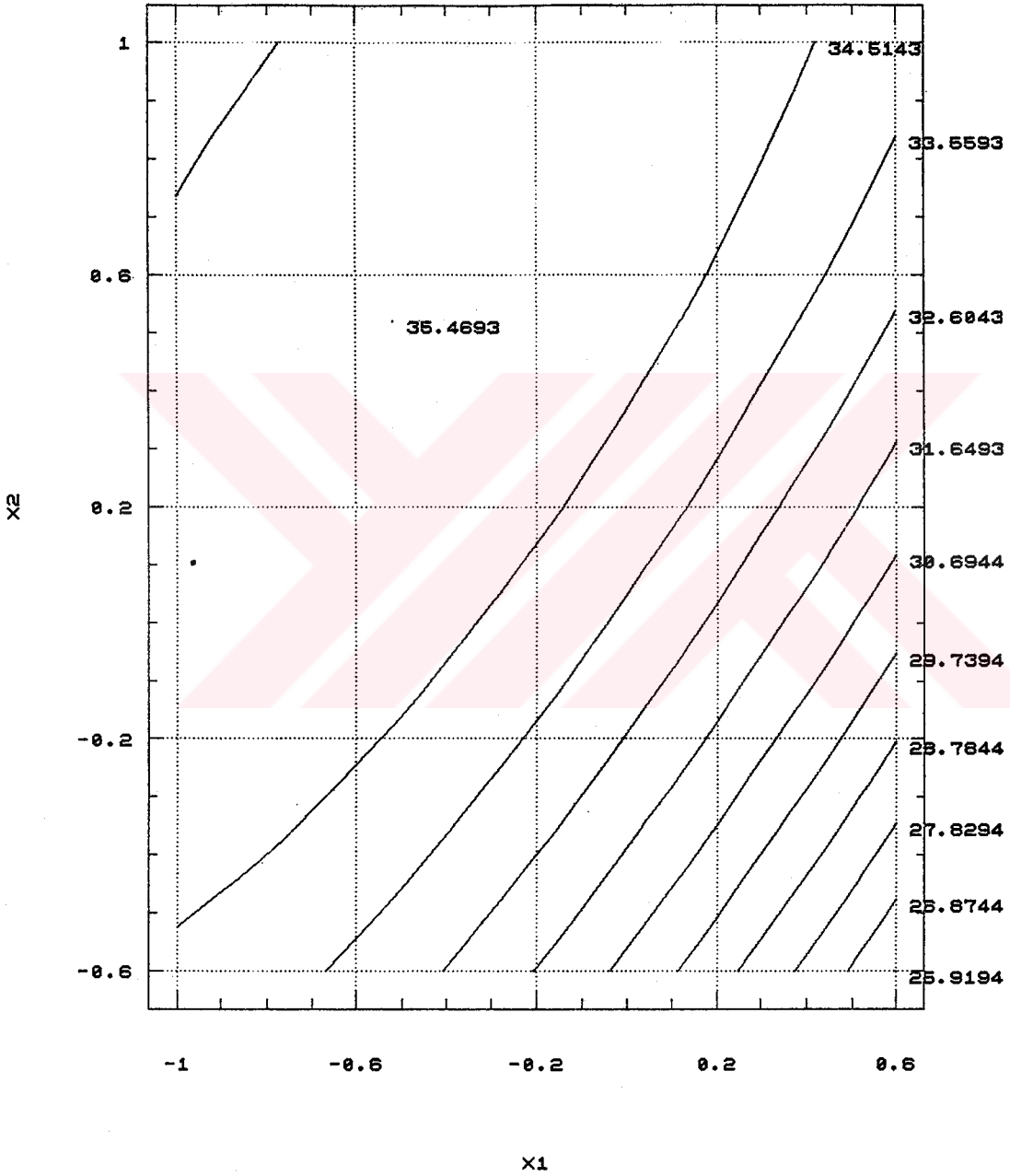
		Kodlanmış Seviyeler					
		-1	0	1			
	x_1 (Bir filtredeki tab sayısı)	5	13	21 (tab)			
	x_2 (Örnekleme frekansı)	6.25	9.875	13.5 (MHz)			
	z_1 (Görüntünün bit sayısı)	256		512 (bit)			
	z_2 (Uygulanan voltaj)	100		200 (volt)			
Faktör		z_1	-1	-1	1	1	
Kombinasyonu	x_1	x_2	z_2	-1	1	-1	1
1	-1	-1		33.5021	41.2268	25.2683	31.9930
2	-1	0		35.8234	38.0689	32.7928	34.0383
3	-1	1		33.0773	31.8435	36.2500	34.0162
4	0	-1		30.4481	41.2870	15.1493	23.9883
5	0	0		34.8679	40.2276	27.7724	31.1321
6	0	1		35.2202	37.1008	33.3280	35.2085
7	1	-1		21.1553	34.1086	0.7917	15.7450
8	1	0		27.6736	38.1477	15.5132	25.9873
9	1	1		32.1245	38.1193	26.1673	32.1622

Kaynak: R. H. Myers ve D. C. Montgomery (1995).

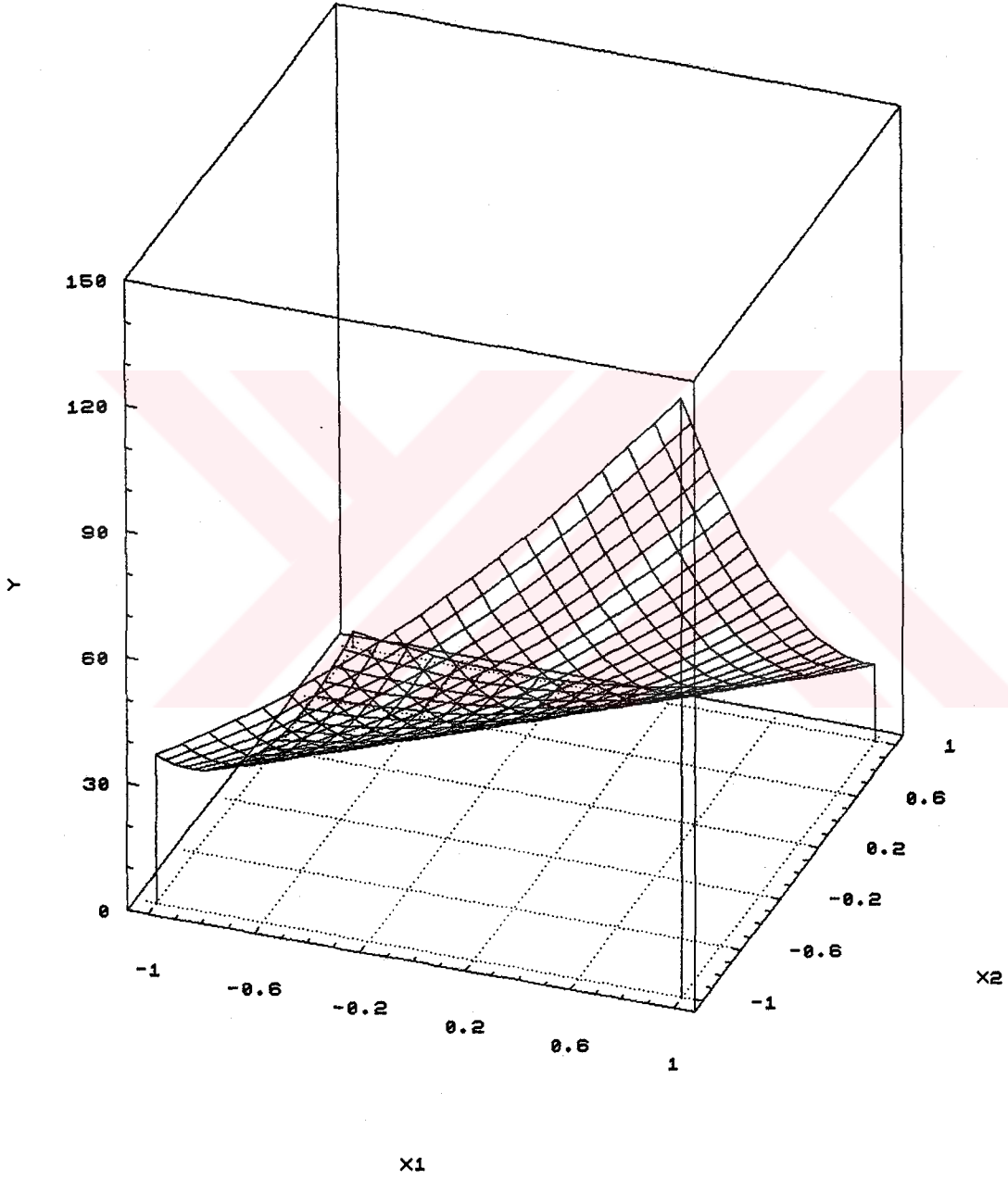
Bu deneyin amacı, varyansı azaltırken ortalamayı yükseltmektir. Diğer bir deyişle daha büyük daha iyidir problemi söz konusudur. Bu kesimde kurt tasarım problemi iki farklı durum için, Myers ve Montgomery (1995) ve Del Castillo ve Montgomery (1993)'ün dual cevap yaklaşımları, Box ve Jones (1992)'nin $R(\mathbf{x})$ 'i, Derringer ve Suich (1980)'in çekicilik fonksiyonu ve görelî uzaklık yaklaşımları kullanılarak çözülmüştür. Birinci durumda, süreç ortalamasının büyütülmesinin, süreç değişkenliğinin



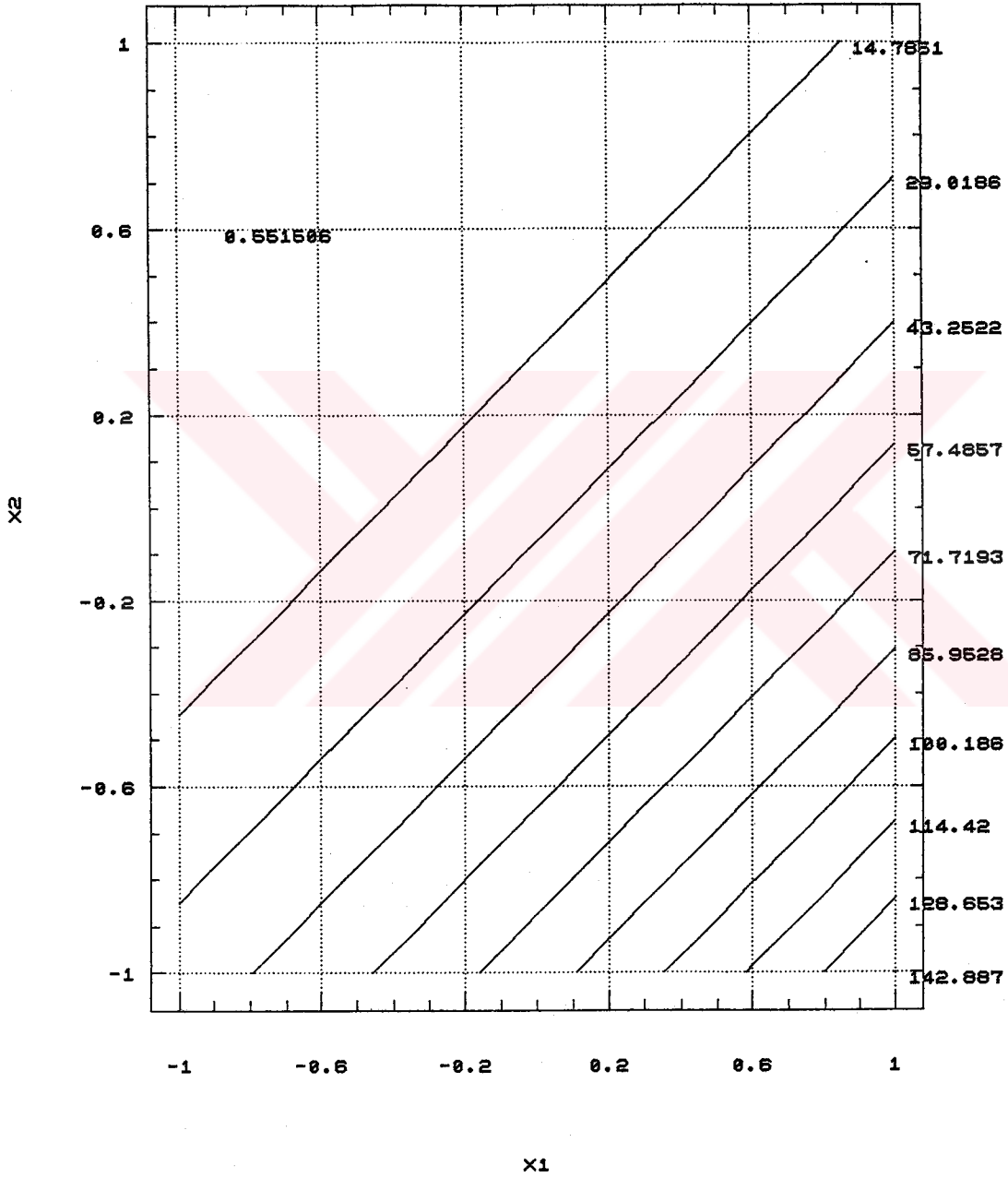
Şekil 6-1. Süreç Ortalaması Cevap Yüzeyi.



Şekil 6-2. Süreç Ortalaması Eş Yükselti Eğrileri.



Şekil 6-3. Süreç Varyansı Cevap Yüzeyi.



Şekil 6-4. Süreç Varyansı Eş Yükselti Eğrileri.

indirgenmesinden daha önemli olduğu varsayılmıştır. İkinci durumda ise, süreç değişkenliğinin indirgenmesinin, süreç ortalamasının büyütülmesinden daha önemli olduğu varsayılmıştır. Buradaki iki farklı durum, Myers ve Montgomery (1995) tarafından verilen orijinal örnekte yer almamakla beraber, bu kesimde kullanılan yaklaşımları karşılaştırabilmek amacı ile ele alınmıştır. Ayrıca süreç ortalaması ve varyansı için,

$$\begin{aligned}
 E(y)^* &= 36 \\
 E(y)_* &= 33 \\
 \sigma_0^2 &= 2 \\
 \sigma_*^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

olduğu varsayalım. Bu kesimde kullanılan yöntemler için optimizasyon problemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

1. *Dual Cevap Yaklaşımı (Myers & Montgomery = M&M'nin Yaklaşımı):*

$$\begin{aligned}
 \text{Min } \hat{V}ar(y) \\
 \text{Kısıt: } \hat{E}(y) &\geq 33
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Gerçekte, Myers ve Montgomery (1995)'in yaklaşımında, Myers ve Carter (1973)'ün dual cevap tekniği kullanılarak, kabul edilebilir birkaç değişik $\hat{E}(y) = m$ değeri için $\hat{V}ar(y)$ minimize edilmektedir. Ancak bu kesimde, geliştirilmiş indirgenmiş gradyan algoritması kullanılmıştır. Böylece, (6.16)'da olduğu gibi, eşitsizlik kısıtları optimizasyon problemine dahil edilebilir.

2. *Dual Cevap Yaklaşımı (Del Castillo & Montgomery = D&M'nin Yaklaşımı):*

$$\begin{aligned}
 \text{Max } \hat{E}(y) \\
 \text{Kısıt: } \hat{V}ar(y) &\leq 2
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

3. *Ağırlıklı Ortalama Karesel Hata (R(x)):*

$$\text{Min } R(\mathbf{x}) = \lambda \hat{V}ar(y) + (1 - \lambda)[\hat{E}(y) - 36] \tag{6.18}$$

Buradaki λ değeri birinci durum için $\lambda = 0.3$, ikinci durum için $\lambda = 0.7$ olarak seçilmiştir.

4. *Çekicilik Fonksiyonu Yaklaşımı (D):*

$$\text{Max } D \quad (6.19)$$

Burada D , eşitlik (5.62)'deki gibidir. Ortalama ve varyans için bireysel çekicilikler aşağıdaki gibidir:

$$d_1 = \begin{cases} 0 & \hat{E}(y) \leq 33 \\ \left[\frac{\hat{E}(y) - 33}{3} \right]^{n_1} & 33 < \hat{E}(y) < 36 \\ 1 & \hat{E}(y) \geq 36 \end{cases} \quad (6.20)$$

$$d_2 = \begin{cases} 0 & \text{Vâr}(y) \geq 2 \\ \left[\frac{2 - \text{Vâr}(y)}{2} \right]^{n_2} & 2 > \text{Vâr}(y) > 0 \\ 1 & \text{Vâr}(y) \leq 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

Birinci durum için $n_1 = 10$, $n_2 = 1$ ve ikinci durum için $n_1 = 1$, $n_2 = 10$ alınmıştır.

5. Göreli Uzaklık Fonksiyonu Yaklaşımı (H):

$$\text{Min } H \quad (6.22)$$

Burada H , eşitlik (5.65)'de verildiği gibidir. Bu problemde eşitlik (5.66) ve (5.67)'de verilen bireysel uzaklıklar kullanılmıştır. Bu eşitliklerdeki A ve B değerleri ise aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\begin{aligned} A_1 &= 35.4705 \\ B_1 &= 17.9224 \\ A_2 &= 142.8874 \\ B_2 &= 0.5509 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Birinci durum ile ilgili sonuçlar Tablo 6.7 ve ikinci durum ile ilgili sonuçlar Tablo 6.8'de verilmiştir. Her iki durumda da $x'x \leq 2$ olarak alınmıştır. Bu sonuçlar Excel 7.0'daki Solver seçeneği kullanılarak elde edilmiştir. Tablo 6.6 ve 6.7'den şunlar söylenebilir:

◆ Her iki durumda da bütün yöntemlerden elde edilen sonuçlar, tüm kısıtları sağlamaktadır.

◆ Dual cevap yaklaşımlarından Del Castillo & Montgomery'nin yaklaşımı birinci durumda, Myers & Montgomery'nin yaklaşımı ikinci durumda daha iyi sonuçlar vermiştir.

◆ $R(x)$ ve D 'deki ağırlıklandırmalar uygun bir şekilde yapıldığında, bu yaklaşımlar her iki durumda da iyi sonuçlar vermektedir.

◆ Göreli uzaklık yaklaşımı birinci durum için, $R(x)$, Myers & Montgomery ve D 'den daha iyi bir ortalama değer vermiştir. Bununla beraber varyansı daha yüksektir.

Tablo 6.7. Birinci Durum: Süreç Ortalamasının Büyütülmesi, Süreç Varyansının İndirgenmesinden Daha Önemli.

Yöntem	Optimum Koşullar		Optimum Koşullarda				
	x_1	x_2	$\hat{E}(y)$	$V\hat{a}r(y)$	$R(x)$	D	H
Dual Cevap (M&M)	-0.8744	0.6252	35.0430	0.5509	0.2932	0.1247	0.0244
Dual Cevap (D&M)	-0.4805	0.6217	35.4659	2.0000	0.6000	0.0012	0.0102
$R(x)$	-0.4826	0.8925	35.2774	0.5934	0.2041	0.2114	0.0110
Çekicilik Fonksiyonu	-0.4478	0.8223	35.3784	0.8443	0.2592	0.2381	0.0056
Görelî Uzaklık	-0.4532	0.7747	35.4105	1.0451	0.3160	0.2314	0.0049

Tablo 6.8. İkinci Durum: Süreç Varyansının İndirgenmesi, Süreç Ortalamasının Büyütülmesinden Daha Önemli

Yöntem	Optimum Koşullar		Optimum Koşullarda				
	x_1	x_2	$\hat{E}(y)$	$V\hat{a}r(y)$	$R(x)$	D	H
Dual Cevap (M&M)	-0.8744	0.6252	35.0430	0.5509	0.4405	0.1648	0.0244
Dual Cevap (D&M)	-0.4805	0.6217	35.4659	2.0000	1.4000	0.0000	0.0102
$R(x)$	-0.6095	0.8203	35.2130	0.5537	0.4139	0.1645	0.0147
Çekicilik Fonksiyonu	-0.7417	0.7247	35.1410	0.5509	0.4202	0.1671	0.0188
Görelî Uzaklık	-0.4532	0.7747	35.4105	1.0451	0.7326	0.0222	0.0049

6.4 ÇOK CEVAPLI BİR SÜREÇTE KUNT PARAMETRE TASARIMI

Bu kesimde çok cevaplı bir süreçte kunt tasarım problemlerinin çözümünde, kesim 5.12'de verilen çok değişkenli beklenen kayıp fonksiyonunun kullanılmasını canlandırmak amacı ile iki cevaplı bir örnek ele alınmıştır. Kullanılan veriler aşağıdaki modellerden, Tablo 6.9'da verilen birleşik dizine göre, Excel 7.0'daki "Data Analysis" seçeneği kullanılarak türetilmiştir:

Tablo 6.9. Birleşik Dizin ve Türetilmiş Veriler

x_1	x_2	z_1	z_2	y_1	y_2
-1	-1	-1	-1	34,6014	46,7757
1	-1	-1	-1	19,9379	31,8189
-1	1	-1	-1	31,9389	27,7395
1	1	-1	-1	32,6415	27,7631
-1	-1	1	-1	25,5267	46,6127
1	-1	1	-1	1,4371	32,2304
-1	1	1	-1	34,9378	42,5681
1	1	1	-1	25,6190	38,5154
-1	-1	-1	1	40,2233	43,7622
1	-1	-1	1	33,7605	31,0936
-1	1	-1	1	28,6722	21,7627
1	1	-1	1	37,7489	23,8859
-1	-1	1	1	32,7911	44,6643
1	-1	1	1	14,9800	33,3147
-1	1	1	1	31,1420	30,7616
1	1	1	1	31,2011	32,6383
-1,4142	0	0	0	34,6173	40,7926
1,4142	0	0	0	23,2086	29,1166
0	-1,4142	0	0	23,8209	39,1192
0	1,4142	0	0	35,1313	28,4475
0	0	0	0	31,5060	28,9797
0	0	0	0	32,5070	29,2203
0	0	0	0	31,8125	30,3794
0	0	0	0	34,3690	28,7561
0	0	0	0	33,7249	30,2754
0	0	0	0	33,5106	29,0489

$$y_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 33 - 4x_1 + 3.5x_2 + 3.58x_1x_2 - 2.5x_1^2 - 2x_2^2 - 4z_1 + 3z_2$$

$$- 2.5x_1z_1 + 2x_1z_2 + 3.3x_2z_1 - 2x_2z_2 + \varepsilon_1 \quad (6.24)$$

$$y_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 30 - 3x_1 - 4x_2 + 3x_1x_2 + 2.5x_1^2 + 2x_2^2 + 2.7z_1 - 2.3z_2$$

$$- 0.2x_1z_1 + 1x_1z_2 + 2x_2z_1 - 1.4x_2z_2 + \varepsilon_2 \quad (6.25)$$

Burada $\varepsilon_1 \sim N(0,1)$ ve $\varepsilon_2 \sim N(0,1)$ olarak alınmıştır. Eşitlik (6.24) ve (6.25)'deki x_1 ve x_2 kontrol faktörleri, z_1 ve z_2 ise gürültü faktörleridir. Birleşik tasarım ve türetilen veriler Tablo 6.9'da verilmiştir. z_1 ve z_2 'nin ortalamalarının sıfır, varyanslarının σ_{z_1} ve σ_{z_2} , birbirleriyle ve hata terimleri ile korelasyonsuz oldukları ve ± 1 seviyelerinin $\pm \sigma_z$ 'lerde

seçildiği varsayılmıştır. Bu cevaplardan y_1 'nin $T_1 = 25$ 'e, y_2 'nin $T_2 = 30$ 'a yaklaştırılması arzu edilsin. Tablo 6.9'daki verilerden uyumu yapılmış modeller

$$\begin{aligned}\hat{y}_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = & 32.9050 - 3.9321x_1 + 3.3319x_2 + 3.9717x_1x_2 - 2.2449x_1^2 - 1.9633x_2^2 \\ & - 3.86816z_1 + 2.7424z_2 - 2.4884x_1z_1 + 2.0144x_1z_2 + 2.8554x_2z_1 \\ & - 2.2891x_2z_2\end{aligned}\quad (6.26)$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = & 29.4433 - 3.4949x_1 - 3.9865x_2 + 3.3330x_1x_2 + 2.9057x_1^2 + 2.3201x_2^2 \\ & + 2.91906z_1 - 2.0088z_2 - 0.1518x_1z_1 + 0.8344x_1z_2 + 2.4975x_2z_1 \\ & - 1.4334x_2z_2\end{aligned}\quad (6.27)$$

şeklinde Excel 7.0'daki "Data Analysis" seçeneği kullanılarak hesaplanmışlardır. Buradan (6.26) ve (6.27) eşitlikleri için süreç ortalamaları ve varyans-kovaryansları,

$$\hat{E}(y_1) = 32.9050 - 3.9321x_1 + 3.3319x_2 + 3.9717x_1x_2 - 2.2449x_1^2 - 1.9633x_2^2\quad (6.28)$$

$$\hat{E}(y_2) = 29.4433 - 3.4949x_1 - 3.9865x_2 + 3.3330x_1x_2 + 2.9057x_1^2 + 2.3201x_2^2\quad (6.29)$$

$$\begin{aligned}\text{Vâr}(y_1) = & (-3.8681 - 2.4884x_1 + 2.8554x_2)^2 + (2.7424 + 2.0144x_1 - 2.2891x_2)^2 \\ & + 0.8343\end{aligned}\quad (6.30)$$

$$\begin{aligned}\text{Vâr}(y_2) = & (2.9190 - 0.1518x_1 + 2.4975x_2)^2 + (-2.0088 + 0.8344x_1 - 1.4334x_2)^2 \\ & + 1.3298\end{aligned}\quad (6.31)$$

$$\begin{aligned}\text{Côv}(y_1, y_2) = & (-3.8681 - 2.4884x_1 + 2.8554x_2)(2.9190 - 0.1518x_1 + 2.4975x_2) \\ & + (2.7424 + 2.0144x_1 - 2.2891x_2)(-2.0088 + 0.8344x_1 - 1.4334x_2) \\ & + 0.01165\end{aligned}\quad (6.32)$$

şeklinde elde edilmiştir. Bu eşitliklerden elde edilen değerler eşitlik (5.92)'de yerine konulduğunda, tahminlenmiş beklenen kayıp fonksiyonu $L(\mathbf{y})$ elde edilir. Beklenen kayıp fonksiyonunun minimize edilmesi için k_{11} , k_{22} ve k_{12} değerlerinin bilinmesi gerekmektedir.

Burada

$$k_{11} = 20$$

$$k_{22} = 10$$

$$k_{12} = 3 \quad (6.33)$$

olduğu varsayalım.

$$\text{Min } L(\mathbf{y})$$

$$\text{Kısıt: } \mathbf{x}'\mathbf{x} \leq 2 \quad (6.34)$$

şeklindeki optimizasyon probleminin çözümü ile optimum seviyeler $\mathbf{x} = (1.3493, 0.4235)'$ olarak belirlenmiştir. Optimum seviyelerde,

$$L(\mathbf{y}) = 822.0123$$

$$\hat{E}(y_1) = 26.8408$$

$$\hat{E}(y_2) = 31.2167$$

$$\text{Vâr}(y_1) = 57.2019$$

$$\text{Vâr}(y_2) = 17.7768$$

$$\text{Côv}(y_1, y_2) = -29.3732 \quad (6.35)$$

değerleri elde edilmektedir.

Yedinci Bölüm

SONUÇ

Bu çalışmada, cevap yüzeyi yönteminde kullanılan deney tasarımları ve optimizasyon teknikleri gözden geçirilmiştir. Birinci ve ikinci derece modeller için kullanılan tasarımlar incelendiğinde, özellikle ikinci derece tasarımların döndürülebilir veya yaklaşık döndürülebilir olmasına önem verildiği görülmüştür. Tasarımların bu özelliği sayesinde, kanonik analizin uygulanması durumunda eksenlerin döndürülmesi sonucu, kestirilmiş cevabın varyansı değişmemektedir.

Çok cevaplı süreçlerin söz konusu olduğu durumlarda, süreç optimizasyonunda kullanılan çekicilik fonksiyonu ve geliştirilmiş uzaklık yaklaşımlarının birbirlerine karşı bazı avantajlarının olduğu görülmektedir. Çekicilik fonksiyonu, cevapların önem derecesi ile ilgili bazı ön bilgilerin optimizasyon problemine dahil edilmesine imkan verirken, geliştirilmiş uzaklık yaklaşımı, cevaplar arasındaki kovaryansları da hesaba katmaktadır.

Taguchi'nin parametre tasarımı problemlerinde, birleşik dizinlerin ve süreç ortalaması ve varyansının modellenmesi yaklaşımının, Taguchi'nin deney tasarımlarına ve analiz yöntemlerine karşı iyi bir alternatif olduğu görülmektedir. Ancak bu yöntemlerin pratikte daha kolay bir şekilde kullanılabilmesi için, bu konu ile ilgili yazılımların geliştirilmesi yararlı olacaktır.

Bu çalışmada önerilen yaklaşımlar ile ilgili olarak, altıncı bölümde verilen örnek uygulamalardan elde edilen sonuçlara bakıldığında, aşağıdaki paragraflarda açıklanan bulgular elde edilmiştir:

Kesim 4.7'de verilen görelî uzaklık yaklaşımının çok cevaplı süreçlerin optimizasyonunda kullanılabileceği görülmüştür. Bu yaklaşım, geliştirilmiş uzaklık yaklaşımında olduğu gibi cevaplar arasındaki kovaryansları dikkate almamaktadır. Ancak görelî uzaklık yaklaşımı ile çok cevaplı süreçlerin optimizasyonu için, cevapların, aynı faktörlerin aynı derecedeki etkilerinin bir fonksiyonu olması gerekmemektedir. Diğer bir

deyişle, genelleştirilmiş uzaklık yaklaşımında olduğu gibi, tasarım matrisi tüm cevaplar için aynı olmak zorunda değildir.

Çok cevaplı süreçlerin optimizasyonunda kullanılan yaklaşımlar olarak bilinen çekicilik fonksiyonu ve genelleştirilmiş uzaklık yaklaşımlarının, Taguchi'nin parametre tasarımı problemlerinde kullanılabileceği görülmüştür. Genelleştirilmiş uzaklık yaklaşımının parametre tasarımında kullanılan diğer yaklaşımlara göre avantajı, süreç ortalaması ile süreç varyansı arasındaki doğrusal ilişkileri de hesaba katmasıdır. Ancak bu yaklaşımın kullanılabilmesi için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

1. Süreç ortalaması ve varyansı, aynı faktörlerin, aynı derecedeki etkilerine bağlı modeller olmak zorundadır.
2. Ortalama ve varyans modelleri kesim 5.7.9 ve 5.8.3'de verildiği gibi hesaplanmalıdır. Diğer bir deyişle, ortalama ve varyans modelleri, gürültü faktörlerinin olmadığı ya da ölçülemediği bir durumda, bir tekrarlı tasarımdan veya bir çaprazlanmış tasarımın dışsal dizininden elde edilmelidir. Tekrarlı gözlemlerden veya dışsal dizindeki gözlemlerden elde edilen \bar{y} ve $\log s^2$ 'ler iki ayrı cevap olarak kabul edilip, kontrol faktörlerinin fonksiyonları olarak modellenmelidir.

Daha büyük daha iyidir ve daha küçük daha iyidir durumlarında, dual cevap yaklaşımlarından Myers ve Montgomery (1995)'in yaklaşımı, varyans minimizasyonunun daha önemli olduğu durumlarda tercih edilebilir. Bununla beraber, süreç ortalamasının maksimize veya minimize edilmesi, varyansın indirgenmesinden daha önemli olduğunda, Del Castillo ve Montgomery (1993)'ün yaklaşımı kullanılabilir.

Çekicilik fonksiyonu ve Box ve Jones (1992)'nin $R(\mathbf{x})$ yaklaşımları, parametre tasarımı problemlerinde, gerek varyans minimizasyonunun daha önemli olduğu durumlarda, gerekse ortalamanın hedef değerine (maksimum, minimum veya spesifik bir değer) yaklaşmasının daha önemli olduğu durumlarda kullanılabilecek yaklaşımlardır. Böyle durumlarda, çekicilik fonksiyonundaki çekicilik dereceleri (bkz. Kesim 4.5 ve 5.9) uygun bir şekilde belirlenerek çekicilik fonksiyonu maksimize edilir.

Çok cevaplı süreçlerin optimizasyonunda kullanılması önerilen göreceli uzaklık yaklaşımının, parametre tasarımı problemlerinde de kullanılabileceği görülmüştür. Bu

yaklaşım, ortalamanın hedef değerine (maksimum, minimum veya spesifik bir değer) yaklaştırılması ile varyansın minimizasyonu aynı derecede önemli olduklarında kullanılabilir. Bu tip durumlarda, genelleştirilmiş uzaklık, çekicilik fonksiyonu ve $R(\mathbf{x})$ yaklaşımları da kullanılabilir.

Çok cevaplı durumlarda, çok değişkenli kayıp fonksiyonu, kurt süreçlerin elde edilmesi amacı ile kullanılabilir. Buradaki cevapların önem derecesine göre (cevapların hedef değerlerinden sapmaları sonucu ortaya çıkan parasal kayıba göre), \mathbf{K} matrisi oluşturulmaktadır. Diğer bir deyişle, cevapların hedef değerlerinden sapmalarının önem derecesi, \mathbf{K} matrisi ile süreç optimizasyonu problemine dahil edilmektedir.

Çok cevaplı süreçlerde, cevap ortalamalarının hedef değerlerinden sapması ile süreç değişkenliğinin farklı önem derecelerinde olduğu durumlarda, eşitlik (5.77)'nin doğrudan kullanılmaması gerekmektedir. Tek cevaplı durumlar için Box ve Jones (1992), eşitlik (5.42) ile verilen beklenen kaybı ağırlıklandırarak eşitlik (5.44) ile verilen $R(\mathbf{x})$ yaklaşımını önermiştir. Yine tek cevaplı durumlar için çekicilik fonksiyonu yaklaşımında kullanılan çekicilik dereceleri de süreç ortalaması ile varyansının farklı önem derecelerine göre belirlenmektedir. Çok cevaplı durumlar için de benzer yaklaşımların geliştirilmesi bir çalışma alanı olarak önerilebilir.

KAYNAKLAR

- Aitkin, M. (1987), "Modelling Variance Heterogeneity in Normal Regression Using GLIM," *Applied Statistics*, 36, 332-339.
- Atkinson, A. C. (1985), *Plots, Transformations, and Regression: An Introduction to Graphical Methods of Diagnostic Regression Analysis*, Oxford: Clarendon Press.
- Atkinson, A. C. ve Donev, A. N. (1992), *Optimum Experimental Designs*, Oxford: Clarendon Press.
- Bartlett, M. S. (1947), "The Use of Transformations," *Biometrics*, 3, 39-52.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., ve Shetty, C. M. (1993), *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 2. Baskı, New York: John Wiley.
- Box, G. E. P. (1954), "The Exploration and Exploitation of Response Surfaces: Some General Considerations and Examples," *Biometrics*, 10, 16-60.
- Box, G. E. P. (1988), "Signal-to-Noise Ratios, Performance Criteria, and Transformations," *Technometrics*, 30, 1-17.
- Box, G. E. P. ve Cox, D. R. (1964), "An Analysis of Transformations," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 26, 211-243.
- Box, G. E. P. ve Draper, N. R. (1975), "Robust Designs," *Biometrika*, 62, 347-352.
- Box, G. E. P. ve Draper, N. R. (1987), *Empirical Model Building and Response Surfaces*, New York: John Wiley.
- Box, G. E. P. ve Hunter, J. S. (1954), "A Confidence Region for the Solution of a Set of Simultaneous Equations With an Application to Experimental Design," *Biometrika*, 41, 190-199.
- Box, G. E. P., Hunter, W. G. ve Hunter, J. S. (1978), *Statistics for Experimenters: An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*, New York: John Wiley.
- Box, G. E. P. ve Jones, S. (1992), "Designing Products That Are Robust to the Environment," *Total Quality Management*, 3, 265-282.
- Box, G. E. P. ve Meyer, R. D. (1986), "Dispersion Effects from Fractional Designs," *Technometrics*, 28, 19-27.

- Box, G. E. P. ve Youle, P. V. (1955), "The Exploration and Exploitation of Response Surfaces: An Example of the Link Between the Fitted Surface and the Basic Mechanism of the System," *Biometrics*, 11, 287-323.
- Byrne, D. M. ve Taguchi, S. (1986), "The Taguchi Approach to Parameter Design," *The International QC Forum*.
- Del Castillo, E. ve Montgomery, D. C. (1993), "Nonlinear Programming Solution to the Dual Response Problem," *Journal of Quality Technology*, 25, 199-204.
- Derringer, G. ve Suich, R. (1980), "Simultaneous Optimization of Several Response Variables," *Journal of Quality Technology*, 12, 214-219.
- Draper, N. R. (1982), "Center Points in Second Order Response Surface Designs," *Technometrics*, 24, 127-133.
- Draper, N. R. (1985), "Small Composite Designs," *Technometrics*, 27, 173-180.
- Draper, N. R. ve Guttman, I. (1988), "An Index of Rotatability," *Technometrics*, 30, 105-111.
- Draper, N. R. ve Hunter, W. G. (1966), "Design of Experiments for Parameter Estimation in Multiresponse Situations," *Biometrika*, 53, 525-533.
- Draper, N. R. ve John, J. A. (1988), "Response-Surface Designs for Quantitative and Qualitative Variables," *Technometrics*, 30, 423-428.
- Draper, N. R. ve Pukelsheim, F. (1990), "Another Look at Rotatability," *Technometrics*, 32, 195-201.
- Draper, N. R. ve Smith, H. (1981), *Applied Regression Analysis*, 2. Baskı, New York: John Wiley.
- Engel, J. ve Huele, A. F. (1996), "Taguchi Parameter Design By Second-Order Response Surfaces," *Quality and Reliability Engineering International*, 12, 95-100.
- Hunter, J. S. vd. (1989), "Design and Analysis of Experiments," Bulunduğu Eser: J. M. Juran ve F. M. Gryna (Editörler). *Juran's Quality Control Handbook*, (Kesim 26). New York: McGraw-Hill.
- Kacker, R. N. (1986), "Taguchi's Quality Philosophy: Analysis and Commentary," Bulunduğu Eser: K. Dehnad (Ed.). *Quality Control, Robust Design, and the Taguchi Method; Article 1*, (ss. 3-21). Pasific Grove, California: Wadsworth & Brooks / Cole.

- Khuri, A. I. (1984), "A Note on *D*-Optimal Design for Partially Nonlinear Regression Models," *Technometrics*, 26, 59-61.
- Khuri, A. I. (1985), "A Test for Lack of Fit of a Linear Multiresponse Model," *Technometrics*, 27, 213-218.
- Khuri, A. I. (1988), "A Measure of Rotatability for Response-Surface Designs," *Technometrics*, 30, 95-104.
- Khuri, A. I. ve Conlon, M. (1981), "Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions," *Technometrics*, 23, 363-375.
- Khuri, A. I. ve Cornell, J. A. (1987), *Response Surfaces: Designs and Analyses*, New York: Marcel Dekker.
- Kotz, S. ve Johnson, N. L. (1993), *Process Capability Indices*, London: Chapman and Hall.
- Lin, D. K. J. ve Tu, W. (1995), "Dual Response Surface Optimization," *Journal of Quality Technology*, 27, 34-39.
- Lucas, J. M. (1977), "Design Efficiencies for Varying Numbers of Center Points," *Biometrika*, 64, 145-147.
- Lucas, J. M. (1994), "How to Achieve a Robust Process Using Response Surface Methodology," *Journal of Quality Technology*, 26, 248-260.
- McCullagh, P. ve Nelder, J. A. (1989), *Generalized Linear Models*, 2. Baskı, New York: Chapman and Hall.
- Mead, R. ve Pike, D. J. (1975), "A Review of Response Surface Methodology From a Biometric Viewpoint," *Biometrics*, 31, 803-851.
- Montgomery, D. C. (1991b), *Design and Analysis of Experiments*, 3. Baskı, New York: John Wiley.
- Morrison, D. F. (1976), *Multivariate Statistical Methods*, 2. Baskı, New York: McGraw-Hill.
- Myers, R. H. (1990), *Classical and Modern Regression with Applications*, 2. Baskı, Boston: PWS-Kent.
- Myers, R. H. (1991), "Response Surface Methodology in Quality Improvement," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 20, 457-476.
- Myers, R. H., Khuri, A. I. ve Carter, W. H. (1989), "Response Surface Methodology: 1966-1988," *Technometrics*, 3, 137-157.

- Myers, R. H., Khuri, A. I. ve Vining, G. (1992), "Response surface Alternatives to the Taguchi Robust Parameter Design Approach," *The American Statistician*, 46, 131-139.
- Myers, R. H. ve Montgomery, D. C. (1995), *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, New York: John Wiley.
- Nair, V. N. (ed.) (1992), "Taguchi's Parameter Design: A Panel Discussion," *Technometrics*, 34, 127-161.
- Nair, V. N. ve Pregibon, D. (1988), "Analyzing Dispersion Effects From Replicated Factorial Experiments," *Technometrics*, 30, 247-258.
- Phadke, M. S., Kacker, R. N., Speeney, D. V. ve Grieco, M. J. (1983), "Off-Line Quality Control in Integrated Circuit Fabrication Using Experimental Design," Bulunduğu Eser: K. Dehnad (Ed.). *Quality Control, Robust Design, and the Taguchi Method; Article 1*, (ss. 3-21). Pasific Grove, California: Wadsworth & Brooks / Cole.
- Seber, G. A. F. (1984), *Multivariate Observations*, New York: John Wiley.
- Steinberg, D. M. ve Hunter, W. G. (1984), "Experimental Design: Review and Comment," *Technometrics*, 26, 71-97.
- Taguchi, G., Elsayed, E. A. ve Hsiang, T. C. (1989), *Quality Engineering in Production Systems*, New York: McGraw-Hill.
- Vining, G. ve Myers, R. H. (1990), "Combining Taguchi and Response Surface Philosophies: A Dual Response Approach," *Journal of Quality Technology*, 22, 38-45.
- Welch, W. J., Yu, T. K., Kang, S. M. ve Sacks, J. (1990), "Computer Experiments for Quality Control by Parameter Design," *Journal of Quality Technology*, 22, 15-22.

DİĞER KAYNAKLAR*

- Atkinson, A. C. (1970), "The Design of Experiments to Estimate the Slope of a Response Surface," *Biometrika*, 57, 319-328.
- Atkinson, A. C. (1972), "Planning Experiments to Detect Inadequate Regression Models," *Biometrika*, 59, 275-293.
- Atkinson, A. C. ve Federov, V. V. (1975), "The Design of Experiments for Discriminating Between Two Rival Models," *Biometrika*, 62, 57-70.
- Bartlett, M. S. ve Kendall, D. G. (1946), "The Statistical Analysis of Variance Heterogeneity and the Logarithmic Transformation," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 8, 128-150.
- Baumert, L., Golomb, J. W., ve Hall, M. (1962), "Discovery of an Hadamard Matrix of Order 92," *Amer. Math. Soc. Bull.*, 68, 237-238.
- Biles, W. E. (1975), "A Response Surface Method for Experimental Optimization of Multi-Response Processes," *Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development*, 14, 152-158.
- Bose, R. C. ve Draper, N. R. (1959), "Second Order Rotatable Designs in Three Dimensions," *The Annals of Mathematical Statistics*, 30, 1097-1112.
- Box, G. E. P. (1952), "Multifactor Designs of First Order," *Biometrika*, 39, 49-57.
- Box, G. E. P. (1963), "The Effect of Errors in the Factor Levels and Experimental Design," *Technometrics*, 5, 247-262.
- Box, G. E. P. (1985), "Discussion of Off-line Quality Control, Parameter Design, and the Taguchi Methods," *Journal of Quality Techonology*, 17, 198-206.
- Box, G. E. P., ve Behnken, D. W. (1960), "Some New Three-Level Designs for the Study of Quantitative Variables," *Technometrics*, 2, 455-475.
- Box, G. E. P. ve Draper, N. R. (1959), "A Basis for the Selection of a Response Surface Design," *Journal of the American Statistical Association*, 54, 622-654.
- Box, G. E. P. ve Draper, N. R. (1963), "The Choice of a Second Order Rotatable Design," *Biometrika*, 50, 335-352.

* Bu eserler, elde bulunmayan ve bu çalışmada kullanılan eserlerin referans ettiği çalışmalardır.

- Box, G. E. P. ve Draper, N. R. (1965), "The Bayesian Estimation of Common Parameters From Several Responses," *Biometrika*, 52, 355-365.
- Box, G. E. P. ve Hunter, J. S. (1957), "Multifactor Experimental Designs for Exploring Response Surfaces," *The Annals of Mathematical Statistics*, 28, 195-241.
- Box, G. E. P. ve Hunter, W. G. (1965), "Sequential Design of Experiments for Nonlinear Models," in *Proceedings of IBM Scientific Computing Symposium in Statistics*, Yorktown Heights, NY: IBM, ss, 113-137.
- Box, G. E. P., Hunter, W. G., MacGregor, J. F., ve Erjavec, J. (1973), "Some Problems Associated With the Analysis of Multiresponse Data," *Technometrics*, 15, 33-51.
- Box, G. E. P. ve Lucas, H. L. (1959), "Design of Experiments in Non-linear Situations," *Biometrika*, 46, 77-90.
- Box, G. E. P. ve Wilson, K. B. (1951), "On the Experimental Attainment of Optimum Conditions," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 13, 1-45.
- Box, M. J. (1971), "An Experimental Design Criterion for Precise Estimation of a Subset of the Parameters in a Nonlinear Model," *Biometrika*, 58, 149-153.
- Box, M. J. ve Draper, N. R. (1971), "Factorial Designs, the $|X'X|$ Criterion and Some Related Matters," *Technometrics*, 13, 731-742.
- Box, M. J. ve Draper, N. R. (1974), "On Minimum-Point Second-Order Designs," *Technometrics*, 16, 613-616.
- Carroll, R. J. ve Ruppert, D. (1988), *Transformation and Weighting in Regression*, New York: Chapman and Hall.
- Chernoff, H. (1953), "Locally Optimal Design for Estimating Parameters," *The Annals of Mathematical Statistics*, 24, 586-602.
- Cochran, W. G. (1973), "Experiments for Nonlinear Functions," *Journal of the American Statistical Association*, 68, 771-781.
- Connor, W. S. ve Zelen, M. (1959), "Fractional Factorial Experimental Designs for Factors at Three Levels," National Bureau of Standards, Washington, D. C., Applied Mathematics Series, No. 54.
- Cook, R. D. ve Nachtsheim, C. J. (1980), "A Comparison of Algorithms for Construction Exact D -Optimal Designs," *Technometrics*, 22, 315-324.
- Cornell, J. A. (1973), "Experiments With Mixtures: A Review," *Technometrics*, 15, 437-455.

- Cornell, J. A. (1979), "Experiments With Mixtures: An Update and Bibliography," *Technometrics*, 21, 95-106.
- Cornell, J. A. (1990), *Experiments With Mixtures: Designs, Models and the Analysis of Mixture of Data*, 2. Baskı, New York: John Wiley.
- De Baun, R. M. (1959), "Response Surface Designs for Three Factors at Three Levels," *Technometrics*, 1, 1-8.
- Deming, W. E. (1946), *The Statistical Adjustment of Data*, New York: John Wiley.
- Doehlert, D. H. (1970), "Uniform Shell Designs," *Journal of the Royal Statistical Society, Series C*, 19, 231-239.
- Doehlert, D. H. ve Klee, V. L. (1972), "Experimental Designs Through Level Reduction of the d -Dimensional Cuboctahedron," *Discrete Mathematics*, 2, 309-334.
- Draper, N. R. (1960), "Second Order Rotatable Designs in Four or More Dimensions," *The Annals of Mathematical Statistics*, 31, 23-33.
- Draper, N. R. (1963), "Ridge Analysis of Response Surfaces," *Technometrics*, 5, 469-479.
- Draper, N. R. ve Guttman, I. (1986), "Response Surface Designs in Flexible Regions," *Journal of the American Statistical Association*, 81, 1089-1094.
- Draper, N. R. ve Herzberg, A. M. (1971), "On Lack of Fit," *Technometrics*, 13, 231-241.
- Draper, N. R. ve Herzberg, A. M. (1973), "Some Designs for Extrapolation Outside a Sphere," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 35, 268-276.
- Draper, N. R. ve Herzberg, A. M. (1979), "An Investigation of First-Order and Second-Order Designs for Extrapolation Outside a Hypersphere," *Canadian Journal of Statistics*, 7, 97-101.
- Draper, N. R. ve Hunter, W. G. (1967), "The Use of Prior Distributions in the Design of Experiments for Parameter Estimation in Non-linear Situations: Multiresponse case," *Biometrika*, 54, 662-665.
- Draper, N. R. ve Lawrance, W. E. (1965), "Designs Which Minimize Model Inadequacies: Cuboidal Regions of Interest," *Biometrika*, 52, 111-118.
- Dubova, I. S. ve Federov, V. V. (1972), "Tables of Optimum Design II (Saturated D -Optimal Designs On a Cube)" Reprint No. 40, in Russian. Issued by Interfaculty Laboratory of Statistical Methods, Moscow University.

- Dykstra, O. (1960), "Partial Duplication of Response Surface Designs," *Technometrics*, 2, 185-195.
- Easterling, R. B. (1985), "Discussion of Off-Line Quality Control, Parameter Design and the Taguchi Methods," *Journal of Quality Technology*, 17, 198-206.
- Federov, V. V. (1972), *Theory of Optimal Experiments*, New York: Academic Press.
- Galil, Z. ve Kiefer, J. (1980), "Time-and Space-Saving Computer Methods, Related to Mitchell's DETMAX, for Finding *D*-Optimum Design," *Technometrics*, 21, 301-313.
- Gatza, P. E. ve McMillan, R. C. (1972), "The Use of Experimental Design and Computerized Data Analysis in Elastomer Development Studies," Division of Rubber Chemistry, American Chemical Society Fall Meeting, Paper No: 6, Cincinnati, Ohio, October 3-6.
- Hader, R. J., ve Park, S. H. (1978), "Slope-Rotatable Central Composite Designs," *Technometrics*, 20, 413-418.
- Harrington, E. C. (1965), "The Desirability Function," *Industrial Quality Control*, 21, 494-498.
- Hartley, H. O. (1959), "Smallest Composite Design for Quadratic Response Surfaces," *Biometrics*, 15, 611-624.
- Herzberg, A. M. (1966), "Cylindrically Rotatable Designs," *The Annals of Mathematical Statistics*, 37, 242-247.
- Herzberg, A. M. ve Andrews, D. F. (1976), "Some Considerations in the Optimal Design of Experiments in Non-Optimal Situations," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 38, 284-289.
- Hill, P. D. H. (1980), "*D*-Optimal Designs for Partially Nonlinear Regression Models," *Technometrics*, 22, 275-276.
- Hill, W. J. ve Hunter, W. G. (1966), "A Review of Response Surface Methodology: A Literature Review," *Technometrics*, 8, 571-590.
- Hill, W. J. ve Hunter, W. G. (1974), "Design of Experiments for Subset of Parameters," *Technometrics*, 16, 425-434.
- Hoerl, A. E. (1959), "Optimum Solution of Many Variables Equations," *Chemical Engineering Progress*, 55, 69-78.

- Hoerl, R. W. (1985), "Ridge Analysis 25 Years Later," *The American Statistician*, 39, 186-193.
- Hoke, A. T. (1974), "Economical Second-Order Designs Based On Irregular Fractions of the 3^n Factorial," *Technometrics*, 16, 375-384.
- Jones, E. R. ve Mitchell, T. J. (1978), "Design Criteria for Detecting Model Inadequacy," *Biometrika*, 65, 541-551.
- Kakwani, N. C. (1967), "The Unbiasedness of Zellner's Seemingly Unrelated Regression Equations Estimators," *Journal of the American Statistical Association*, 62, 141-142.
- Kiefer, J. (1958), "On the Nonrandomized Optimality and the Randomized Nonoptimality of Symmetrical Designs," *The Annals of Mathematical Statistics*, 29, 675-699.
- Kiefer, J. (1959), "Optimum Experimental Designs (with discussion)," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 21, 272-319.
- Kiefer, J. (1960), "Optimum Experimental Design V, with Applications to Systematic and Rotatable Designs," *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1, 381-405.
- Kiefer, J. (1961), "Optimum Experimental Designs in Regression Problems II," *The Annals of Mathematical Statistics*, 32, 298-325.
- Kiefer, J. (1962a), "Two More Criteria Equivalent to D -Optimality of Designs," *The Annals of Mathematical Statistics*, 33, 792-796.
- Kiefer, J. (1962b), "An Extramum Result," *Canadian Journal of Mathematics*, 14, 597-601.
- Kiefer, J. (1975), "Optimal Design: Variation in Structure and Performance Under Change of Criterion," *Biometrika*, 62, 277-288.
- Kiefer, J. ve Wolfowitz, J. (1960), "The Equivalence of Two Extramum Problems," *Canadian Journal of Mathematics*, 12, 363-366.
- Koshal, R. S. (1933), "Application of the Method of Maximum Likelihood to the Improvement of Curves Fitted by the Method of Moments," *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 96, 303-313.
- Lind, E. E., Goldin, J. ve Hickman, J. B. (1960), "Fitting Yield and Cost Response Surfaces," *Chemical Engineering Progress*, 56, 62-68.

- Lucas, J. M. (1974), "Optimum Composite Designs," *Technometrics*, 16, 561-567.
- Lucas, J. M. (1976), "Which Response Surface Design Best," *Technometrics*, 18, 411-417.
- Mehta, J. S. ve Das, M. N. (1968), "Asymmetric Rotatable Designs and Orthogonal Transformations," *Technometrics*, 10, 313-322.
- Mitchell, T. S. (1974), "An Algorithm for the Construction of *D*-Optimal Experimental Designs," *Technometrics*, 16, 203-210.
- Montgomery, D. C. (1991a), "Using Fractional Factorial Designs for Robust Process Development," *Quality Engineering*, 3, 193-205.
- Morris, M. D. ve Mitchell, T. J. (1983), "Two-Level Multifactor Designs for Detecting the Presence of Interaction," *Technometrics*, 25, 345-355.
- Myers, R. H. (1976), *Response Surface Methodology*, Ann Arbor, Mich.: Edwards Brothers (distribütörler).
- Myers, R. H. ve Carter, W. H., Jr. (1973), "Response Surface Techniques for Dual Response Systems," *Technometrics*, 15, 301-317.
- Pesotchinsky, L. L. (1975), "*D*-Optimum and Quasi *D*-Optimum Second-Order Designs on a Cube," *Biometrika*, 62, 335-340.
- Pignatiello, J. ve Ramberg, J. (1985), "Discussion of Off-Line Quality Control, Parameter Design, and the Taguchi Methods," *Journal of Quality Technology*, 17, 198-206.
- Plackett, R. L. ve Burman, J. P. (1946), "The Design of Optimum Multifactorial Experiments," *Biometrika*, 33, 305-325.
- Price, W. L. (1977), "A Controlled Random Search Procedure for Global Optimization," *The Computer Journal*, 20, 367-370.
- Roquemore, K. G. (1976), "Hybrid Designs for Quadratic Response Surfaces," *Technometrics*, 18, 419-423.
- Roy, S. N., Gnanadesikan, R. ve Sritastava, J. N. (1971), *Analysis and Design of Certain Quantitative Multiresponse Experiments*, Oxford: Pergamon Press.
- Scheffé, H. (1958), "Experiments With Mixtures," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 20, 344-360.
- Scheffé, H. (1963), "The Simplex-Centroid Design for Experiments With Mixtures," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 20, 235-263.

- Shoemaker, A. C., Tsui, K. L. ve Wu, C. F. J. (1991), "Economical Experimentation Methods for Robust Design," *Technometrics*, 33, 415-427.
- Silvey, S. D. (1980), *Optimal Designs*, London: Chapman and Hall.
- Stewart, W. E. ve Sorensen, J. P. (1976), "Sensitivity and Regression of Multicomponent Reactor Models," *Forth International Symposium on Chemical Reaction Engineering*, Frankfurt: Dechema, I-12-I-20.
- Taguchi, G. ve Wu, Y. (1980), *Introduction to Off-Line Quality Control*, Tokyo: Central Japan Quality Control Association.
- Westlake, W. J. (1965), "Composite Designs Based on Irregular Fractions of Factorials," *Biometrics*, 21, 324-336.
- Wynn, H. P. (1970), "The Sequential Generation of *D*-Optimum Experimental Designs," *The Annals of Mathematical Statistics*, 41, 1655-1664.
- Yates, F. (1937), *The Design and Analysis of Factorial Experiments*, London: Imperial Bureau of Soil Science.
- Zacks, S. (1977), "Problems and Approaches in Design of Experiments for Estimation and Testing in Nonlinear Models," *Proceedings of the 4th International Symposium on Multivariate Analysis*, ed. P. R. Krishnaiah, Amsterdam: North-Holland, ss. 209-223.
- Zellner, A. (1962), "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias," *Journal of the American Statistical Association*, 57, 348-368.