T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

# İŞLETME SORUNLARININ ÇÖZÜMÜNDE MARKOV KARAR SÜREÇLERİNİN KULLANILMASI VE BİR UYGULAMA

**Aslı ÖZDEMİR**

Danışman
**Prof. Dr. Şevkinaz GÜMÜŞOĞLU**

2008

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

# İŞLETME SORUNLARININ ÇÖZÜMÜNDE MARKOV KARAR SÜREÇLERİNİN KULLANILMASI VE BİR UYGULAMA

**Aslı ÖZDEMİR**

Danışman
**Prof. Dr. Şevkinaz GÜMÜŞOĞLU**

2008

**YEMİN METNİ**

Doktora Tezi olarak sunduğum "İşletme Sorunlarının Çözümünde Markov Karar Süreçlerinin Kullanılması ve Bir Uygulama" adlı çalışmanın, tarafımdan, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Tarih
..../..../.......
Aslı ÖZDEMİR
İmza

**DOKTORA TEZ SINAV TUTANAĞI**

| | |
|---|---|
| **Öğrencinin** | |
| **Adı ve Soyadı** | **:** Aslı ÖZDEMİR |
| **Anabilim Dalı** | **:** İşletme |
| **Programı** | **:** Doktora |
| **Tez Konusu** | **:** İşletme Sorunlarının Çözümünde Markov Karar Süreçlerinin Kullanılması ve Bir Uygulama |
| **Sınav Tarihi ve Saati** | **:** |

Yukarıda kimlik bilgileri belirtilen öğrenci Sosyal Bilimler Enstitüsü'nün …………………….. tarih ve ………. Sayılı toplantısında oluşturulan jürimiz tarafından Lisansüstü Yönetmeliğinin 30.maddesi gereğince doktora tez sınavına alınmıştır.

Adayın kişisel çalışmaya dayanan tezini …. dakikalık süre içinde savunmasından sonra jüri üyelerince gerek tez konusu gerekse tezin dayanağı olan Anabilim dallarından sorulan sorulara verdiği cevaplar değerlendirilerek tezin,

| | | | |
|---|---|---|---|
| BAŞARILI OLDUĞUNA | O | OY BİRLİĞİ | O |
| DÜZELTİLMESİNE | O* | OY ÇOKLUĞU | O |
| REDDİNE | O** | | |

ile karar verilmiştir.

| | |
|---|---|
| Jüri teşkil edilmediği için sınav yapılamamıştır. | O*** |
| Öğrenci sınava gelmemiştir. | O** |

* Bu halde adaya 3 ay süre verilir.
** Bu halde adayın kaydı silinir.
*** Bu halde sınav için yeni bir tarih belirlenir.

| | Evet |
|---|---|
| Tez, burs, ödül veya teşvik programlarına (Tüba, Fulbright vb.) aday olabilir. | O |
| Tez, mevcut hali ile basılabilir. | O |
| Tez, gözden geçirildikten sonra basılabilir. | O |
| Tezin, basımı gerekliliği yoktur. | O |

| JÜRİ ÜYELERİ | | | | İMZA |
|---|---|---|---|---|
| …………………………… | □ Başarılı | □ Düzeltme | □Red | …………….. |
| …………………………… | □ Başarılı | □ Düzeltme | □Red | ……….......... |
| …………………………… | □ Başarılı | □ Düzeltme | □Red | …. ………… |
| …………………………… | □ Başarılı | □ Düzeltme | □Red | ……….......... |
| …………………………… | □ Başarılı | □ Düzeltme | □Red | …………….. |

# ÖZET

**Doktora Tezi**

**İşletme Sorunlarının Çözümünde Markov Karar Süreçlerinin Kullanılması ve Bir Uygulama**

**Aslı ÖZDEMİR**

**Dokuz Eylül Üniversitesi**
**Sosyal Bilimler Enstitüsü**
**İşletme Anabilim Dalı**
**Doktora Programı**

**Teknolojik gelişmelerle yoğunlaşan rekabet ve değişen müşteri ihtiyaçları ile birlikte işletmelerin karar verme sürecinde belirsizlik artmaktadır. Yüksek düzeyde belirsizlik, geleceğe yönelik projeksiyonlar yapılırken daha objektif kararların verilmesini ve bu doğrultuda işletmelerin çeşitli yönetim bilimi tekniklerini de kullanmasını gerektirmektedir. Geleceğe yönelik planlar yapılırken belirsizlik içeren kararların verilmesinde stokastik yönetim bilimi tekniklerinden biri olan Markov Karar Süreçleri (MDP) yöneticilere destek sağlayabilmektedir. Literatürde işletmelerin pek çok kararına yönelik olarak MDP uygulamalarının gerçekleştirildiği çalışmalar olduğu görülmektedir.**

**Kar maksimizasyonu, maliyet minimizasyonu gibi tek bir amaç ele alındığında MDP'lerinin çözümünde değer iterasyonu, politika iterasyonu ya da Doğrusal Programlama (LP) gibi pek çok yöntem kullanılabilmektedir. LP, diğer yöntemlere kıyasla, çeşitli sistem kısıtlarının da ele alınabilmesine imkan vermesi açısından karar vericilere daha fazla esneklik sağlamaktadır. Ancak, işletmelerin yoğun rekabet ortamında faaliyet gösterirken aldıkları kararlar, birden fazla ve çoğunlukla da birbiriyle çatışan amaçların eş zamanlı olarak ele alınmasını ve tüm bu amaçlara mümkün olduğunca yaklaşmayı sağlayan kararlar verilmesini gerektirmektedir. Çok amaçlı karar verme tekniklerinden biri olan Hedef Programlama (GP) yaklaşımı bu tür sorunların çözümünde kullanılabilmektedir. Çalışmada otomotiv yan sanayinde faaliyet gösteren bir işletmenin üretim/envanter sistemi MDP olarak modellenmekte ve problemin çözümüne yönelik GP modeli oluşturularak işletmenin üç hedefi bir arada ele alınmaktadır. Çalışmanın amacı stokastik yapıdaki çok amaçlı karar problemlerinin çözümü için MDP ve GP yaklaşımlarının bir arada kullanıldığı bütünleşik bir bakış açısı ortaya koymaktır.**



**Anahtar Kelimeler**: Markov Karar Süreci, Doğrusal Programlama, Hedef Programlama, Çok Amaçlı Markov Karar Süreci, Üretim/Envanter Sistemleri.

# ABSTRACT

**Doctoral Thesis**

**Using Markov Decision Processes to Solve Business Problems and an Application**

**Aslı ÖZDEMİR**

**Dokuz Eylül University**
**Institute of Social Sciences**
**Department of Business Administration**
**Phd Program**

**By the intensified competition through technological improvements and changing customer requirements, uncertainty in the decision-making processes of businesses has been increasing. A high level of uncertainty entails making more objective decisions while forming future projections, therefore businesses to utilize management science methods. In determining decisions involving uncertainty while making future plans, Markov Decision Process (MDP), one of the stochastic management science methods, could provide assistance to managers. It is realized that there are studies covering MDP applications oriented to several decisions of businesses in the literature.**

**Various methods such as value iteration, policy iteration or linear programming (LP) can be used in the solution of MDP's when only one objective such as profit maximization or cost minimization is considered. Compared to other methods, LP provides more flexibility by enabling the consideration of several system constraints. However the decisions made by business while operating in an intensive competition environment require considering multiple and usually conflicting objectives simultaneously and making decisions providing to approximate all of those objectives as far as possible. Goal programming (GP), one of the multi-objective decision-making techniques, can be used to solve such problems. In this study, the production/inventory system of a business operating in the automotive supplier industry is modeled as MDP and three goals of business are considered together by constructing GP model oriented to solve the problem. The aim of this study is to provide an integrated perspective involving the utilization of MDP and GP approaches together for the solution of stochastic multi-objective decision problems.**

**Key Words:** Markov Decision Process, Linear Programming, Goal Programming, Multi Objective Markov Decision Process, Production/Inventory Systems.

**İŞLETME SORUNLARININ ÇÖZÜMÜNDE MARKOV KARAR SÜREÇLERİNİN KULLANILMASI VE BİR UYGULAMA**

## İÇİNDEKİLER

**İKİNCİ BÖLÜM**

**MARKOV KARAR SÜRECİ PROBLEMLERİNİN DOĞRUSAL PROGRAMLAMA VE HEDEF PROGRAMLAMA İLE FORMÜLASYONU**

**ÜÇÜNCÜ BÖLÜM**

**MARKOV KARAR SÜRECİ PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE HEDEF PROGRAMLAMA YAKLAŞIMININ KULLANILMASI VE BİR İŞLETME UYGULAMASI**

**KISALTMALAR**

MDP : Markov Karar Süreci (Markov Decision Process)

HR : Geçmişe Bağlı ve Rassal Karar Kuralı (History Dependent & Random Decision Rule)

HD : Geçmişe Bağlı ve Deterministik Karar Kuralı (History Dependent & Deterministic Decision Rule)

MR : Markovian ve Rassal Karar Kuralı (Markovian & Random Decision Rule)

MD : Markovian ve Deterministik Karar Kuralı (Markovian & Deterministic Decision Rule)

VDO : Değer Belirleme İşlemi (Value Determination Operation)

PIR : Politika Geliştirme Yordamı (Poliy Improvement Routine)

LP : Doğrusal Programlama (Linear Programming)

GP : Hedef Programlama (Goal Programming)

## TABLOLAR LİSTESİ

## ŞEKİLLER LİSTESİ

## EKLER LİSTESİ

# GİRİŞ

İşletmelerin hızla değişmekte olan koşullar, artan rekabet, teknolojik gelişmelerle birlikte değişen müşteri istek ve ihtiyaçlarını zamanında karşılaması için geleceğe yönelik yapılan planlarda daha rasyonel olmaları gerekmektedir. İşletmelerin objektif kararlar vermelerinde çeşitli karar destek sistemlerinden faydalanmaları önemli rol oynamaktadır. Global rekabetin yaşandığı günümüzde işletmelerin karar verme süreçleri daha yüksek düzeyde belirsizlik içermekte ve geleceğe yönelik olarak yapılan planlarda ve verilen kararlarda belirsizlik unsurunun da ele alınmasını sağlayan çeşitli yaklaşımlardan faydalanmak yöneticilere destek sağlayabilmektedir. Bu doğrultuda, literatürdeki çalışmalardan görüldüğü üzere işletmelerin karar verme süreçlerinde karşılaştıkları pek çok stokastik problemin modellenmesinde kullanılan Markov Karar Süreçleri (MDP), işletmelerin rekabet avantajında büyük önem taşıyan üretim/envanter kararlarının verilmesinde de faydalanılabilecek tekniklerden biri olarak ele alınabilmektedir. MDP yaklaşımı ile ele alınan bir sistemin bir sonraki durumu, kazanılan ödül ve yapılan gözlem sadece sistemin mevcut durumuna ve seçilen harekete bağlı ve önceki durum ve hareketlerden bağımsız olmaktadır. İşletmelerin stokastik yapıdaki karar problemlerini ele almasını sağlayan MDP yaklaşımı bu yapısı itibariyle mevcut duruma odaklanarak geleceğe yönelik projeksiyonlar yapılmasına da olanak sağlamaktadır.

MDP olarak modellenen bir problemin çözümünde farklı yöntemler kullanılabilmektedir. Fakat sonsuz zamanlı süreçlerde kullanılan Doğrusal Programlama (LP) yaklaşımı ile bütçe, stoksuzluk vb. çeşitli sistem kısıtları da modele dahil edilebilmektedir. Ele alınan ve MDP ile modellenen işletme sorununda kar maksimizasyonu, maliyet minimizasyonu gibi tek bir amacın olması durumunda, bu özelliği ile LP yaklaşımı esnek bir çözüm yöntemi olmaktadır. Öte yandan global rekabetin etkisiyle işletmelerin artık tek bir amaca değil birden fazla ve çoğunlukla da birbiriyle çatışan amaçlara odaklanması gerekmektedir. Bu doğrultuda işletmelerin bu tür çok amaçlı karar problemlerini çözmede yardımcı olabilecek yönetim bilimi tekniklerinden Hedef Programlama (GP) yaklaşımı kullanılabilmektedir.

GP, birden fazla amacın eş zamanlı olarak ele alınmasını, bu amaçların tümüne mümkün olduğunca yaklaşan çözümler bulunmasını sağlamasının yanı sıra öncelikli yapıdaki GP modelleriyle karar vericilerin farklı öncelik tercihlerinin modele dahil edilmesini ve farklı öncelik düzeylerinde karşılaştırılmalı analiz yapılmasını da sağlamaktadır. Bu doğrultuda LP yaklaşımına kıyasla daha yüksek düzeyde esneklik sağlayarak karar vericilerin tercihlerinin de modele dahil edilmesine olanak vermektedir. Bu bakış açısıyla literatürde yer alan çalışmalar incelenmiş ve MDP olarak modellenen ve birden fazla amacın ele alındığı bir üretim/envanter sorununun çözümüne yönelik olarak GP modeli önerilmiştir. Bu doğrultuda çalışmanın amacı, işletmelerin stokastik ve çok amaçlı karar problemlerinin çözümünde faydalanılmak üzere MDP ve GP tekniklerinin kullanıldığı bütünleşik bir yaklaşım ortaya koymaktır.

Belirtilen amaç doğrultusunda çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde "Markov  Karar Süreçleri" incelenmektedir. Bu bölümde stokastik süreç ve MDP kavramları ile MDP'nin tarihsel gelişimine ve ele alınan işletme sorununun MDP olarak modellenmesine temel teşkil eden MDP bileşenlerine yer verilmektedir. MDP'lerinin sınıflandırılması yapıldıktan ve süreçte kullanılan ödül kriterleri ele alındıktan sonra ise MDP yaklaşımının işletme kararlarında kullanılmasına yönelik olarak gerçekleştirilen çalışmalar ortaya konmaktadır.

İkinci bölümde ise MDP ile modellenen problemlerin LP ve GP ile çözülmesine temel oluşturmak üzere, öncelikle LP yaklaşımı ve çeşitli işletme problemlerinin çözümünde bu yaklaşımın kullanıldığı çalışmalara yer verilmektedir. MDP ile modellenen problemlerin LP ile çözümüne ilişkin literatür incelendikten sonra model formülasyonu ortaya konmakta ve sonrasında GP yaklaşımı ve yaklaşımın işletme kararlarında kullanılmasına yönelik yapılan çalışmalar ele alınmaktadır. Bu bölümde son olarak çok amaçlı yapıdaki MDP'lerine ilişkin ve bu yapıdaki sorunların çözümünde GP yaklaşımın kullanıldığı çalışmalara yönelik literatür taramasına yer verilerek çalışma ile önerilen model ortaya konmakta ve prototip bir uygulama yapılmaktadır.

Üçüncü ve son bölümde ise otomotiv yan sanayinde faaliyet gösteren bir işletmenin üretim/envanter sistemi ele alınarak MDP ile modellenmekte ve sürecin LP ve GP yaklaşımları ile çözümüne ve çözüm sonuçlarının karşılaştırılmasına yer verilmektedir.

# BİRİNCİ BÖLÜM
# MARKOV KARAR SÜREÇLERİ

İşletmelerin geleceğe yönelik vereceği stokastik nitelikler taşıyan kararlara ilişkin problemlerin Markov karar süreci olarak formüle edilmesi ve optimal çözümün bulunması amacı doğrultusunda birinci bölümde öncelikle Markov karar sürecinin kuramsal çerçevesi oluşturulmaya çalışılmakta ve stokastik süreç, Markov karar süreci ve bileşenlerine, Markov karar sürecinin temel sınıflandırılmasına ve Markov karar süreçlerinde kullanılan ödül kriterlerine yer verilmektedir. Ele alınan karar probleminin Markov karar süreci olarak formüle edilmesiyle belirlenen durumlar, geçiş olasılıkları matrisi, her aşamada alınabilecek farklı kararların ve bu kararlara ilişkin ödül (veya maliyet) kümelerinin kullanılması ile probleme optimal çözümün bulunmasında problemin yapısına bağlı olarak farklı yöntemlerden faydalanabilmektedir. Çalışmanın birinci bölümünde bu yöntemlere ve de işletmelerin karar verme sürecinde Markov karar süreçlerinin kullanılmasına ilişkin literatür taramasına da yer verilmektedir.

## 1.1. STOKASTİK SÜREÇ

Karar verme süreci, farklı davranış biçimlerinden birinin tercih edilmesiyle sonuçlanan bir süreç olarak tanımlanabilmektedir. Bir karar sorununun var olabilmesi için birden çok davranışın bulunması ve her bir davranışın sonuçlarının birbirinden farklı olması gerekmektedir (Tütek ve Gümüşoğlu, 2005: 65). Karar verme süreci, karar sonuçlarının önceden belirlenebilmesi veya belirlenememesine göre deterministik ve stokastik süreç olarak sınıflandırılmaktadır.

Mevcut aşamada mevcut politika ve durumlarla, gelecek durum ve kararların kesin olarak belirlenebildiği süreçler deterministik süreçler olarak adlandırılmaktadır (Hillier ve Lieberman, 2001: 541). Deterministik süreçler, bir kararın seçme konusu yapılması durumunda bu karardan doğacak sonuçların önceden bilineceği gerçeğine dayanmaktadır (White, 1969: 36).

Gerek doğada kendiliğinden ortaya çıkan gerekse insanın etkisinde oluşan ve içinde birçok kararı bulunduran sistemlerde çeşitli olaylar ortaya çıkmaktadır. Bu olaylar zaman içinde tahmin edilemeyen biçimde değişmekte ve olayı oluşturan kararların değerleri belirli bir olasılıkla gerçekleşmekte, hiçbir statik dağılım kanununa bağlı bulunmamaktadır. Bir ya da birden çok kararın zaman fonksiyonuna göre tesadüfi bir özellik nedeniyle değişmesi durumuna denk düşen modele "*Stokastik Süreç*" adı verilmektedir (Demir, 1974: 23).

Deterministik problemlerin ödemeler fonksiyonu ayrılmaya, sabitlenmeye ve sınırlanmaya elverişlidir. Oysa stokastik modeller çeşitli belirsizlikler içerdiği için deterministik modellerden daha geneldir (King, 2002: 22). Stokastik süreçleri deterministik süreçlerden ayıran en belirgin özellik, bu süreçlerden herhangi bir aşamada verilen karardan ötürü değişen ve ortaya çıkacak durumun daha önceden saptanamamasıdır. Ancak değişen durum, belki de yapılan harekete ve ilk duruma bağlı olarak ortaya konan bir olasılık fonksiyonu yolu ile belirginleştirilebilmektedir. (Taha, 1997: 561).

Zaman içindeki farklı noktalarda (*0,1,2,...* olmak üzere) bir sistemin bazı özellikleri incelendiğinde; $X_t$ , $t$ zamanında sistemin belirli bir özelliğinin değerini göstermek üzere, çoğu durumda $X_t$ , $t$ zamanından önce kesin olarak bilinmemekte ve bir rastsal değişken olarak nitelendirilebilmektedir. Rastsal değişkenlerin aldığı her bir özel değer, bir durum olarak adlandırılmaktadır. Stokastik süreçteki $X_t$ rastsal değişkeni bir durum değişkeni olmaktadır. Stokastik süreç, tüm $X_t$ rastsal değişkenlerinin kümesini ifade etmektedir (Halaç, 2001: 99). Diğer bir tanıma göre, bir stokastik süreç, verilen $T$ kümesinin bir elemanı olan $t$ zamanında sistemin durumunu gösteren $\{X_t\}$ rastsal değişkenlerinin birleşimi olarak tanımlanmaktadır. $T$, genellikle negatif olmayan tam sayılardan oluşan bir kümeyi ve $X_t$ de sistemin ilgilenilen ölçülebilir bir karakteristiğinin $t$ zamanındaki değerini simgelemektedir. Örneğin $X_1$ , $X_2$ , $X_3$ , ..., stokastik süreci, bir ürün için haftalık veya aylık olası envanter düzeylerini veya bu ürün için haftalık olası talep miktarlarını simgeleyebilmektedir (Hillier ve Lieberman, 1990: 103).

Sürecin deterministik olması durumunda gözlem sonucu, kesin olarak tahmin edilebilir olmaktadır. Fakat stokastik olması durumunda gözlem sonucu, belirli bir olasılık kümesi ile kontrol edilmektedir. Bu nedenle deterministik kurala göre durum *X* 'i daima durum *Y* izlerken, stokastik kurala göre durum *Y*, durum *X*'i bir *p* ve durum *Z*'yi *q=1-p* olasılığı ile izlemektedir. Bu nedenle stokastik modeller, stokastik kurala göre sonuçlar üretmekte ve bu sonuçlar gelecekteki olası durumlar kümesine ilişkin olasılıklarla ifade edilmektedir (Collins, 1970: 23). Stokastik süreç, zaman içinde rassal olarak değişme özelliğine sahiptir.

Stokastik süreçler, olasılıklı kurallarla ortaya çıkan rassal değişkenler dizisidir. Stokastik kelimesi ise Yunancadan gelmekte ve rassal veya şans anlamını taşımaktadır (Kijima, 1997: 1).

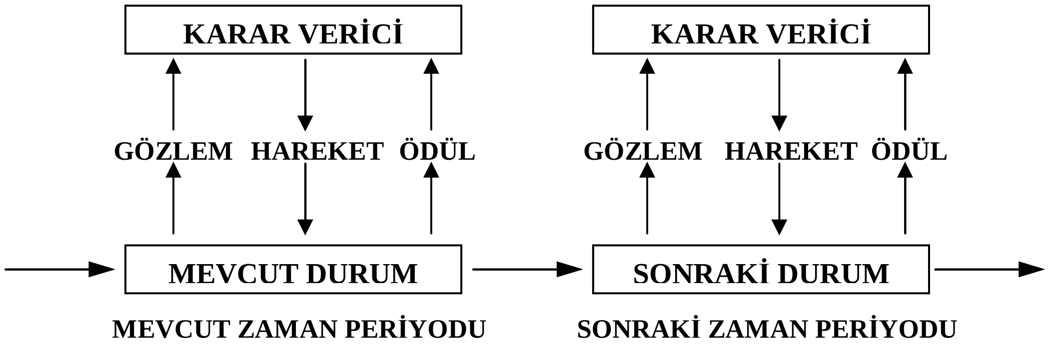
Global rekabet koşullarında verilen kararların sonuçları kesin olarak belirlenemediğinden karar vericiler stokastik karar verme modellerinden faydalanmaktadırlar. İşletmelerin karar sorunlarında en çok kullandıkları stokastik karar verme modellerinden biri Markov Karar Süreci (MDP) olmaktadır. Çalışmanın sonraki bölümünde MDP modeline ve bileşenlerine yer verilmektedir.

## 1.2. MARKOV KARAR SÜRECİ (MDP)

Belirsizlik altında dinamik karar vermenin temel modellerinden biri Markov karar sürecidir. Genel anlamıyla, durumlar kümesini ve her durumda seçilebilir hareketleri içeren bir sistemden oluşmaktadır. Her zaman noktasında sistem sadece bir durumda olabilmektedir. MDP, sıralı karar modelidir: her bir zaman noktasında *karar verici* tarafından bir *hareket* gerçekleştirilmekte, bir *ödül* elde edilmekte (kazanç veya maliyet ortaya çıkmakta), zaman ilerlemekte, sistem durum değiştirmekte ve sistemin yeni durumuna ilişkin bilgi içeren *gözlem* yapılmaktadır ve Şekil 1'de gösterilen bu temel düzen tekrarlanmaktadır (Madani, 2000: 1).

Süreci kontrol etmenin genel amacı, her zaman noktasında ulaşılabilir bilgiye dayanarak hareketlerin seçilmesi için yol gösterici olan bir politika bulmaktır. Böylece politikaya göre hareketler seçildiğinde elde edilen ödüller doğrultusunda belirli bir performans düzeyine ulaşılmaktadır (Madani, 2000: 2).

**Şekil 1.1.** MDP'nin Temel Düzeni




(Kaynak: Madani, 2000: 2)

MDP belirli bir durumdan diğer durumlara geçişin olabildiği stokastik bir sistemdir. Her geçişte karar vericinin tanımlanmış bir hareket kümesinden belirli bir hareketi seçmesi gerekmektedir (Ching ve Ng, 2006: 33). Bu seçilen hareket, bir sonraki geçişin geçiş olasılıklarını etkilemekte ve bir ödül (getiri veya kayıp) ile sonuçlanmaktadır. Karar vericinin karşı karşıya kaldığı sorun, tüm ödüllerin optimize edilmesini sağlayan uygun bir hareket planını belirlemektir.

MDP'nin düzeni aşağıdaki biçimde de özetlenebilmektedir (Ching ve Ng, 2006: 34);

(i) Belirli bir periyotta Markov sürecinin belirli bir durumu gözlemlenmektedir.

(ii) Durumun gözlemlenmesinden sonra, olası kararlar kümesinden bir hareket seçilmektedir. Farklı durumlar farklı karar kümelerine de sahip olabilmektedir.

(iii) Mevcut duruma ve seçilen harekete bağlı olarak bir anlık (hemen ortaya çıkan) getiri (veya kayıp) ortaya çıkmaktadır.

(iv) Geçiş olasılıkları da seçilen hareketten etkilenmektedir.

(v) Zaman parametresi arttıkça yani zaman ilerledikçe, geçişler tekrar ortaya çıkmakta ve yukarıdaki basamaklar tekrarlanmaktadır.

Modelin en önemli karakteristiği Markov özelliğidir. Markov özelliği, sistemin bir sonraki durumu, kazanılan ödül ve yapılan gözlemin sadece sistemin mevcut durumuna ve seçilen harekete bağlı olduğunu ve önceki durum ve hareketlerden bağımsız olduğunu ifade etmektedir (Madani, 2000: 2). Kesikli $\{X_t, t = 0,1,2,...\}$ veya sürekli $\{X_t, t \geq 0\}$ bir stokastik süreç, $n$ zaman periyodlar kümesi $t_1 < t_2 < \cdots t_n$ için, sürecin hangi durumda olacağına ilişkin koşullu olasılığın sadece bir önceki periyottaki değere bağlı olması halinde Markov karar süreci (MDP) olarak adlandırılmaktadır. Diğer bir ifadeyle, sürecin şu anki durumu bilindiğinde gelecek, geçmiş durumlardan bağımsız olmaktadır (Parzen, 1962: 188). Markov sürecinin bu özelliği "hafızasızlık" (memoryless) olarak adlandırılmakta ve Markov sürecini diğer stokastik süreçlerden ayırmaktadır. Markov sürecinde bir durumdan diğerine geçiş olasılığı sadece mevcut duruma ve bir sonraki periyottaki duruma bağlı iken Markovian olmayan stokastik süreçlerde geçiş olasılığı mevcut duruma, bir sonraki periyottaki duruma ve mevcut durumdan önceki duruma bağlı olmaktadır (http://www.eng.buffalo.edu/~agosavi/chapdp.pdf).

Markov süreci kompleks sistemleri ele almada yararlı olan matematiksel bir modeldir. Markov sürecinin temel kavramları bir sistemin "durum"ları ve durum "geçiş"leridir. Sistemin, durumu tanımlayan değişken değerleri ile belirtilmesi halinde o durumda olduğu söylenmektedir. Bir sistem, sistemi tanımlayan değişkenlerin değerinin başka bir durum için tanımlanan değeri alması halinde geçiş yapmaktadır (Howard, 1960: 3). Markov sürecinin en önemli özelliklerinden biri düzenli olarak durumların değişmesi diğer bir ifadeyle durumlar arası geçişlerin ortaya çıkmasıdır. Belirli zaman sonunda sistem ya başka bir duruma geçmekte ya da önceki periyotta bulunduğu duruma geri dönmektedir. Sürecin durumlar arası geçişleri olasılıklı yani rassal niteliktedir. Her geçişte harcanan süre birbirine eşit ve birim zaman olabildiği gibi bu süreler de rassal özellik gösterebilmektedir (http://www.eng.buffalo.edu/~agosavi/chapdp.pdf). Markovian bir karar süreci, stokastik yapıda bir sıralı karar sürecidir. Markov süreci, Markovian özelliği ile farklı olan ve yöneylem araştırması, biyoloji, mühendislik ve ekonomi gibi pek çok disiplinde uygulaması bulunan bir stokastik süreçtir.

Kontrol edilmeyen markov süreçleri, bir durumdan diğerine geçişin sadece tek bir olasılık kuralı (geçiş olasılıkları matrisi) ile belirlendiği stokastik süreçlerdir. Stokastik sürecin yaptığı geçişlere yani izlediği yola dışarıdan müdahale edilmesi söz konusu değildir. Farklı kontrol mekanizmaları ve her mekanizmanın kendi geçiş olasılıkları matrisi ile tanımlanmasıyla yürütülen sistemler de bulunmaktadır. Kontrol mekanizması her durumda seçilmesi gereken hareketi belirler. Birden fazla kontrol mekanizması arasından seçim yapmanın söz konusu olması Markov karar problemi kavramını ortaya çıkarmaktadır. Markov karar problemi her durumdaki optimal hareketin bulunması problemi diğer bir ifadeyle kontrol optimizasyonu problemidir (http://www.eng.buffalo.edu/~agosavi/chapdp.pdf).

1957 yılında Bellman, yayınladığı *"Dinamik Programlama"* kitabında sıralı karar problemlerinin çözümünde kullanılacak yeni bir nümerik çözüm yöntemi sunmuştur. Sonlu veya sonsuz bir zaman sürecinde gözlemlenen sistem periyodlara veya aşamalara ayrılmakta ve her aşamada sistemin durumu incelenerek bir karar (veya hareket) belirlenmektedir. Verilen karar deterministik veya stokastik olarak sistemin bir sonraki aşamadaki gözlemlenen durumunu etkilemekte ve sistemin durumu ile verilen karara bağlı olarak o aşamada bir ödül kazanılmaktadır (http://www.jbs.agrsci.dk/~ejo/nova/notat48.pdf). Mevcut aşamadan planlama döneminin sonuna kadarki sürede kazanılan beklenen toplam ödül ise bir değer fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Mevcut aşamadaki ve bir sonraki aşamadaki değer fonksiyonları arasındaki ilişki ise fonksiyonel eşitlik ile ortaya konmaktadır. Aşamaya ve duruma bağlı olarak optimal kararlar, fonksiyonel eşitliğin sağ tarafını maksimize ederek geriye doğru aşama aşama belirlenmektedir. Bu yöntemle optimal politikanın bulunması Bellman'ın "Optimallik İlkesi"ne dayanmaktadır (Ahmed, 2005; 6). Optimallik ilkesine göre, optimal politika (ya da karar) öyle bir özellik taşımalıdır ki bir duruma nasıl erişildiği göz önüne alınmaksızın sonraki kararlar, o durumun terk edilmesinden sonra optimal bir politikayı oluşturmalıdır (Tütek ve Gümüşoğlu, 2005: 347).

Sonraki yıllarda (1961, 1962, 1965) Bellman konuya ilişkin pek çok kitap yayınlamıştır. Konunun farklı alanlardaki çok sayıda gerçek karar problemine uygulanabileceği beklenmiştir (http://www.jbs.agrsci.dk/~ejo/nova/notat48.pdf).

1960'da Howard, yayınladığı *"Dinamik Programlama ve Markov Süreçleri"* isimli kitabı ile dinamik programlama ve matematiksel Markov zinciri kavramını bütünleştirme fikrini ortaya koymuştur. Bu fikir, bütünleştirilmiş kavramı anlatmak için *Markov Karar Süreçleri* teriminin kullanılması ile sonuçlanmıştır. Howard bu eseriyle, politika iterasyonu olarak adlandırdığı yöntemi ortaya koyarak sonsuz zamanlı problemlerin çözümüne de katkı sağlamıştır. Bu yöntem, beklenen toplam indirgenmiş ödülün maksimizasyonu ve her aşamadaki beklenen ortalama ödülün maksimizasyonu olarak adlandırılan iki optimallik kriteri için geliştirilmiştir. 1963 yılında Jewell yarı-markov karar süreçlerinde zaman içindeki ortalama ödülün maksimizasyonu için bir politika iterasyonu tekniği geliştirmiş ve 1971'de Howard bu tip markov karar süreçleri için bir değer iterasyonu yöntemi ortaya koymuştur (http://www.jbs.agrsci.dk/~ejo/nova/notat48.pdf).

Howard'ın Markov karar süreçlerine ilişkin sözü edilen ilk kitabından sonra bu alanda çalışmalar yoğunlaşmış ve optimallik ilkesi ve çeşitli optimizasyon teknikleri arasındaki ilişkilere yönelik farklı sonuçlar elde edilmiştir. Bu gelişmelere ilişkin değerlendirmeler Van der Wal ve Wessel (1985) ve White ve White (1989) tarafından ortaya konmuştur (http://www.jbs.agrsci.dk/~ejo/nova/notat48.pdf).

Sonraki yıllarda Markov karar süreçlerinin; satın alma kararları, tüketici davranışlarının incelenmesi, işgücü planlaması, üretim planlaması, envanter kontrolü, yeni ürün geliştirme, reklam politikaları ve promosyon kararları, optimal kaynak dağıtımı sorunları, kuyruk modelleri, finansman ve yatırım kararları, makine-teçhizatın kalite kontrolü bakım-onarım ve yenilenmesine ilişkin karar problemleri gibi çeşitli işletme fonksiyonlarına ilişkin pek çok işletme sorununda uygulandığı görülmektedir (White, 1985: 73-83; White, 1988: 55-61; White, 1993: 1073-1096). Ayrıca 1950'li yıllardan başlamak üzere yapılan çeşitli çalışmalarda (Denardo, 1970; Derman, 1962; Hordijk ve Kallenberg, 1979; Kislev ve Amiad, 1968; Manne, 1960;

Nazareth ve Kulkarni, 1986; Wolfe ve Dantzig, 1962) Markov karar süreçlerinin çözümünde doğrusal programlamanın bir optimizasyon tekniği olarak kullanılabileceği ortaya konmuştur.

MDP kavramı ve gelişimi yukarıdaki biçimde ortaya konduktan sonra, MDP'nin yapısını ve bileşenlerini ayrıntılarıyla ele almak uygun olacaktır.

## 1.3. MARKOV KARAR SÜRECİNİN YAPISI VE MODEL FORMÜLASYONU

Çalışmanın bu bölümünde MDP modelinin temelini oluşturan karar dönemi ve periyot, durum ve hareket kümeleri, ödül ve geçiş olasılıkları, karar kuralı, ve politika kavramlarına yer verilmektedir.

### 1.3.1. Karar Dönemleri Ve Periyotlar

Karar verici veya kontrolör bir problemle ya da zaman içinde değişen stokastik bir sistemin davranışını etkileme fırsatıyla karşı karşıya kalmakta ve bunu karar vererek veya belirli hareketleri seçerek yapmaktadır. Karar vericinin amacı, önceden belirlenen belirli performans kriterlerine göre sistemin optimal çalışmasını sağlayacak hareketler dizisini veya kümesini seçmektir. Modellenen sistem devam etmekte olduğundan sistemin bugünkü karardan önceki durumu, bir önceki dönemde alınan karara bağlı olmaktadır. Bu nedenle kararların uzağı görerek verilmesi ve sistemin gelecekteki durumuna ilişkin fırsatların ve maliyetlerin (ya da ödüllerin) tahminlenmesi gerekmektedir.

Kararlar, karar dönemleri olarak adlandırılan zaman içindeki belirli noktalarda verilmektedir. Karar dönemlerinin kümesi $T$ ile gösterildiğinde, negatif olmayan reel sayılardan oluşan bu küme, kesikli küme veya süreklilik ve sonlu veya sonsuz küme olmak üzere iki biçimde sınıflandırılabilmektedir. Kesikli olması durumunda kararlar tüm karar dönemlerinde verilmektedir. Süreklilik durumunda ise kararlar; tüm karar dönemlerinde sürekli olarak, zaman içindeki rassal noktalarda veya karar verici tarafından seçilen fırsat zamanlarında verilebilmektedir (Puterman, 1994: 17). $T$ kümesinin elemanları $t$ (veya $n$) ile gösterilmekte ve çoğunlukla $t$ zamanı veya $t$ periyodu olarak adlandırılmaktadır.

### 1.3.2. Durum Ve Hareket Kümeleri

Her karar döneminde sistem bir durumda olmaktadır. Sistemin olası durumlarının kümesi $S$ ile gösterilebilmektedir. Karar verici herhangi bir karar döneminde sistemin $i$, $i \in S$, durumunda olduğunu gözlemlemesi halinde $i$ durumunda seçebileceği tüm olası hareketlerin kümesi olan $A_i$ kümesinden $k$ hareketini seçebilmektedir. $S$ sürecin durum uzayı ve $A$ da hareket uzayını ifade etmektedir. (Çalışmada kullanılan notasyon EK 1'de özet olarak verilmektedir.)

Hareketler rassal veya deterministik olarak seçilebilmektedir. Olasılık dağılımı $P(A_i)$ ve bu kümenin elemanları $q(.) \in P(A_i)$ ile gösterildiğinde kararların rassal olarak verilmesi $a$ hareketinin $q(k)$ olasılıkla seçildiği bir $q(.) \in P(A_i)$ olasılık dağılımının belirlenmesini ifade etmektedir (Puterman, 1994: 18-19).

### 1.3.3. Ödüller Ve Geçiş Olasılıkları

$N$ durumlu bir Markov sürecinin, $i$ durumundan $j$ durumuna geçiş yaptığında $r_{ij}$ birim para kazandığı varsayılsın. Kazanılan $r_{ij}$, $i$'den $j$'ye geçişle ilgili "ödül" olarak adlandırılır. Ödüller kümesi, $r_{ij}$ elemanlarından oluşan bir ödül matrisi $R$ ile tanımlanır. Markov süreci, durumdan duruma geçiş yaptıkça ödüller serisi yaratır. Bu nedenle ödül, Markov sürecinin olasılıklı ilişkisi doğrultusunda, olasılık dağılımı olan bir rassal değişkendir (Howard, 1960: 17).

$t$ karar döneminde $i$ durumunda iken $k \in A_i$ hareketinin seçilmesi sonucunda,

1.Karar verici bir ödül $r_t(i,k)$ almaktadır.

2.Sistemin bir sonraki periyottaki durumu $p_t(.|i,k)$ olasılık dağılımı ile belirlenmektedir.

Reel değerli $r_t(i,k)$ fonksiyonu $i \in S$ ve $k \in A_i$ için tanımlandığında, pozitif olması halinde $r_t(i,k)$ gelir ve negatif olması halinde $r_t(i,k)$ maliyet olarak nitelendirilmektedir. $r_t(i,k)$ ile tanımlanan ve $k$ alternatifi seçilmesi halinde $i$ durumundan $j$ durumuna geçişe ilişkin ödül olarak ifade edilen ödüller zamandan bağımsız olması durumunda, $r_{ij}^k$ ile gösterilebilmektedir.

Ödülün periyot boyunca ortaya çıktığı ve yalnızca değeri ya da beklenen değerinin belirli bir hareketi seçmeden önce bilindiği ve gelecekteki hareketlerden etkilenmediği varsayılmaktadır. Ödül;

1. Gelecek karar döneminden önceki sabit veya rassal zamanda peşin alınan ödül olabilmektedir.
2. Mevcut periyotta sürekli olarak ortaya çıkabilmektedir.
3. Sonraki periyottaki sistem durumuna bağlı olan rassal bir miktar olabilmektedir veya
4. İlk üç durumun kombinasyonu olabilmektedir (Puterman, 1994: 20).

Ödülün, sonraki karar dönemindeki sistem durumuna bağlı olması halinde $r_t(i,k,j)$, sistem $t$ periyodunda $i$ durumunda iken $k \in A_i$ hareketinin seçilmesi ve sistemin $t+1$ periyodunda $j$ durumuna geçmesi ile ortaya çıkan ödül değerini göstermektedir. Ödülün $t$ karar dönemindeki beklenen değeri aşağıdaki biçimde hesaplanmaktadır;

$$r_t(i,k) = \sum_{j \in S} r_t(i,k,j)\, p_t(j|i,k)\,.$$

Yukarıdaki ifadede negatif olmayan $p_t(j|i,k)$ fonksiyonu, karar verici $t$ periyodunda $i$ durumunda iken $k \in A_i$ hareketini seçtiğinde sistemin $j \in S$ durumunda olma olasılığını ifade etmektedir. $p_t(j|i,k)$ fonksiyonu geçiş olasılıkları fonksiyonu olarak adlandırılmakta ve sistemin gelecek geçişinden sonra bir durumda olması gerektiğinden $\sum_{j \in S} p_t(j|i,k) = 1$ $(0 \le p_t(j|i,k) \le 1)$ olduğu varsayılmaktadır. Her hareket için belirlenen geçiş olasılıkları matrisleri Markov sürecinin bütünüyle gösterimini sağlamaktadır. Matrislerin satırlarında negatif olmayan ve 1'den büyük olmayan olasılık değerleri yer almakta ve matrislerin satır toplamı 1'e eşit olmaktadır. Bu özelliklere sahip matrisler stokastik matris olarak da adlandırılmaktadır. Geçiş olasılıkları matrisinde yer alan ve $p_t(j|i,k)$ fonksiyonu ile verilen koşullu olasılıklar $p_{ij}^k$ biçiminde gösterilebilmektedir.

Sonlu zamanlı Markov karar süreçlerinde *N*. karar döneminde hiçbir karar verilmemekte ve bunun sonucu olarak bu dönemde alınan ödül durumun bir fonksiyonu olmaktadır. Bu fonksiyon $r_N(i)$ olarak gösterilmekte ve çoğunlukla hurda değer olarak adlandırılmaktadır (Puterman, 1994: 20).

Periyot, durum, hareket, geçiş olasılıkları ve ödül öğelerinin birleşimi $\{T, S, A_i, p_t(.|i,k), r_t(i,k)\}$ bir Markov karar sürecini oluşturmaktadır. Karar sürecinin "Markov" olarak nitelendirilmesinin nedeni, daha önce de belirtildiği gibi, geçiş olasılıklarının ve ödüllerin geçmişe, sadece sistemin mevcut durumu ve bu durumda karar vericinin seçtiği hareketler aracılığıyla bağlı olmasıdır.

### 1.3.4. Karar Kuralları

Bir karar kuralı, belirli bir karar döneminde her bir durum için hareketin seçilmesine yönelik prosedürü belirtmektedir.

Karar kuralları deterministik Markovian'dan rassal geçmişe bağlı karar kurallarına doğru değişmektedir. Karar kuralları geçmiş verilere bağlılık derecesine ve hareket seçim yöntemine bağlı olarak; geçmişe bağlı ve rassal (HR), geçmişe bağlı ve deterministik (HD), Markovian ve rassal (MR) veya Markovian ve deterministik (MD) olarak dört sınıfa ayrılmaktadır. *t* periyodundaki karar kurallarının kümesi $D_t^\kappa$ ile gösterilmekte ve bu gösterimde $\kappa$ karar kurallarının bir sınıfını simgelemektedir ($\kappa = HR, HD, MR, MD\,K$). $D_t^\kappa$ ise karar kuralları kümesi olarak tanımlanmaktadır (Puterman, 1994: 21). Çalışmada deterministik Markovian karar kuralları ele alınmaktadır.

Karar kurallarının sınıflandırılması aşağıdaki tabloda verilmektedir. Deterministik Markovian karar kuralları *t* karar döneminde sistem *i* durumunda iken hareket seçimini belirleyen $d_t : S \to A_i$ fonksiyonlarını ifade etmektedir. Her $i \in S$ için $d_t(i) \in A_i$ olmaktadır. Karar kuralı sistemin geçmiş durum ve hareketlere sadece sistemin mevcut durumu aracılığıyla bağlı olması nedeniyle Markovian (hafızasız) ve kesinlikle bir hareketin seçilmesi nedeniyle deterministik olarak nitelendirilmektedir. $d_t \in D_t^{MD}$ için, ödül $r_t(i, d_t(i))$'e ve geçiş olasılığı $p_t(j|i, d_t(i))$'e eşit olmaktadır (Puterman, 1994: 21). Deterministik bir karar kuralı, sistemin önceki durumlar ve hareketler dizisi ile gösterilen geçmiş davranışlarına bağlı olması halinde geçmişe bağımlı olarak adlandırılmaktadır.

**Tablo 1.1.** Karar Kuralları ve Karar Kuralı Kümelerinin Sınıflandırılması

| | **Hareket Seçimi** | |
|---|---|---|
| **Geçmişe Bağlılık** | ***Deterministik*** | ***Rassal*** |
| ***Markovian*** | $d_t(s_t) \in A_{s_t}$<br>$D_t^{MD}$ | $q_{d_t(s_t)}(.) \in P(A_{s_t})$<br>$D_t^{MR}$ |
| ***Geçmişe Bağlı*** | $d_t(h_t) \in A_{s_t}$<br>$D_t^{HD}$ | $q_{d_t(h_t)}(.) \in P(A_{s_t})$<br>$D_t^{HR}$ |

(Kaynak: Puterman, 1994: 22)

### 1.3.5. Politikalar

Politika, hareket belirleme kuralıdır. Süreç boyunca alınması gereken tüm kararları tanımlar (Ching ve Ng, 2006: 34). Politika, tüm karar dönemlerinde kullanılması gereken karar kuralını belirlemektedir. Politika, karar vericiye herhangi bir olası gelecek sistem durumu veya geçmiş altında hareket seçimi konusunda yol gösterir (Puterman, 1994: 22). Politika, her durumda seçilmesi gereken optimal hareketi belirleyen kontrol mekanizmasıdır.

Bir $\pi$ politikası, karar kurallarının dizisidir. $t = 1,2,\ldots,N-1$ için $\pi = (d_1, d_2, \ldots, d_{N-1})$ gösteriminde, Markovian deterministik karar kuralı kullanıldığında $d_t \in D_t^{MD}$'dır. Tüm $t \in T$ için $d_t = d$ olması durumunda politika durağan (stationary) nitelik taşımaktadır. Diğer bir ifadeyle $\pi = (d, d, \ldots)$ olmakta ve bu politika $d^{\infty}$ ile gösterilmektedir (Puterman, 1994: 22). Durağan politika zaman içinde değişmeyen politikadır. Yani *i* durumunda iken *a* hareketi seçilmişse sistem ne kadar süre sonra olursa olsun tekrar *i* durumuna geldiğinde seçilecek hareket yine *a* olacaktır (http://www.eng.buffalo.edu/~agosavi/chapdp.pdf). Politika, sayılabilir karar vektörleri dizisidir. Eğer her zaman periyodu için bu karar vektörleri aynı ise diğer bir ifadeyle politika içinde bulunulan periyottan bağımsız ise bu durumda politika durağan politika olarak adlandırılmaktadır. Her *i* durumu için, sıfırdan faklı bir olasılıkla bir politika seçilebiliyorsa, rassal olmayan (veya arı-pure) politika iken aksi halde rassal (randomized) politikadır (Nazareth ve Kulkarni, 1986: 14). Diğer bir ifadeyle kesin olarak bir tane hareket seçiliyorsa rassal olmayan politika, eğer belirli olasılıklarla birden fazla hareket seçilebiliyorsa rassal politika olarak nitelendirilmektedir.

MDP'nin bileşenleri tanımlandıktan sonra bir sonraki kısımda zaman periyotları kümesinin yapısına bağlı olarak MDP'lerinin sınıflandırılması yapılmaktadır.

## 1.4. MARKOV SÜREÇLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

Daha önce de belirtildiği gibi karar dönemlerinin kümesi, kesikli küme veya süreklilik ve sonlu veya sonsuz küme olmak üzere iki biçimde sınıflandırılabilmektedir.

### 1.4.1. Kesikli Ve Sürekli Zamanlı Süreçler

Karar dönemlerinin kümesi kesikli olduğunda kararlar tüm karar dönemlerinde verilmektedir. Karar dönemlerinin kümesi için süreklilik söz konusu ise kararlar; tüm karar dönemlerinde sürekli olarak, zaman içindeki rassal noktalarda veya karar verici tarafından seçilen fırsat zamanlarında verilebilmektedir.

Kesikli zamanlı problemlerde, zaman periyotlara veya aşamalara bölünmektedir. Modeller, bir karar dönemi bir periyodun başlangıcına karşılık gelecek biçimde formüle edilmektedir. Karar dönemlerinin kümesi $T \equiv \{1,2,\ldots,N\}$ ve $N < \infty$ biçiminde tam sayılı karar dönemlerini içeren kesikli bir küme veya $T \equiv \{1,2,\ldots\}$ biçiminde sürekli olabilmektedir (Puterman, 1994: 18). Kuyruk kontrolü ve makine-teçhizat yenilemesi gibi pek çok karar probleminde $[0,\infty]$ içindeki rassal zaman noktalarında karar verilmesi gerekebilmektedir.

Markov sürecinin tüm özelliklerine sahip olan fakat her geçişte harcanan zamanın rassal olduğu (birim zaman olmadığı) stokastik süreçler yarı-markov (semi-markov) süreçler olarak adlandırılmaktadır. Tek fark geçişlerde harcanan süredir. Eğer geçiş sürelerinin dağılımı rasgele seçilmekteyse yarı-markov süreçleri; geçiş süreleri üssel olarak dağılan bir rassal değişkense stokastik süreç, sürekli zamanlı bir markov süreci niteliği taşımaktadır. Yarı-markov süreçlerinde sistem sadece mevcut durumundan farklı durumlara geçiş yapmaktadır. Sistemin mevcut durumuna da geri dönebilme olasılığının olduğu süreçler ise yarı-markov karar süreçleri olarak adlandırılmaktadır (http://www.eng.buffalo.edu/~agosavi/chapdp.pdf). Diğer bir ifadeyle markov karar süreçlerindeki kesikli zaman varsayımı, yarı-markov karar süreçlerinde yer almamaktadır. Bu yönüyle markov karar süreçlerinin, yarı-markov karar süreçlerinin bir alt grubu olduğu söylenebilmektedir.

İlk olarak 1954 yılında Levy, Smith ve Takacs tarafından ele alınan yarı-markov süreçleri, bir durumdan diğerine geçişin olduğu fakat bir durumda kalma süresinin, bu duruma ve bir sonraki geçişin olacağı duruma bağlı bir dağılımla rassal değişken olduğu stokastik süreçlerdir (Mine ve Osaki, 1970: 75-76).

### 1.4.2. Sonlu Ve Sonsuz Zamanlı Süreçler

Karar dönemlerinin kümesi $T = \{1, 2, \ldots, N\}$ için $N$ sonlu veya sayılabilecek kadar sonsuz olduğunda karar problemi sonlu zamanlı problem, diğer durumda ise sonsuz zamanlı problem olarak nitelendirilmektedir (Puterman, 1994: 18). Diğer bir ifadeyle eğer planlama dönemi sonlu ise süreç sonlu zamanlı karar problemi niteliği taşımaktadır.

Sonsuz zamanlı modeller, sonsuz ödül dizilerinin değerlendirilmesini gerektirmektedir. Bu durumda dinamik programlama yaklaşımı ya da sayma (enumeration) yaklaşımı kullanılamamaktadır. Sonlu zamanlı MDP bir dinamik programlama problemidir ve sonsuz zamanlı MDP doğrusal programlama problemine dönüştürülebilmektedir (Ching ve Ng, 2006: 35). Sonraki bölümde MDP'lerinde optimal politikanın belirlenmesinde kullanılan ödül kriterlerine yer verilmektedir.

## 1.5. MARKOV KARAR SÜREÇLERİNDE KULLANILAN ÖDÜL KRİTERLERİ

Politikaların karşılaştırılması için karar vericinin performans ölçütünü yani amaç fonksiyonunu belirlemesi gerekmektedir. Bu ölçüt kazanç (ya da kayıp) değerlerini içeren bir ödül kriteridir. Markov karar süreçlerinde kullanılan üç ödül kriteri vardır. Bunlar, beklenen toplam ödül, beklenen toplam indirgenmiş ödül ve beklenen ortalama ödül kriterleridir.

### 1.5.1. Beklenen Toplam Ödül Kriteri

Beklenen toplam ödül kriteri, sonlu zamanlı süreçlerde kullanılmaktadır. Bu kriterin kullanıldığı MDP'lerde sonlu planlama periyodunda beklenen toplam ödülün maksimizasyonu amaçlanmaktadır.

*n* geçişte veya periyotta elde edilmesi beklenen toplam ödülün hesaplanmasında geçiş olasılıkları ve geçişlere ilişkin ödüller kullanılmaktadır. *n*, sonlu ve belirli sayıda periyodun olduğunu diğer bir ifadeyle ele alınan sistemin *n* periyot boyunca gözleneceğini ya da *n* periyot sonra sistemin sona ereceğini ifade etmektedir.

### 1.5.2. Beklenen Toplam İndirgenmiş Ödül Kriteri

Markovian karar süreçlerinde kullanılan ödül kriterlerinden biri de beklenen toplam indirgenmiş ödül kriteridir. Sonlu veya sonsuz planlama periyodu boyunca elde edilmesi beklenen ödüllerin indirgenmiş değerlerinin toplamının, optimizasyonda kriter olarak kullanılmasını ifade etmektedir.

Ele alınan indirgenmiş bir süreçte $\beta$, $(0 \leq \beta < 1)$, indirgeme faktörüdür. Diğer bir ifadeyle indirgeme olması, bir birim ödülün *n* zaman birimi (örneğin *n* gün) sonra $\beta^n$ olacağını göstermektedir. İndirgeme faktörü, *(1+faiz oranı)*'nın tersi olarak ele alınmaktadır (Mine ve Osaki, 1970: 4). Beklenen toplam indirgenmiş ödül kriteri, paranın değerinde zaman içinde olacak azalmayı dikkate almaktadır.

### 1.5.3. Beklenen Ortalama Ödül Kriteri

Kararlar sık sık verildiğinde (örneğin yıllık değil de aylık periyotlar söz konusu olduğunda *(1/1+i)* ile ifade edilen indirgeme faktörü 1'e yakın olduğundan) veya performans kriteri ekonomik terimlerle kolaylıkla ifade edilemediğinde, karar verici, politikaları, beklenen toplam indirgenmiş ödüllerine göre değil beklenen ortalama ödüllerine göre kıyaslamayı tercih edebilir. Özellikle, kuyruk kontrolü teorisinde, ve özellikle de iletişim ağları ve bilgisayar sistemlerinin kontrolüne uygulandığında, ve sıkça yeniden sipariş kararlarının verildiği envanter sistemlerinde beklenen ortalama ödül kriteri kullanılmaktadır (Puterman, 1994: 331). Ayrıca ele alınan sistemden elde edilecek beklenen toplam ödül, *n* arttıkça artmakta ve beklenen toplam ödül kriteri ile sistemin uzun dönemli seyri hakkında bir bilgiye ulaşılamamaktadır. Bu durumda beklenen ortalama ödül kriterinin kullanılması karar vericiye sistemin uzun dönemli seyri konusunda bilgi vermekte ayrıca farklı MDP'lerinin ortalama getirilerini karşılaştırma fırsatı vermesiyle karar vericilere bu konuda da yardımcı olmaktadır.

Belirli bir politikanın beklenen ortalama ödülü, sürecin bu politika ile sonsuz denebilecek kadar uzun bir zaman boyunca devam ettirilmesi ile birim zamanda kazanılan beklenen ortalama ödüldür. Birim zamandaki (her geçiş için) ortalama ödül kriteri, stokastik sürecin uzun dönemli sınırlayıcı davranışına dayanmaktadır. Bu nedenle sonsuz zamanlı markov karar süreçlerinde kullanılmaktadır.

MDP yaklaşımın bileşenleri ele alındıktan, sınıflandırılması yapıldıktan ve kullanılan ödül kriterleri ortaya konduktan sonra, MDP'lerinin çözümünde kullanılabilecek yöntemlere yer vermek uygun olacaktır.

## 1.6. MARKOV KARAR SÜREÇLERİNİN OPTİMİZASYONUNDA KULLANILAN YÖNTEMLER

Ele alınan problemin yapısına bağlı olarak MDP'nin optimizasyonunda farklı yöntemler kullanılabilmektedir. Sonlu süreçlerde dinamik programlama yaklaşımı ve bu yaklaşıma dayalı olarak geliştirilmiş olan değer iterasyonu yöntemi kullanılabilirken, sonsuz zamanlı süreçlerin optimizasyonunda politika iterasyonu yönteminden ve ikinci bölümde ele alınacak olan doğrusal programlama yaklaşımından yararlanılabilmektedir. Bu bölümde dinamik programlama yaklaşımı, değer iterasyonu yöntemi ve politika iterasyonu yöntemi ele alınmakta ve örnek problemler üzerinde yöntemlerin uygulanması ortaya konmaktadır.

### 1.6.1. Dinamik Programlama Yaklaşımı

Sonlu zamanlı süreçlerde kullanılan yaklaşımda cevaplanması gereken soru, durum $i$'de olan sürecin $n$ aşama (geçiş) sonucunda beklenen getirisinin ne olacağıdır. Sistem durum $i$'de iken gelecek $n$ geçişten beklenen toplam getirisi $v_i(n)$

ile tanımlandığında aşağıdaki yineleme ilişkisi yazılabilmektedir (Howard, 1960: 18);

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}\left[r_{ij} + v_j(n-1)\right]. \qquad i = 1,2,\ldots,N \text{ ve } n = 1,2,3,\ldots$$

Yineleme ilişkisi Bellman'ın "Optimallik İlkesi" kavramına dayanmaktadır. Amaç, optimal politika izleyerek $v_i(n)$ değerinin maksimize edilmesidir. Sistem durum $i$'den $j$'ye geçiş yaparsa, $r_{ij}$ ve sürecin bitimine bir aşama daha az kaldığında durum $j$'de başlaması halinde kazanmayı beklediği miktarın toplamı kadar kazanacaktır. Diğer bir ifadeyle $n$ periyotta elde edilecek olan ödüle son *(n-1)* periyodun katkısı, mevcut durum $j$ olduğunda, $v_j(n-1)$ olacaktır. Fakat ödüllerin ortaya çıkması geçişlerin gerçekleşmesine yani geçiş olasılıklarına bağlı olduğundan ödüllerin bu olasılıklarla ağırlıklandırılması gerekmektedir. Bu ağırlıklandırılmış değerlerin durum $i$'ye geçiş olabilecek tüm durumlar için toplanması ile $n$ periyot boyunca elde edilmesi beklenen toplam ödül hesaplanmaktadır.

Yukarıdaki yineleme ilişkisi aşağıdaki biçimde de yazılabilir;

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} r_{ij} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(n-1). \quad i = 1,2,\ldots,N \text{ ve } n = 1,2,3,\ldots \tag{1.1}$$

$q_i$ niceliği $i = 1,2,\ldots,N$ için $q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} r_{ij}$ olarak tanımlanırsa yineleme ilişkisi (1.2) biçimini almaktadır (Howard, 1960: 18);

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(n-1). \qquad i = 1,2,\ldots,N \text{ ve } n = 1,2,3,\ldots \tag{1.2}$$

$q_i$ niceliği, durum $i$'den olacak bir sonraki geçişten beklenebilecek ödül olarak yorumlanabilir ve durum $i$ için hemen ortaya çıkacak anlık beklenen ödül (expected immediate reward) olarak adlandırılır. Yineleme ilişkisi vektör biçiminde (1.3) şeklinde yazılmaktadır. *v(n)*, $v_i(n)$ değerlerinden oluşan $N$ bileşenli bir sütun vektörüdür ve toplam-değer vektörü olarak adlandırılmaktadır (Howard, 1960: 18).

$$v(n) = q + Pv(n-1) \qquad i = 1,2,\ldots,N \text{ ve } n = 1,2,3,\ldots \qquad (1.3)$$

MDP'nin çözümünde dinamik programlama yaklaşımının kullanılmasına ilişkin örnek olarak, kesikli zamanlı Markov süreci olarak modellenen bir sorun ele alınacaktır (Howard, 1960: 4). Karar probleminde oyuncak üretimi yapan bir işletme için olanaklı iki durum söz konusudur, $S = \{1,2\}$. 1. durum işletmenin ürettiği ürünün tüketiciler tarafından tercih edilmesi, 2. durum ise tercih edilmemesini ifade etmektedir.

Süreç 1. durumda iken bir haftalık karar periyodunun sonunda yine 1. durumda olma olasılığının, diğer bir ifadeyle ürün tercih edilirken 1 hafta sonra da tercih ediliyor olma olasılığının 0,50 ( $p_{11} = 0{,}50$) olduğu varsayılmaktadır. Süreç 2. durumda iken 1 hafta sonunda 1. duruma geçiş olma olasılığının yani ürün tercih edilmezken 1 hafta sonra tercih edilme olasılığının ise 0,4 ( $p_{21} = 0{,}40$ ) olduğu varsayılmaktadır. Bu doğrultuda sürecin geçiş olasılıkları matrisi $P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$ olarak gösterilmektedir.

Süreç 1. durumda iken, ürün tercih edilirken, 1 hafta sonra 1. durumda olması yani ürünün 1 hafta sonra da tercih edilmesi halinde işletme bu hafta için 9 para birimi (örneğin 9 YTL) ödül kazanmaktadır. İşletme, 1. durumda olan süreç 2. duruma geçiş yaparsa 3, 2. durumda iken 1. duruma geçiş yaparsa 3 ve 2. durumda iken 2. duruma geçiş yaparsa -7 para birimi ödül kazanmaktadır. Bu doğrultuda problemin ödül matrisi $R = [r_{ij}] = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$ olarak gösterilmektedir.

$i = 1,2,\ldots,N$ için $q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} r_{ij}$ eşitliği ile problemin durum uzayında yer alan 2 durum için $q_i$ değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır. Elde edilen sonuçlara göre $q$ vektörü $\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ olmaktadır.

$$q_1 = \sum_{j=1}^{2} p_{1j} r_{1j} = p_{11} r_{11} + p_{12} r_{12} = (0,5)9 + (0,5)3 = 6$$

$$q_2 = \sum_{j=1}^{2} p_{2j} r_{2j} = p_{21} r_{21} + p_{22} r_{22} = (0,4)3 + (0,6)(-7) = -3$$

İşletmenin *n* dönem (hafta) sonra faaliyetlerini durduracağı yani piyasadan çekileceği varsayımı altında, diğer bir ifadeyle sadece belirli sayıda karar dönemi olduğu varsayımıyla, bu süre boyunca kazanmayı beklediği toplam ödülü hesaplamak için yineleme ilişkisini ortaya koyan (1.2) eşitliği kullanılmaktadır.

Yineleme ilişkisinden faydalanarak problemin çözülebilmesi için *i=1,2* için $v_i(0)$ değerlerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu değerler, karar vericinin işletmenin faaliyetlerine son verdiği anda kazanmayı beklediği getiriyi ifade etmektedir. $v_1(0)$ ve $v_2(0)$ değerleri sırasıyla, üretilen ürün tüketiciler tarafından tercih edilirken ve tercih edilmezken, işletmenin faaliyetleri sona erdiği zaman işletmenin satış fiyatları olarak da yorumlanabilir. Hesaplama kolaylığı açısından bu değerler 0 alındığında;

*n=1* için, $v_1(1) = q_1 + p_{11} v_1(0) + p_{12} v_2(0) = 6 + (0,5)0 + (0,5)0 = 6$

olarak bulunmaktadır.

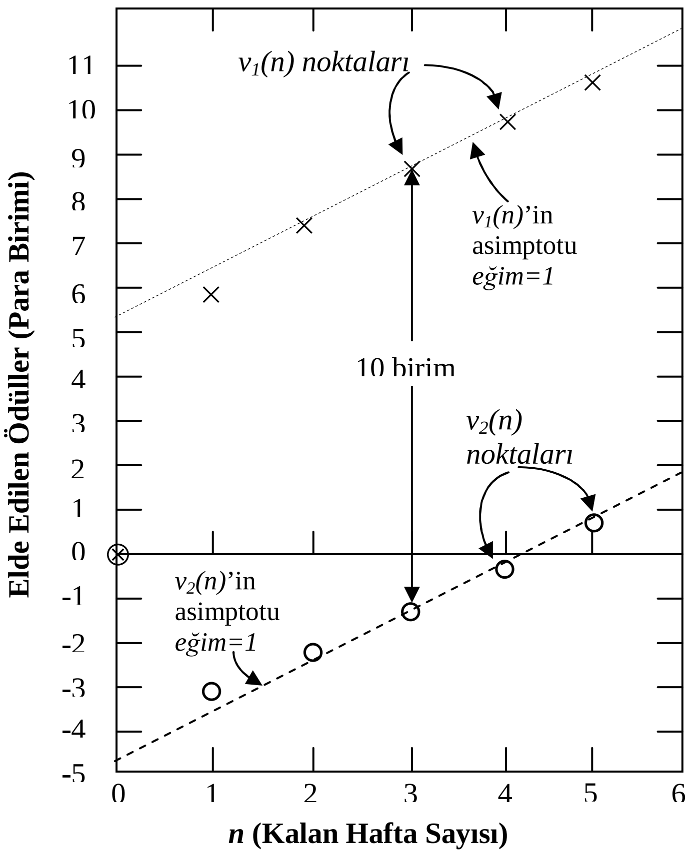
Benzer biçimde her iki durum için farklı *n* değerlerine göre hesaplanan toplam ödüller aşağıdaki tabloda yer almaktadır. Belirtildiği gibi *n* değeri sürecin son bulmasına yani işletmenin faaliyetlerinin bitmesine ya da planlama döneminin son bulmasına kaç aşama veya periyot kaldığını ifade etmektedir.

**Tablo 1.2.** Duruma ve *n*'e Bağlı Olarak Beklenen Toplam Ödüller

| ***n* =** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **…** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1(n)$ | 0 | 6 | 7,5 | 8,55 | 9,555 | 10,5555 | **…** |
| $v_2(n)$ | 0 | -3 | -2,4 | -1,44 | -0,444 | 0,5556 | **…** |

Tabloda yer alan değerler incelendiğinde, örneğin, süreç şu anda 1.durumda iken yani işletmenin ürünü tercih edilirken eğer işletmenin faaliyetlerinin son bulmasına 4 hafta varsa (*n=4*) karar verici işletmenin beklenen toplam kazancı 9,555 para birimi olmakta ve süreç şu anda 2. durumda ise işletmenin 4 haftada 0,444 para birimi kaybetmesi beklenmektedir. Ayrıca *n* arttıkça 1. durumun ve 2. durumun beklenen toplam kazancı arasındaki farkın 10'a yaklaştığı ve her iki durum için de beklenen toplam kazanç değerlerinde bir önceki haftaya göre 1 birimlik artışların olduğu görülmektedir. Çok büyük *n* değerleri için $v_i(n)$'in davranışı (seyri) aşağıdaki şekilde daha açık olarak görülmektedir. Asimptotlar arasındaki uzaklık 10 birim ve eğimleri de 1'dir.

**Şekil 1.2.** Kalan Periyot Sayısının Fonksiyonu Olarak Her Durumdaki Beklenen Toplam Ödüller




(Kaynak: Howard, 1960: 20)

Beklenen toplam indirgenmiş ödül kriterinin kullanıldığı MDP'lerinde $v_i(n)$, süreç durum *i*'de iken son bulmadan önce *n* geçiş yapacak bir süreç için beklenen toplam indirgenmiş ödül, diğer bir ifadeyle beklenen toplam ödülün bugünkü değeri, olarak tanımlanmaktadır. $\beta$ indirgeme faktörü ile dinamik programlama yaklaşımında kullanılan yineleme eşitliği (1.4) biçiminde gösterilmektedir.

$$v_i(n) = q_i + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(n-1) \tag{1.4}$$

### 1.6.2. Değer İterasyonu Yöntemi

Farklı hareket alternatifleri altında, geçiş olasılıkları ve elde edilecek ödül farklı olabilmektedir. Bu durumda farklı hareket alternatifleri için farklı geçiş olasılıkları matrisleri ve ödül matrisleri söz konusu olmaktadır. Daha önce de belirtildiği gibi bir politika, belirli bir periyotta *i* durumu için kullanılacak hareketin tüm *i* değerleri ve tüm periyotlar için belirlenmesiyle ortaya çıkmaktadır. Farklı hareket alternatifleri olduğunda, optimal politika, sistemin durum *i*'de iken gelecek *n* geçişten beklenen toplam getirisi $v_i(n)$'i tüm *i* ve *n* değerleri için maksimize eden politika olmaktadır. Bu doğrultuda yineleme ilişkisi, her *n* için, (1.5) şeklinde yazılabilmektedir (Devries, 1963: 27). Bu yineleme ilişkisinin kullanılması ile değer iterasyonu yöntemi ortaya çıkmıştır. Eşitlikte, $p_{ij}^k$ süreç durum *i*'de iken *k* alternatifi seçildiğinde sürecin *j* durumuna geçiş yapma olasılığı ve $r_{ij}^k$ de bu geçişe ilişkin ödülü göstermektedir.

$$v_i(n+1) = \underset{k}{Max} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \left[ r_{ij}^k + v_j(n) \right] \tag{1.5}$$

(1.5)'de verilen eşitlik, $v_i(n+1) = \underset{k}{Max} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k r_{ij}^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k v_j(n)$ biçiminde yazılabilmektedir. *n* sürecin son bulmasına kaç periyot kaldığını diğer bir ifadeyle sürecin kaç aşamasının kaldığını göstermektedir. *n*.aşamada *i* durumunda iken verilen karar $d_i(n)$ olarak gösterildiğinde tüm *i* ve *n* için bu kararların belirlenmesi, bir politikanın belirlenmesini ifade etmektedir. Optimal politika her *i* ve *n* için toplam beklenen ödülü maksimize eden politikadır. $v_i(n)$, optimal politika izlendiğinde *n* aşamada elde edilmesi beklenen ödül olarak tanımlanmaktadır. Yukarıdaki eşitlikte karar vericinin *n,n-1,…,1.* aşamalarda $v_j(n)$ değerini maksimize ettiği ve süreç *(n+1).* aşamada ve *i* durumunda iken $v_i(n+1)$ değerini maksimize eden hareket alternatifini araştırdığı görülmektedir (Howard, 1960: 28-29).

Dinamik programlama formülasyonunda olduğu gibi $q_i^k = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k r_{ij}^k$ olarak tanımlandığında yineleme ilişkisini ortaya koyan eşitlik (1.6) biçiminde gösterilmektedir. $q_i^k$ niceliği, *k* hareketi seçildiğinde durum *i*'den olacak bir sonraki geçişten beklenebilecek ödül olarak yorumlanabilmektedir (Howard, 1960: 28).

$$v_i(n+1) = \underset{k}{Max}\; q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k v_j(n) \qquad i = 1,2,\ldots,N \text{ ve } n = 0,1,2,\ldots \qquad (1.6)$$

Eşitlik, değer iterasyonu eşitliği olarak adlandırılmaktadır. Eşitlik, karar vericiye, her durumda her aşamada hangi alternatifin kullanılacağı ve sürecin her aşamasının beklenen getirisinin ne olacağı konusunda bilgi vermektedir. Eşitliğin kullanılabilmesi için süreç için sınırlayıcı $v_j(0)$ koşullarının belirlenmesi gerekmektedir.

Bir önceki bölümde ele alınan işletme sorununun (Howard, 1960: 26) farklı alternatiflerin olması durumunda değer iterasyonu yöntemiyle nasıl çözülebileceği ele alınacaktır.

Oyuncak üreticisi işletmenin, süreç 1. durumda iken yani ürünleri tüketiciler tarafından tercih edilirken seçebileceği 2 hareket alternatifi bulunmaktadır. Karar verici, ürünün tercih edilmesini devam ettirmek için reklam yapabilir fakat bu da maliyetleri arttırabilmektedir. Bu doğrultuda işletmenin 1. durumda iken seçebileceği hareket alternatiflerinden diğeri de reklam yapmamaktır. Süreç 2. durumdayken de tercih edilebilecek farklı 2 hareket alternatifi söz konusudur. Karar verici ürünün tercih edilmesini sağlayabilecek faktörleri belirlemek üzere pazar araştırması yapabilir. Bu hareket de maliyetlerinde artışa neden olabileceğinden süreç 2. durumda iken seçebileceği diğer hareket pazar araştırması yapmamaktır. 1. ve 2. durumda seçilebilecek farklı hareketler sürecin yapısını etkilemektedir ve farklı alternatifler için geçiş olasılıkları ve ödüller değişmektedir.

Probleme ilişkin veriler Tablo 1.3'de verilmektedir. $q_i^k$ değerleri, $q_i^k = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k r_{ij}^k$ eşitliği ile hesaplanmıştır. Örneğin *i=1* ve *k=1* için $q_1^1 = p_{11}^1 r_{11}^1 + p_{12}^1 r_{12}^1 = (0,5)9 + (0,5)3 = 6$ olarak bulunmaktadır.

**Tablo 1.3.** Farklı Hareket Alternatifleri İçin Geçiş Olasılıkları ve Ödüller

| ***Durum*** | ***Hareket*** | ***Geçiş Olasılıkları*** | | ***Ödüller*** | | ***Anlık Beklenen Ödül*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $k$ | $p_{i1}^k$ | $p_{i2}^k$ | $r_{i1}^k$ | $r_{i2}^k$ | $q_i^k$ |
| **1 (Ürünün tercih edilmesi)** | 1 Reklam yapılmaması | 0,5 | 0,5 | 9 | 3 | 6 |
| | 2 Reklam yapılması | 0,8 | 0,2 | 4 | 4 | 4 |
| **2 (Ürünün tercih edilmemesi)** | 1 Araştırma yapılmaması | 0,4 | 0,6 | 3 | -7 | -3 |
| | 2 Araştırma yapılması | 0,7 | 0,3 | 1 | -19 | -5 |

*j=1,2* için $v_j(0) = 0$ olarak belirlendiğinde (1.5) eşitliğinden faydalanarak elde edilen sonuçlar Tablo 1.4'de yer almaktadır.

**Tablo 1.4.** Değer İterasyonu Yöntemiyle Elde Edilen Sonuçlar

| ***n =*** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **…** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1(n)$ | 0 | 6 | 8,2 | 10,22 | 12,222 | **…** |
| $v_2(n)$ | 0 | -3 | -1,7 | 0,23 | 2,223 | **…** |
| $d_1(n)$ | --- | 1 | 2 | 2 | 2 | **…** |
| $d_2(n)$ | --- | 1 | 2 | 2 | 2 | **…** |

*i=1* ve *n=1* için $v_1(1) = \underset{k}{Max}\begin{bmatrix} q_1^1 + p_{11}^1 v_1(0) + p_{12}^1 v_2(0) \\ q_1^2 + p_{11}^2 v_1(0) + p_{12}^2 v_2(0) \end{bmatrix}$ eşitliği ile bulunmaktadır. *i=1* ve *n=1* için, 1. alternatifle 6 birim, 2. alternatifle 4 birim ödül elde edilmekte ve bu durum için maksimum ödülü sağlayan 1. alternatif yani reklam yapmama hareketi seçilmektedir.

Elde edilen sonuçlara göre, örneğin karar vericinin 4 haftası kaldığında, durum 1'de iken yani ürünleri tercih edilirken 4 haftada beklenen toplam kazancı 12,222 ve durum 2'deyken (ürünleri tercih edilmezken) bu 4 haftalık dönemde beklenen toplam kazancı 2,223 para birimidir. 1. durumda tercih edilen hareket, reklam yapmak ve 2. durumda tercih edilen hareket de pazar araştırması yapmaktır.

Örnekte de görüldüğü gibi belirli bir periyot sonra her durum için aynı hareket alternatifleri seçilmektedir. Fakat her süreçte aynı sonuç az sayıda periyotta ortaya çıkamayabilmektedir. Değer iterasyonu yöntemi, planlama dönemi kaç periyottan ya da aşamadan oluşuyorsa ya da ele alınan süreç kaç periyot sonra son bulacaksa, bu sayıda *n* için hesaplamaların yapılmasını gerektirmektedir. Fakat pek çok işletme sorununda sürecin belirli bir periyot sonra son bulması söz konusu olmayabilmektedir. Bu doğrultuda sonlu olmayan süreçler söz konusu olabilmektedir. Sonlu zamanlı ve kısa karar dönemlerine sahip problemler için yöntemin uygulanması ve maksimum toplam beklenen ödülün bulunması hesaplama açısından kolay olurken, sonsuz zamanlı problemlerde veya çok sayıda periyoda sahip karar dönemlerinin olduğu problemlerde yöntemin uygulanması oldukça zor olmaktadır. Sonsuz zamanlı süreçler için Howard tarafından geliştirilen politika iterasyonu yöntemi kullanılabilmektedir.

Beklenen toplam indirgenmiş ödül kriterinin kullanıldığı MDP'lerinde $v_i(n)$, süreç durum *i*'de ise ve *n* aşama boyunca her aşamada optimal hareket alternatifleri seçilmişse, kalan *n* aşamadan elde edilebilecek ödüllerin bugünkü değeri olarak tanımlanmaktadır. $\beta$ indirgeme faktörü ile değer iterasyonu yönteminde kullanılan yineleme eşitliği (1.7) biçiminde gösterilmektedir.

$$v_i(n+1) = \underset{k}{Max}\, q_i^k + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k v_j(n) \quad (1.7)$$

Amaç, her *n* ve *i* için gelecekteki ödüllerin bugünkü değerini maksimize eden hareket alternatiflerinin belirlenmesidir.

Değer iterasyonu yöntemi literatürde; ardışık yaklaşımlar, yinelemeli relaksasyon (over-relaxation), geriye doğru indüksiyon, pre-Jacobi iterasyonu gibi isimlerle de yer almaktadır (Puterman, 1994: 158). Optimallik ilişkisinin *n* aşama için iterasyonu, Bellman'a göre "fonksiyon uzayına yaklaşma" Howard'a göre ise "değer iterasyonu" olarak adlandırılmaktadır (Devries, 1963: 24).

Değer iterasyonu yöntemi, dinamik programlama yaklaşımının bir parçasıdır. Yöntem, değer fonksiyonuna ilişkin tahmini bir değerle başlamakta ve değer fonksiyonundaki değişmeler önceden belirlenen tolere edilebilir bir düzeyden daha az olana kadar, her iterasyonda bu değeri güncelleştirmektedir (Patrascu, 2004: 15). Değişmelerin önceden belirlenen bu düzeyin altında kalması, iterasyonların son bulmasına yol açmakta ve bu aşamada optimal çözüme ulaşılmaktadır. Çok sayıda periyot için hesaplama yapılırken kullanılan yaklaşımlardan biri birbirini izleyen iki aşamanın beklenen toplam ödülleri arasındaki farkın bu şekilde önceden belirlenen bir değerin altında kalması koşulunun kullanılmasıyla bu koşul gerçekleştiğinde yöntemin iterasyonlarına son verilmesidir. Yöntemin bu ismi almasının nedeni, beklenen toplam ödüllerin aşama aşama, iterasyonlarla hesaplanmasıdır.

Yineleme ilişkisini ortaya koyan optimallik eşitlikleri, aşağıda belirtilen önemli ve yarar sağlayan özellikleri ile Markov karar teorisinin temel araçlarından biridir (Puterman, 1994: 84);

- Optimallik eşitliklerinin çözümleri, her periyot için, bu periyottan sonraki periyotların optimal getirisini vermektedir.
- Bir politikanın optimal olup olmadığını belirlemede yardımcı olmaktadır.
- Optimal getiri fonksiyonlarını ve politikalarını belirlemede kullanılacak etkin prosedürler için temel oluşturmaktadır.

- Optimal politikaların ve getiri fonksiyonlarının yapısal özelliklerini belirlemede kullanılabilmektedir.

### 1.6.3. Politika İterasyonu Yöntemi

MDP'nin çözümünde kullanılan bir diğer yöntem de politika iterasyonudur. Howard tarafından geliştirilen bu yöntem, açıkça bir politikayı manipule etmesi ve bir noktaya ulaşana (convergence) kadar politika değerlendirme ve iyileştirme aşamalarına devam etmesi bakımından değer iterasyonu yönteminden farklılaşmaktadır. Genellikle durağan sonsuz zamanlı problemlere uygulansa da belirli varsayımlar altında daha genel modellere de uygulanabilmektedir. Sonlu duruma ve harekete sahip MDP'lerinde yöntem sonlu sayıda aşamada son bulmaktadır. Yapılan çalışmalardan alınan sonuçlara göre değer iterasyonu yönteminden daha hızlı son bulduğu görülmektedir (Patrascu, 2004: 16). Politika iterasyonu yöntemindeki temel nokta, rasgele seçilen bir başlangıç politikası belirlemek ve her iterasyonda daha iyi bir başka politikaya geçmektir. Bu süreç, daha fazla iyileştirme mümkün olmayıncaya yani optimal politika elde edilinceye kadar devam etmektedir. Bu yöntemle az sayıda hesaplamayla optimal çözüme ulaşmak mümkün olmaktadır (http://www.eng.buffalo.edu/~agosavi/chapdp.pdf).

Geçiş olasılıkları matrisi $P$ ve ödül matrisi $R$ ile tanımlanan tamamıyla ergodik $N$-durumlu bir Markov süreci ele alındığında ve bu sürecin çok uzun süre boyunca geçiş yapmasına izin verildiğinde yani periyot sayısı çok fazla ya da sonsuz olduğunda, sistemin yaptığı geçiş sayısı arttıkça sistemin toplam geçiş sayısına bağlı olan beklenen toplam kazancın da arttığı görülmektedir. Bu nedenle süreç çok sayıda geçiş yapıyorsa sürecin ortalama getirisi (gain of the process), beklenen toplam kazançtan daha anlamlı bir ölçüt olabilmektedir (Howard, 1960: 32). Markov süreci, tüm durumlarının yinelenen (terk edilen duruma geri dönülmesinin kesin olması), birbirine açılımlı (durumlar arası geçiş yolunun bulunması) ve periyodik olmayan (belirli bir durumdan başlandığında tekrar bu duruma geçiş için izlenen yolların aynı sayıda periyoda sahip olmaması) durumlar olması koşulunda ergodik olma özelliğine sahiptir. Diğer bir ifadeyle, ergodik bir Markov süreci, küçültülemeyen bir süreç niteliği taşımaktadır (Yüksek Özdemir, 2004: 15, 16, 20, 21).

Ergodik süreçlerde geçiş olasılıkları matrisi *P*'nin kuvvetleri $P^n$, tüm satırları aynı olan stokastik bir $\Pi$ matrisine yaklaşmaktadır ($n \to \infty$ gittikçe $P^n \to \Pi$) (Devries, 1963: 28). Ergodik süreç denge durumuna ulaşmakta ve tamamıyla ergodik süreçlerde $\Pi$ matrisinde yer alan değerler sürecin denge durumu olasılıklarını göstermektedir. Sürecin ortalama getirisinin hesaplanmasında denge durumu olasılıkları kullanılmaktadır.

Tamamıyla ergodik olan Markov süreçlerinde denge durumu olasılıkları başlangıç durumundan bağımsız olmakta ve bu doğrultuda ele alınan süreç veya sistemin ortalama kazancı (1.8)'deki gibi hesaplanmaktadır (Howard, 1960: 32).

$$g = \sum_{i=1}^{N} \Pi_i \, q_i \tag{1.8}$$

Önceki bölümde belirtildiği gibi $q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \, r_{ij}$ olarak gösterilmekte ve durum *i*'den olacak bir sonraki geçişten beklenebilecek ödül olarak ifade edilmektedir. *i* durumunun ortalama getirisi $g_i$, bu durumun beklenen toplam kazancını ifade eden $v_i(n)$'in asimptotunun eğimini ifade etmektedir.

Tamamıyla ergodik olan ve ödülün söz konusu olduğu tüm Markov süreçleri için *g* değeri yani ortalama getiri hesaplanabilmektedir. Birden fazla, ergodik özelliği olan süreçle ilgilenilmesi durumunda, uzun dönemde hangi sürecin daha karlı olacağına karar vermede her sürecin ortalama getirisi hesaplanmakta ve kıyaslanmaktadır.

Belirli bir durumda, mevcut hareket alternatifleri arasından tercih edilen hareket o durum için karar olarak nitelendirilmekte ve bu karar artık *n*'in bir fonksiyonu olmamaktadır. Tüm durumlar için belirlenen kararların kümesi ise bilindiği gibi politika olarak isimlendirilmektedir. Politika yani her durumda alınan kararların oluşturduğu küme, her durumda seçilen hareketin numarasının yer aldığı bir vektör biçiminde de gösterilebilmektedir. Bu vektör karar vektörü olarak adlandırılmaktadır. Ergodik bir Markov karar süreci için optimal politika, beklenen ortalama (bir geçiş başına düşen) getiriyi maksimize eden politikadır. En fazla kazancı veren politikayı belirleyerek optimal politikaya ulaşmak, çok sayıda durum ve hareket alternatifi olan büyük karar problemleri için çok zor olmaktadır. Örneğin 40 duruma sahip ve her durumda 40 hareket alternatifinin olduğu bir süreçte değerlendirilmesi gereken $40^{40}$ sayıda farklı politika ortaya çıkmaktadır.

Çok sayıda durum ve hareket alternatifinden oluşan ya da sonsuz zamanlı olan MDP'lerinde az sayıda iterasyonda optimal politikanın bulunmasını sağlayan politika iterasyonu yöntemi geliştirilmiştir. Howard tarafından geliştirilen bu yöntemin çözüm süreci 2 aşamadan oluşmaktadır. Yöntemin çözüm sürecinin ilk aşaması değer belirleme işlemi (VDO-Value Determination Operation) ve ikinci aşaması da politika geliştirme yordamıdır (PIR-Policy Improvement Routine).

***Değer Belirleme İşlemi (VDO)***

Ele alınan süreç için belirli bir politikanın izlendiği varsayımı altında, bu süreç *n* aşama veya geçiş devam ettirildiğinde, daha önce de tanımlandığı gibi, $v_i(n)$, belirlenen politika ile durum *i*'den başlayan süreçten *n* aşama boyunca elde edilmesi beklenen kazancı ifade etmektedir. Bu değerin (1.2)'de verilen yineleme ilişkisini sağlaması gerekmektedir. Gösterimde hareket alternatifini belirten *k* simgesinin kullanılması gerekmemektedir çünkü belirli bir politikanın izlendiği varsayıldığından eşitlikte bu politikanın geçiş olasılıkları ve ödülleri kullanılacaktır.

$v_i(n)$'in asimptotu $v_i$ ile gösterildiğinde, $n >>> 0$ yani çok sayıda *n* için ergodik süreçte yineleme ilişkisi, $v_i(n) = n.g + v_i$ asimptotik formuna sahip olmaktadır (Cooper ve Cooper, 1996: 210). Yineleme ilişkisinde bu formun kullanılmasının nedeni çok sayıda periyodun söz konusu olmasıdır. Eşitlik gözden geçirildiğinde aşağıdaki eşitlikler elde edilmektedir.

$$n.g + v_i = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}\left[(n-1)g + v_j\right] \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

$$= q_i + (n-1)g\sum_{j=1}^{N} p_{ij} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}v_j$$

$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$ olduğundan, bu eşitlikler (1.9) biçiminde yazılmaktadır,

$$g + v_i = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}v_j \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{1.9}$$

Bu eşitliklerle, $v_i$ ve $g$ değerlerini sürecin olasılık ve ödül yapısıyla ilişkilendiren $N$ tane eşitlik elde edilmektedir. Bu eşitliklerde $N$ tane $v_i$ ve 1 tane $g$ değerinin bulunması gerekmektedir. Bu nedenle $N+1$ bilinmeyenli bir eşitlikler kümesinin çözülmesi söz konusu olmaktadır. $v_i$ değerlerinden birinin 0'a eşitlenmesiyle (genellikle $v_i(N) = 0$ olarak) $N$ bilinmeyenin bulunması mümkün olmaktadır.

Yukarıda yer alan denklemler kümesi çözüldüğünde elde edilecek $v_i$ değerleri, $v_i(n) = n.g + v_i$ eşitliğindeki değerlerden farklı olmaktadır. Bulunacak $v_i$ değerleri gerçek değerler değil politikanın yaklaşık değerleridir (Cooper ve Cooper, 1996: 210). Fakat gerçek değerlerden sabit miktarda farklılık göstermektedirler ve çok sayıda geçiş söz konusu olduğunda çok önemli bir farklılık da ortaya çıkmamaktadır. Politikaların göreli ya da yaklaşık değerlerinin fiziksel bir yorumu da bulunmaktadır. Yukarıdaki eşitlikten, iki durumlu bir süreçte, çok sayıda $n$ için $v_1(n) = n.g + v_1$ ve $v_2(n) = n.g + v_2$ olarak yazılmaktadır. Çok sayıda $n$ için politikaların gerçek ve yaklaşık değerleri arasındaki $v_1(n) - v_2(n) = v_1 - v_2$ farkı, sürecin uzun dönemde beklenen getirisinde, sürecin durum 2 yerine durum 1'den başlamasından kaynaklanan artışa eşittir. $v_1 - v_2$ farkı herhangi bir mutlak düzeyden bağımsız olduğundan farkları bulmada yaklaşık değerler kullanılabilir (Howard, 1960: 35). Diğer bir ifadeyle, 2 durumun yaklaşık değerleri arasındaki fark, rasyonel bir karar vericinin eğer süreci çok fazla sayıda geçiş yapmak üzere sürdürecekse, sürece durum 2 yerine durum 1'den başlamak için vermeyi isteyeceği parasal değere eşittir.

(1.9) eşitliği denge durumu olasılıklarını içeren $\Pi$ matrisi ile çarpıldığında ve tüm *i* durumları için toplandığında (1.10) elde edilmekte ve $\sum_{i=1}^{N}\Pi_i = 1$ ve $\Pi.P = \Pi$ olduğundan, bu eşitlik (1.11) biçiminde yazılmaktadır (Howard, 1960: 36).

$$g\sum_{i=1}^{N}\Pi_i + \sum_{i=1}^{N}\Pi_i v_i = \sum_{i=1}^{N}\Pi_i q_i + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\Pi_i p_{ij} v_j \qquad (1.10)$$

$$g = \sum_{i=1}^{N}\Pi_i q_i \qquad (1.11)$$

Bu ifade ile sürecin kazancı bulunabilmekte fakat eşitlik, daha iyi bir politikanın nasıl bulunabileceği konusunda bilgi vermemektedir. Bu nedenle politikalara ilişkin yaklaşık değerler hesaplanmakta ve optimal politika bulunurken bu değerler kullanılmaktadır. Yaklaşık değerler, politikaları iyileştirme yani daha iyi bir politika bulmak için gerekli olmaktadır. Değer belirleme işleminde bulunan yaklaşık politika değerleri, çözüm yönteminin bir sonraki aşaması olan PIR'nda kullanılacaktır.

***Politika Geliştirme Yordamı (PIR)***

Eğer *n*. aşamaya kadar optimal bir politika izlendiyse, daha önce belirtildiği gibi, durum *i*'de iken *(n+1).* aşamada en iyi hareket alternatifi, *i* durumundaki tüm alternatifler için (1.12) değerini maksimize ederek bulunmaktadır.

$$q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k v_j(n) \qquad (1.12)$$

Çok sayıda *n* için $v_i(n) = n.g + v_i$ değeri, verilen eşitlikte yerine konduğunda (1.13) ifadesine ulaşılmaktadır (Cooper ve Cooper, 1996: 210).

$$q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k (ng + v_j) \tag{1.13}$$

*n* ve *g* değerleri sabit ve $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k = 1$ olduğundan, yöntemin birinci aşamasında elde edilen yaklaşık değerler kullanılarak ve *i* durumunun tüm alternatifleri ele alınarak, maksimize edilmesi gereken değer (1.14) olmaktadır.

$$q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k v_j \tag{1.14}$$

Diğer bir ifadeyle bu değer, farklı politikaları değerlendirirken kullanılacak test niceliğidir (test quantity). Kısaca PIR, her *i* durumu için bu test niceliği ya da değerini maksimize eden *k* hareketinin belirlenmesini içermektedir. Bu işlem tüm durumlar için gerçekleştirildiğinde her durum için optimal karar seçilmiş ve böylece bu hareketlerden oluşan optimal politika belirlenmiş olacaktır.

Politika iterasyonu yönteminin iterasyon döngüsü Şekil 1.3'de gösterilmektedir. Birinci aşama yani değer belirleme işleminde $p_{ij}$ ve $q_i$ değerlerine karşılık gelen yaklaşık politika değerleri *g* ve $v_i$ bulunurken yöntemin 2. aşamasında belirli bir $v_i$ seti için kazancı arttıran $p_{ij}$ ve $q_i$ değerleri elde edilmektedir. Diğer bir ifadeyle, ilk aşama bir politikanın fonksiyonu olarak değerleri verirken, ikinci aşama değerlerin bir fonksiyonu olarak politikayı vermektedir. Şekilde yer alan iterasyon döngüsü optimal karar vektörü elde edilene kadar tekrarlanmaktadır.

Şekilde gösterilen iterasyon döngüsüne her iki aşamadan da girilebilmektedir. Eğer değer belirleme aşamasında başlanıyorsa bir başlangıç politikasının belirlenmesi gerekmektedir. Eğer döngüye ikinci aşamada giriliyorsa bu durumda yaklaşık değerler için başlangıç setinin oluşturulması gerekmektedir. Belirli bir başlangıç politikası seçmek ya da yaklaşık değerler için başlangıç seti oluşturmak için bir neden ya da öncelik yoksa, iterasyon döngüsüne tüm $v_i = 0$ alarak ikinci aşamadan başlamak uygun ve kolay olabilmektedir.

**Şekil 1.3.** Politika İterasyonu Yöntemi İçin İterasyon Döngüsü

**DEĞER BELİRLEME İŞLEMİ (VDO)**

$v_N = 0$ varsayımıyla, $p_{ij}$ ve $q_i$ değerlerini kullanarak belirli bir politika için $g + v_i = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j$ ( $i = 1,2,\ldots,N$ ) eşitliğini çözerek $v_i$ ve $g$ değerlerinin bulunması.

**POLİTİKA GELİŞTİRME YORDAMI (PIR)**

Önceki politikanın $v_i$ yaklaşık değerlerini kullanarak her *i* durumu için $q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k v_j$ test değerini maksimize eden *k* hareket alternatifinin bulunması. Bu alternatif *i*.durumun yeni kararını göstermektedir.

(Kaynak: Howard, 1960: 38)

İterasyon döngüsüne böyle bir başlangıç yapılması ile PIR bir politikayı her *i* durumu için $q_i^k$'yı maksimize eden alternatifleri seçerek oluşturmaktadır. Diğer bir ifadeyle bu başlangıç, her durumdaki beklenen anlık ödülü maksimize eden politikanın başlangıç politikası olarak seçilmesine neden olmaktadır. İterasyon daha sonra bu politikayla değer belirleme işlemine geçmekte ve iterasyon döngüsü başlamaktadır. Bu tür bir başlangıç politikasının seçimi karar problemlerinin çoğunda başarılı sonuçlar vermiştir (Howard, 1960: 39). İterasyon döngüsünün sona ermesi optimal karar vektörünün elde edilmesiyle gerçekleşmektedir. Yöntemin optimal karar vektörüne ulaşıldığının belirlenmesine ilişkin kuralı, birbirini izleyen iki iterasyonda bulunan politikaların aynı olmasıdır. Böylece sürecin ortalama getirisini maksimize eden optimal politikaya ulaşılmaktadır.

Politika iterasyonu yönteminin ikinci aşaması olan PIR'nın belirli bir durumdaki eşit düzeyde iyi olan alternatifler üzerinde durmasını engellemek için, eğer hareket alternatifinin test değeri yeni politika belirlenmesi işlemindeki herhangi bir alternatifinki kadar fazla ise eski hareket alternatifi ya da kararı değiştirilmemelidir (Howard, 1960: 39).

Aşamaları anlatılan politika iterasyonu yöntemi aşağıdaki özelliklere sahiptir (Devries, 1963: 29);

- Sıralı karar süreçlerinin çözümü, doğrusal eşitlikler setinin çözümüne ve sonraki karşılaştırmaların yapılmasına indirgenmiş olmaktadır. Diğer bir ifadeyle sıralı karar süreçlerinin çözümü kolaylaşmaktadır.
- İterasyon döngüsünde hesaplanan sonraki politikanın ortalama getirisi bir önceki politikanınkinden daha fazla olmaktadır.
- İterasyon döngüsü, problemin sınırları içinde ulaşılabilecek en yüksek getiriye sahip politikada son bulmaktadır. Yöntem bu optimal politikayı çoğunlukla, az sayıda iterasyonda bulmaktadır.

Dinamik programlama yaklaşımı ve değer iterasyonu yöntemiyle çözülen işletme sorunu (Howard, 1960: 40) için optimal politikanın bulunmasında politika iterasyonu yönteminin kullanılması ele alınacaktır. En iyi politikanın hangisi olduğuna ilişkin bilgi olmadığı varsayımıyla, $v_1 = v_2 = 0$ kabul edilerek iterasyon döngüsüne PIR aşamasından başlanacaktır. Bu başlangıç ile yöntem, her durum için beklenen anlık ödülleri ($q_i^k$) maksimum olan hareket alternatiflerini seçerek politikayı belirlemektedir. 1. durum için maksimum beklenen anlık ödül 1. karar alternatifiyle ($q_1^1 = 6$) ortaya çıkarken, 2. durum için maksimum beklenen anlık ödül 1. karar alternatifiyle ($q_2^1 = -3$) ortaya çıkmaktadır. Bu doğrultuda başlangıç karar vektörü $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, geçiş olasılıkları matrisi $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$ ve beklenen anlık ödül vektörü $q = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ olmaktadır.

Bu başlangıç politikası değerlendirilerek iterasyon döngüsündeki birinci aşama olan VDO gerçekleştirilmekte ve (1.9) ile yaklaşık değerler elde edilmektedir. $v_i$ değerlerinden biri 0 alındığında (örneğin $v_2 = 0$), *i=1* için $g + v_1 = q_1 + p_{11}v_1 + p_{12}v_2$ ve *i=2* için $g + v_2 = q_2 + p_{21}v_1 + p_{22}v_2$ eşitliklerinin çözümünden $g = 1$ ve $v_1 = 10$ olarak bulunmaktadır. Bu yaklaşık değerler ile iterasyon döngüsünün 2. aşamasına geçildiğinde tüm *i* ve *k* için (1.14) test değerleri hesaplanmaktadır. Örneğin *i=1* ve *k=1* için test değeri $q_1^1 + p_{11}^1 v_1 + p_{12}^1 v_2 = 6 + (0,5)10 + (0,5)0 = 11$ olarak bulunmaktadır. Benzer şekilde tüm *i* ve *k* için hesaplanan test değerleri Tablo 1.5'de gösterilmektedir. Tabloda yer alan sonuçlara göre bu aşamada her iki durum için de 2. hareket alternatifi seçilmektedir. Karar vektörü $d = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, geçiş olasılıkları matrisi $P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{bmatrix}$ ve beklenen anlık ödül vektörü $q = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ olmaktadır.

**Tablo 1.5.** PIR Sonuçları

| ***Durum (i)*** | ***Hareket (k)*** | ***Test Değeri*** |
|---|---|---|
| **1 (Ürünün tercih edilmesi)** | 1 Reklam yapılmaması<br>2 Reklam yapılması | 11<br>**12***  |
| **2 (Ürünün tercih edilmemesi)** | 1 Araştırma yapılmaması<br>2 Araştırma yapılması | 1<br>**2*** |

Önceki karar vektörü $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ iken bu aşamada yeni karar vektörü $d = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$'dir. İki iterasyonda belirlenen politikalar aynı olmadığından elde edilen sonuçların optimal olduğu sonucuna varılamamakta ve bu iterasyonun sonuçları ile iterasyon döngüsüne devam edilmektedir. Tekrar değer belirleme aşamasına geçilmekte ve bu politika için yaklaşık değerler belirlenmektedir. $v_i$ değerlerinden biri 0 alındığında (örneğin $v_2 = 0$) $g = 2$ ve $v_1 = 10$ olarak bulunmaktadır. Sürecin ortalama getirisinde artış olmuştur.

Mevcut politikanın yaklaşık değerleri ile test değerini maksimize eden yeni bir politika belirlenmesi için PIR aşamasına geçilmektedir. $v_i$ yaklaşık değerleri önceki iterasyonla aynı olduğundan PIR sonuçları Tablo 1.5.'de yer alan sonuçlarla aynı olmaktadır. Bu sonuçlara göre en yüksek test değerini veren hareket alternatifi her iki durum için de 2. alternatiftir. Karar vektörü, bir önceki iterasyonda olduğu gibi $d = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$'dir. Birbirini izleyen iki iterasyonda da aynı politikanın seçilmesi ile iterasyon döngüsü son bulmaktadır. İşletmenin optimal politikası, ürünü tercih edildiğinde reklam yapmak ve ürünü tercih edilmediğinde de pazar araştırması yapmak olarak belirlenmektedir. Bu politika ile işletmenin haftalık beklenen ortalama kazancı 2 para birimi olmaktadır. Optimal politika için $v_1 - v_2 = 10$ olarak bulunmaktadır. Bu değer, karar verici reklam ve pazar araştırması yapma kararını verdiğinde yani optimal politikayı izlediğinde eğer tercih edilen bir ürün üretemezse başka bir üreticiye bu ürünün üretimi için ödemeyi isteyebileceği maksimum ücrettir. Yaklaşık değerler karar vericiye karar verme sürecinde bu şekilde yardımcı olabilmektedir.

Beklenen toplam indirgenmiş ödül kriterinin kullanıldığı MDP'lerinde, politika iterasyonunun ilk aşaması olan değer belirleme işleminde ödüllerin bugünkü değerleri kullanılmaktadır. Çok sayıda $n$ için yineleme eşitliği (1.15)'deki gibi gösterilmektedir.

$$v_i(n) = q_i + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(n-1) \tag{1.15}$$

Eşitlikte yer alan $v_i(n)$ değerleri yerine bugünkü değerler ($v_i = \lim_{n \to \infty} v_i(n)$) kullanılabilmekte ve bu durumda eşitlik (1.16) biçiminde yazılmaktadır.

$$v_i = q_i + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j \tag{1.16}$$

Verilen eşitliklerin çözümünden elde edilen bugünkü değerleri kullanarak PIR gerçekleştirilmektedir. Optimal politika, her durum için en yüksek bugünkü değeri veren politikadır. Bu doğrultuda beklenen toplam indirgenmiş ödül kriterinin kullanıldığı MDP'lerinde test değeri, (1.17) ile tanımlanmaktadır.

$$q_i^k + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k v_j \qquad (1.17)$$

İterasyon döngüsü birbirini izleyen iki iterasyonda aynı politikanın belirlenmesiyle sona ermekte ve iterasyon döngüsü son bulduğunda sürecin ortalama getirisi değil optimal politika ile her durum için beklenen ödülün bugünkü değeri bulunmaktadır.

Bellman, bu yöntem için "politika uzayına yaklaşım" terimini kullanmaktadır. Fakat Howard'ın modeli ile bu yöntemin kullanılması sonucunda optimal karar vektörüne yaklaşım değil optimal karar vektörü elde edilmektedir. Yöntemin en önemli avantajı, birbirini izleyen iterasyonlarda elde edilen politikaların uyumunun gerçekleşmesi ile optimal politikanın sonlu iterasyonla bulunabilmesidir. Durum uzayı büyük olsa da Howard, az sayıda iterasyonda birbirini izleyen iterasyonların politikalarının uyumunun gerçekleştiğini bulmuştur. Yönteme ilişkin diğer bir sonuç, fonksiyon uzayında uyumun gerçekleşmesi yavaşken yani çok sayıda iterasyon gerekirken, politika uzayında uyumun gerçekleşmesinin hızlı olabilmesidir. Diğer bir ifadeyle, Markov sürecinin denge durumuna ulaşması için çok sayıda periyodun geçmesi gerekirken süreç için optimal politika çok az sayıda iterasyonla ortaya çıkabilmektedir (Devries, 1963: 30). Yöntem sadece devam eden ya da son bulması çok uzun zaman alabilecek süreçlerin optimizasyonunda uygulanmaktadır.

Politika iterasyonu yöntemi, kesikli dinamik programlama problemlerinin çözümü için en hızlı hesaplama yöntemlerinden biridir fakat yöntemin performansı problemin büyüklüğüyle hızla düşer. Bu düşüşün nedeni, yöntemin, her iterasyonda politika değerlendirme aşamasında doğrusal eşitlikler setinin çözümünü gerektirmesidir. Eşitliklerin sayısı arttıkça çözüm ve hesaplama için gereken zaman da artmaktadır. Bu nedenle büyük problemlerde bu doğrusal eşitlikler setinin çözümü optimal çözüme ulaşılmasında hesaplama açısından büyük bir engel oluşturmaktadır

(Mrkaic, 2002: 518). Fakat bu eşitliklerin çözümünde Maple V ve Matlab gibi bilgisayar programları kullanılabilmektedir.

Çözüm yöntemleri ortaya konan MDP'nin işletme kararlarının modellenmesinde kullanıldığı çalışmalar (1.7)'de ele alınmaktadır.

## 1.7. MARKOV KARAR SÜREÇLERİNİN İŞLETMELERİN KARAR VERME SÜRECİNDE KULLANILMASINA İLİŞKİN LİTERATÜR TARAMASI

Yapılan çalışmalar incelendiğinde stokastik yapıdaki MDP yaklaşımının işletmelerde bir karar verme aracı olarak kullanıldığı pek çok çalışma olduğu görülmüştür ve çalışmanın bu bölümünde bu konudaki literatür taramasına yer verilmektedir.

Literatürde yer alan çalışmalarda, MDP'nin işletmelerde Tablo 1.6'da verilen alanlarda uygulandığı görülmektedir (White, 1985: 73-83; White, 1988: 55-61; White, 1993: 1073-1096);

**Tablo 1.6.** Markov Karar Sürecinin Uygulama Alanları

| | |
|---|---|
| Optimal envanter kontrolü politikalarının belirlenmesi | Makine-teçhizatlar için optimal bakım-yenileme ve kalite kontrol-iyileştirme kararlarının belirlenmesi |
| Yeniden sipariş politikalarının belirlenmesi | Üretim planlaması |
| Hammadde satın alma kararlarının belirlenmesi | Fiyatlama kararlarının verilmesi |
| Optimal portföyün oluşturulması | Optimal kaynak dağıtımının gerçekleştirilmesi |
| Yatırım kararlarının belirlenmesi | Kuyruk sistemlerinde kapasite planlamasının yapılması |
| Makine-iş atamalarının planlanması | İşgücü planlaması |
| Yeni ürün stratejilerinin belirlenmesi | Reklam stratejilerinin belirlenmesi |

Çalışmanın bu bölümünde, yapılan literatür taraması ile MDP'nin işletme kararlarına yönelik uygulamaları ile ilgili belli başlı çalışmalar ele alınmaktadır.

- Maffei (1960) çalışmasında, reklam faaliyetleriyle etkilenen marka tercihleri problemini ele almakta ve pazarda iki ürün (marka) olduğu varsayımıyla belirli bir periyotta promosyon faaliyeti gerçekleştirildiğinde ürünü satın alan tüketicilerin kısa dönemli marka tercihlerindeki değişmeleri incelemektedir. İki marka sürecin durumları olarak tanımlandığında marka tercihlerindeki değişmeler geçiş olasılıkları matrisi ile ele alınabilmektedir (Maffei, 1960: 210-218).

- Herniter ve Magee (1961) yaptıkları çalışmada, promosyon faaliyetleri ile etkilenen müşteri davranışlarının modellenmesinde MDP yaklaşımından faydalanmıştır. Müşteriler sürecin durumlarından (aktif müşteri ya da aktif olmayan müşteri) birinde olmaktadır ve yapılan promosyon faaliyetleri ile müşterilerin bulundukları durum değişebilmektedir. Amaç, bu faaliyetlerin maliyetleri de göz önünde bulundurularak elde edilecek indirgenmiş net karın maksimize edilmesidir. Bu doğrultuda örneğin e-posta veya yüz yüze satış gibi doğrudan pazarlama faaliyetleri ve TV, gazete ve dergilerde reklam verilmesi gibi iki farklı alternatif değerlendirilerek optimal promosyon politikası belirlenmektedir (Herniter ve Magee, 1961: 105-122).
- Devries (1963)'in Michigan makine sanayindeki bir işletmede yaptığı çalışmasında, işletmenin bu sanayi dalındaki farklı rekabet pozisyonları sürecin durumları olarak tanımlanmakta ve işletmenin kazancını maksimize edecek optimal ürün stratejisini seçme kararı MDP olarak modellenmektedir (Devries, 1963: 1-2).
- Kolesar (1966), markovian bozulmaya sahip makine-teçhizatın yenilenmesine ilişkin karar problemlerinde uzun dönemli beklenen ortalama maliyetleri (bozulma, arıza, yenileme maliyetleri) minimize eden yenileme politikalarının belirlenmesi için MDP yaklaşımını uygulamıştır (Kolesar, 1966: 694-706).
- Derman ve Lieberman (1967)'ın çalışmasında transistörlerin stoklanması ve arıza yapması durumunda yenilenmesine ilişkin karar probleminin modellenmesinde MDP'leri kullanılmaktadır (Derman ve Lieberman, 1967: 609-617).
- Beebe, Beightler ve Stark (1968)'ın çalışmasında, çeşitli aşamalardan geçen bir ürünün (transistor üretimi) üretim sürecini içeren çok aşamalı bir karar probleminin, stokastik dinamik programlama formülasyonu ile optimize edilmesi ele alınmaktadır. Her iş istasyonunda geçişler stokastiktir ve matematiksel model, üretim sürecinin bir aşamasında sonlu MDP'ni kullanmaktadır. Üretim sürecinin

bu aşaması MDP ile modellenmekte ve MDP toplam getiriyi maksimize ederek optimize edilmektedir. Bu doğrultuda elde edilen sonuç, stokastik dinamik programlama formülasyonuna entegre edilmektedir (Beebe, Beightler ve Stark, 1968: 799-818).

- Miller (1969), *m* farklı müşteri grubunun ve *n* hizmet sağlayıcının olduğu bir kuyruk sistemini, poisson dağılımlı gelişler ve üssel hizmet süresi varsayımıyla, beklenen karı maksimize edecek şekilde hangi müşteri grubuna hizmet verilmesi gerektiğini belirlemek üzere sonsuz karar periyodunda sürekli zamanlı MDP ile modellemiştir. Süreç sonlu durum uzayına sahiptir ve sürecin durumları kaç tane hizmet sağlayıcının boş olduğunu ifade etmektedir (Miller, 1969: 234-245).
- Kolesar (1970), hastanelerde hasta girişlerinin çizelgelenmesi problemini MDP ile modellemiştir (Kolesar, 1970: B384-B396).
- Rosenthal, White ve Young (1978) çalışmalarında, hizmet sağlayıcının gelen müşteri taleplerini karşılamak üzere hangi birimde olması gerektiğine ilişkin dinamik yerleşim sorununu modellemede sonsuz zamanlı MDP'lerini kullanmıştır. Amaç beklenen toplam indirgenmiş hizmet maliyetleri ve hizmetin yerinin değişimine ilişkin maliyetleri minimize eden optimal yerleşim politikasının belirlenmesidir (Rosenthal, White ve Young, 1978: 645-653).
- Albright ve Winston (1979), optimal reklam ve fiyatlama stratejilerinin belirlenmesinde Markov karar analizini kullanmıştır. İşletme her periyoda mevcut pazar pozisyonunu, veya durumunu inceleyerek başlamaktadır. Bu pazar pozisyonu mevcut satış düzeyi, mevcut sadık müşterilerinin sayısı, mevcut pazar payı veya işletmenin karşılaştığı ve ölçebileceği ilişkili diğer istatistik olarak düşünülmektedir. Reklama yapılabilecek harcama ve uygulanabilecek fiyat için belirli sınırlar bulunmaktadır. İşletme, reklama ayrılabilecek bütçe ve belirlenecek fiyata ilişkin kısıtlar altında ve mevcut pozisyonuna göre ürünü için reklama harcaması ve fiyatı belirlemektedir. Amaç, *T* periyot boyunca oluşan beklenen indirgenmiş net karı maksimize etmektir (Albright ve Winston, 1979: 668-681).
- Zanakis ve Maret (1980), işgücü planlamasında çalışanların farklı statülerini durumlar olarak tanımlayarak bu durumlar arası geçişleri MDP ile modellemiştir. Sürecin durumları; üst düzey yöneticiler, yöneticiler ve grup liderleri, kalifiye

profesyonel düzey ve daha az ya da yeni işe alınmış profesyonel düzeyde çalışanlara ilişkin durumlar ile işe alma, işten çıkmış bir çalışanın yeniden işe alınması, diğer departmanlardan transfer edilmesi gibi nedenlerle çalışan kazanımlarını gösteren durumlar ve de yaş haddinden dolayı emeklilik, erken emeklilik, işten çıkarma, ölüm ya da sakatlık nedenleriyle işten ayrılma gibi nedenler sonucunda çalışanların kaybedilmesine ilişkin durumlardır (Zanakis ve Maret, 1980: 1095-1102).

- Monahan (1983), ürünün yaşam eğrisindeki yerine ve geçmişte yapılan reklamlara bağlı olarak net karı maksimize eden optimal reklam harcamasının belirlenmesine ilişkin sorunun formüle edilmesinde kesikli zamanlı MDP'ni kullanmıştır (Monahan, 1983: 106-117).
- Venkatesan (1984); tek ürün ve ekipmana, sonsuz üretim ve stoklama kapasitesine sahip ve makinenin markovian bozulma özelliğinin olduğu bir üretim/envanter sisteminde üretim ve makine yenileme kararı sorununu 2 boyutlu durum ve hareket uzayına sahip MDP ile ele almış ve sonlu planlama periyodunda beklenen toplam indirgenmiş yenileme maliyetleri, arıza sonucu yenilemenin ceza maliyetleri, üretim, stoklama ve stoksuzluk maliyetlerini minimize eden optimal politikayı araştırmıştır (Venkatesan, 1984: 1286-1295).
- Monahan (1984), ağızdan ağıza (word of mouth) pazarlamanın ve reklamların etkisi altında satışlardan elde edilen karı maksimize edecek reklam harcaması miktarlarının belirlenmesi problemini sürekli zamanlı MDP ile modellemiş ve sürecin durumlarını ele alınan işletmenin mevcut müşteri sayısı olarak tanımlamıştır (Monahan, 1984: 169-178).
- Wein (1992)'in çalışmasında, siparişin tek bir üretim partisi ile karşılandığı bir siparişe göre üretim sistemindeki çok aşamalı üretim sürecinde yeniden işleme ve artıklara ilişkin kararlar ele alınmaktadır. Talebin bilindiği ve materyal, yeniden işleme ve artıkların maliyetinin üretilen parti büyüklüğüyle doğrusal ilişkili olduğu varsayımı altında amaç siparişleri karşılarken beklenen toplam maliyeti minimize etmektir (Wein, 1992: 551-563).
- Nair (1995), stratejik yatırım kararlarından biri olan teknoloji seçimini ele almış ve elde edilen kazançtan teknoloji yatırım maliyeti ve sermaye maliyetinin çıkartılması ile net karı (indirgenmiş) maksimize eden kararın verilmesi sorununu

MDP ile modellemiştir. Sürecin durumları teknolojinin yenilik düzeyini ortaya koymaktadır. Olası karar alternatifleri ise mevcut teknolojiyle devam edilmesi ya da yeni nesil teknolojiye yatırım yapılmasıdır (Nair, 1995: 282-297).

- Archibald, Sassen ve Thomas (1997), 2 depo bir ürünlü ve 2 depo birden fazla ürünlü iki farklı sistem için, her dönemin başında sınırlı stoklama kapasitesine sahip her bir depoda kaç birim stok bulundurulması gerektiğini belirlemek üzere beklenen toplam indirgenmiş sipariş, depolar arası transfer (talebi karşılamak için yapılan) ve stoklama maliyetlerini minimize eden sonsuz zamanlı MDP modeli ortaya koymuş ve çalışmasında 2 depo ve 2 ürünün olduğu bir örnek uygulamaya yer vermiştir (Archibald, Sassen ve Thomas, 1997: 173-183).
- Cheng ve Sethi (1999) çalışmalarında, envanter-promosyon kararı probleminin modellenmesinde MDP'lerini kullanmaktadır. Ele alınan stokastik envanter probleminde, herhangi bir periyotta ürün talebinin olasılık dağılımı bazı çevresel faktörlere ve bu periyotta ürüne ilişkin promosyon yapılıp yapılmamasına bağlı olmaktadır. Amaç, toplam karı maksimize eden optimal envanter, sipariş ve ürün promosyon politikasının bulunmasıdır (Cheng ve Sethi, 1999: 1510-1512).
- Bhatganar vd. (1999)'nin çalışmasında, üretim kapasitesinin arttırılmasına ve kapasitenin farklı işlemlere dağıtılmasına ilişkin kararların alınmasında sonlu zamanlı MDP'lerinden faydalanılmaktadır. Fabrikanın kapasitesi sürecin durumları olarak ve her bir olanaklı fabrika durumu için uygulanabilecek hareketler de makine-teçhizatın ıskartaya çıkarılması veya satın alınması, makine-teçhizatın veya süreçlerin iyileştirilmesi ve makine-teçhizatın ürün hatlarına dağıtılması olarak tanımlanmaktadır. Amaç planlama dönemi boyunca ortaya çıkan yatırım ve işlem maliyetleri ve bunlardan ortaya çıkabilecek olası üretim aksamalarının maliyetlerinin minimize edilmesidir (Bhatnagar v.d., 1999: 1380-1385).
- Iravani, Duenyas ve Olsen (2000) çalışmalarında, stoka üretim yapan bir işletmenin stoklama ve makinelerin arıza yapması durumunda tamir elemanlarının makinelere atanmasına ilişkin problemlerini bir arada ele almış ve üssel dağılımlı tamir süreleri, poisson dağılımlı talep varsayımları altında 2 makineli ve 1 tamir elemanının olduğu bir sistemi MDP olarak modelleyerek

beklenen ortalama stoklama ve kaybedilen satışların maliyetini minimize eden politikayı belirlemeye amaçlamıştır (Iravani, Duenyas ve Olsen, 2000: 951-964).

- Pfeifer ve Carraway (2000), müşterilerin işletmeden ürün satın alma sıklıklarının modellenmesinde ve müşteri yaşam süresinin (customer lifetime value-müşterinin işletmeyle ilişkide olduğu süre boyunca işletmeye kazandıracağı tahmin edilen nakit akışının bugünkü değeri) hesaplanmasında MDP yaklaşımından faydalanmıştır (Pfeifer ve Carraway, 2000: 43-55).
- Song vd. (2000)'nin çalışmasında, elektrik enerjisi tedariğine ilişkin fiyat tekliflerinin modellenmesinde MDP'leri kullanılmıştır. Karar öncesinde gerçekleştirilen ihale ile tedarikçiler satmayı düşündükleri miktar ve fiyatı sunmaktadır ve tedarikçilerden alınan tekliflere ve günlük elektrik yükü tahminlerine göre spot fiyat belirlenmektedir. Tedarikçilere de bu fiyata göre ödeme yapılmaktadır. Bu sorunun MDP ile modellenmesi ile karar verici yani tedarikçiler için optimal strateji, elektrik tedariğinin sağlayacağı kazanç ile maliyeti arasındaki farkı yani beklenen net kazancı maksimize eden stratejidir (Song vd., 2000: 618-624).
- Vericourt, Karaesmen ve Dallery (2000), stoka üretim gerçekleştirilen 2 ürünün ve bir makinenin yer aldığı ve talebin poisson, üretim sürelerinin de üssel dağılımlı olduğu bir sistemde birim zamandaki ortalama stoklama ve stoksuzluk maliyetlerini minimize etmek üzere sınırlı üretim kapasitesinin ürünlere dağıtımı (makineyi atıl bırak, 1.ürünü üret, 2.ürünü üret hareket alternatifleri doğrultusunda) sorununu MDP ile modellemiştir (Vericourt, Karaesmen ve Dallery, 2000: 811-819).
- Aviv ve Federgruen (2001)'in çalışmasında, birden fazla ürünün yer aldığı ve talebin rassal olarak değiştiği envanter sistemlerinin modellenmesinde MDP'leri kullanılmaktadır. Sürecin durum uzayı olası envanter miktarlarından oluşmaktadır ve amaç, belirli bir planlama dönemindeki beklenen indirgenmiş maliyetlerin (üretim ve envanter maliyetleri) minimizasyonudur. Bu kriter kullanılarak farklı ürün ve envanter stratejileri değerlendirilmektedir (Aviv ve Federgruen, 2001: 512-516).
- Gans ve Zhou (2002)'nun çalışmasında, bir hizmet işletmesinde çalışanların istihdamına ilişkin karar problemi ele alınmaktadır. Çalışanların işte

karşılaştıkları öğrenme ve işten ayrılma durumlarının etkilerinin stokastik olması nedeniyle, öğrenme ve işten ayrılmanın Markovian özellik taşıdığı varsayımı ile bu sorun için MDP modeli oluşturulmuştur. Çalışanların sahip oldukları yeteneklerin düzeyleri sürecin durumları olarak tanımlanmaktadır. İşe yeni alınan bir çalışan seviye 1'den başlamaktadır ve zaman içinde öğrenmenin etkisiyle yetenek düzeyi artmaktadır. Herhangi bir periyotta ortaya çıkan maliyet, yeni bir çalışanın işe alınmasının maliyeti (ilan verme, görüşme, adayları test etme, başlangıç eğitimi vb.), çalışanın maaşları ve talebe bağlı olarak ortaya çıkan değişken (fazla mesai veya dış kaynak kullanımı) maliyetler olmak üzere üç farklı maliyet kaleminden oluşmaktadır. Amaç beklenen toplam indirgenmiş maliyeti minimize eden istihdam politikasının bulunmasıdır (Gans ve Zhou, 2002: 991-1006).

- Hu ve Yue (2003), yarı-markovian bozulmaya sahip sistemlerin yenileme kararlarının verilmesi problemini toplam indirgenmiş maliyetin minimizasyonu doğrultusunda sonlu ve sonsuz karar periyotları için ele almış ve optimal kontrol politikalarını bulmayı amaçlamıştır (Hu ve Yue, 2003: 181-196).
- Sloan (2004) çalışmasında, tek aşamalı bir üretim sürecinde zaman içinde bozulma gösteren makinelerin durumuna bağlı olarak değişen getiriler doğrultusunda makinelerin bakım çizelgelerinin ve üretim planlamasının minimum beklenen toplam indirgenmiş üretim, stoksuzluk ve stoklama maliyetli olarak hazırlanması sorununu MDP ile modellemiş ve soruna ilişkin sayısal bir örneği dinamik programlamanın yineleme ilişkisinden faydalanarak çözmüştür (Sloan, 2004: 647-656).
- Goto, Lewis ve Puterman (2004) çalışmalarında, Kanada Havayolları'nda yaptıkları uygulama ile maliyeti minimize ederek uçuşlarda sunulması gereken yemek miktarını belirlemek için sonlu zamanlı MDP'lerini kullanmaktadır. Durum uzayı olası yemek miktarlarından ve olası yolcu sayısından oluşmaktadır (Goto, Lewis ve Puterman, 2004: 107-118).
- Berman ve Kim (2004) çalışmalarında, tedarik zincirinde envanter kontrolü problemini ele almış ve poisson dağılımlı talep, üssel dağılımlı hizmet süresi, tedarikçilerden ürünlerin gelme zamanlarının (ön süreler) da üssel dağılımlı olması koşullarında optimal sipariş politikalarının belirlenmesi için sorunu

sonsuz ve sürekli zamanlı MDP ile modelleyerek beklenen toplam indirgenmiş kazancı maksimize etmeyi (sipariş verme, müşterileri bekletme ve stoklama maliyetlerini ele alarak) amaçlamıştır (Berman ve Kim, 2004: 497-521).

- Moustafa, Maksoud ve Sadek (2004), bozulmanın yarı-markovian olduğu, çok durumlu bir sistem için optimal bakım problemini ele almıştır. Sistemin her durumunda 3 alternatiften biri seçilebilmektedir; hiçbir şey yapmama, minimal bakım, yenileme. Amaç, sistemin uzun dönemli beklenen maliyetini minimize eden optimal bakım politikasının bulunmasıdır (Moustafa, Maksoud ve Sadek, 2004: 363-368).
- Nakashima vd. (2004) yaptıkları çalışmada, yeniden üretim işletmelerinde rassal talep varsayımı altında; birim zamanda beklenen ortalama stoklama, üretim, yeniden üretim, stoksuzluk ve eskiyen ürünlerin maliyetlerini minimize eden optimal üretim, yeniden üretim ve stoklama kararlarının belirlenmesi problemini MDP ile ele almıştır (Nakashima vd., 2004: 3619-3625).
- Minner ve Silver (2005), poisson dağılımlı talebe ve birden fazla ürüne sahip sistemlerde envantere ilişkin bütçe ya da alan kullanımı kısıtı ile ön sürelerin 0 olması varsayımı altında optimal sipariş politikalarının (her üründen kaç adet sipariş verilmesi gerektiği) bulunması problemini yarı markovian karar süreçleri ile ele almış ve beklenen toplam sipariş verme ve stoklama maliyetlerini minimize etmeyi amaçlamıştır (Minner ve Silver, 2005: 469-79).
- Vericourt ve Zhou (2005), farklı sorunların çözümüyle ilgili birden fazla farklı kategoride müşteri temsilcisinin olduğu çağrı merkezlerine gelen müşteri aramalarının hangi müşteri temsilcisine aktarılması gerektiğine dair kararların verilmesinde, sistemde bekleyen müşteri sayısını minimize eden bir MDP yaklaşımı ortaya koymuştur (Vericourt ve Zhou, 2005: 968-981).
- Ahn, Righter ve Shanthikumar (2005), *m* tane farklı işin yer aldığı bir sistemi ele almış ve her karar döneminin başında kaç kişinin işe alınması ve kaç kişinin işten çıkarılması gerektiğine ilişkin optimal kararları belirlemek üzere problemi MDP ile modellemiştir. Çalışmada amaç, işe alma, işten çıkarma ve işlem maliyetlerinden oluşan beklenen toplam indirgenmiş maliyeti minimize eden politikanın belirlenmesidir (Ahn, Righter ve Shanthikumar, 2005: 499-514).

- Chan ve Asgarpoor (2006)'un çalışmasında, rassal arızaların ve bu arızalardan dolayı da üründe bozulmaların olduğu bir parça için optimal bakım politikasının belirlenmesi sorunu ele alınmıştır. Markov süreci kullanılarak parçanın olası durumları arasındaki geçişlere ilişkin geçiş olasılıkları matrisi oluşturulmuş ve bu olasılıklarla sorun MDP olarak formüle edilerek toplam getiriyi maksimize eden optimal bakım politikası elde edilmiştir (Chan ve Asgarpoor, 2006: 452-456).
- Hill ve Johansen (2006), talebin Poisson dağılımlı olduğu ve karşılanmayan talebin kaybedildiği varsayımı altında bir envanter modelini ele almıştır. Çalışmada envanter modeli yarı-markov karar süreçleri kullanılarak formüle edilmekte ve sipariş, envanter bulundurma ve kaybedilen satışların maliyetlerinden oluşan uzun dönemli ortalama maliyeti minimize eden optimal politikanın belirlenmesi amaçlanmaktadır (Hill ve Johansen, 2006: 111-132).
- Jonker, Piersma ve Potharst (2006), doğrudan pazarlama işletmelerinin uzun dönemli müşteri ilişkileri yaratmak üzere her bir müşterisine her zaman periyodunda kaçar tane posta göndermesi gerektiğini belirlemeye ilişkin problemlerini sonlu zamanlı MDP ile ele almıştır. Müşterilere önceki periyotta gönderilen posta sayısına, müşterilerin bunlar arasından cevapladıkları posta sayısına ve harcama tutarlarına bağlı olarak bir sonraki periyotta net karı (kazanç-postaları gönderme maliyetleri) maksimize eden politikalar belirlenmektedir (Jonker, Piersma ve Potharst, 2006: 915-925).
- Kuo (2006)'nun çalışmasında, sonlu zamanlı kesikli Markovian bozulmanın olduğu yığın üretim sisteminde, makine bakımı ve üretim kalite kontrolüne ilişkin bileşik bir problem modellenmektedir. Makinenin kontrol altında olup olmaması olası durumları belirtmekte ve üretilen miktarlar da makinenin durumuna bağlı olmaktadır. Amaç, beklenen toplam indirgenmiş sistem maliyetini (makinenin durumuna bağlı olarak ortaya çıkan; makinenin kontrolüne ilişkin maliyetler, makinenin bozulmasıyla üretilen hatalı ürünlerin maliyetleri, müşteriye teslim edilmiş hatalı ürünlerin ceza maliyetleri ve makinenin bakımına ilişkin maliyetler) minimize eden optimal bakım ve kalite kontrol politikasını belirlemektir (Kuo, 2006: 586-597).

Yapılan çalışmalar incelendiğinde, MDP'lerinin özellikle üretim/envanter sistemi ve makine teçhizatın bakım/onarım/yenilenmesine ilişkin karar sorunlarının modellenmesinde sıklıkla kullanıldığı görülmektedir.

İşletmelerin karar verme süreçlerindeki sorunlara yönelik olarak ele alınan çalışmalardan, MDP'nin çözümünde yani optimal politikanın bulunmasında değer iterasyonu ve politika iterasyonu yöntemlerinin kullanıldığı çalışmalar kısaca özetlenmektedir.

Archibald, Sassen ve Thomas (1997), envanter sorununda minimum toplam indirgenmiş maliyeti veren politikanın bulunmasında; Iravani, Duenyas ve Olsen (2000), stoklama ve makinelere bakım elemanlarının atanması probleminde beklenen ortalama maliyeti minimize eden kararların belirlenmesinde; Vericourt, Karaesmen ve Dallery (2000), üretim/envanter probleminde ürünlere ilişkin beklenen ortalama maliyeti minimize eden üretim kararlarının belirlenmesinde; Song vd. (2000), elektrik enerjisi fiyat teklifleri için net kazancı maksimize eden politikanın saptanmasında; Berman ve Kim (2004), tedarik zincirinde envanter kontrolü sorununda beklenen toplam indirgenmiş kazancı maksimize eden optimal sipariş politikalarının ortaya konmasında ve de Vericourt ve Zhou (2005), çağrı merkezindeki müşteri aramalarının müşteri temsilcilerine aktarılmasına ilişkin olarak bekleyen müşteri sayısını enküçükleyen optimal kararın verilmesinde değer iterasyonu yöntemini kullanmıştır.

Herniter ve Magee (1961), müşteri davranışlarını modelledikleri çalışmada net karı maksimize eden optimal promosyon politikasının belirlenmesinde; Rosenthal, White ve Young (1978), hizmet sağlayıcının müşteri taleplerine göre yerleşimine ilişkin toplam indirgenmiş maliyeti minimize eden kararın verilmesinde; Pfeifer ve Carraway (2000), pazarlama uygulamasında müşteri yaşam süresinin hesaplanmasında; Nakashima vd. (2004), yeniden üretim işletmelerinde ortalama maliyeti minimize eden üretim ve stoklama kararlarının verilmesinde; Moustafa, Maksoud ve Sadek (2004), makinelerin bakım/onarım problemine ilişkin beklenen ortalama maliyeti minimize eden optimal bakım politikasının belirlenmesinde; Chan ve Asgarpoor (2006), toplam getiriyi maksimize eden makine bakım politikasının saptanmasında ve de Hill ve Johansen (2006), yarı markovian süreçlerle modellenen envanter sorununda ortalama maliyeti minimize eden politikaya karar verilmesinde politika iterasyonu yönteminden faydalanmıştır.

Birinci bölümde MDP'lerinin teorik yapısı ve bu konuda yapılan işletme uygulamalı sorunlar ortaya konduktan sonra, çalışmanın amacı doğrultusunda MDP'lerinin LP ve GP ile modellenerek çözülmesi için 2.bölümde bu konular ve öncesinde LP ve GP yaklaşımları ile bu yaklaşımların işletmelerin verdikleri kararlara yol göstermek üzere kullanıldığı çalışmalar ele alınmaktadır. Çalışmanın son kısmında GP yaklaşımının MDP'lerin çözümünde kullanılmasına yönelik olarak oluşturulan modele yer verilmektedir.

## İKİNCİ BÖLÜM
## MARKOV KARAR SÜRECİ PROBLEMLERİNİN DOĞRUSAL PROGRAMLAMA VE HEDEF PROGRAMLAMA İLE FORMÜLASYONU

MDP olarak formüle edilen problemlerin optimizasyonunda kullanılan algoritmalar dinamik programlamanın yinelemeli ilişkisinden faydalanarak optimizasyon sağlamaktadır. Bunun yanında MDP problemlerinin optimizasyonunda işletme sorunlarında geniş uygulama alanına sahip bir optimizasyon tekniği olan Doğrusal Programlama'dan (LP) da faydalanılabilmektedir. Çok sayıda zaman periyoduna ve duruma sahip sorunların çözümünde MDP çözüm algoritmaları yetersiz kalabilmekte ve bu durumda LP hesaplama açısından daha avantajlı olmaktadır. MDP problemlerinin LP ile çözülebilmesi için sorunun değişkenleri, amaç fonksiyonu ve kısıtları belirlenmekte ve herhangi bir kantitatif karar verme programı (Ds for Windows, POM-QM for Windows, Lindo, Excel Solver vb.) kullanılarak problemin optimal çözümüne ulaşılabilmektedir. MDP problemlerinin LP modelinin kurulabilmesi ve bu optimizasyon yaklaşımı ile de çözülebilmesi nedeniyle ikinci bölümde öncelikle kısaca LP'nın tanımına, temel varsayımlarına, işletmelerdeki uygulama alanlarına ve bu uygulamalara ilişkin literatür taramasına yer verilecektir. Daha sonra çalışmanın bu bölümünde MDP problemlerinin LP ile çözümlenmesi için kurulan model ve bu modelin bileşenleri (değişkenler, amaç fonksiyonu ve kısıtlar) ve de MDP problemlerinin LP yaklaşımı ile modellenmesine ilişkin yapılan literatür taraması ele alınacaktır.

Rekabet ortamında faaliyet gösteren işletmelerin karşılaştıkları sorunlar birbiriyle çatışan birden fazla amacın eşzamanlı olarak optimizasyonunu gerektirmektedir. Bu doğrultuda işletmelerin çok amaçlı ve belirsizlik altındaki karar verme ortamında etkin kararlar verebilmeleri hem stokastik yöntemleri hem de çok amaçlı karar verme yaklaşımlarını bir arada kullanmalarını gerektirmektedir. Çalışmada, işletmelerin bu sorunlarını çözmede yardımcı olabilecek çok amaçlı karar verme yaklaşımlarından biri olan Hedef Programlama (GP) ve stokastik yöntemlerden biri olan Markov Karar Süreçleri (MDP) bütünleşik bir yaklaşım olarak ele alınmaktadır. Çalışmanın bu bölümünde, çok amaçlı MDP'leri ve MDP olarak modellenen sorunların çok amaçlı karar verme ortamında GP modeli olarak formülasyonu ortaya konmadan önce GP'nın temel kavramları, varsayımları ve model formülasyonuna ayrıca GP'nın uygulama alanları ile işletmelerin karar verme süreçlerinde kullanılmasına ilişkin yapılan literatür taramasına yer verilecektir.

## 2.1. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

MDP'lerinin LP formülasyonuna yer verilmeden önce özellikle işletmelerin çeşitli fonksiyonlarına ilişkin karar problemlerinin optimizasyonunda kullanılan LP yaklaşımının temel yapısı ve uygulama alanları kısaca ele alınmaktadır.

### 2.1.1. Doğrusal Programlamanın Temel Kavramları, Varsayımları Ve Model Formülasyonu

Programlama problemleri, istenen amaçlara ulaşmak üzere sınırlı kaynakların etkin kullanımı ya da dağıtımı ile ilgilidir. Bu problemler temel koşulları sağlayan çok sayıda çözüme sahiptir. Bir problem için en iyi olacak belirli bir çözümün seçilmesi problemin tanımında yer alan amaca ve kısıtlara bağlıdır. Problemin sınırlayıcı koşullarını sağlayan ve en iyi amaç değerini veren çözüm optimal çözüm olarak adlandırılmaktadır (Gass, 1975: 3). Bir problemin optimum çözümü, verilen kısıtlar altında ulaşılabilecek olası en iyi çözümdür. Diğer bir ifadeyle ele alınan kısıtlarla sınırlandırılan çözüm kümesi içinde daha iyi bir çözüm yoktur. İyi çözüm iyileştirilebilir, fakat optimum çözüm olası en iyi çözümdür ve daha fazla iyileştirilemez (Wright, 1996: 12). Doğrusal programlama (LP) da belirli yapıdaki problemler için kullanılan bir programlama yöntemidir.

LP bileşenleri en basit şekliyle şu şekilde ifade edilebilir: LP ile çözülen problemde belirli sayıda değişkenin doğrusal bir fonksiyonu olan bir nicelik (maliyet, kazanç ya da zaman gibi) vardır. Bu değişkenler bir eşitlik ya da eşitsizlikler sistemini yani kısıtları sağlamalıdır. Bu doğrultuda karar verici, değişkenlerin, bu niceliği maksimize ya da minimize edecek negatif olmayan değerlerini bulmaya çalışır (Barsov, 1964: 1). Bu değişkenler karar değişkenleri olarak nitelendirilmektedir. Matematiksel yapısı itibariyle basit olan LP yaklaşımı, çok farklı alanlardaki gerçek problemlere uygulanabilmesi açısından güçlü bir kantitatif planlama ve karar verme aracıdır.

LP, sınırlı kaynakların en etkin biçimde nasıl kullanılması gerektiğini saptama tekniği ve bir karar verme aracıdır. Eldeki bir grup kısıtlı kaynağın değişik aktiviteler tarafından talep edilmesi durumunda ortaya çıkmaktadır. Belirli kaynakların belirli aktivitelere paylaştırılmaları bir amacın gerçekleştirilmesine katkıda bulunacaktır. LP sorunlarında kaynakların aktiviteler tarafından paylaşımının, amacı maksimize ya da minimize edecek biçimde olması istenmektedir (Tütek ve Gümüşoğlu, 2005: 113).

LP yaklaşımı, makine, insan, tesis, malzemelerden oluşan karmaşık bir sistemi, çok sayıda basit fonksiyonlara yani aktivitelere ayrıştırılabilir bir sistem olarak ele almaktır. Bir aktivite; materyal, işgücü, makine-teçhizat gibi girdilerin akışının olduğu ve sonuçta üretilen ürün gibi çıktıların akışının yer aldığı bir kara kutu olarak düşünülebilir. Aktivitelerin düzeyini değiştirmek için bu aktiviteye ve aktiviteden olan akışların değiştirilmesi gerekmektedir (Dantzig, 1998: 32). Diğer bir ifadeyle çeşitli aktivitelerin değerleri bu akışlara bağlı olmaktadır. Karar verici için amaç, bu aktivite düzeylerini optimize etmektir. Kısaca, LP, kullanılabilir kaynaklar doğrultusunda birbirinden bağımsız aktiviteler için optimum programın ya da karmanın belirlenmesi yöntemidir. LP, birden fazla aktivitenin kıt kaynakları kullanmak için rekabet etmesi ve problemdeki tüm ilişkilerin doğrusal varsayılabilmesi durumunda kullanılmaktadır (Loomba, 1964: 1).

Özetlenecek olursa, LP yaklaşımının temel varsayımları; doğrusallık varsayımı, toplanabilirlik varsayımı ve bölünebilirlik varsayımı olarak ifade edilebilir. Bu varsayımların dışında verilen LP formülasyonunda da görüldüğü gibi karar değişkenlerinin pozitiflik koşulunu sağlaması gerekmektedir. Ayrıca, amaç fonksiyonu katsayıları, kısıtların sağ tarafı ve teknoloji katsayıları gibi parametrelerin kesinlikle bilindiği varsayılmaktadır.

LP yaklaşımının kullanılmasında 5 temel aşama vardır: 1) Karşılaşılan problemin anlaşılması, 2) LP modelinin formüle edilmesi, 3) LP modeli için gerekli girdilerin yani verilerin (birim kazanç ya da maliyet verisi gibi) toplanması, 4) LP modelinin çözülmesi ve 5) Çözümün uygulanması (Schrage, 1984: 48). Gerçek sorunların LP modelinin formülasyonu matematiksel analizin yapılabilmesinde büyük önem taşımakta ve problemi anlayabilmeye ve büyük ölçüde de yaratıcılığa dayanmaktadır. Genel bir notasyonla LP modeli aşağıdaki biçimde gösterilmektedir.

***Model Formülasyonu***

Bir LP sorununda öncelikle bir amaç vardır ve bu amaç genellikle kazancın maksimizasyonu ya da maliyetin minimizasyonudur. Ek olarak, içinden biri amacı en iyi gerçekleştiren seçenek davranış biçimleri (çözüm seçenekleri) bulunmalıdır. Ayrıca, kaynakların sağlanabilmeleri kısıtlı olmalıdır. Sorundaki değişkenler ya da kısıt koşulları karşılıklı ilişki içinde olmalıdırlar. Amaç ve kısıtlar matematiksel olarak eşitsizlik ya da eşitlikler biçiminde denklem sistemleri oluşturmalıdırlar.

LP modelinin formülasyonunda 3 temel aşama vardır: 1) Karar değişkenlerinin (bilinmeyenlerin ya da bağımlı değişkenin) tanımlanması, 2) Kısıtların belirlenmesi ve bu kısıtların karar değişkenleri ile eşitlik ya da eşitsizlik biçiminde ifade edilmesi 3) Amaç fonksiyonunun belirlenmesi ve bu amaç fonksiyonunun, karar değişkenlerinin bir doğrusal fonksiyonu olarak ifade edilmesi (Feiring, 1986: 13).

Herhangi bir matematiksel modelin formülasyonu, sorunun önemli öğelerinin belirlenmesi ve bunların ilişkilerinin tanımlanması anlamına gelmektedir. Bu doğrultuda LP sorunlarının formülasyonunda belirli aşamaların izlenmesi yararlı olmaktadır. Öncelikle karar verici tek bir amaç seçerek amacı sözel olarak tanımlamalıdır. Verilmesi gereken kararların, kararlara ilişkin sınırların ve kararları kısıtlayan faktörlerin (kapasite kısıtı, pazar kısıtı, kalite kısıtı, malzeme dengesi kısıtı vb.) belirlenmesi gerekmektedir. Bu kısıtlar belirlendikten sonra sözel olarak saptanmış olan kararlardan yola çıkarak karar değişkenleri ve bu değişkenlerin ölçüm birimleri belirlenmelidir. Sözel olarak listelenen kısıtlar bu karar değişkenlerini kullanarak tanımlanmakta ve son olarak amaç fonksiyonu ortaya konmaktadır. Amaç fonksiyonunun oluşturulması için her karar değişkenine ilişkin kazanç ya da maliyet değerleri tanımlanmalıdır. Bu doğrultuda, matematiksel olarak LP sorunu (2.1) biçiminde oluşturulabilir (Kolman ve Beck, 1995: 51; Tütek ve Gümüşoğlu, 2005: 114);

*Amaç Fonksiyonu*:

$$Z \max(\min) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

*Kısıtlar*: (2.1)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (\geq)(=)\, a_i, \qquad i = 1,2,...,m \text{ için}$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j=1,2,\ldots,n)$$

Formülasyonda $x_j$ karar değişkenlerini, $c_j$ $j$ değişkenine ilişkin amaç fonksiyonu katsayısını, $a_{ij}$ $i$ kaynağının $j$ değişkenine ilişkin teknoloji katsayısını ve $a_i$ de $i$ kaynağının kullanılabilecek toplam niceliğini simgelemektedir. Amaç doğrusal bir fonksiyonla ve kısıtlar da doğrusal eşitlik ya da eşitsizliklerle ifade edilmektedir.

#### 2.1.2. Doğrusal Programlamanın Uygulama Alanları Ve İşletmelerin Karar Verme Sürecinde Kullanılmasına İlişkin Literatür Taraması

1827 yılında Fransız matematikçi J.B.J. Fourier doğrusal eşitsizliklerin çözümüne yönelik bir yöntem geliştirmiş ve yayınlamıştır. Bu yayın genellikle LP konusundaki ilk yayın olarak görülmektedir. 1939 yılında Rus matematikçi L.V.Kantorovich kaynak dağıtımı problemlerine ilişkin LP formülasyonunu ortaya koymuştur ve aynı zamanlarda Hollandalı ekonomist T.C.Koopmans klasik ekonomi problemleri için LP modelleri formüle etmiştir (Sierksma, 2001: 1). Doğrusal programlama (LP) yaklaşımı, bir araştırma alanı olarak ise ilk kez, II.Dünya Savaşı sırasında ve savaş sonrasında, ordudaki (Amerikan Hava Kuvvetleri) planlama faaliyetlerine yönelik olarak Dantzig tarafından ortaya konmuştur (Chvatal, 1983: 7).

1947 yılında Dantzig'in LP problemlerinin çözümü için simpleks algoritmasını geliştirmesi ve de bilgisayar teknolojisindeki gelişmelerin de etkisiyle bankacılık, eğitim, ormancılık, petrol, nakliye gibi birçok farklı alan ve sektördeki optimizasyon problemlerinin çözümünde LP yaklaşımı kullanılmıştır (Winston, 2004: 49). Ticari alanda ilk uygulamalar, 1952 yılında Charnes ve Cooper tarafından ortaya konan benzin üretimi için petrol ürünlerinin optimal karışımını bulma problemi ile başlamış ve daha sonra pek çok alana yayılmıştır (Dantzig, 2002: 45). 1960'lı yılların sonlarında ilk paket programların pazara sunulması ile LP modellerinin gerçek problemlere uygulanmasında da büyük ölçüde artış olmuştur. Günümüzde LP sorunlarında 1985 yılına kıyasla 1.000.000 kez daha hızlı şekilde çözüme ulaşılabilmekte ve 200.000 değişken ve kısıttan oluşan modeller dahi çözülebilmektedir (Sierksma, 2001: 1)

LP, yöneylem araştırması yöntemleri içerisinde en çok bilineni ve en fazla uygulama alanı bulmuş olanıdır. Yöntem özellikle işletmelerde Tablo 2.1.'de verilen alanlarda başarı ile uygulanmaktadır (Gass, 1975: 277, 324, 374; Schrage, 1984: 156; Sierksma, 2001: 331-333; Tütek ve Gümüşoğlu, 2005: 113; Wright, 1996: 5).

**Tablo 2.1.** Doğrusal Programlamanın Uygulama Alanları

| | |
|---|---|
| Optimum mamul karışımının saptanması | Portföy seçimi ve optimizasyonu |
| Satın alma politikasının belirlenmesi | Nakit yönetimi |
| Hammadde karışım ve kullanımlarının optimizasyonu | Banka varlıklarının yönetimi |
| Optimum işlem çizelgelerinin oluşturulması | Optimum vergi paketinin oluşturulması |
| Ulaştırma ve lojistik kararları (uçuş planlama, yük dengeleme, araç rotalarının planlaması, depo yerleşim planlaması vb.) | İşgücü planlaması ve personel ataması |
| Tek ve çok dönemli üretim-envanter planlaması ve kontrolü problemleri | Minimum reklam harcamasıyla reklamdan maksimum faydanın elde edilmesi |
| Mamullerin pazarlara optimum dağıtımlarının yapılması | Medya aracının seçimi kararları |
| Kaynak dağıtım kararları | Çok dönemli planların saptanması |
| Kapasite arttırma vb. kararlar | Proje yönetimi |
| Bakım onarım programlarının yapılmasına ilişkin kararlar | Oyun kuramında beklenen kazancın (ya da kaybın) ve oyuncuların stratejileri oynama olasılıklarının hesaplanması |
| Bankaların fonlarından optimum getiriyi sağlayacak biçimde borç vermeleri | Doğrusal regresyon modelleriyle istatistiksel talep tahminlerinin yapılması |
| Sermaye bütçelemesi, yatırım ve proje seçimi kararları | İşletmelerin etkinliğinin ölçülmesine veri zarflama analizinin kullanılması |

Literatürde, LP yaklaşımının işletmelerin karar verme süreçlerinde kullanıldığı pek çok çalışma yer almaktadır. Yukarıda belirtilen, en çok uygulama gerçekleştirilen alanlara yönelik çalışmalara kısaca yer verilmeye çalışılacaktır.

- Land (1957: 308-319), kok kömürünün maden ocaklarından fırınlara dağıtımında toplam mesafeyi minimize eden bir LP modeli ortaya koymuştur.
- Charnes, Cooper ve Miller (1959: 20-46), işletme fonlarının faaliyetlere dağıtımına ilişkin kararlara yönelik LP modelleri ortaya koymuştur.
- Wagner (1959: 206-212), regresyon analizinde en küçük karelere alternatif olarak en küçük mutlak sapma ve en küçük maksimum sapma kriterlerini kullanarak doğrusal regresyonda LP yaklaşımını uygulamıştır.
- Bowman (1960: 385-389), montaj hattı dengeleme sorununu LP ile modellemiştir.
- Hanssman ve Hess (1960: 46-51) ve Fuller (1975: 129-136), toplam maliyeti miminize eden üretim ve işgücü planlarını oluşturmak için LP modeli kurmuştur.
- Fetter (1961: 372-378), minimum maliyetli kapasite planlarının oluşturulmasında LP yaklaşımını kullanmıştır.
- Ijiri, Levy ve Lyon (1963: 198-212), bütçe ve finansal planlama süreçlerinde; Zadeh (2002: 69), üretim ve pazar kısıtları altında esnek bütçeleme ve bütçeden sapmaların analizinde LP yaklaşımını kullanmıştır.
- Wagner, Giglio ve Glaser (1964: 316-334), koruyucu bakım işlerinin planlanması ve çizelgelenmesinde, gerekli işgücünün belirlenerek bakım işlerine dağıtılmasında tamsayılı LP yaklaşımını kullanmıştır.
- Cohen ve Hammer (1967: 147-165) ve Güven ve Persentili (1997: 449-459), bankaların bilançolarının yönetimine (varlık ve borç miktarı ve bileşiminin belirlenmesine) yönelik çok dönemli LP modeli geliştirmiştir.
- Sharpe (1967: 499-510), yatırım fonu portföyünün oluşturulmasında ve Ronn (1987: 439-466), tahvil portföyü oluşturmada LP modelinden faydalanmıştır.
- Hofflander ve Drandell (1969: 41-54), sigorta şirketinin yatırımlardan elde ettiği karı maksimize eden bir LP modeli geliştirmiştir.
- Agarwala ve Goodson (1970: 181-192), optimal vergi paketinin ve politikalarının belirlenmesine yönelik LP modeli ortaya koymuştur.
- Thomas (1971: B474-B484), üretim ve reklam düzeylerini belirlemek üzere karı maksimize eden LP modeli geliştirmiştir.

- Summers (1972: 443-453), denetim elemanlarının denetim ofisinin maddi ve işle ilgili gereksinimlerini ve hedeflerini karşılayacak şekilde denetim projelerine atanmasında LP yaklaşımını kullanmıştır.
- Stone (1973: 621-636), portföy seçim kararında LP yaklaşımından faydalanmıştır.
- Morris (1973: 419-435), işyeri düzeninin yapılmasında birimler arası uzaklıkları minimize eden bir LP modeli kullanmıştır.
- Advani (1974: 295-297), hava filtresi tasarımı için, üretimde kullanılacak metal miktarını minimize eden bir LP modeli formüle etmiştir.
- Fabozzi ve Daddio (1977: 401-413), çalışan devir hızını minimize edebilmek doğrultusunda yüksek nitelikli öğretmenlerin aldıkları maaşları maksimize eden bir LP modeli geliştirmiştir.
- Baker ve Taylor (1979: 784-790), karşılıklı hizmetlere ilişkin satın al-üret kararının verilmesinde LP yaklaşımından faydalanmıştır.
- Hardy ve Adrian (1985: 285-292), bankaların, kredi başvurularını riskliliğine göre değerlendirerek kredi derecelendirmesi yapmalarına yönelik bir LP modeli ortaya koymuştur.
- Cusack (1985: 91-104), proje görevleri arasındaki öncelik ilişkileri kısıtları altında toplam proje maliyetini minimize eden LP ve tamsayılı LP modelleri ortaya koymuştur.
- Grant ve Hendon (1987: 69-72), işletme kaynaklarının optimal dağıtımına yönelik çalışmalarında, bir özel hastanenin reklam bütçesini reklamla ulaşılan toplam kişi sayısını maksimize edecek şekilde hangi reklam türüne nasıl dağıtacağını belirleyen LP modeli kurarak bir vaka ile ortaya koymuştur.
- Copley ve Corbett (1988: 437-446), sermaye kazançlarından doğacak vergi yükümlülüklerini (ödenmesi gereken toplam verginin net bugünkü değerini) minimize eden bir LP modeli önermiştir.
- Stafford (1988: 1163-1174), işlerin toplam tamamlanma süresini minimize etmek üzere işlerin makinelere atanması ve iş akışlarının belirlenmesi sorunu için karma tamsayılı LP modeli geliştirmiştir.
- Dutta vd. (1994: 17-29), demir-çelik fabrikasında, elektrik dağıtım kararlarına yönelik karı maksimize eden bir tamsayılı LP modeli geliştirmiştir.

- Chen ve Wang (1997: 592-610), demir çelik işletmesinin satın alma, üretim ve dağıtım planlarını oluşturmak üzere LP modeli ortaya koymuştur.
- Ghodsypour ve Brien (1998: 199-212), tedarikçi seçiminde analitik hiyerarşi süreci ve LP yaklaşımını kullanmıştır.
- Young (1998: 673-683), risk ölçüsü olarak ortalama varyans yerine minimum getiri kriterine dayanan (maksimum kaybı minimize eden portföyü seçme amaçlı) LP modeli geliştirmiştir.
- Dempster ve Hutton (1999: 229-254), hisse senedi opsiyonlarının fiyatlanmasında LP modelinden faydalanmıştır.
- Coman ve Ronen (2000: 1631-1639), işletmelerin üretim ve dış kaynak kullanımı konusunda karar vermelerinde yardımcı olacak, üretim ve dışardan satın alma maliyetleri ile işçilik, enerji ve finansman giderlerinin toplamını minimize eden bir LP modeli geliştirmiştir.
- Barbosa ve Pimentel (2001: 469-479), nakit akışlarının yönetimi için, planlama döneminin sonundaki kullanılabilir sermayeyi maksimize eden bir LP modeli ortaya koymuştur.
- Saydam ve Cooper (2002: 1054-1065), boya makinelerinde optimum kullanımı sağlayacak iş planlarının yapılmasında LP uygulamıştır.
- Stapleton, Hanna ve Markussen (2003: 54-62), işletmenin, farklı ülke pazarlarında ne kadar iş hacmi yaratması gerektiğini belirlemek için işlem kapasitesi, pazarı paylaşma hedefleri ve pazar büyüklüğü kısıtları altında kazancı maksimize eden bir LP modeli geliştirmiştir.
- Yazgaç ve Özdemir (2004: 20-28) çalışmalarında, modüler mobilya üretiminde yaptıkları uygulama ile stok kesme (cutting stock) probleminin çözümü için tamsayılı doğrusal programlama yaklaşımını kullanmıştır.
- Huq, Cutright ve Martin (2004: 121-129), çok işlemcili iş istasyonlarında çalışanların ve işlerinin çizelgelenmesine yönelik işin tamamlanma süresini minimize eden karma tamsayılı LP modeli kurmuştur.
- Spitter vd. (2005: 706-720), sınırlı kapasiteye sahip tedarik zincirindeki işlemlerin planlamasına yönelik, stoklama ve siparişleri karşılayamama maliyetlerini minimize eden LP modeli kurmuştur.

- Lin ve Wei (2005: 182-186), ürün tasarımlarını geliştirmede müşteri ve tasarımcı tercihlerini zaman ve maliyet kısıtlarıyla bütünleştiren bir tamsayılı LP modeli geliştirerek mouse tasarımına uygulamıştır.
- Matthews (2005: 37-49), deneyim ve uzmanlık alanları farklı olan hastabakıcı ve hemşireleri, haftalık klinik görevleri yerine getirilebilecek ve sağlık merkezine minimum maliyet getirecek şekilde bölümlere atamak ve gerekli hastabakıcı/hemşire sayısını bulmak için LP modeli kurmuştur.
- Tahar vd. (2006: 63-73), birbirinden bağımsız işlerin paralel makinelere atanmasında işlerin tamamlanma süresini minimize eden bir LP modeli kurmuşlardır.
- Bilgen ve Özkarahan (2007: 555-571), tahıl üreticisi bir işletmenin harmanlama, yükleme, ulaştırma ve stoklama maliyetlerini minimize eden bir karma tamsayılı LP modeli geliştirmiştir.
- Akinyele (2007: 30-36), iki farklı kategorideki çalışanlar arasından kaç kişinin gerekli olduğunu, işgücü büyüklüğünü belirlemek üzere karı maksimize eden bir tamsayılı LP modeli geliştirmiştir.

Yapılan çalışmalardan da görüldüğü gibi LP, işletmelerin karar verme süreçlerinde pek çok gerçek işletme probleminin çözümünde kullanılan ve karar vermede yardımcı olan bir yöneylem tekniğidir. LP, pek çok problemin formülasyonunda kullanılabilmektedir. Çalışmanın sonraki bölümünde, LP yaklaşımının stokastik karar verme araçlarından biri olan MDP problemlerinin formülasyonunda ve çözümünde kullanılmasına, bu konuda yapılmış olan çalışmalara ve model formülasyonuna yer verilmektedir.

## 2.2. DOĞRUSAL PROGRAMLAMANIN MARKOV KARAR SÜRECİ PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILMASI

MDP’lerinin çözümünde değer iterasyonu ve politika iterasyonu yöntemlerinden de faydalanılabilmektedir. Fakat MDP’lerinin LP ile formüle edilmesi, çeşitli doğrusal sistem kısıtlarının da probleme dahil edilmesini sağlamaktadır. Bu doğrultuda daha esnek bir çözüm yöntemi olduğu söylenebilir.

MDP'lerinin LP modeli olarak formüle edilmesi ile sistemin uzun dönemli davranışlarını (denge durumunu) etkileyebilecek şans kısıtları da ele alınabilmektedir. Böylece karar vericinin sistemin uzun dönemli davranışlarını kontrol etme imkanı ortaya çıkar. Bu istenen bir durumdur çünkü amaç fonksiyonu tüm maliyet kalemlerini içeremeyebilir. Bazı maddi değeri olmayan faktörlerin ifade edilmesi genellikle zordur. Sistem performansına ilişkin uzun dönem olasılıklarının kontrolü, bu tip faktörlere işaret edilmesinde yardımcı olmaktadır (Nazareth ve Kulkarni, 1986: 15).

Dinamik programlamaya dayalı yöntemler ile ele alınması çok zor olan, çok sayıda sistem kısıtına sahip problemlerde LP yaklaşımı kullanılabilmektedir. Envanter problemleri ve bakım-yenileme problemleri doğrusal programlama modeli olarak formüle edilebilmektedir (Derman ve Klein, 1965: 272). Dinamik programlama kavramsal olarak sonlu zamanlı problemler için daha basit olmaktadır fakat problem, bazı ekstra karmaşıklıklar içeriyorsa dinamik programlama yaklaşımı mutlaka en uygun yöntem olmayabilmektedir (Derman ve Klein, 1965: 273).

### 2.2.1. Markov Karar Süreci Sorunlarının Doğrusal Programlama İle Çözülmesine Yönelik Literatür Taraması

Çalışmanın bu bölümünde literatürde yer alan, MDP'lerinin LP yaklaşımı ile çözülmesine yönelik yapılmış çalışmalara yer verilmektedir.

- Manne (1960: 259-267), tek ürünlü bir envanter kontrolü sorununda, dönem başı stokunu gösteren değişkenler ve denge durumu olasılıklarını kullanarak beklenen ortalama aylık maliyeti (üretim, stoklama ve stoksuzluk maliyetleri toplamı) minimize eden bir LP modeli ortaya koymuştur. Modelin çözümü ile beklenen ortalama aylık maliyeti minimize eden üretim ve stok politikası belirlenmektedir.
- Klein'in (1962: 25-32) çalışmasında, Markovian bozulmanın olduğu sistemlere ilişkin optimal yoklama-bakım-yenileme politikalarının belirlenmesinde, problemin LP modeli olarak formülasyonu ele alınmaktadır. Çalışmada, sistemdeki bozulmanın kesikli ve sonlu Markov süreci olarak tanımlanabileceği varsayılmakta ve yoklamanın ardından sistemi yenilemek ve elde tutmak olmak üzere iki

alternatif söz konusu olmaktadır. LP modelinin amaç fonksiyonu, beklenen ortalama maliyetin minimizasyonudur ve bu nedenle denge durumu olasılıkları kullanılmaktadır. Problemde ele alınan maliyetler; bakım (tamir ve yenileme) maliyetleri, yoklama maliyetleri ve ceza (sistemin arıza yapması ile bu arızanın fark edilmesine kadar geçen süreye bağlı) maliyetleridir.

- Wolfe ve Dantzig (1962: 702-710), sonlu durum uzayına sahip markovian envanter sorunu için beklenen ortalama maliyeti minimize eden LP modeli formüle etmiş ve bu doğrusal programlama modelinin çözümünde, kendi geliştirdikleri ayrıştırma (decomposition) algoritmasından yararlanmıştır.
- D'epenoux (1963: 98-108), tek ürünlü bir üretim-envanter sistemini MDP ile formüle etmiş ve bu sorun için üretim ve stoklama maliyetlerini ele alarak toplam indirgenmiş maliyeti minimize eden bir LP modeli geliştirmiştir.
- Derman ve Klein'in (1965: 272-278) çalışmasında, sonlu durum uzayına ve sonlu planlama periyoduna sahip bir sistem için beklenen toplam maliyeti minimize eden optimal politikanın bulunması ele alınmaktadır. Problem için, beklenen toplam maliyeti minimize etmek için kullanılacak, dinamik programlamanın yineleme ilişkisini ortaya koyan fonksiyonel eşitlik yazılmaktadır. Bu gösterimin yanı sıra sorunun LP modeli olarak formülasyonu da verilmektedir. Ele alınan sistemin ergodik bir süreç olması nedeniyle, amaç fonksiyonunda denge durumu olasılıkları kullanılmaktadır.
- Klein'in (1966: 349-358) çalışmasında, üretim süreçlerinde ortaya çıkan hatalı ürünlerden dolayı alınan siparişlerin aksamasını önleyen üretim fazlalığı (ıskarta payı-reject allowance) üzerinde durulmaktadır. Çalışmada ıskarta payı göz önünde bulundurularak ve beklenen toplam maliyeti (üretim, stoklama ve stoksuzluk maliyetleri) minimize edecek şekilde, her aşamada üretilmesi gereken miktarın belirlenmesi sorunu sıralı karar problemi olarak sonlu durum uzayına sahip bir MDP ile ele alınmaktadır. Kurulan LP modelinde, stoksuzluk olasılığının belirlenen tolere edilebilir bir üst limitin altında kalmasına ilişkin bir sistem kısıtı da yer almaktadır.
- Kolesar'ın (1967: 867-876) çalışmasında, Markovian bozulmaya sahip makine-teçhizatın yenilenmesine ilişkin bir karar problemi ele alınmaktadır. Bu çalışmada yenileme politikasının amacı, Klein'in (1962) çalışmasında olduğu gibi

maliyetlerin minimize edilmesi değildir. Arıza olması, istenmeyen ve önlenmesi gereken bir olaydır ve bu nedenle karar verici arıza olasılığı için tolere edilebilecek bir üst limit belirleyebilir. Arıza olasılığı için belirlenecek bu sınır altında amaç, makine-teçhizatın dayanma ömrünü yani yenilemeler arasındaki beklenen süreyi (devir süresi-cycle length) maksimize eden yenileme politikasının bulunmasıdır. Bu süre, sistemin *0* durumunda olmasına ilişkin ardı ardına iki gözlem arasındaki süre olarak tanımlanmaktadır. Markov süreci literatüründe bu süre, *0* durumunun ortalama yinelenme süresi ile ifade edilmektedir ve ergodik bir Markov süreci için bu durumun denge olasılığının tersine eşittir ($\mu_{00} = 1/\Pi_0$). Bu doğrultuda problemin amaç fonksiyonu $\Pi_0$ 'ın minimizasyonudur.

- Ghellinck ve Epen (1967: 371-394), stokastik elemanın Markovian olduğu ve amaç fonksiyonunun beklenen toplam indirgenmiş maliyeti minimize etmek olduğu sıralı karar (veya kontrol) problemlerinin çözümü için LP formülasyonunu kullanmıştır. Çalışmada, bu tür problemlerin ayrılabilir olduğu ve daha az değişkenden oluşan doğrusal problemlere indirgenebildiği ispatlanmaktadır. Modelin uygulanabilirliğini ortaya koymak için envanter problemi ve makine yenileme problemi ele alınmıştır.
- Kislev ve Amiad'ın (1968: 121-129) çalışmasında, sonsuz zamanlı MDP'leri olarak modellenen ekonomik süreçlerde indirgenmiş beklenen kazancın maksimize edilmesini sağlayan optimal politikanın bulunmasında dinamik programlama ve LP'nin kullanılması ele alınmaktadır.
- Denardo (1970: 281-288), Manne'nin kurduğu modeli temel alarak farklı bir uygulama ile Markov yenileme problemlerine ilişkin LP modeli oluşturmuştur. Sonsuz zamanlı MDP'nde amaç, beklenen kazancı maksimize etmektir. Çalışmada, indirgenmiş ve indirgenmemiş kazanç kriterleri için iki ayrı LP modeli önerilmektedir.
- Hinomoto (1971a: 88-96), performansı zaman içinde bozulma (yarı-markovian bozulma özelliğine sahip) gösteren birbirinden farklı ve bağımsız ve de mal/hizmet üretiminde kullanılan faaliyetlere ilişkin optimal kontrol politikalarının belirlenmesi için bu faaliyetlerden elde edilen beklenen ortalama net faydayı maksimize eden bir LP modeli ortaya koymuştur.

- Hinomoto'nun (1971b: 1664-1674) çalışmasında, karar verici tarafından sabit aralıklarla denetlenen ve kontrol edilen birbirinden bağımsız homojen üretim faaliyetleri ele alınmaktadır. Üretim faaliyetlerinin performansındaki düşüş ve gelişmenin yarı-markovian süreç özelliği gösterdiği varsayımı altında beklenen net kazancı maksimize eden optimal kontrol ve bakım politikasının belirlenmesi amaçlanmaktadır. Bu sıralı karar probleminin çözümünde LP yaklaşımı kullanılmıştır.
- Whan, Scott ve Jefferson'ın (1978: 341-348) çalışmasında, uzun dönemli getirinin maksimize edilmek istendiği bir MDP'nin LP ile optimizasyonu ele alınmaktadır. Bu doğrultuda şekerkamışı ekiminden sağlanacak uzun dönemli getiriyi (indirgenmiş ve indirgenmemiş) maksimize eden hasat planları elde edilmeye çalışılmaktadır. Amaç fonksiyonunda, sistemin uzun dönemli davranışlarını tanımlayan denge olasılıkları kullanılmaktadır. LP modelinde olasılık kısıtlarının yanı sıra bir yılda hasat edilebilecek tarla alanına ilişkin bir sistem kısıtı da yer almaktadır.
- Hordijk ve Kallenberg (1979: 352-362) çalışmalarında, sonlu MDP için ortalama optimal politikanın tek bir LP probleminin çözümüyle bulunabileceğini göstermiş ve beklenen ortalama ödülü maksimize eden primal ve dual LP modellerini ortaya koymuştur.
- Nazareth ve Kulkarni (1986: 13-16) çalışmalarında, sonlu durum uzayına sahip, denge durumuna ulaşabilen ergodik bir MDP için durağan bir optimal politikanın bulunması sorununun LP formülasyonunu ele almıştır. Çalışmada beklenen ortalama maliyet ve indirgenmiş toplam beklenen maliyet kriterlerinin kullanıldığı iki farklı formülasyona yer verilmektedir.
- Tapia ve Murtgah (1992: 421-428), MDP için beklenen ortalama ödül kriterine (maksimizasyon) göre kurdukları LP modeli ile elde ettikleri denge durumu olasılık değerlerini, çok amaçlı karar verme modelinde karar vericinin tercihlerini yansıtmak üzere kullanmıştır.
- Yates ve Rehman (1998: 185-201), 10 yıllık zaman periyodunda süt üretiminden elde edilecek beklenen toplam indirgenmiş brüt karı maksimize eden bir LP modeli geliştirmiştir. Ele alınan MDP, hayvanların sütünden elde edilebilecek beklenen

kazancın maksimize edilmesi doğrultusunda hayvanları satıp satmama hareket alternatiflerini içermektedir.

- Berman ve Sapna'nın (2001: 429-441) çalışmasında, müşteriler için sınırlı bekleme alanına sahip olan bir servis alanında, Poisson dağılımlı gelişler ve üssel dağılımlı ön süre ve hizmet süresi altında sonlu kapasiteli bir envanter sistemin modellenmesinde yarı-markovian süreçler kullanılmaktadır. Servis parçalarının hizmet oranları için optimal kontrolün sağlanması amaçlanmaktadır. Bu doğrultuda, uzun dönemli beklenen maliyeti (envanter, sipariş, kaybedilen müşteri, bekleme zamanı ve kullanım oranına ilişkin maliyetler) minimize etmek için belirli maksimum envanter miktarı ve yeniden sipariş düzeyine göre her periyottaki optimal hizmet oranı belirlenmektedir. Optimal politikanın bulunmasında LP yaklaşımı uygulanmıştır.
- Jayakumar ve Asgarpoor (2006: 183-193), markovian bozulma/arıza özelliğine sahip bir sistemin beklenen ortalama maliyetini minimize eden optimal koruyucu bakım politikalarını belirlemek için LP modeli ortaya koymuştur.

Literatürde yer alan çalışmalar doğrultusunda, LP yaklaşımının MDP problemlerinin çözümünde kullanılmasına yönelik model formülasyonuna 2.2.2'de yer verilmektedir.

### 2.2.2. Model Formülasyonu

Çalışmanın birinci bölümünde belirtildiği gibi politikaların karşılaştırılması için karar vericinin performans ölçütünü belirlemesi gerekmekte ve MDP'lerinde üç ödül kriteri (beklenen ortalama ödül, beklenen toplam ödül ve beklenen toplam indirgenmiş ödül kriterleri) kullanılmaktadır. Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde MDP'lerinin doğrusal programlama (LP) formülasyonunda, beklenen ortalama ödül ve beklenen toplam indirgenmiş ödül kriterlerinin performans ölçütü olarak kullanıldığı görülmüştür. Bu doğrultuda, bu iki ödül kriterine göre LP formülasyonuna yer verilmektedir.

***Beklenen Ortalama Ödül Kriterine Göre LP Formülasyonu***

*N*-durumlu, tamamıyla ergodik bir Markov süreci için sistem zaman içinde geçiş yaptıkça sistemin beklenen toplam kazancı da artmaktadır. Daha önce de belirtildiği gibi bu durumda sürecin ortalama getirisi daha anlamlı bir performans ölçütü olabilmektedir. Ergodik olma özelliği ile denge durumuna ulaşabilen sürecin beklenen ortalama getirisinin hesaplanmasında sürecin denge durumu olasılıkları kullanılmaktadır. MDP'lerinin LP formülasyonunda amaç fonksiyonunda denge durumu olasılıkları kullanılarak beklenen ortalama ödül (kazanç ya da maliyet) hesaplanmaktadır. Sonlu durum uzayına sahip ve kesikli zamanlı olan bir MDP için oluşturulan LP modelinin karar değişkenleri, amaç fonksiyonu ve modelin kısıtları aşağıdaki biçimde gösterilmektedir:

- *Karar Değişkenleri:* LP modelinin karar değişkenleri her $i \in S$ için denge durumu olasılıklarıdır. Denge durumu olasılıklarından oluşan denge durumu vektörü $\Pi$ ve $i \in S$ için denge durumuna ulaşıldığında sürecin *i* durumunda olma olasılığı $\Pi_i$ ile gösterilmektedir. Denge durumunda sürecin *i* durumunda olması ve seçilen hareketin *k* olması olasılığı $x_i^k$, ($i \in S$ ve $k \in A_i$), LP modelinin karar değişkenidir ve $\Pi_i = \sum_{k=1}^{K} x_i^k$ 'dır.

- *Amaç Fonksiyonu:* Birinci bölümde tanımlandığı gibi *i* durumunda *k* alternatifini kullanmanın beklenen ödülü $q_i^k = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \, r_{ij}^k$ ile hesaplanabilmektedir. Bu gösterimde; $p_{ij}^k$, karar verici *i* durumunda iken *k* hareketini seçtiğinde sistemin *j* durumuna geçiş yapma olasılığını ve $r_{ij}^k$ bu geçişe ilişkin ödülü ifade etmektedir. Beklenen ödül ($q_i^k$), kazanç olması durumunda $w_i^k$ ve maliyet olması durumunda $c_i^k$ ile gösterilecektir. Amaç, sürecin beklenen ortalama kazancını maksimize etmek ya da beklenen ortalama maliyetini minimize etmek olmaktadır. Bu beklenen değerlerin hesaplanmasında da denge durumu olasılıkları kullanılmaktadır. Bu doğrultuda amaç fonksiyonu aşağıdaki biçimde formüle edilmektedir:

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} w_i^k x_i^k \text{ veya } Z_{\min} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} c_i^k x_i^k$$

▪ *<u>Kısıtlar</u>:* Denge durumu vektöründe yer alan $\Pi_i$ değerlerinin toplamının 1 olması koşulu ($\sum_{i=1}^{N}\Pi_i = 1$) sağlanmalıdır. Bu doğrultuda modelin kısıtlarından ilki bu koşula ilişkindir ve aşağıdaki biçimde gösterilmektedir:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} x_i^k = 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,N \text{ için})$$

LP modelinin diğer kısıtları ise denge durumuna ilişkin kısıtlardır. Geçiş olasılıkları matrisi, çok sayıda geçiş yapılması sonucunda yani bu matrisin çok sayıda kuvvetinin alınmasıyla, satırları aynı olan bir vektöre dönüşmektedir yani $n \to \infty$ gittikçe $P^n \to \Pi$. Sürecin bu denge durumu koşulları ile $\Pi_j = \sum_{i=1}^{N}\Pi_i p_{ij}$ olduğundan LP modelinin diğer kısıtları sistemin bu sınırlayıcı özelliğine ilişkin olmakta ve aşağıda biçimde gösterilmektedir:

$$\sum_{k=1}^{K} x_j^k = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} x_i^k p_{ij}^k \qquad (j = 1,2,\ldots,N \text{ için})$$

Son olarak denge durumu olasılıklarının negatif olmaması koşulu ($\Pi_i \geq 0$), diğer bir ifadeyle karar değişkenlerinin pozitiflik koşulu aşağıdaki biçimde modele eklenmelidir:

$$x_i^k \geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,N \text{ ve } k = 1,2,\ldots,K \text{ için})$$

Tanımlanan karar değişkenleri, amaç fonksiyonu ve kısıtlar ile beklenen ortalama ödül kriterinin kullanılması sonucunda ortaya konan LP modeli aşağıdaki şekilde gösterilebilir;

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} w_i^k x_i^k \text{ veya } Z_{\min} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} c_i^k x_i^k$$

*Kısıtlar:* $$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} x_i^k = 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,N \text{ için}) \qquad (2.2)$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_j^k = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} x_i^k p_{ij}^k \qquad ( j = 1,2,\ldots,N \text{ için})$$

$$x_i^k \geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,N \text{ ve } k = 1,2,\ldots,K \text{ için})$$

(2.2) ile verilen LP formülasyonunda sadece sürecin olasılıklı yapısına ilişkin kısıtlar yer almaktadır. Bu kısıtların dışında ele alınan sorunun yapısına bağlı olarak çeşitli sistem kısıtları da modele eklenebilmektedir. Bu yönüyle LP yaklaşımı MDP'lerin modellenmesi ve çözümünde karar vericilere esneklik sağlamaktadır.

Birinci bölümde dinamik programlama yaklaşımı, değer iterasyonu ve politika iterasyonu yöntemleriyle çözülen sorunun Tablo 1.3'de yer alan verileri doğrultusunda ve beklenen ortalama ödül kriterine göre, LP modeli aşağıdaki biçimde formüle edilmektedir:

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} w_i^k x_i^k$$

$$Z_{\max} = 6x_1^1 + 4x_1^2 - 3x_2^1 - 5x_2^2$$

*Kısıtlar:* $\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} x_i^k = 1$

$$x_1^1 + x_1^2 + x_2^1 + x_2^2 = 1$$

*j=1* için $x_1^1 + x_1^2 = 0{,}5x_1^1 + 0{,}8x_1^2 + 0{,}4x_2^1 + 0{,}7x_2^2$

$$0{,}5x_1^1 + 0{,}2x_1^2 - 0{,}4x_2^1 - 0{,}7x_2^2 = 0$$

*j=2* için $x_2^1 + x_2^2 = 0{,}5x_1^1 + 0{,}2x_1^2 + 0{,}6x_2^1 + 0{,}3x_2^2$

$$-0{,}5x_1^1 - 0{,}2x_1^2 + 0{,}4x_2^1 + 0{,}7x_2^2 = 0$$

$$x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2 \geq 0$$

LP modelinin çözümü ile aşağıdaki sonuçlara ulaşılmaktadır:

$Z = 2$

$x_1^1 = 0$ $\quad x_1^2 = 0{,}7778$ $\quad x_2^1 = 0$ $\quad x_2^2 = 0{,}2222$

Sürecin birim zamandaki (1 haftalık periyot) beklenen ortalama kazancı 2 PB'dir. Uzun dönemde, işletmenin 1.durumda iken yani ürünü tercih edilirken 1. alternatif olan reklam yapmama hareketini seçme olasılığı yoktur, 2.alternatif olan reklam yapma hareketini seçme olasılığı ise yaklaşık %78'dir. İşletmenin 2.durumda iken yani ürünü tercih edilmezken pazar araştırması yapmaması söz konusu değildir çünkü bu durumda iken 1.alternatifi seçme olasılığı 0'dır. Öte yandan ürünü tercih edilmezken pazar araştırması yapma olasılığı ise yaklaşık %22'dir.

***Beklenen Toplam İndirgenmiş Ödül Kriterine Göre LP Formülasyonu***

İndirgenmiş ödüllerin diğer bir ifadeyle ödüllerin bugünkü değerinin hesaplanmasında *(1+faiz oranı)*'nın tersi olarak ele alınan indirgeme faktörü $\beta$, ($0 \leq \beta < 1$), kullanılmaktadır. Bu doğrultuda LP modelinin bileşenleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

▪ *Karar Değişkenleri:* Beklenen toplam indirgenmiş ödül kriterinde, belirli sayıda periyot sonra ya da sonsuz zaman periyodunda süreçten beklenen toplam ödülün indirgenmiş değeri bulunmak istenmektedir. Bu nedenle beklenen ortalama ödül kriterinden farklı olarak, beklenen toplam indirgenmiş ödül kriterinde karar değişkenleri denge durumu olasılıkları değildir, *n.* periyotta sürecin durumlarda olması ve belirli bir hareketin seçilmesine ilişkin ortak olasılıklarla ilgilenilmektedir. Sistemin, *n.* periyotta *i* durumunda olması ve *k* hareketinin seçilmesine ilişkin ortak olasılık $z_i^k(n)$ ile gösterilmektedir.

▪ *Amaç Fonksiyonu:* Yukarıdaki ifadeler doğrultusunda karar vericinin amacı sistemin beklenen toplam indirgenmiş kazancını maksimize etmek ya da maliyetini minimize etmek olacaktır ve bu amaç fonksiyonu aşağıdaki biçimde formüle edilmektedir:

$$Z_{\max} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} w_i^k z_i^k(n) \text{ veya } Z_{\min} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} c_i^k z_i^k(n)$$

▪ *Kısıtlar:* Sürecin başlangıç (*n=0*) durumuna ilişkin olasılık dağılımını içeren başlangıç durum vektörü, $B = [B_1 \quad B_2 \quad \ldots \quad B_N]$ ile gösterilmektedir. $B_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{N} B_i = 1$ olduğu hatırlatılmalıdır.

Sistemin, *n.* periyotta *i* durumunda olması ve *k* hareketinin seçilmesine ilişkin ortak olasılık, yukarıda belirtildiği gibi, $z_i^k(n)$ ile gösterildiğinde;

$n$=*0* için $\sum_{k=1}^{K} z_j^k(n) = z_j(0) = B_j$ ve

$n = 1,2,\ldots,$ için $\sum_{k=1}^{K} z_j^k(n) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} p_{ij}^k z_i^k(n-1)$ olmaktadır. Bu kısıtların dışında eklenmesi gereken bir diğer kısıt seti de pozitiflik koşuludur:

$z_i^k \geq 0$

Karar değişkenleri, amaç fonksiyonu ve kısıtları tanımlanan LP modeli, görüldüğü gibi sonsuz sayıda değişkene ve kısıta sahiptir. Bu durumda LP yaklaşımı teorik olarak kullanılamamaktadır. Geçişlerin sonlu olduğu varsayımı altında, yeni bir $y_j^k$ değişkeni, $j \in S$ ve $k \in A_j$ için $y_j^k = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n z_j^k(n)$ olarak tanımlandığında amaç fonksiyonu ve kısıtlar (2.3) biçiminde gösterilmektedir:

$$Z_{\max} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} w_i^k y_j^k \text{ veya } Z_{\max} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} c_i^k y_j^k$$

*Kısıtlar:* $$\sum_{k=1}^{K} y_j^k - \beta \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{K} p_{ij}^k y_i^k = B_j \quad (j = 1,2,\ldots,N \text{ için}) \tag{2.3}$$

$$y_j^k \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,N \text{ ve } k = 1,2,\ldots,K \text{ için})$$

Verilen formülasyonda yer alan $y_i^k$, başlangıç durumu $B_j$ olduğunda sürecin *i* durumunda kalması beklenen süre olarak ifade edilebilir.

Daha önce beklenen ortalama ödül kriterine göre LP modeli formüle edilerek çözülen sorunun beklenen toplam indirgenmiş ödül kriterine göre LP modeli aşağıdaki biçimde kurulmaktadır (indirgeme faktörü $\beta = 0{,}9$ ve başlangıç durum vektörü $B = [0{,}5 \quad 0{,}5]$ için):

$$Z_{\max} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} w_j^k y_j^k$$

$$Z_{\max} = 6y_1^1 + 4y_1^2 - 3y_2^1 - 5y_2^2$$

*Kısıtlar:*

*j=1* için $y_1^1 + y_1^2 - 0{,}9\left(0{,}5y_1^1 + 0{,}8y_1^2 + 0{,}4y_2^1 + 0{,}7y_2^2\right) = 0{,}5$

$$0{,}55y_1^1 + 0{,}28y_1^2 - 0{,}36y_2^1 - 0{,}63y_2^2 = 0{,}5$$

*j=2* için $y_1^1 + y_1^2 - 0{,}9\left(0{,}5y_1^1 + 0{,}2y_1^2 + 0{,}6y_2^1 + 0{,}3y_2^2\right) = 0{,}5$

$$-0{,}45y_1^1 - 0{,}18y_1^2 + 0{,}46y_2^1 + 0{,}73y_2^2 = 0{,}5$$

$$y_1^1, y_1^2, y_2^1, y_2^2 \geq 0$$

Modelin çözümü ile aşağıdaki sonuçlara ulaşılmaktadır:

$Z = 17{,}25$

$y_1^1 = 0$ $\quad y_1^2 = 7{,}4725$ $\quad y_2^1 = 0$ $\quad y_2^2 = 2{,}5275$

Sürecin beklenen toplam indirgenmiş kazancı 17,25 PB'dir. İşletme ürünü tercih edilirken (1.durumda iken) 2.alternatif olarak tanımlanan reklam yapma hareketini ve ürünü tercih edilmezken (2.durumda iken) de yine 2.alternatif olarak tanımlanan pazar araştırması yapma alternatifini seçmektedir.

Yapılan çalışmanın temel amacı, stokastik karar verme araçlarından biri olan MDP ile çok amaçlı karar verme yaklaşımlarından biri olan hedef programlama yöntemlerinin işletmelerin karar problemlerinde bütünleşik olarak kullanılabileceğini göstermektir. Bu doğrultuda çalışmanın 2.3'de hedef programlama yaklaşımına ve işletmelerin karar problemlerinde bu yaklaşımın uygulandığı çalışmalara yer verilmektedir.

## 2.3. HEDEF PROGRAMLAMA

İşletmelerin çevresinde artan rekabetle birlikte işletmeler karar verme süreçlerinde birden fazla hedefi ele almak zorunda kalmaktadır. Artık amaç sadece karı maksimize etmek değildir ve işletmeler bu amaç dışında maliyet yapısı, işgücü kararları, kalite, çevresel sorumlulukları gibi pek çok alandaki birden fazla hedefi eş zamanlı olarak ele almak ve bu hedeflere ulaşmak durumundadır. İşletmelerin bu amaçları çoğunlukla birbiriyle çatışan amaçlardır. İşletmelerin çok sayıda çatışan amacı ele almasında tek amaçlı matematiksel programlama yöntemleri yetersiz kalmaktadır. İşletmelerin bu çatışan amaçlarının bir arada ele alınması ve optimal kararlara ulaşılmasında kullanılan yöneylem tekniklerinden biri de Hedef Programlama (GP) olmaktadır. Bu bölümde GP modellerinin formülasyonuna ve işletmelerin karar verme sürecinde GP yaklaşımının kullanıldığı çalışmalara yer verilmektedir.

### 2.3.1. Hedef Programlamanın Temel Kavramları, Varsayımları Ve Model Formülasyonu

Doğrusal programlama (LP) da hedef programlama (GP) da belirli kısıtlar altında, belirlenen amaçlar için optimal çözümler elde etmek üzere kullanılan doğrusal matematiksel modeller olmasına karşın GP, LP'nın farklılaştırılmış ve geliştirilmiş bir uzantısıdır. GP'da temel düşünce, her amaç için spesifik hedeflerin belirlenmesi, her amaç için bir amaç fonksiyonunun formüle edilmesi ve bu amaç fonksiyonlarının hedeflerinden sapmalarının toplamını minimize eden bir çözüm aranmasıdır (Vanguri, 1998: 12). Birden fazla amacın yer aldığı problemlerin çözümünde LP yaklaşımının kullanılmasına karar verilmesi durumunda, amaç fonksiyonu dışındaki diğer amaçları kısıt olarak ele almak gerekmekte ve LP modeli, optimal çözümün tüm kısıtları sağlamasını zorunlu kılmaktadır. Ayrıca böyle bir yaklaşımla kısıt olarak ifade edilen diğer tüm amaçlar eşit öneme sahip olmaktadır. Gerçek işletme sorunları açısından tüm kısıtların sağlanmaması da mümkün olmaktadır ve tüm kısıtlar karar verici için eşit önem ya da önceliğe sahip de olmayabilmektedir (Lee ve Moore, 1975: 198). Bu doğrultuda LP ve GP modelleri karşılaştırıldığında; LP modellerinin kazanç maksimizasyonu, maliyet minimizasyonu gibi sadece tek bir hedefi optimize eden çözümler elde edilmesini sağlarken, GP modellerinin birbiriyle çatışan birden fazla amacın eş zamanlı olarak ele alınabilmesini ve bu amaçları eş zamanlı olarak optimize etmeye çalışan bir çözümün bulunmasını sağladığı görülmektedir.

GP'nın önemi, eş zamanlı olarak birden fazla hedefin ele alınmasını sağlamasının yanı sıra, özellikle, hedefleri öncelik değerleriyle ele alabilme ve bu hedeflerle öncelik değerlerini dikkate alarak optimal çözümü sağlayabilme olanağı vermesine dayanmaktadır.

Birden fazla amacın eş zamanlı olarak ele alınarak bu amaçların hedef değerlerinden sapmaların toplamının minimize edilmeye çalışıldığı GP yaklaşımında ele alınan üç tip hedef vardır (Hillier ve Lieberman, 2001: 332-333):

1. Daha düşük, tek taraflı hedef, altına düşülmemesi istenilen bir alt limit belirler fakat limiti aşmak iyi bir sonuç olmaktadır.
2. Daha yüksek tek taraflı hedef, üzerine çıkılmaması istenilen bir üst limittir fakat limitin altına inmek iyi bir sonuç olmaktadır.
3. Çift taraflı hedef, her iki tarafta (alt ve üst) da kaçırılmak istenmeyen spesifik bir hedef noktası belirler.

Hedef programlama modelinde yer alan sapma değişkenleri, LP modellerinin çözümünde kullanılan simpleks algoritmasında boşluk değişkenler olarak nitelendirilmektedir. Sapma değişkenleri her hedef değerinden negatif ve pozitif sapmalar olarak ele alınmaktadır. Bu doğrultuda amaç fonksiyonu, hedeflere atanan göreli önem ya da öncelik düzeyleri doğrultusunda hedeflerden sapmaların toplamını minimize etmektir (Lee ve Moore, 1975: 199). Yukarıda verilen sınıflandırma çerçevesinde; eğer daha düşük tek taraflı hedef söz konusu ise bu hedeften aşağı doğru sapmayı ifade eden negatif sapma değişkeni, daha yüksek tek taraflı hedef söz konusu ise hedeften yukarı doğru sapmayı simgeleyen pozitif sapma değişkeni ve çift taraflı bir hedef varsa hem negatif hem de pozitif sapma değişkenleri GP modelinin amaç fonksiyonunda yer almaktadır.

Hedef kısıtları ile gerçek kısıtlar arasındaki fark, gerçek kısıtların karar değişkenleri üzerinde kesin bir sınırlayıcı etkisinin olması ve hedef kısıtlarıyla ortaya konan hedeflerin karar vericinin ulaşmaya çalıştığı koşullar olması fakat zorunluluk olmamasıdır (Ravindran, Phillips ve Solberg, 1987: 199). Diğer bir ifadeyle GP yaklaşımında hedef değerlerine "mümkün olabildiğince" yaklaşma amaçlanmaktadır ve bu hedef değerlerinden sapmalar ortaya çıkabilmektedir. Öte yandan LP modellerinde ya da GP modelleri içinde ele alınan diğer kısıtlar (gerçek kısıtlar) için sapma olması söz konusu değildir ve bu kısıtlar tam olarak sağlanmak zorundadır. Bu kısıtların sağlanamaması durumunda olursuz çözüm ortaya çıkmaktadır. Örneğin $x_1+x_2=6$ olarak formüle edilen gerçek kısıt için $x_1$ ve $x_2$ değerlerinin toplamı daima 6 olmak zorundadır. Öte yandan $x_1+x_2=6$ olarak oluşturulan bir hedef kısıtında $x_1+x_2\leq 6$ ve $x_1+x_2\geq 6$ olacak şekilde $x_1$ ve $x_2$ değerlerinin seçilmesi yani 6 değerinin altında (negatif sapma) ya da üzerinde (pozitif sapma) kalınması mümkün olabilmektedir. GP yaklaşımı da ilk olarak, Charnes ve Cooper tarafından, LP modellerindeki bu olursuz çözümleri ele almak üzere ortaya konmuştur.

GP problemleri, çok sayıda hedefe sahip problemlerin en iyi uyduğu matematiksel modelin türüne göre sınıflandırılabilmektedir. Bu doğrultuda, doğrusal GP, tamsayılı GP, doğrusal olmayan GP modelleri olarak bir sınıflandırma yapılabilmektedir (Hillier ve Lieberman, 2001: 333). Doğrusal GP problemlerinde, doğrusal amaç fonksiyonları ve kısıtlar ele alınmaktadır ve en çok kullanılan GP modelidir. Çalışmada da doğrusal GP modeli ele alınmaktadır. Tamsayılı GP modelinde tamsayılı LP modellerinde olduğu gibi karar değişkenlerinin tamsayılı değerler ya da 0-1 değerleri alması kısıtı yer almaktadır ve bu kısıtla birlikte tamsayılı LP modelinden farkı birden fazla amacın eş zamanlı olarak optimize edilmesidir. Tamsayılı GP modelleri dal-sınır algoritmasıyla çözülebilmektedir. Son olarak doğrusal olmayan GP modellerinde karar değişkenleri doğrusal değildir.

GP modellerine ilişkin bir diğer sınıflandırma ise modelleri, hedeflerin önceliklerinin belirlenmediği (nonpreemptive) ve belirlendiği (preemptive) GP modelleri olmak üzere iki kategoriye ayırarak yapılmaktadır. Önceliklerin belirlenmediği GP modellerinde hedefler eşit öneme sahiptir ya da öncelik sırasının belirlenebileceği kadar farklı önem düzeylerine sahip değildir. Önceliklerin belirlendiği GP modellerinde ise hedeflerin öncelik düzeylerine ilişkin bir hiyerarşi vardır (Hillier ve Lieberman, 2001: 333). Hedefler çeşitli önem derecelerine ayrılmış ise öncelik düzeyi faktörü, $Pr_j$ $(j=1,2,...,k)$, negatif ve/veya pozitif sapma değişkenlerine atanmaktadır. Bu öncelik faktörleri arasında $Pr_1>>>Pr_2>>>Pr_3...Pr_j>>>Pr_{j+1}$ ilişkisi bulunmaktadır ve “>>>” gösterimi “çok daha büyük” olma anlamına gelmektedir. Bu öncelik ilişkisi, öncelik düzeyi çok büyük bir $n$ sayısıyla çarpılsa bile, ne kadar büyük olursa olsun, bunun düşük öncelikli bir hedefi daha yüksek öncelikli bir hedef kadar önemli hale getirmeyeceğini göstermektedir. Bu öncelik hiyerarşisinde, daha düşük önceliğe sahip bir hedef ancak daha yüksek önceliğe sahip hedefe ulaşıldığında ya da bu yüksek öncelikli hedef için daha fazla iyileştirme söz konusu olmadığında ele alınmaktadır (Lee ve Moore, 1975: 199, 203). Hedeflerin farklı önceliklere sahip olduğu ve hedeflerden sapmaların öncelik düzeylerine göre sırayla minimize edilmeye çalışıldığı bu GP modelleri, leksikografik GP modelleri olarak da adlandırılmaktadır (Tamiz ve Jones, 1997: 29).

GP modellerinin formülasyonunda şu aşamalar izlenmektedir: 1) Karar değişkenlerinin tanımlanması, 2) Kısıtların tanımlanması, 3) Hedeflerin önceliklerinin belirlenmesi, 4) Eşit öncelikli hedeflere ilişkin göreli ağırlıkların belirlenmesi, 5) Amaç fonksiyonunun ortaya konması ve 6) Pozitiflik kısıtı veya diğer kısıtların belirtilmesi (Schniederjans, 1995: 21).

Verilen aşamalar doğrultusunda oluşturulan GP modelinde yer alan değişkenler aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır (Lee, 1979:2):

$x_j$ : *j.* karar değişkeni

$a_{ij}$ : *i.* hedef kısıtındaki $x_j$ karar değişkeninin teknoloji katsayısı

$b_i$ : *i* hedefi için hedef düzeyi (ulaşılmak istenen hedef değeri)

$d_i^-$ : *i* hedefinden negatif sapma

$d_i^+$ : *i* hedefinden pozitif sapma

$Pr_k$ : Hedefin öncelik düzeyi *(k.* düzey*)*

$w_{ik}^-$ : *k* önem düzeyindeki *i* hedefine ilişkin negatif sapma değişkeninin ağırlığı

$w_{ik}^+$ : *k* önem düzeyindeki *i* hedefine ilişkin pozitif sapma değişkeninin ağırlığı

Verilen notasyonla, öncelik düzeylerinin yer almadığı GP modeli aşağıdaki şekilde formüle edilmektedir:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{m} d_i^- + d_i^+$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i, \qquad i = 1,2,...,m \text{ için} \tag{2.4}$$

$$x_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0$$

Öncelik düzeylerinin yer aldığı GP modelinde ise amaç fonksiyonu (2.5) biçiminde gösterilmektedir:

$$Z_{\min} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{m} \text{Pr}_k (d_i^- + d_i^+) \tag{2.5}$$

Farklı öncelik düzeylerine sahip hedeflerin olmasının yanı sıra, eşit öneme sahip ya da aynı öncelik düzeyinde birden fazla hedefin olması durumunda bu hedeflere ilişkin sapma değişkenlerine ağırlık atanabilmektedir. Bu durumda GP modelinin amaç fonksiyonu (2.6) biçimini almaktadır:

$$Z_{\min} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{m} \text{Pr}_k (w_{ik}^- d_i^- + w_{ik}^+ d_i^+) \tag{2.6}$$

Çok amaçlı programlamanın en güçlü yanı, gerçek işletme sorunlarını çözmek için çeşitli amaçları aynı anda ele alabilmesi ve karar vericinin problemin çerçevesine ilişkin subjektif tercihlerini çözüm sürecine dahil edebilmesidir (Özdemir, 2004: 50). Çok amaçlı programlama yaklaşımlarından biri olan hedef programlama (GP), üç analizin yapılabilmesini sağlamaktadır: 1) Hedefler setine ulaşılması için gerekli olan girdi gereksinimlerini belirler, 2) Verilen kaynaklarla, belirlenen hedeflere ulaşma düzeyini ortaya koyar ve 3) Farklı girdi ve hedef yapılarına göre optimal çözümü belirler. GP'nın en önemli avantajı da, farklı kısıt ve hedef öncelik yapısı varyasyonlarına göre model simulasyonuna izin veren esnekliğidir (Lee ve Moore, 1975: 228). Ayrıca, hiçbir hedefe ulaşılamıyor olsa bile GP modeli daima bir çözüm verir, diğer bir deyişle olurlu çözüm alanı boş küme değildir. Bu da daha önce belirtildiği gibi, sapma değişkenlerinin gerçek kısıtlardan farklı olarak hedeflerden sapmalara olanak tanımasından ve hedef kısıtları sağlanmadığında olursuz bir çözümün ortaya çıkmamasından kaynaklanmaktadır. Bu avantajının yanı sıra GP modelleri için çok karmaşık, ileri düzeyde çözüm prosedürleri gerekmemekte, özellikle doğrusal GP modelleri bilinen LP çözüm yöntemleri ile çözülebilmektedir (Spronk, 1981: 59).

Gerek işletme içindeki gerekse çevresel koşullarla birlikte karar verme süreci daha karmaşık hale gelmiş ve çok sayıda ve çoğunlukla da birbiriyle çatışan amaçların ortaya çıkması kaçınılmaz olmuştur. Bu doğrultuda, sınırlı kaynakları kullanarak birbiriyle çatışan amaçları "mümkün olabildiğince" başarmaya odaklı bir karar verme süreci söz konusu olmaktadır. Karar vermenin etkinliği de, verilen kararlar sonucunda belirlenen amaçlara ulaşılma düzeyiyle değerlendirilmektedir. Bu koşullar altında karar vericinin etkin ve verimli kararlar verebilmesi bu amaçları çok iyi analiz etmesine bağlıdır. Bu doğrultuda çok amaçlı programlama tekniklerinden biri olan GP yaklaşımının işletmelerin karar verme mekanizmaları için büyük önem taşıdığı görülmektedir. Literatürde, işletmelerin karar verme süreçlerinde GP yaklaşımının kullanılmasına yönelik çok sayıda uygulamalı araştırma yer almaktadır. Çalışmanın sonraki bölümünde bu çalışmalar ele alınmaktadır.

### 2.3.2. Hedef Programlamanın Uygulama Alanları Ve İşletmelerin Karar Verme Sürecinde Kullanılmasına İlişkin Literatür Taraması

Charnes vd. (1955) tarafından geliştirilen biçimiyle GP'nin temelindeki düşünce, eş zamanlı olarak elde edilemeyecek hedefler setine "mümkün olabildiğince yakın" olabilecek çözümler geliştirmektir (Perez, 1985: 16). Daha kesin ve açık bir tanım ise hedef programlama kavramının ilk kez kullanıldığı Charnes ve Cooper'ın 1961'de yayınlanan "*Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*" isimli eserinde ortaya konmuştur (Tamiz, Jones ve Romero, 1998: 569).

Ijiri (1965) başlangıçtaki bu fikirleri geliştirerek öncelikli GP modelini ortaya koymuştur (Perez, 1985: 18). Sonrasında Lee (1972) GP modellerinin çözümü için simpleks yöntemini geliştirerek "*Modified Simplex*" algoritmasını ortaya koymuş ve ilk olarak bilgisayar kodları ile ilgili bir yayın çıkarmıştır. Bu algoritmada başlangıç tabloda çözümde negatif sapma değişkenleri yer almakta ve simpleks tablonun değerlendirme bölümünde ($Z_j$ ve $C_j$-$Z_j$ satırlarında) her öncelik seviyesi için ayrı bir satır bulunmaktadır. Bunun dışında çözüme giren ve çözümden çıkan değişkenlerin seçim kuralı LP modellerinin çözümünde kullanılan simpleks yöntemi ile aynıdır (Olson, 1984: 348).

Ignizio (1976, *Goal Programming and Extensions* isimli kitap) çalışmasında farklı (tamsayılı ve doğrusal olmayan) GP modellerini ortaya koymuş ve sonrasında da gerçek büyük sorunlarda GP yaklaşımının uygulanmasına yönelik çalışmalar yapmıştır (Tamiz ve Jones, 1996: 198).

Arthur ve Ravindran (1978), farklı öncelik düzeylerinde hedeflerin yer aldığı GP modellerinin çözümü için bu problemleri her öncelik seviyesi için ayrı bir LP problemi olarak ele alan bir algoritma geliştirmiştir. Algoritma, ilk öncelik seviyesi için bu hedefi etkileyen kısıtların ele alınmasıyla başlamakta ve birden fazla çözüm çıkması durumunda bir sonraki öncelik seviyesinde yer alan hedefi etkileyen kısıtlar modele eklenerek bu modelin çözülmesiyle sürdürülmektedir. Bu süreç tek bir optimal çözüm elde edilene kadar devam ettirilmektedir (Arthur ve Ravindran, 1978: 867-868).

Ignizio (1982, 1985) dual GP modelini formüle etmiş ve çözüm algoritmalarını ortaya koymuştur (Tamiz ve Jones, 1996: 198). Schniederjans ve Kwak (1982), öncelikli ve ağırlıklı GP modelleri için bir çözüm algoritması geliştirmiştir. Bu algoritmada başlangıç tabloda, her öncelik seviyesindeki hedef için sadece pozitif sapma değişkenleri yer almaktadır ve pozitif sapmanın ele alınmadığı hedeflerin öncelik seviyesi 0 ($Pr_0$) olarak gösterilmektedir. Amaç fonksiyonu $Z$ değeri hesaplanırken tüm ağırlıklar ve öncelik seviyelerine ilişkin satırlardaki değerler çarpılıp toplanarak mutlak değeri alınmaktadır. Çözümden çıkacak değişken, en yüksek önceliğe sahip ($Pr_0 >>> Pr_1 >>> ... Pr_j >>> Pr_{j+1}$) pozitif sapma değişkenidir ve önceliklerin eşit olması durumunda ağırlıklı önceliklerin (ağırlık$\times$öncelik) mutlak değerleri içinden en yüksek değere sahip pozitif sapma çözümden çıkmaktadır. Bu seçimin yapılması en negatif değerli değişkenin elimine edilmesini (çözümden çıkmasını) ve böylece optimal çözüme ulaşmak için gerekli hesaplamaların daha hızlı şekilde tamamlanmasını sağlamaktadır. Çözümde yer alan tüm değişkenlerin değerleri pozitif olana kadar ve öncelik seviyeleri dikkate alınarak çözüme devam edilmektedir (Schniederjans ve Kwak, 1982: 248-249).

Olson tarafından ortaya konan ve "*Revised Simplex*" algoritması olarak adlandırılan çözüm yönteminde, başlangıç tabloda ve her iterasyonda simpleks tabloda sadece negatif sapma değişkenlerinin sütunları yer almakta ve pozitif sapma ve karar değişkenlerine ilişkin sütunlar ise gerek olması halinde tabloya eklenmektedir. Çözüme girecek ve çözümden çıkacak değişkenlerin belirlenmesine yönelik seçim kuralları Lee'nin ortaya koyduğu simpleks prosedürleri ile aynıdır (Olson, 1984: 349).

1970'li yılların ortalarına kadar GP modelinin uygulandığı az sayıda çalışma olmasına karşın özellikle Lee (1972) ve Ignizio (1976)'nun yayınlanan eserlerinden sonra çok sayıda uygulama yönlü çalışma ortaya konmuştur. Bu çalışmalar doğrultusunda, GP modellerinin başlıca uygulama alanları Tablo 2.2'de özetlenmektedir (Ignizio, 1978 : 1112; Lee, 1979: 2; Lee ve Moore, 1975: 228-229; Ravindran, Phillips ve Solberg, 1987: 206).

**Tablo 2.2.** Hedef Programlamanın Uygulama Alanları

| | |
|---|---|
| Sınırlı kaynakların dağıtımı | İşgücü planlaması |
| Akademik planlama | Muhasebe |
| Finansal planlama | Portföy seçimi ve optimizasyonu |
| Ulaştırma ve lojistik sorunları | İşletme yerleşim yerinin seçimi |
| Pazarlama sorunları (satış gücünün pazarlama bölgelerine dağılımı, pazarlama stratejisinin belirlenmesi, reklam araçlarının planlanması) | Üretim planlaması ve çizelgelemesi (malzeme, üretim kapasitesi, teknoloji vb. girdilerin optimal karışımının belirlenmesi, iş çizelgelerinin oluşturulması, tedarikçi seçimi kararları) |
| Sistem tasarımı | Kalite kontrol |
| Politika analizleri | Sağlık hizmetlerinin planlanması |

Literatürde, GP yaklaşımının işletmelerin karar verme süreçlerinde kullanıldığı pek çok çalışma bulunmaktadır. Yukarıda belirtilen, en çok uygulama gerçekleştirilen alanlara yönelik çalışmalara kısaca yer verilmeye çalışılacaktır.

- Reklam izleyicilerine ve reklam sıklığına ilişkin hedefler doğrultusunda reklam medyasının planlanması sorunu için 0-1 tamsayılı GP modelinin formüle edilmesi (Charnes vd., 1968: B423-B430),
- Üretim, işgücü ve stoklama hedefleri doğrultusunda talebin karşılanması için bütünleşik üretim planlarının yapılmasında GP modelinin uygulanması (Jaaskelainen, 1969: 14-29),
- Denetim ücretlerinin arttırılması, ücrete tabi çalışma saatlerinin arttırılması, net gelire ve personel oranlarına ilişkin çeşitli hedefler doğrultusunda muhasebe faaliyetlerinin planlanmasında GP yaklaşımının kullanılması (Killough ve Souders, 1973: 268-279),
- Yatırımın karlılığı, işgücü, promosyon giderleri, yıllık pazar büyüme oranı, satış kampanyasıyla ilgili hedefler doğrultusunda işletmelerin pazarlama kararlarında GP yaklaşımının uygulanması (Lee ve Nicely, 1974: 24-32),
- Belirli bir kara ve bölgelerdeki tüm müşterilere ulaşma hedefleri doğrultusunda, farklı iki bölgede dağıtılan ve hedef kitlesi belirli yaş grubu olan bir ürünün reklamı için medya karmasının belirlenmesinde GP yaklaşımının kullanılması (Rifai ve Hanna, 1975: 21-26),
- Mevcut üretim ve talebin eşitlenmesi ile tüm talebin karşılanması, iş merkezlerindeki iş yüklerinin ortalama iş yükünün altında ya da üzerinde kalmasının önlenmesi hedefleri doğrultusunda bütünleşik bir planlama probleminin çözümünde GP yaklaşımından faydalanılması (Lockett ve Muhlemann, 1978: 127-135),
- Kaynak kullanımı, satış büyüme hızı, nakit akış oranı, değişim yaratma potansiyeli vb. kriterlere ilişkin hedefler doğrultusunda 25 farklı Ar-Ge projesine mevcut fonların dağıtılması kararında GP yaklaşımının kullanılması (Salvia ve Ludwig, 1979: 129-133),
- Çevresel atıkları minimize etme, bütçe, üretim kapasitesinin üzerinde çalışmayı minimize etme, ürün bölümünün satışlarını arttırma, talebi karşılama gibi hedefler doğrultusunda yatırım planlaması için 0-1 tamsayılı GP modelinin uygulanması (Keown ve Taylor III, 1980: 579-589),

- Çıktı, girdi, süreç hedefleri doğrultusunda kağıt imalatı yapan bir işletmenin kalite kontrol sorununda doğrusal GP yaklaşımının kullanılması (Sengupta, 1981: 207-211),
- Personel giderlerine ve işgücü ihtiyaçlarına yönelik hedefler ile bir hastanenin hemşire servisi giderlerinin bütçelenmesinde karma tamsayılı GP yaklaşımının kullanılması (Trivedi, 1981: 1019-1034),
- Bilgi sistemlerinin tasarım performansının değerlendirilmesinde, kullanıcıların beklentilerinin hedefler olarak ele alınması ile GP modelinin kullanılması (Chandler, 1982: 61-74),
- Müşteri, sürücü ve terminallerin gereksinimlerinin karşılanması; terminal yönetiminden kaynaklanan olası sorunların minimize edilmesi; sürücünün evi ile görevlendirildiği terminal arasındaki ulaşım maliyetinin minimizasyonu; müşteri ile terminal arasındaki ulaşım maliyetinin minimizasyonu hedefleri doğrultusunda nakliye terminallerinin yerinin seçilmesi kararında GP modelinin kullanılması (Schniederjans, Kwak ve Helmer, 1982: 65-72),
- Projelerin başarılı olması, bütçe, projelerden beklenen getiri, proje tamamlanma süresi, projelere verilen süre, bilgisayar kapasitesini kullanım oranı, birbirini dışlayan projeler ve tercih edilen projelere ilişkin hedefler doğrultusunda Ar-Ge projesi seçimi ve seçilen projelere araştırmacıların atanması sorununun çözümü için doğrusal olmayan 0-1 tamsayılı GP modelinin formülasyonu (Taylor III, Moore ve Clayton, 1982: 1149-1158),
- Öğretmen ihtiyaçları, yönetici öğretmen ve okul müdürlerinin tercihlerine ilişkin ve okullar arası ulaşım maliyetlerinin minimizasyonu hedefleri ile yardımcı eğitim hizmetleri için özel okullara öğretmenlerin atanması sorununun çözümü için 0-1 tamsayılı GP modeli formülasyonu (Lee ve Schniederjans, 1983: 75-81),
- İhracat tutarı, ihracat yapılan sektörler, yaratılan katma değer oranı, sermaye/çıktı rasyosu, işgücü/çıktı rasyosuna ilişkin ve ihracat desteklerinin minimizasyonu gibi çeşitli hedefler doğrultusunda ihracatın planlanmasında GP yaklaşımının kullanılması (Levary ve Choi, 1983: 1057-1067),
- Üretilen zillerin duyarlılık, sertlik, yarıçap ve genişliğine ilişkin ürün özellikleri için belirlenen hedefler doğrultusunda ürün tasarımındaki parametrelerin optimal

değerlerinin belirlenmesinde GP yaklaşımından faydalanılması (Singh ve Agarwal, 1983: 891-898),

- İşlerin tamamlanma süresini ve iş akış süresini minimize etme hedefleri ile makine-iş atamalarının yapılmasında karma tamsayılı GP modelinin kullanılması (Selen ve Hott, 1986: 1121-1128),
- Personel seçiminde ve işlere atanmasında tamsayılı GP modelinin kullanılması (Saatçioğlu, 1987: 361-365),
- Yol projelerinin değerlendirilmesi için hedeflerin, hedeflerin öncelik değerlerinin ve ulaşılmak istenen hedef değerlerinin Delphi tekniği ile belirlendiği bir GP modelinin geliştirilmesi (Khorramshahgol ve Steiner, 1988: 795-803),
- Politik risk, pazar riski ve döviz kuru riskinin minimizasyonu; istenen borç/özkaynak rasyosu, ve proje finansman maliyetinin minimizasyonu hedefleri doğrultusunda uluslararası proje finansman stratejilerinin oluşturulmasında GP yaklaşımının kullanılması (Lee ve Eom, 1989: 519-528),
- Envanter dengesi, stoklama kapasitesi gibi hedefler doğrultusunda kimya sanayindeki bir işletmenin envanter kontrolü sorununda doğrusal GP modelinin kullanılması (Golany, Yadin ve Learner, 1991: 16-23),
- Anaparası ve faizi getirdiği kazançtan ödenen ve vergiden muaf olan seri tahviller için optimal vade yapısının ve her vade yapısı için faiz kuponlarının belirlenmesinde faiz maliyeti, borç teminatı gibi hedefler altında GP modelinin kullanılması (Puelz ve Lee, 1992: 1186-1200),
- Sunulan ve talep edilen ürün miktarının eşit olması, maliyet minimizasyonu gibi hedefler ile ulusal bir perakendeci işletmenin dağıtım probleminin çözümünde GP modelinden faydalanılması (Hemaida ve Kwak, 1994: 215-224),
- Üniversitedeki ofis alanlarının farklı fakülte çalışanları arasında dağıtılması ve planlanmasında 0-1 tamsayılı GP modelinin kullanılması (Giannikos, El-Darzi ve Lees, 1995: 713-720),
- Portföylerin değerlendirilmesi ve seçiminde GP modelini kullanan bir yaklaşım oluşturulması (Tamiz vd., 1996: 286-299),
- Ülkenin pazar talebi potansiyeli, kapasite, alanın maliyeti, pazarın öngörülen büyüme hızı, ülkedeki potansiyel yerleşim yerlerinin sayısı, tedarikçilere erişilebilirlik, işgücü maliyetleri ve emlak vergisi oranına ilişkin hedefler

doğrultusunda global bir girişimin yerleşim yerinin seçimi kararında 0-1 tamsayılı GP modelinden faydalanılması (Hoffman ve Schniederjans, 1996: 23-34),

- Nüfus, yaş, gelir, eğitim gibi demografik özellikler; satın alma biçimi; dağıtım elemanları; ve reklam medyasının uygunluğu gibi pazar testinin yapılacağı yerlerin seçiminde önemli olan pazar karakteristikleri doğrultusunda belirlenen hedeflerle pazar testinin yapılacağı şehir/şehirlerin belirlenmesinde 0-1 tamsayılı GP yaklaşımının uygulanması (Hoffman, Schniederjans ve Flynn, 1996: 24-33),
- Hastalara gerekli hizmetleri verebilmek için gerekli işgücü gereksinimlerini karşılama, maliyetleri minimize etme, bekleyen hasta sayısını azaltma, hizmet kalitesini sağlama hedefleri doğrultusunda ve finansman, işgücü gibi kısıtları da dikkate alarak hastanede verilen performansın analizine ilişkin öncelikli GP modelinin ortaya konması (Arenas, Lafuente ve Rodriguez, 1997: 57-65),
- Bütçe; ulaştırma, dağıtım ve bakım maliyetlerinin minimizasyonu; teslim zamanındaki gecikmelerin minimizasyonu ve çeşitli sistem kısıtları doğrultusunda ürün dağıtım merkezinin yerinin belirlenmesi için tamsayılı GP yaklaşımı uygulaması (Konarzewska ve Zajaczkowski, 1997: 93-101),
- Rasyo hedefleri doğrultusunda bir bankanın bilanço yönetiminde doğrusal GP modeli uygulaması (Michnik ve Trazaskalik, 1997: 661-666),
- İş istasyonları sayısının belirlenen bir sayıyı aşmaması, döngü süresinin belirlenen süreyi aşmaması ve bazı işlerin aynı iş istasyonlarına atanmaması hedefleri doğrultusunda hat dengeleme sorununun çözümü için 0-1 tamsayılı GP modelinin kullanılması (Gökçen ve Erel, 1997: 177-185),
- İşgücü maliyetlerinin minimizasyonu, çeşitli bölümlerde gerekli doktor hemşire ve teknisyen atamalarının yapılması gibi hedefler doğrultusunda sağlık işletmelerinde insan kaynaklarının dağıtımı probleminin çözümünde GP yaklaşımının kullanılması (Kwak ve Lee, 1997: 129-140),
- Bütçe, çalışma saati, normal mesai ve fazla mesai saati, ekipmana ilişkin çeşitli hedefler doğrultusunda teknoloji karar problemi için karma tamsayılı GP modelinin formülasyonu (Gagnon ve Sheu, 1997: 145-168),
- Bütçelenen maliyet, analist ve denetime ilişkin işçilik saati hedefleri doğrultusunda, faaliyet tabanlı maliyetleme (ABC) sisteminde maliyet

taşıyıcılarının belirlenmesinde AHP ile hesaplanan ağırlıklar kullanılarak 0-1 tamsayılı GP yaklaşımının uygulanması (Schniederjans ve Garvin, 1997: 72-80),

- Yatırımın getirisinin maksimizasyonu, yatırım getirisindeki değişkenliğin minimizasyonu gibi çeşitli hedefler doğrultusunda kurumsal portföy yönetim kararlarında doğrusal olmayan GP modellerinin kullanılması (Powell ve Premachandra, 1998: 447-456),
- Değer zincirinde yer alacak partner işletmelerin seçiminde maliyet minimizasyonu, işletmeler arasındaki uzaklıkların minimizasyonu, değer zincirini faaliyete geçirme süresinin minimizasyonu ve işletmeler arasındaki kültürel uyumun maksimizasyonu hedefleri doğrultusunda 0-1 tamsayılı GP modelinin kullanılması (Talluri, Baker ve Sarkis, 1999: 133-144),
- Bütçe, analist ve programlamaya ilişkin yıllık işçilik saati, belirli bir projenin seçilmesi zorunluluğu ve büro işlerine ilişkin yıllık işçilik saatine yönelik hedef kısıtları doğrultusunda bilgi sistemi projelerinin seçimi kararında Analitik Serim Süreci (ANP) ile belirlenen ağırlıkların kullanıldığı 0-1 tamsayılı GP modelinin uygulanması (Lee ve Kim, 2000: 367-382),
- Sağlık hizmeti veren bir klinikte hizmet kalitesi ve maliyeti hedefleri doğrultusunda personel gereksinimlerinin karşılanması, personelin kişisel gelişiminin sağlanması, işe alınması gereken yeni personel sayısının minimizasyonu, fazla mesai kullanımının minimizasyonu, işlerin birbiriyle ikame edilmesinin önlenmesi, toplam personel maliyetinin minimizasyonu için GP yaklaşımının kullanılması (N.Li ve L.Li, 2000: 255-266),
- Hizmet kalitesi ölçüm araçlarının Analitik Hiyerarşi Süreci (AHP) yaklaşımı ile belirlenmesinden sonra maliyet, çalışma saati ve yönetim saati hedefleri doğrultusunda 0-1 tamsayılı GP modelinin kullanılması (Badri, 2001: 27-40),
- Projelerden sağlanan faydanın maksimizasyonu, donanım ve yazılım maliyetleri bütçeleri, projelerin başarısızlık riskinin minimizasyonu gibi hedefler ile bilgi sistemi projelerinin seçiminde 0-1 tamsayılı GP modelinin uygulanması (Badri, Davis Donald ve Davis Donna,, 2001: 243-252),
- QFD planlama sürecinde ürün tasarımı gereksinimlerini belirlemek için 0-1 tamsayılı GP yaklaşımının kullanılması (Han vd., 2001: 796-812),

- Hastane kaynaklarının dağıtımında GP modelinin kullanılması (Blake ve Carter, 2002: 541-561),
- Kar, finansal indeks gibi çeşitli hedefler ile uluslararası ortak girişimler için girişimin kurulacağı ülkenin işletmeleri arasından partner işletme seçimi kararında 0-1 tamsayılı GP modelinin uygulanması (Hajidimitriou ve Georgiou, 2002: 649-662),
- Alınan hatalı hammaddelerin minimizasyonu, hammadde alımlarında teslim zamanlarındaki gecikmelerin minimizasyonu, satış sonrası hizmet düzeyinin maksimizasyonu, satın alma maliyetlerinin minimizasyonu ve sağlanan faydanın maksimizasyonu hedefleri doğrultusunda tedarikçi seçimi kararı için 0-1 tamsayılı GP modelinin formüle edilmesi (Çebi ve Bayraktar, 2003: 395-400),
- Çok dönemli görev atama sorunun; çalışanın iş tatmininin maksimizasyonu, işle çalışanın nitelik ve deneyiminin uyumunun maksimizasyonu, dönemler arasındaki iş yükü varyasyonlarının minimizasyonu ve çalışanların farklı iş kategorilerini tanımasının maksimizasyonu hedefleri doğrultusunda GP modeli ile formüle edilmesi (Zolfaghari, Jaber ve Hamoudi, 2004: 299-309),
- Hastanede sağlık hizmetinin devamlılığını sağlamak ve ek maliyetleri minimize etmek doğrultusunda, aylık mesai planlamasının yapılmasında 0-1 tamsayılı GP modelinin uygulanması (Azaiez ve Sharif, 2005: 491-507),
- Müşteri sayısında artış, ulaşma ve yayınlanma sıklığı, markanın tanınması ve bütçeye ilişkin çeşitli hedefler ile reklam medyası seçim sürecinde karma tamsayılı GP modelinin ve hedeflerin önceliklerinin belirlenmesinde AHP yaklaşımının kullanılması (Kwak, Lee ve Kim, 2005: 255-265),
- Likidite, mevduat, kredi, toplam varlık, karlılık vb. hususlardaki çeşitli hedefler doğrultusunda bankaların finansal kriz dönemlerinde varlık ve borç yönetimindeki kararlarına yönelik GP modelinin formüle edilmesi (Tektaş, Özkan-Günay ve Günay, 2005: 135-149),
- Envanter güvenliğinin maksimizasyonu, rutin makine kontrollerinin maksimizasyonu, arızalı makinelerin belirlenmesinin maksimizasyonu gibi toplam 20 hedef doğrultusunda üretim faaliyetlerindeki emniyet düzeyinin belirlenmesi sorununda GP modelinin uygulanması (Ayomoh ve Oke, 2006: 221-239),

- İş istasyonları sayısının belirlenen bir sayıyı aşmaması, döngü süresinin belirlenen süreyi aşmaması ve her iş istasyonundaki iş yükünün belirlenen iş sayısını aşmaması hedefleri ile U-tipli bir hattın hat dengeleme sorununun çözümünde 0-1 tamsayılı GP modelinin uygulanması (Gökçen ve Ağpak, 2006: 577-585),
- Modüler üretimde üründe olması gereken parçaların belirlenmesi sorununun çözümü için maliyet minimizasyonu ve kalitenin maksimizasyonu hedefleri doğrultusunda 0-1 tamsayılı GP yaklaşımının kullanılması ve kahve makinesi tasarımında uygulanması (Nepal, Monplaisir ve Singh, 2006: 387-409),
- Talep, maliyet, kullanılan araçlara ilişkin hedefler doğrultusunda sınır ötesi lojistik problemlerinin çözümünde GP yaklaşımının kullanılması (Leung, Wu ve Lai, 2006: 263-272),
- Toplam maliyetin minimizasyonu, araç kapasitesinin eksik kullanımının önlenmesi, işgücünün eksik kullanımının önlenmesi gibi hedefler doğrultusunda araç güzergahlarının belirlenmesi sorununun çözümü için 0-1 tamsayılı GP modelinden faydalanılması (Calvete vd., 2007: 1720-1733),
- Sabit ve değişken maliyetlerden oluşan toplam satın alma maliyetinin, ürün teslim süresinin ve iade edilecek hatalı ürünlerin miktarının minimizasyonu hedefleri doğrultusunda ve kapasite, talep ve satıcı sayısı kısıtları altında işletmelerin dış kaynak kullanımında ürün alacakları satıcı işletmeleri belirlemesinde 0-1 tamsayılı GP modelinin kullanılması (Wadhwa ve Ravindran, 2007: 3725-3737),
- Ziyaret edilmesi gereken müşteri grupları, ziyaretler arası süre gibi hedefler ve bir iş gününde ziyaret edilmesi gereken minimum ve maksimum müşteri sayısı kısıtları doğrultusunda pazarlama yöneticisinin müşteri ziyaretlerinin planlanmasında 0-1 tamsayılı GP modelinin uygulanması (Mathirajan ve Ramanathan, 2007: 554-566).

İşletmelerin karar verme sürecinde GP yaklaşımının kullanıldığı çalışmaların ele alınmasının ardından sonraki bölümde çalışmanın temel amacı olan MDP gibi stokastik bir yaklaşımla çok amaçlı karar verme tekniklerinden GP yaklaşımının bütünleşik olarak kullanılmasına ve bu doğrultuda gerçekleştirilen çalışmalara yer verilmektedir.

## 2.4. MARKOV KARAR SÜREÇLERİNDE HEDEF PROGRAMLAMA YAKLAŞIMININ UYGULANMASI

Hedef programlama yaklaşımı işletme kararlarında kullanılan ve birden fazla amacın eş zamanlı olarak ele alınabilmesini sağlayan bir yöneylem tekniğidir. İşletmeler artan rekabet ve değişen müşteri istek ve ihtiyaçları karşısında hem birden fazla birbiriyle çatışan amacı eşzamanlı olarak ele almak hem de değişen bu koşullar altında belirsiliğin yoğun olduğu ortamlarda karar vermek durumunda kalmaktadır. Bu doğrultuda işletmelerin karar verme süreci hem stokastik yaklaşımların hem de birden fazla amacı ele alabilen çok amaçlı karar verme araçlarının bütünleşik olarak ele alınmasını gerektirmektedir. Çalışmanın bu bölümü, MDP'lerinin birden fazla amaç olması durumunda GP yaklaşımı ile formüle edilmesine ve bu doğrultuda önerilen modele yöneliktir.

### 2.4.1. Çok Amaçlı Markov Karar Süreçleri

Çok amaçlı markov karar süreçleri konusundaki temel çalışmalar baskın (noninferior/nondominated) beklenen getiri yaratan durağan politikalar belirlemek için ardışık yaklaşım (successive approximations) algoritmalarının geliştirilmesine yöneliktir (Trzaskalik, 1998: 14). Teorik ve uygulamalı olan çalışmalara aşağıda yer verilmektedir:

- Viswanathan, Aggarwal ve Nair (1977) tarafından sonlu durumlu son bulan MDP'leri ele alınmıştır. Bu karar problemi çok amaçlı doğrusal program olarak modellenmiş ve programlar çok parametreli LP ile çözülmüştür. İki durumlu iki hareket alternatifli ve üç amaçlı son bulan bir MDP örnek olarak ele alınmıştır (Viswanathan, Aggarwal ve Nair, 1977: 263-272).
- Schmee, Hannan ve Mirabile (1979), hastalar için gerekli tedavi düzeylerini (6 tane, 7.iyileşme, 8.ise ölüm) MDP'nin durumları olarak tanımlamış ve hasta kabul-tedavi-taburcu kararlarını kesikli zamanlı yarı markovian karar süreçleri ile modellemiştir. Ele alınan sorunda 2 amaç (hastanın iyileşme olasılıklarını maksimize etmek ve hastanın ortalama tedavi maliyetini minimize etmek) olduğundan markov

süreci çok amaçlı LP modeli olarak formüle edilmiş ve baskın çözümler belirlenmiştir (Schmee, Hannan ve Mirabile, 1979: 121-129).

- White ve Kim (1980), indirgenmiş ödüle sahip çok amaçlı MDP'lerinin özel yapıya sahip kısmi-gözlemlenebilen MDP'lerine denk olduğunu göstermiş ve kısmi-gözlemlenebilen MDP'leri için geliştirilmiş algoritmaları temel alan algoritmalar ortaya koymuştur. White ve Kim çalışmalarında, indirgenmiş vektör kriterli MDP'leri için baskın (domine edilmemiş) beklenen ödül fonksiyonlarını yaratan durağan politikaları belirlemek için üç prosedür ortaya koymuştur. Bu prosedürlerden ilk ikisi ardışık yaklaşımlar ve politika iterasyonuna dayanmaktadır. Üçüncü prosedür ise özellikle az sayıda kabul edilebilir politikanın olduğu problemler için yararlı ve kullanışlı olan direkt arama algoritmasıdır. Viswanathan, Aggarwal ve Nair (1977) tarafından ele alınan iki durumlu iki hareket alternatifli ve üç amaçlı son bulan MDP, geliştirilen yöntemlerle çözülmektedir (White ve Kim, 1980: 129-140).
- Furukawa (1980), eklemeli (additive) vektör-değerli fayda fonksiyonuna ve sayılabilir duruma ve hareket alternatifine sahip sonsuz zamanlı markovian karar süreçlerini ele almıştır. Çalışmada amaç vektör-değerli fayda ile ölçülmektedir. Çalışmanın amacı, optimal politikanın özelliklerini vermek ve politikaların iyileştirilmesi için iteratif bir algoritma geliştirmektir (Furukawa, 1980: 271-279). Furukawa politika-iyileştirme algoritması geliştirmiş ve optimal politikaları, tüm sabit noktalar kümesinde baskın olan nokta-belirleme haritalamasının sabit noktaları ile tanımlamıştır (Trzaskalik, 1998: 14). Frukawa indirgenmiş ödüle sahip çok amaçlı MDP'leri için bir politika iterasyonu algoritması geliştirmiştir.
- Thomas (1983), Furukawa'nın geliştirdiği algoritmanın farklı bir şeklini ortalama getirili süreçlere uygulamıştır. Thomas çalışmasında sadece, tamamen ergodik olan süreçleri ele almıştır.
- Iki ve Furukawa (1984), ortalama ödül kriterli çok amaçlı MDP'leri için çok-zincirli yapıyı ele almış ve Furukawa'nın yöntemine benzer bir politika iterasyonu yöntemi ortaya koymuştur.
- Furukawa (1980), Thomas (1983) ve Iki ve Furukawa (1984) sadece deterministik durağan politikaları ele almış ve politika iterasyonu son bulduğunda elde edilen politikaların ödüllerinin baskınlıklarını kıyaslamışlardır. Wakuta ve Togawa'nın

(1998) çalışmasında ise daha geniş bir politikalar sınıfı içinden optimal deterministik durağan politikalar belirlenmektedir (Wakuta ve Togawa, 1998: 30).

- White (1982a) çalışmasında, sonlu durum uzayına sahip sonlu zamanlı çok amaçlı MDP'lerinin optimizasyonunda, indirgenmiş ödül kriteri altında, ardışık yaklaşımlar yöntemini ele almaktadır (White, 1982a: 639-647).
- White (1982b) çalışmasında, Bellman'ın standart envanter probleminin (satın alma, elde bulundurma ve stoksuzluk maliyetleri gibi çeşitli maliyetlerin toplamını minimize eden kontrol politikalarının belirlenmesiyle ilgili olan) çok amaçlı uzantısını sadece sonsuz zaman periyodu için indirgenmiş satın alma ve stoksuzluk maliyetleri boyutuyla ele almıştır (White, 1982b: 219-227).
- Henig (1983) çalışmasında, sayılabilir nicelikte aşamaya ve vektör-değerli getiriye sahip dinamik programlama modellerini araştırmış ve maximal (Pareto) getiriler ve maximal politikalar kümelerini tanımlamıştır. Ulaştığı sonuçların MDP'leri için de geçerli olduğunu ve bu nedenle de maximal getiriler kümesine çok kriterli matematiksel programlama ile yaklaşılabileceğini göstermiştir (Henig, 1983: 490-499).
- Durinovic vd. (1986), çok amaçlı, ödüllü bir MDP'nde baskın çözümlerle, ilgili çok amaçlı doğrusal programın baskın noktaları arasındaki ilişkiyi ele almıştır (Trzaskalik, 1998: 14). Çalışmada beklenen ortalama ödül kriteri kullanılmaktadır. Markov sürecinde birden fazla ödül (kazanç) sistemi mevcut olması durumunda çözümün çok amaçlı doğrusal programlamayla nasıl gerçekleştirilebileceği üzerinde durulmaktadır (Durinovic vd., 1986: 215-226).
- Viswanathan, Aggarwal ve Nair'in yaklaşımını takiben Novak (1989, 1991), indirgenmiş ve indirgenmemiş çok amaçlı MDP'lerini ve çok amaçlı yarı-markov karar süreçlerini ele almıştır. Novak bu süreçlere ilişkin çok amaçlı doğrusal programları, çok kriterli simpleks yöntemi ile ele almıştır (Wakuta ve Togawa, 1998: 30). Çok amaçlı doğrusal programlarla formülasyonda başlangıç durum dağılımına ihtiyaç duyulmaktadır. Viswanathan, Aggarwal ve Nair (1977) ve Novak (1989, 1991) çalışmalarında belirli bir başlangıç durum dağılımı için domine edilmemiş deterministik durağan politikalar elde edebilmektedir. Novak (1989), tüm negatif olmayan başlangıç durum dağılımları için de bu politikaların domine edilmemiş olduğunu ispatlamıştır. Tüm başlangıç durumları için domine edilmemiş bir politika

Viswanathan, Aggarwal ve Nair (1977) ve Novak (1989, 1991)'ın çalışmalarında olduğu gibi Wakuta ve Togawa (1998) tarafından da optimal olarak nitelendirilmektedir (Wakuta ve Togawa, 1998: 30).

- Liu ve Ohno (1992)'nun çalışmasında, beklenti ve varyans kriterli çok amaçlı indirgenmemiş Markov yenileme programları ele alınmış ve program doğrusal olmayan programlama problemi olarak formüle edilerek durağan tatmin edici (satisfactory) Pareto politika bulunması için tatmin edici takas yöntemi (satisficing trade-off method) kullanılmıştır. Uygulamada ise esnek üretim sisteminde yer alan tezgahlardaki ekipman yenileme problemi, birim zamandaki ortalama maliyetin beklentisini ve varyansını minimize eden bir doğrusal olmayan problem olarak formüle edilmekte ve belirtilen yöntemle çözüm bulunmaktadır (Liu ve Ohno, 1992: 67-77).
- Liu, Ohno ve Nakayama (1992)'nın çalışmasında, beklenti ve varyans kriterlerine sahip çok amaçlı indirgenmiş MDP'leri, çok amaçlı doğrusal olmayan programlama problemi olarak formüle edilmiş ve problemde durağan tatmin edici (satisfactory) Pareto politika bulunması için de Nakayama tarafından geliştirilen tatmin edici takas yöntemi kullanılmıştır. (Yöntem, fayda fonksiyonlarına göre optimal bir politika değil tatmin edici Pareto (etkin) çözüm arar. Beklenti ve varyans kriterlerine sahip çok amaçlı MDP'leri, beklenen getiri vs. gibi beklenti kriterlerinin yanı sıra örneğin yatırımın karını maksimize etmek ve yatırım riskini minimize etmek gibi iki amaç olduğunda, eğer karın varyansı yatırım riski ise bu durumda yatırım problemi kar beklentisini maksimize ve varyansını minimize eden çok amaçlı bir optimizasyon problemi olarak formüle edilebilir.) (Liu, Ohno ve Nakayama, 1992: 903-914).
- Wakuta (1995), indirgenmiş ödüle sahip çok amaçlı MDP'leri için politika iterasyonu algoritması önermiş ve tüm rassal, geçmişe bağlı politikalar arasından bir optimal deterministik durağan politikayı doğrusal eşitsizliklerle tanımlayarak ve bu eşitsizlikler sistemini çözerek elde etmiştir (Wakuta ve Togawa, 1998: 31).
- Nollau (1996), vektör-değerli ödüle sahip yarı markovian dinamik programlama modelini ele almış ve bu model için Bellman eşitliğini tartışmıştır (Nollau, 1996: 85-92).
- Wakuta ve Togawa (1998), indirgenmiş ve indirgenmemiş çok amaçlı MDP'lerini ele almış ve tüm optimal deterministik durağan politikaların belirlenmesi için üç

aşamalı yeni bir politika iterasyonu algoritması ortaya koymuştur. Çalışmalarında, doğrusal eşitsizlikleri ele almak için doğrusal programlamayı uyarlamış ve bu indirgenmiş ve indirgenmemiş ödüle sahip çok amaçlı MDP'leri için yeni bir politika iterasyonu algoritması geliştirmiştir (Wakuta ve Togawa, 1998: 29-46).

- Wakuta (2001), çok amaçlı en kısa yol problemini, çok amaçlı bir MDP (bir yutucu durumu olan) modeli olarak formüle etmiştir ve çalışmada bu model politika geliştirme prosedürleri ile çözülmektedir. Çalışmada, öncelikle çok amaçlı en kısa yol problemi ve tek amaçlı en kısa yol problemi karşılaştırılmış, sonra da "lokal olarak etkin olan politikalar" belirlenerek her düğümden hedefe doğru tüm etkin yolları bulan bir algoritma geliştirilmiştir. Uygulamada ise tek kısıtlı bir en kısa yol problemi ele alınmış ve geliştirilen algoritma sayısal bir örnekle açıklanmıştır (Wakuta, 2001: 445-454).
- Cheng, Subrahmanian ve Westerberg'in (2003) çalışmasında, tasarım ve planlama sorunu ele alınmıştır. Beklenen indirgenmiş karın maksimizasyonu, başarısızlık riskinin minimizasyonu ve sürecin devamlılığının sağlanması (sürecin yaşam süresinin maksimizasyonu) olmak üzere üç amaç belirlenmiş ve bu amaçlar doğrultusunda MPD çok amaçlı dinamik programlama modeline dönüştürülerek modelin çözümünde çok amaçlı optimizasyon yöntemlerinden ε-kısıt (ε-constraint) yöntemi kullanılmıştır (Cheng, Subrahmanian ve Westerberg, 2003: 781-801).
- Cheng, Subrahmanian ve Westerberg'in (2004) çalışmasında, kapasite planlaması ve üretim-envanter sorunu ele alınmış ve MDP formülasyonu verilmiştir. Çalışmada beklenen indirgenmiş karın maksimizasyonu ve zarar riskinin minimizasyonu olmak üzere iki amaç belirlenmiş ve MDP çok amaçlı dinamik programlama modeline dönüştürülerek modelin çözümü ε-kısıt yöntemi ile gerçekleştirilmiştir (Cheng, Subrahmanian ve Westerberg, 2004: 2192-2208).
- Wiering ve Jong (2007), deterministik çok amaçlı sıralı karar problemlerinde Pareto optimal çözümleri belirlemek için değer iterasyonunu temel alan bir algoritma geliştirmiş ve bu yöntemle durağan politikaları belirlemiştir. Geliştirilen algoritmanın deterministik sonsuz zamanlı indirgenmiş çok amaçlı MDP'lerinin Pareto optimal çözüm kümesinin bulunmasında kullanılabileceği gösterilmiştir (Wiering ve Jong, 2007: 158-165).

Yapılmış olan çalışmalar incelendiğinde, çok amaçlı MDP'lerinin formülasyonunda ve optimizasyonunda; çok amaçlı LP, çok parametreli LP, çok kriterli simpleks yöntemi, çok amaçlı doğrusal olmayan programlama, tatmin edici takas yöntemi, ardışık yaklaşımlar (değer iterasyonu), politika iterasyonu, ε-kısıt yöntemi, uzlaşım programlama (compromise programming), amaçlara ulaşma (goal attainment) yaklaşımı gibi yöntem ve yaklaşımların kullanıldığı görülmüştür. Bu yaklaşımlar dışında çalışmanın amacı doğrultusunda MDP problemlerinin GP yaklaşımı ile modellendiği çalışmalara 2.4.2'de yer verilmektedir.

### 2.4.2. Markov Karar Süreci Sorunlarının Hedef Programlama İle Çözülmesi Ve Model Formülasyonu

Çok amaçlı MDP'lerinin Hedef Programlama (GP) yaklaşımı ile modellendiği ve optimize edilmeye çalışıldığı çalışmalar incelendiğinde bu bütünleşik yaklaşımın işgücü planlaması ve PERT ağlarında uygulandığı görülmüştür.

- Georgiou (1999: 565-583), çalışmasında işgücü planlaması sorununu homojen olmayan (geçiş olasılıklarının zamana bağlı olduğu) kesikli zamanlı Markov sistemleriyle modellemiştir. Hiyerarşik bir populasyon yapısı içinde yer alan çalışanlar çeşitli niteliklerine göre *k* sınıfa (markov sürecinin durumları) ayrılmaktadır. Sınıflar arasındaki geçişlere ilişkin olasılıklar, işten ayrılma olasılıkları, her bir sınıftaki kişi sayısı ve sistemdeki toplam kişi sayısı gibi parametreler tanımlanmaktadır. Süreçteki maliyetler 4 farklı kategoriden oluşmaktadır: bir periyodun sonunda her sınıfta bulunan kişilerin maliyeti, periyot boyunca sınıflar arasında oluşan geçişlerin maliyeti, işten ayrılmalara ilişkin maliyetler ve de işe yeni kişilerin alınmasına ilişkin maliyetler. Bu maliyet bileşenleri doğrultusunda maliyet vektörleri tanımlanmaktadır. İşgücü planlaması sorununda her durum için maliyet minimizasyonu ve işe alım politikasına bağlı olarak istenen işgücü yapısıyla ilgili olmak üzere birden fazla amaç yer almaktadır. Sürecin sınırlayıcı davranışından (düzenli stokastik matris olduğu varsayımıyla) faydalanarak işgücü planlamasında yer alan birden çok amacın ele alınabilmesi için çok amaçlı optimizasyon yaklaşımlarından biri olan GP (hedef programlama) yöntemi (ağırlıklandırılmış ve leksikografik) kullanılmıştır. Bu yaklaşım bir üniversitenin işgücü planlaması sorununa (4 durumlu bir markov süreci) uygulanmıştır.

- Georgiou ve Tsantas (2002: 53-74), Georgiou (1999)'nun yaptığı çalışmayı geliştirerek *k* hiyerarşik sınıfa ek olarak işe alımlarda işgücü stoku gibi hizmet verecek yeni bir eğitim/yedek sınıfı oluşturmuş ve işgücü planlaması sorununu homojen olmayan Markov sistemleri ile modellemiş ve çok amaçlı bu sorunda GP yaklaşımını kullanmıştır. Uygulamada 3 aşamalı ve 4+1 durumlu bir süreç ele alınmıştır.
- Azaron, Katagiri ve Sakawa (2007: 47-64), Markov PERT ağlarındaki zaman-maliyet dengesi problemleri için optimal kontrol teorisi yardımıyla çok amaçlı bir optimal kontrol problemi ortaya koymuştur. Görev sürelerinin Erlang dağılımlı birbirinden bağımsız rassal değişkenler olduğu varsayılmaktadır. Problemde 3 amaç ele alınmaktadır: projenin toplam direkt maliyetlerinin minimizasyonu, proje tamamlanma süresinin ortalamasının minimizasyonu ve proje tamamlanma süresinin varyansının minimizasyonu. Kesikli zamanlı optimal kontrol problemi doğrusal olmayan optimizasyon problemine dönüştürülmüş ve problemin çözümü için çok amaçlı karar verme tekniklerinden amaçlara ulaşma (goal attainment) ve GP modelleri uygulanmıştır.

Ele alınan çalışmalar dışında, literatürde, GP yapısı içinde markov karar süreçlerinin yer aldığı çalışmalara da rastlanmıştır. İşgücü planlamasında uygulanan bu çalışmalar aşağıda ele alınmaktadır:

- Zanakis ve Maret (1981), çeşitli kısıtlamalar ve çatışan amaçlar altında makro düzeyde işgücü planlaması problemlerinin çözümü için markov zinciri-öncelikli hedef programlama ardışık yaklaşımı ortaya koymuştur. Ele alınan örnek olayda belirlenen hedeflerden bazıları şunlardır: taşeron firmayla çalışılması gerekiyorsa işin yaptırılması, maliyetlerin mümkün olduğu kadar düşük tutulması, taşeron firmayla iyi ilişkilerin korunması için taşeron firmadan gelen mühendislerin sayısının 100'den az olmaması (Trzaskalik, 1998: 16). Zanakis ve Maret'in çalışmasında işgücü planlamasında çalışanların bölümler arası transferi, işten ayrılmaları, emekliye ayrılmaları gibi çeşitli durumlar MDP ile modellenerek geçiş olasılıkları matrisi oluşturulmuştur. Geçiş olasılıkları ve maliyetler ile beklenen yıllık maliyet matrisi hesaplanmış ve belirlenen 12 hedeften biri olan maliyeti minimize etme hedefinin oluşturulmasında bu maliyetler kullanılmıştır. Kurulan, öncelikli (preemptive) doğrusal GP modeli çözülerek belirlenen hedef önceliklerine göre karar değişkenlerinin (işe yeni alınan kişi sayısı, yeniden işe alınan kişi sayısı vb. olmak üzere 5 karar değişkeni söz konusudur) değerleri ve hedeflerden sapmaların değerleri bulunmuş ve bu doğrultuda öneriler getirilmiştir (Zanakis ve Maret, 1981: 55-63).

- Kornbluth (1981: 940-943), Zanakis ve Maret'in (1981) ortaya koyduğu öncelikli GP modelini modifiye ederek öncelikli amaç fonksiyonunu kullanmak yerine amaç fonksiyonunu ağırlıklandırılmış amaç fonksiyonuna dönüştürmüş ve aynı hedef ve değişkenlerin yer aldığı bu modeli çözmüştür.
- Kalu'nun (1994, 1999) çalışmalarında, GP modelindeki parametrelerin (kategoriler arasında geçiş yapan personel oranlarının) tahminlenmesinde Markov zincirlerinden faydalanılmıştır. (Kalu, 1994: 165-177 ve Kalu, 1999: 235-251).

Literatürde yer alan çalışmalar ve incelenen çalışmalarda yer alan LP ve GP modelleri temel alınarak işletmelerin üretim-envanter kontrolü problemleri için prototip bir model geliştirilmiştir. Bu model doğrultusunda çalışmanın uygulama bölümünde gerçek bir işletme problemi için MDP ve GP yaklaşımlarının bütünleşik olarak kullanıldığı bir çözüm geliştirilmeye çalışılmaktadır.

Modelde doğrusal programlama formülasyonunda yer alan beklenen ortalama ödül kriteri (D'epenoux 1963; Klein, 1966; Manne, 1960; Nazareth ve Kulkarni, 1986; Wolfe ve Dantzig 1962) kullanılmış ve hedef programlama modeli (Golany, Yadin ve Learner, 1991; Jaaskelainen, 1969; Lee ve Moore, 1975; Perez, 1985) ortaya konmuştur.

Literatürde, MDP'lerinin GP yaklaşımı ile ele alındığı işletmelerin işgücü planlaması sorunlarına yönelik ve proje yönetimine ilişkin 2.4.2'de özetlendiği gibi birkaç çalışma olduğu görülmektedir. İşletmelerin üretim-envanter sorunlarına yönelik olarak (2.7) ile verilen GP modeli önerilebilir. Modelin genel notasyonu aşağıdaki biçimde gösterilebilmektedir:

$$
\begin{aligned}
&Z_{\min} = \Pr_w(d_w^- + d_w^+) + \Pr_c(d_c^- + d_c^+) + \Pr_s(d_s^- + d_s^+) \\
&\sum_{i=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} w_i^k x_i^k - d_w^+ + d_w^- = b_w \\
&\sum_{i=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} c_i^k x_i^k - d_c^+ + d_c^- = b_c \\
&\sum_{k=1}^{N} x_0^k - d_s^+ + d_s^- = b_s \\
&\sum_{i=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} x_i^k = 1 \\
&\sum_{k=1}^{K} x_j^k = \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} x_i^k p_{ij}^k \qquad j = 0,1,\ldots,N \text{ için.} \\
&x_i^k, d_w^+, d_w^-, d_c^+, d_c^-, d_s^+, d_s^- \geq 0
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Modelde yer alan 1.hedef kısıtı kazanç hedefini ve $b_w$ kazanca ilişkin hedef değerini göstermektedir. 2. hedef kısıtı maliyet (üretim, stoklama ve stoksuzluk maliyetlerinden oluşan) hedefini ve $b_c$ maliyete ilişkin hedef değerini ve son olarak 3. hedef kısıtı da stoksuzluk riskine ilişkin hedefi ve $b_s$ bu hedefe ilişkin stoksuzluk olasılığını yani hedef değerini ifade etmektedir. Diğer kısıtlar MDP'nin olasılık yapısına ilişkin olan ve LP formülasyonunda tanımlanan kısıtlardır. GP modelinde yer alan karar değişkenleri denge durumu olasılıklarını ve parametreler de geçiş olasılıkları ve ödüllerle hesaplanan kazanç ve maliyet değerlerini göstermektedir. Bu doğrultuda modelde yer alan karar değişkenleri ve parametreler MDP yaklaşımının uzantısıdır. Önerilen modelin uygulanmasına ilişkin prototip bir uygulama ile model bileşenleri de ele alınacaktır.

***Prototip Model ve Uygulama***

MDP problemleri için GP modelinin formülasyonu, örnek bir üretim/envanter problemi ile ortaya konulmaktadır. Ele alınan probleme ilişkin veriler ve problemin varsayımları aşağıdaki şekilde özetlenmektedir:

- Ele alınan işletmenin haftalık maksimum stoklama kapasitesi 4 birim ve üretim kapasitesi 2 birimdir.
- İşletmenin ürününe olan talep $\lambda = 1$ ile Poisson dağılımlıdır.

- İşletmenin üretim/envanter politikalarına göre; başlangıç stoku 3 birim ya da daha fazla olduğunda o hafta üretim yapılmamaktadır ve başlangıç stoku 0 olduğunda en az 1 birim üretim gerçekleştirilmektedir.
- Birim üretim maliyeti 3PB, birim stoklama maliyeti 1PB, birim stoksuzluk maliyeti 2PB ve ürünün birim satış fiyatı 4PB'dir.

Ele alınan problemin MDP olarak modellenmesi için stokastik sürecin ve bu sürecin durumlarının tanımlanması; durum uzayının, ödül yapısının, hareket kümesinin, geçiş olasılıklarının belirlenmesi gerekmektedir. MDP-GP modeli için ele alınan sorunda yer alan bu öğeler aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır:

- Ürünün başlangıç stoku MDP'nin durumlarını oluşturmaktadır. Bu doğrultuda sürecin durum uzayı $S = \{0,1,2,3,4\}$ olarak tanımlanmaktadır.
- Ele alınan süreç, her hafta gözlemlenmekte ve stoktaki ürün sayısına bağlı olarak üretim kararları verilmektedir. Bu doğrultuda kesikli zamanlı bir MDP ele alınmaktadır. ( $\boldsymbol{T}=\{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$ )
- Karar vericinin süreç $i$ durumunda iken seçebileceği hareketler kümesi $A_i$ gösterildiğinde, işletmenin üretim-stok politikası doğrultusunda $i=0,1,2,3,4$ için hareketler kümesi;

  $\boldsymbol{A_0}=\{1,2\}$ $\boldsymbol{A_1}=\{1,2,3\}$ $\boldsymbol{A_2}=\{1,2,3\}$

  $\boldsymbol{A_3}=\{1\}$ $\boldsymbol{A_4}=\{1\}$ olmaktadır.
- Karar verici $t$ periyodunda $i$ durumunda iken $k$ hareketini seçtiğinde sistemin $j$ durumuna geçiş yapma olasılığı $p_{ij}^k$ ile gösterilmektedir.
- Süreç durum $i$'de iken $k$ alternatifi seçildiğinde sürecin $j$ durumuna geçiş yapması ile ortaya çıkan ödüller (maliyetler ve kazanç değerleri);
  - *Üretim maliyeti* ( $u_{ij}^k$ )
  - *Stoklama maliyeti* ( $h_{ij}^k$ )
  - *Stoksuzluk maliyeti* ( $l_{ij}^k$ )
  - *Toplam maliyet* ( $c_{ij}^k = u_{ij}^k + h_{ij}^k + l_{ij}^k$ )
  - *Kazanç* ( $w_{ij}^k$ ) olarak tanımlanmaktadır.

o Durum $i$'nin $k$ alternatifi seçilmesi durumunda beklenen toplam maliyeti $c_i^k = \sum_{j=0}^{4} c_{ij}^k$ ve kazancı $w_i^k = \sum_{j=0}^{4} w_{ij}^k$ gösterilmektedir.

Sürecin verilen özellikleri doğrultusunda, farklı hareket alternatifleri için olasılık dağılımı ile hesaplanan geçiş olasılıkları ile maliyet ve kazanç değerleri tablo biçiminde EK 2'de verilmektedir.

İşletme yönetiminin belirlediği hedefler, hedef değerleri ve hedeflerin öncelikleri aşağıdaki şekildedir:

- Beklenen kazancı maksimize etmek *($Pr_1$)*: Haftalık beklenen ortalama kazancın en az 3,5 PB olması,

  $$Z_{\max} = \sum_{i=0}^{4} \sum_{k=1}^{3} w_i^k x_i^k$$

- Beklenen toplam üretim ve envanter maliyetlerini (üretim, stok ve stoksuzluk) minimize etmek *($Pr_2$)*: Haftalık beklenen ortalama maliyetin en fazla 3 PB olması,

  $$Z_{\min} = \sum_{i=0}^{4} \sum_{k=1}^{3} c_i^k x_i^k$$

- Stoksuz kalma riskini minimize etmek *($Pr_3$)*: Stoksuzluk olasılığının en fazla %20 olması,

  $$Z_{\min} = \sum_{k=1}^{2} x_0^k$$

Belirlenen hedef değerleri ve öncelik hiyerarşisi doğrultusunda ve stokastik sürecin denge durumunu da yansıtan olasılık kısıtları ile birlikte öncelikli GP modeli aşağıdaki biçimde formüle edilmiştir:

$$Z_{\min} = \Pr_1 d_1^- + \Pr_2 d_2^+ + \Pr_3 d_3^+$$

$$\sum_{i=0}^{4}\sum_{k=1}^{3} w_i^k x_i^k - d_1^+ + d_1^- = 3{,}5$$

$$\sum_{i=0}^{4}\sum_{k=1}^{3} c_i^k x_i^k - d_2^+ + d_2^- = 3$$

$$\sum_{k=1}^{2} x_0^k - d_3^+ + d_3^- = 0{,}20$$

$$\sum_{i=0}^{4}\sum_{k=1}^{3} x_i^k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{3} x_j^k = \sum_{i=0}^{4}\sum_{k=1}^{3} x_i^k p_{ij}^k \qquad j = 0{,}1{,}2{,}3{,}4 \text{ için.}$$

$$x_i^k, d_m^+, d_m^- \geq 0$$

GP modelinin Ds for Windows paket programının hedef programlama modülü ile çözümlenmesi sonucunda aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

| | *Hedef değeri* | $d_m^+$ | $d_m^-$ |
|---|---|---|---|
| 1.Hedef | **3,5** | 0,2384 | 0 |
| 2.Hedef | **3** | **0,8645** | 0 |
| 3.Hedef | **0,2** | **0,0929** | 0 |

$x_0^2 = 0{,}2929$
$x_1^1 = 0{,}0780$
$x_1^2 = 0{,}2899$
$x_2^1 = 0{,}3392$

Elde edilen sonuçlara göre en yüksek önceliğe sahip olan kazanç hedefine ulaşılmakta ve 0,2384 PB'lik pozitif sapma olmaktadır. Sırasıyla, 2. ve 3. öncelik düzeyindeki maliyet ve stoksuzluk riski hedefleri tam olarak sağlanamamaktadır. 3 PB'lik maliyet hedeflenirken 3,8645 PB'lik beklenen maliyet ortaya çıkmaktadır. Stoksuzluk olasılığı %29,29 olarak hesaplanmıştır ve %20 hedef değerinin üzerindedir. Uzun dönemde, işletmenin 0 stoku bulunması durumunda 2 birim üretme alternatifini seçme olasılığı yaklaşık olarak %29, 1 adet stok bulunması durumunda hiç üretim yapmama olasılığı %8 ve 1 birim üretme kararı verme olasılığı %29 ve 2 adet stok bulunması durumunda üretim yapmama olasılığı %34'dür. İşletmenin 1 birim stok bulundurması durumunda daha yüksek olasılığa sahip (0,2899) olan alternatifi (1 birim üretim yapma) ve 2 birim stok bulundurması durumunda ise üretim yapmama alternatifini seçmesi beklenmektedir.

(2.7) ile ortaya konan model incelendiğinde stokastik bir problemin GP yaklaşımı gibi çok amaçlı karar verme yöntemlerinden biri ile çözülmesine yönelik bir model olduğu diğer ifadeyle işletmelerin talep belirsizliği ile karşı karşıya kaldıkları üretim/envanter problemlerinde stokastik ve çok amaçlı yöntemlerin bütünleşik olarak kullanılmasına olanak sağladığı görülmektedir. Belirsizliğin yoğun olduğu işletme kararlarında deterministik yöntemlerin yetersiz kaldığı durumlar ortaya çıkabilmekte ve stokastik yaklaşımlar bu sorunların modellenmesinde karar vericilere daha fazla esneklik sağlamaktadır. Bunun yanı sıra, daha önce de belirtildiği gibi işletme yöneticileri karar verirken birden fazla ve çoğunlukla da birbiriyle çatışan amaçları ele almakta ve verilen karar bu amaçlara mümkün olabildiğince yaklaşan çözümler bulmaya odaklanmaktadır. Bu doğrultuda çok amaçlı kantitatif karar verme tekniklerinden biri olan GP da işletme yöneticilerine bu kararlarda yardımcı olabilmekte ve hiçbir hedefe ulaşılamıyor olsa bile LP yaklaşımında olduğu gibi olursuz çözümle sonuçlanmadığından mümkün olabildiğince tatmin edici bir çözüm sunarak karar vermede destek sağlayabilmektedir. Bu avantajlarının yanı sıra GP modelleri hedeflere ilişkin farklı öncelik hiyerarşilerine göre analiz yapabilme esnekliği de sağlamaktadır. Özetle, artan belirsizlik ve rekabetle birlikte karar verme sürecinin hem stokastik hem de çok amaçlı bir yapıya sahip olduğu görülmekte ve bu doğrultuda çalışmada ortaya konan MDP ve GP bütünleşik modelin işletme yöneticilerine karar vermelerinde yardımcı olacağı düşünülmektedir.

Verilen GP modeli doğrultusunda çalışmanın üçüncü ve son bölümünde gerçek işletme verileri ile uygulama yapılmaktadır.

# ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
# MARKOV KARAR SÜRECİ PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE HEDEF PROGRAMLAMA YAKLAŞIMININ KULLANILMASI VE BİR İŞLETME UYGULAMASI

Markov karar süreci (MDP) belirsizlik altında karar vermeyi destekleyen modellerden biridir. Sıralı karar modeli özelliği taşıyan MDP karmaşık sistemlerin ele alınmasında kullanılan matematiksel bir yaklaşımdır.

Dinamik programlamanın yinelemeli ilişkisinden ve optimallik ilkesinden destek alarak çözülebilen ve MDP biçiminde formüle edilen problemlerin optimizasyonunda doğrusal programlamadan (LP) da yararlanmak olanaklıdır. Sonsuz zaman periyoduna sahip problemlerde denge durumu olasılıklarının karar değişkeni olarak tanımlanmasıyla MDP ile modellenen problemlerin çözümü ve optimizasyonu gerçekleştirilebilmekte ve sürecin birim zamanda beklenen ortalama kazancı (maliyeti) hesaplanabilmektedir. MDP olarak modellenen problemde birden çok hedefin bulunması halinde ise hedeflerden sapmaların minimizasyonunu ele alan hedef programlama (GP) yaklaşımından destek almak olanaklıdır.

21.yüzyıla girerken işletmelerin karşılaştıkları sorunların genellikle risk ve belirsizlik altında karar vermeyi gerektirdiği görülmektedir. Bu çerçevede işletmelerin karar verme sürecinde karşılaştıkları stokastik bir karar problemi ele alındığında Markovian yaklaşımların LP ve GP ile birlikte kullanılabileceği anlaşılmaktadır. O zaman konu, işletmenin genel yapısı ortaya konduktan sonra karar probleminin niteliklerine, kurulacak modelin varsayımlarına ve kısıtlarına yer verilerek incelenebilir. Çalışmada ele alınan kantitatif tekniğin işletmelerin karar verme sürecinde uygulanabilirliğini göstermek üzere gerçek bir işletme sorunu MDP olarak formüle edilmekte ve bu doğrultuda problemin durum uzayı, aşamaları, her aşamada alınabilecek farklı kararların ve bu kararlara ilişkin ödüllerin (kazanç veya maliyetlerin) kümesi, geçiş olasılıkları matrisi, karar kuralları ve politikalar belirlenmektedir. Sorunun MDP olarak formüle edilmesinden sonra ise 2.bölümde yer alan LP modeli (2.2) ve (2.7) ile verilen GP modeli ele alınan sürecin verileri ile çalıştırılarak problemin iki farklı yaklaşımla elde edilen çözüm sonuçları ortaya konmakta ve yaklaşımlar kıyaslanmaktadır.

## 3.1. ARAŞTIRMANIN AMACI VE YÖNTEMİ

Belirsizliğin yoğun olduğu rekabet ortamında faaliyet göstermekte olan işletmeler karşılaştıkları sorunları çözmede stokastik yaklaşımlardan faydalanarak geleceğe yönelik durum tespiti ve tahminler yapmada daha başarılı sonuçlar elde edebilmektedir. Stokastik yaklaşımlardan biri olan MDP'lerinin pek çok gerçek işletme sorununun modellenmesinde kullanıldığı yapılan çalışmalarla ortaya konmuştur. Ayrıca işletmeler artan belirsizlik ve rekabet nedeniyle, sadece kazanç maksimizasyonu amacını değil maliyetleri minimize etme, teslim sürelerini minimize etme, hatalı ürün oranını minimize etme vb. pek çok amacı eş zamanlı olarak ele almak ve bu amaçlara ulaşmaya çalışmak durumundadır. Diğer bir ifadeyle, karar verme sürecinde, tek bir amacın optimizasyonu değil birden fazla ve çoğunlukla da birbiriyle çatışan amaçların tümüne mümkün olabildiğince yaklaşan çözümler bulunması söz konusu olmaktadır. Bu doğrultuda karşılaşılan sorunlarda tek bir amaç değil pek çok amacı eş zamanlı olarak ele alma olanağı sağlayan çok amaçlı karar verme yöntemlerinin kullanılması daha etkin kararların verilmesini sağlayabilmektedir. Belirsizlik ve birden fazla amacın karar sorunlarına dahil edilmesini sağlamak amacıyla çalışmada hem stokastik hem de çok amaçlı yöntemler bir arada kullanılmaktadır. Bu doğrultuda çalışmanın amacı; birinci ve ikinci bölümde teorik çerçevesi ortaya konan Markov Karar Süreci ve Hedef Programlama yaklaşımlarının bir arada ele alınması ile stokastik bir karar probleminin çözümünde çok amaçlı karar verme yönteminin kullanılmasına yönelik bütünleşik bir yaklaşım ortaya koymak ve önerilen modelin gerçek işletme verileri kullanılarak çalıştırılması ile modelin uygulanabilirliğini göstermektir.

Belirtilen amaç doğrultusunda literatürde yer alan temel çalışmalar 1. ve 2.bölümde ele alınmıştır. İşletmenin üretim/envanter sorununa odaklanılması doğrultusunda uygulamaya temel oluşturan çalışmalar, bu kısımda kısaca özetlenmektedir.

Çalışmanın 1. bölümünde, üretim/envanter sorunlarının modellenmesinde MDP'lerinden faydalanıldığı çalışmalar ele alınmıştır. Archibald, Sassen ve Thomas (1997)'ın çalışmasında, gerçekleştirilen uygulama ile birden fazla ürün ve stoklama deposu ile her depoda sınırlı stoklama kapasitesine sahip bir işletmenin toplam indirgenmiş sipariş, transfer ve stoklama maliyetlerini minimize eden optimal stoklama kararlarını belirlemek üzere ele alınan sorun MDP ile modellenmiştir. Vericourt, Karaesmen ve Dallery (2000) çalışmalarında, poisson dağılımlı talebe sahip, stoka üretim yapan bir işletmenin 2 ürünlü üretim sisteminde dönem başına ortalama stoklama ve stoksuzluk maliyetlerini minimize eden optimal üretim kararlarının verilmesinde MDP'lerini kullanmışlardır. Aviv ve Federgruen (2001) ise rassal talep durumunda çok ürünlü bir üretim/envanter sisteminde beklenen toplam indirgenmiş üretim ve stoklama maliyetlerini minimize eden üretim/envanter politikalarını belirleme sorununu MDP ile modellemiştir. Berman ve Kim (2004) yaptıkları çalışmada, tedarik zincirinde, talep poisson dağılımlı olduğunda, işletmenin stoklama, siparişi zamanında karşılayamama ve sipariş maliyetlerini göz önünde bulundurarak toplam indirgenmiş kazancını maksimize eden optimal sipariş ve stoklama kararlarının belirlenmesinde MDP yaklaşımını kullanmıştır. Minner ve Silver (2005) ise önceki çalışmadan farklı olarak, birden fazla ürünü ele almış ve stoklama alanı kısıtı altında optimal sipariş ve stoklama politikalarının belirlenmesi problemini yarı markovian süreçler ile modellemiştir.

Çalışmanın 2.bölümünde, uygulamada ortaya konan modele temel oluşturmak üzere işletme sorunlarının LP yaklaşımı ile ele alınmasına, sorunların MDP ile modellenmesi durumunda LP yaklaşımı ile çözülmesine ve işletme problemlerinin GP yaklaşımı ile modellenerek çözülmesine ilişkin literatür taramasına yer verilmiştir. Bu kısımda, üretim/envanter sorunlarının ele alındığı ve ortaya konan modele temel teşkil eden çalışmalar özetlenmektedir.

Hanssman ve Hess (1960) yaptıkları çalışmada, talebin zamanında karşılanması doğrultusunda gerekli işçilik ve üretim düzeylerini belirlemek için; normal mesai, fazla mesai, çalışanları işe alma ve işten çıkarmaya ilişkin işçilik maliyetleri ile stoklama ve stoksuzluk maliyetlerinin toplamını minimize eden LP formülasyonu ortaya koymuştur. Thomas (1971) yılında yaptığı çalışma ile üretim, stoklama, stoksuzluk maliyetinin yanı sıra reklam maliyetlerinin de ele alındığı ve reklamın talebe etkisinin ortaya konduğu, üretim planlaması sorununa yönelik olarak, satışlarla elde edilen net karı maksimize eden LP modeli geliştirmiştir. Fuller (1975), üretim planlamasında LP yaklaşımının uygunluğunu test etmek için Hanssman ve Hess (1960) tarafından ortaya konan modeli kullanarak araç kasası üretimi yapan orta ölçekli bir işletme için uygulama yapmıştır. Chen ve Wang (1997) çalışmasında; çeşitli tedarikçilerden hammadde ve yarı mamul satın alınması, farklı üretim tesislerinde imalat yapılması ve ürünlerin farklı bölgelerdeki müşterilere dağıtılması koşulları altında bir demir çelik işletmesinin hammadde ve yarı mamul satın alma maliyetleri, sabit ve değişken üretim maliyetleri ile ürünlerin dağıtımına ilişkin maliyetlerin dahil edildiği ve net kazancı maksimize etmeye çalışan bir LP formülasyonu ortaya koymuştur. Modelin kısıtları tedarikçilerin kapasitesine, talep, üretim kapasitesi, talebin karşılanmasına ilişkindir. Bu model ile satın alma, üretim ve dağıtım planlaması kararları bütünleşik olarak ele alınmaktadır. Spitter vd. (2005) çalışmasında, stoklama ve stoksuzluk maliyetini minimize eden, tedarik zincirindeki işlemlerin planlanmasına ilişkin bir LP formülasyonu ortaya koymuştur. Modelin kısıtları; talebin karşılanması, envanter dengesinin sağlanması, üretimde kullanılan parça gereksinimlerinin sağlanması, farklı birimlerin kapasite gereksinimlerinin karşılanması ve üretim kapasitesi kısıtlarıdır. Bilgen ve Özkarahan (2007), tahıl üreticisi bir işletme için; ürün karışımı, üretim yükleme taşıma kapasitesi, her yükleme biriminde ürünlerin teslim etmek üzere hazır bulunması, talebin karşılanması kısıtları altında harmanlama, yükleme, ulaştırma ve stoklama maliyetlerini minimize eden bir karma tamsayılı LP modeli ortaya koymuştur.

Üretim/envanter problemlerinin MDP ile formüle edilmesi ile bu süreçlerin LP yaklaşımı ile optimize edilmesine yönelik çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Manne (1960) çalışmasında denge durumu olasılıkları ile beklenen ortalama üretim, stoklama ve stoksuzluk maliyetini minimize etmeyi amaçlayan LP modeli oluşturarak optimal üretim ve stok miktarlarını belirlemiştir. Wolfe ve Dantzig (1962) ve Klein (1966) de aynı ödül yapısıyla MDP problemine ilişkin LP formülasyonunu ortaya koymuştur. Klein (1966)'in çalışmasında farklı olarak ıskarta payı (sipariş aksamalarını önleme amaçlı üretim fazlalığı) da modele dahil edilmektedir. D'epenoux (1963), tek ürünlü bir üretim/envanter sistemini MDP ile modellemiş ve sürecin çözümü için toplam indirgenmiş maliyeti (üretim ve stoklama maliyetleri) minimize eden bir LP formülasyonu ortaya koymuştur.

Üretim/envanter sorunlarında GP yaklaşımının kullanılmasına yönelik olarak, Jaaskelainen (1969), bütünleşik üretim planlarının yapılması için; talebin karşılanması, iş birimlerindeki fazla mesainin ve işgücü kapasitesinin eksik kullanımının minimizasyonu ve montaj hattının gereksinimlerinden fazla sayıda parça ve ürün stoklarının minimizasyonuna ilişkin hedeflerin yer aldığı öncelikli GP modeli ortaya koymuştur. Golany, Yadin ve Learner (1991), kimya ürünleri imal eden bir işletmenin 4 aylık planlama dönemi için, 1 bitmiş ürün ve bu ürünün yapımında kullanılan ve işletme tarafından üretilen 3 hammadde olmak üzere 4 ürüne ilişkin ağırlıklı GP modeli ortaya koymuştur. Sorunda ele alınan amaçlar; güvenlik stokunun belirlenen düzeyde olması, ürün ve hammadde gereksinimlerine ilişkin amaçlar, üretim ve stoklama kapasitesine ilişkin amaçlardır.

Çalışmada geliştirilen model, işletmelerin karar verme süreçlerinde karşılaştıkları sorunlardan biri olan üretim/envanter problemlerinin çözümünde kullanılmak amacına destek vermesi nedeniyle uygulamalı bir araştırma niteliği taşımaktadır. Yönetim bilimi tekniklerinden MDP ve GP yaklaşımları kullanılarak üretim/envanter sorununun çözümü için matematiksel bir model önerilmektedir. Önerilen modelin uygulanabilirliğini ortaya koymak üzere yapılan uygulama çalışmasında, otomotiv yan sanayinde faaliyet gösteren bir işletmenin verileri ile model çalıştırılmaktadır. Uygulamanın gerçekleştirilmesi için gerekli veriler ve işletmenin kullandığı üretim yöntemlerine ilişkin bilgiler, firmanın kalite ve planlama departmanlarının yöneticileri ile yüz yüze görüşmeler yapılarak ve üretim süreci gözlemlenerek toplanmıştır. Aylık talep verilerinin simüle edilmesinde ve MDP olarak modellenen işletme sorununa ilişkin ödül ve geçiş olasılıkları matrislerinin oluşturulmasında Excel programından faydalanılmıştır. İşletme verileri ile ortaya konan GP modelinin çözümünün gerçekleştirilmesinde ise üretim/işlemler yönetimi ve yöneylem araştırması modellerinin çözümü için geliştirilmiş paket programlardan biri olan POM-QM for Windows 3.0. programı kullanılmıştır.

Çalışmanın ilerleyen kısmında (2.7) formülasyonuyla önerilen modele yönelik uygulamaya yer verilerek modelin LP uygulamasından farkları ve üstünlükleri vurgulanacaktır.

## 3.2. İŞLETME UYGULAMASI

Önceki bölümlerde ele alındığı biçimiyle bir üretim/envanter sorunu MDP ile modellenebilmektedir. Ortaya konan modelin çözümünde hedef programlama yaklaşımının uygulanması olanaklıdır. Çalışmada, gelişmiş üretim teknikleriyle bulunduğu sektörde pazar lideri olan bir işletmenin verileri ele alınmakta ve modelin çözümü gerçekleştirilerek, öneriler sunulmaktadır. Bu doğrultuda öncelikle firma genel olarak tanıtıldıktan sonra MDP olarak formüle edilen üretim/envanter problemi ve probleme ilişkin veriler ve yapılan varsayımlar ortaya konmakta ve son olarak probleme ilişkin LP ve GP modelleri verildikten sonra modellerin çözümüyle elde edilen sonuçlara değinilmektedir.

### 3.2.1. İşletmenin Genel Yapısı

Yapılan görüşmeler doğrultusunda, kullanılan verilerin gizlilik gerektirmesi nedeniyle işletmenin rekabet avantajına zarar vermemek için işletme ismine çalışmada yer verilmemektedir.

Çalışmada uygulamanın gerçekleştirildiği işletme, yirmi yılı aşkın süredir otomotiv yan sanayinde faaliyet göstermektedir. Kurum, otomotiv sektöründe global pazarlarda faaliyet gösteren pek çok işletmenin yan sanayisi olma özelliği taşımaktadır ve sadece Türkiye'de değil dünyada önde gelen üretici işletmelerden biridir. Üretimin yaklaşık %75'ini çeşitli ülkelerdeki otomotiv işletmelerine ihraç etmektedir. Birden fazla üretim tesisinde üç vardiyalı çalışma sistemiyle yıllık toplam, yaklaşık 4 milyon adetlik üretim kapasitesine sahip işletme 400’den fazla sayıda farklı modelde ürün üretmekte ve yaklaşık 1000 kişi istihdam etmektedir.

İşletme, yüksek kalite ve verimlilik ve sürekli yenilikçilik misyonuyla sektöründe ön sıralardadır. Üretimde CAD/CAM teknolojileri ve CNC tezgahları kullanılmaktadır. Üretim sürecinde hataların önlenmesi ve stokların minimizasyonu hedeflenmektedir.

İşletmenin kalite ve tedarikçisi olduğu işletmeler ile çeşitli kuruluşlar tarafından verilen başarı belgeleri bulunmaktadır. Tedarikçisi olduğu farklı işletmelerin belirlediği kalite gereksinimleri ve standartları doğrultusunda üretim sürecinin çeşitli aşamalarında testlerle kontroller yapılmaktadır.

Kurumsal kimliğe sahip işletme, sadece üretimde kalite ve yenilikçiliğe değil başarıya ulaşmada büyük rol oynayan çalışan memnuniyetinin arttırılması ve de üretimin çevreye zarar vermemesi doğrultusunda yapılan çalışmalara (geri dönüşümlü malzemelerin kullanılması vb.) da odaklanmaktadır.

### 3.2.2. Markov Karar Süreci Olarak Modellenen Problemin Özellikleri Ve Kullanılan Veriler

Çalışmada işletmenin kazançlarını maksimize etme ve stokları minimize etme hedefleri göz önünde bulundurularak üretim/envanter kararlarına yönelik bir problem ele alınmaktadır. Daha öncede belirtildiği gibi işletme 400’den fazla farklı modelde ürün üretmektedir. Çalışmada yıllık üretim kapasitesinin %10’luk bölümüne sahip ürün modeli ele alınmaktadır. İşletmenin bu ürüne ilişkin 2006 yılı verileri baz alınarak aylık envanter miktarlarına bağlı olarak üretim miktarlarını belirlemesine yönelik vereceği kararlar MDP ile modellenmektedir.

***Probleme İlişkin Veriler***

Envanter miktarlarındaki değişmelerin modellenmesinde, sektör ve ekonomik koşullar göz önünde bulundurularak, sistemin gelecekteki durumunun sadece mevcut durumlara bağlı olduğu MDP yaklaşımı kullanılmaktadır. İşletmenin üretim/envanter kararlarına yönelik problemin modellenmesi için işletme ile yapılan görüşmeler doğrultusunda elde edilen veriler aşağıda özetlenmektedir. Çalışmada karar periyodu 1 ay olduğundan aylık veriler de ortaya konmaktadır.

- *Üretim Kapasitesi:* İşletmenin 2006 yılı yıllık üretim kapasitesi 3.600.000 ve bu doğrultuda aylık kapasite 300.000 adettir. Ele alınan ürüne ilişkin aylık üretim kapasitesi de 30.000 adettir.
- *Satış Miktarı:* 2006 yılı yıllık satış miktarı 2.600.000 ve ürünün satış miktarı 260.000 adettir.
- *Stoklama Kapasitesi:* İşletmenin aylık stoklama kapasitesi 30.000 adet ve bu doğrultuda ele alınan ürünün stoklama kapasitesi 3000 adettir.
- *Üretim Miktarı (Parti Büyüklüğü):* Üretim sürecinde parti büyüklüğü 1500 adettir.
- *Fiyat ve Maliyet Verileri:* Ürünün satış fiyatı 70 YTL, birim üretim maliyeti 31,5 YTL, stoklama maliyeti 17,5 YTL ve stoksuzluk maliyeti 14 YTL'dir.

***Yapılan Varsayımlar ile Elde Edilen Veriler***

Ürünlerin 1500 adetlik partiler halinde üretilmesi ve konteynırlara yüklenerek taşınması doğrultusunda satışların ve stokların modellenmesinde parti büyüklüğü esas alınmakta diğer bir ifadeyle ürünlerin partiler halinde satıldığı ve stoklandığı varsayılmaktadır. Aylık satış verilerine ulaşılamaması nedeniyle, ürüne ilişkin yıllık talep verisi (260.000 adet) ile rassal sayılar kullanılarak gerçekleştirilen simulasyon sonucunda aylık talep verisi elde edilmiştir. Aylık talep verisi Tablo 3.1.'de verilmektedir:

**Tablo 3.1.** Aylık Talep Verisi

| Ay | Talep (adet) | Talep (parti sayısı) | Ay | Talep (adet) | Talep (parti sayısı) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 26261 | 18 | 7 | 25653 | 17 |
| 2 | 14442 | 10 | 8 | 16959 | 11 |
| 3 | 23975 | 16 | 9 | 22525 | 15 |
| 4 | 19609 | 13 | 10 | 19992 | 13 |
| 5 | 26510 | 18 | 11 | 18271 | 12 |
| 6 | 21047 | 14 | 12 | 24757 | 17 |

Tablo 3.1.'de yer alan aylık talep verisinin, SPSS programı ile gerçekleştirilen "One-Sample Kolmogorov-Smirnov" testi sonucunda $\lambda = 21666{,}75\,\text{adet} = 14{,}5 \approx 15$ parti ile Poisson dağılıma uyduğu belirlenmiştir. Test sonuçları Tablo 3.2.'de gösterilmektedir.

**Tablo 3.2.** One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test Sonucu

| | | Talep (adet) |
|---|---|---|
| *N* | | 12 |
| Poisson Parametresi [a,b] | Ortalama | 21666,75 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | 1,732 |
| *p*. (2-tailed) | | 0,005 |

*a Test distribution is Poisson.*

*b Calculated from data.*

1500 adetlik bir parti ürün için fiyat ve maliyete ilişkin veriler Tablo 3.3.'de verilmektedir.

**Tablo 3.3.** Fiyat ve Maliyet Verisi

| | Satış Fiyatı | Stoklama Maliyeti | Stoksuzluk Maliyeti | Üretim Maliyeti |
|---|---|---|---|---|
| (1000YTL) | 105 | 26,25 | 21 | 47,25 |

***Markov Karar Sürecinin Bileşenleri***

İşletmenin üretim/envanter sistemindeki değişmelerin çoğunlukla mevcut dönemdeki duruma göre ve geçmiş dönemlerden bağımsız olarak verilmesi nedeniyle ve literatürde bu alanda yapılan çalışmaların da bu varsayımı desteklemesi doğrultusunda, envanter miktarlarına bağlı olarak verilecek üretim kararı problemi MDP ile modellenmektedir. Problemin MDP olarak modellenmesi sonucunda stokastik süreç ve bu sürecin durumları tanımlanmalı; durum uzayı, ödül yapısı, durumlara ilişkin hareket kümeleri, geçiş olasılıkları, karar kuralı ve politika belirlenmelidir. Bu doğrultuda MDP olarak modellenen işletme sorununun öğeleri aşağıdaki biçimde özetlenmektedir.

▪ *<u>Stokastik Süreç ve Sürecin Durumları</u>:* İşletmenin üretim/envanter sistemi ele alınmakta ve envanter miktarlarındaki değişmeler stokastik yapıdaki MPD ile ortaya konulmaktadır. Birinci bölümde tanımlandığı gibi stokastik süreç olarak modellenen bir sistemde, değerleri önceden bilinmeyen ve bu nedenle de stokastik yapıya sahip rastsal değişkenin aldığı her bir özel değer durum olarak adlandırılmaktadır. Bu doğrultuda dönem başı envanter miktarları üretim/envanter sisteminin durumları olarak nitelendirilmektedir.

▪ *<u>Karar Dönemleri ve Periyotlar</u>:* MDP'lerinde kararlar zaman içindeki belirli noktalarda verilmektedir. Ele alınan işletmenin üretim sürecinde kararlar, kesikli zamanlarda, her dönemin başında envanter miktarına bağlı olarak üretim miktarlarının belirlenmesine yöneliktir. Bu doğrultuda karar dönemlerinin kümesi kesikli yapıda olmakta ve MDP kesikli bir süreç olarak nitelendirilmektedir. MDP'nin periyodu, gözlemin yapılarak kararın verildiği zaman birimi, 1 aydır. Her ayın başlangıcında envanter miktarı gözlemlenmekte, stoktaki ürün miktarına bağlı olarak 1 ay boyunca kaç parti üretim yapılacağına ilişkin karar verilmekte, bu karar sonucunda ödüller (kazanç ve maliyetler) ortaya çıkmakta ve sistem sonraki duruma geçiş yapmaktadır. Sürecin bir sonraki duruma geçiş yapması ile 1 aylık sürenin sonunda bulunduğu durum ise bir sonraki ayın dönem başı yani içinde bulunulan ayın dönem sonu stok miktarını ifade etmektedir. Süreç bu doğrultuda, zaman içinde geçişler yapmaya devam etmektedir.

Ele alınan sürecin karar dönemleri kümesi $T=\{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$ olarak gösterilmektedir. İşletmenin varlığının belirli bir dönem boyunca faaliyet gösterdikten sonra son bulmaması nedeniyle karar dönemleri kümesi sonsuz olarak nitelendirilmektedir.

▪ <u>*Durum Uzayı:*</u> İşletmenin her dönem (ay) başında depolarında bulunan envanter miktarı diğer bir ifadeyle başlangıç stoku MDP'nin durumları olarak tanımlanmıştır. İşletmenin ele alınan ürüne ilişkin aylık stoklama kapasitesi 3000 adettir. İşletmenin 1500 adetlik partilerde üretim yapması doğrultusunda yapılan varsayımlar ile stokta bulundurulabilecek parti sayısı maksimum 2 parti olarak belirlenmiştir. Stokastik sürecin $S$ ile gösterilen olası durumlarının kümesi yani sürecin durum uzayı $S = \{0,1,2\}$ olarak tanımlanmaktadır.

▪ <u>*Hareket Kümeleri:*</u> Birinci bölümde ifade edildiği gibi ele alınan ve MDP olarak modellenen sistemin bir $i$ durumunda olduğunun gözlemlenmesi ile karar verici alternatifleri değerlendirmekte ve bir $k$ $(k \in A_i)$ alternatifini seçmektedir. Karar vericinin sürecin $i$ durumunda seçebileceği olası alternatiflerin kümesi $A_i$ ve sürecin tüm durumlarına ilişkin hareket kümelerinin bütünü olan hareket uzayı da $A$ ile gösterilmektedir. İşletmenin ele alınan üretim/envanter sisteminde işletmenin planlama ve üretim yöneticileri her ayın başlangıcındaki envanter miktarına bağlı olarak o ay boyunca kaç parti üretim gerçekleştirileceğine karar vermektedir. Bu doğrultuda her durum için belirlenen hareket alternatifleri (hareket kümeleri) aşağıdaki biçimde özetlenebilir:

- Dönem başı envanter miktarı 0 olduğunda ($i=0$ için), Tablo 3.1.'de yer alan aylık talep verilerine göre minimum talep miktarının 10 parti olması nedeniyle işletmenin en az 10 parti üretim yapması gerekmektedir. İşletmenin ele alınan ürüne ilişkin aylık üretim kapasitesi 30.000 adet=20 partidir. İşletmenin bu ürünü için aylık stoklama kapasitesinin 3000 adet=2 parti olması göz önünde bulundurulduğunda, işletme, 0 stokla dönem başlaması halinde 20 parti üretim gerçekleştirerek olası maksimum talebi (18 parti) karşılaması sonucunda 2 parti stokla dönem sonuna gelmektedir. Diğer bir ifadeyle işletme 0 stokla döneme başladığında üretim miktarını 20 partiye kadar çıkarabilmektedir. Bu nedenle $i=0$ için hareket alternatifleri kümesi $A_0 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ ile tanımlanmaktadır. $k=1$ alternatifi 10, $k=2$ alternatifi 11, $k=3$ alternatifi 12, ve benzer şekilde $k=11$ alternatifi de 20 parti üretimi ifade etmektedir.

- Dönem başı envanter miktarı 1 olduğunda (*i=1* için), işletmenin 10 partilik minimum talebi karşılayabilmesi için en az 9 parti üretim gerçekleştirmesi gerekmektedir. Üretim ve stoklama kapasiteleri dikkate alındığında dönem başı envanter miktarının 1 parti olması durumunda maksimum 19 parti üretim yapılabilmektedir. İşletmenin dönem başı envanter miktarı 1 olduğunda yani *i=1* için hareket alternatifleri kümesi $A_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ ile gösterilmektedir. *k=1* alternatifi 9, *k=2* alternatifi 10 ve bu şekilde *k*=11 alternatifi de 19 parti üretimi ifade etmektedir.
- Dönem başı envanter miktarı 2 olduğunda (*i=2* için), minimum ve maksimum talep miktarları ile ele alınan ürüne ilişkin üretim ve stoklama kapasiteleri doğrultusunda işletmenin en az 8 parti üretim emri vermesi gerekmekte ve maksimum üretim miktarı da 18 parti olmaktadır. *i=2* için hareket alternatifleri kümesi $A_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ ile tanımlanmakta ve *k=1* alternatifi ile *k*=11 alternatifi de sırasıyla 8 ve 18 parti üretimi ifade etmektedir.

Ele alınan problemde 3 durum ve her duruma ilişkin 11 alternatif bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle durum uzayının 3 ve hareket uzayının 33 elemanı bulunmaktadır. Her durum için farklı hareket alternatiflerine göre geçiş olasılıkları ve ödüller (kazanç ve maliyet değerleri) hesaplanmalıdır.

▪ *<u>Geçiş Olasılıkları ve Ödüller</u>:* Çalışmanın önceki bölümlerinde tanımlandığı üzere, karar verici belirli bir zaman periyodunda süreç *i* durumunda iken *k* hareketini seçtiğinde sistemin bir sonraki periyotta *j* durumuna geçiş yapma olasılığı $p_{ij}^k$ ile gösterilmektedir. Seçilen hareket alternatifine bağlı olarak ve sistemin bu geçişi sonucunda elde edilen ödül genel notasyonla $r_{ij}^k$ ile gösterilmektedir. Ele alınan üretim/envanter sorununda, 2.bölümde tanımlanan ve aşağıda verilen, maliyet ve kazanç notasyonları kullanılmaktadır. Süreç durum *i*’de iken *k* alternatifi seçildiğinde sürecin *j* durumuna geçiş yapması ile ortaya çıkan maliyet ve kazanç aşağıdaki biçimde gösterilmiştir:

- Üretim maliyeti ($u_{ij}^k$): Her *i* durumunda seçilen *k* alternatifine (üretilen parti sayısı) bağlı olarak hesaplanmaktadır.
- Stoklama maliyeti ($h_{ij}^k$): *i=0,1,2* için *j=1* ve *j=2* olması diğer bir ifadeyle dönem başı stok miktarı 0,1 ya da 2 olduğunda bir sonraki döneme 1 ya da 2 stokla başlanması halinde hesaplanmaktadır. *j=0* olduğunda, stoklama maliyeti de dönem sonu envanteri 0 olduğundan ortaya çıkmamaktadır.
- Stoksuzluk maliyeti ($l_{ij}^k$): Talebin, dönem başı envanter miktarı ve seçilen alternatif doğrultusunda üretilen parti sayısının toplamından daha fazla olması nedeniyle ürünlerin zamanında teslim edilememesi durumunda ele alınmaktadır.
- Toplam maliyet ($c_{ij}^k = u_{ij}^k + h_{ij}^k + l_{ij}^k$): Üretim, stoklama ve stoksuzluk maliyetlerinin toplamını göstermektedir.
- Kazanç ($w_{ij}^k$) : Dönem başı envanteri ve gerçekleştirilen üretimden o dönemin talebi karşılandığında ortaya çıkan satış hasılatıdır.

Durum *i*'nin *k* alternatifi seçilmesi durumunda beklenen toplam maliyeti $c_i^k = \sum_{j=0}^{2} c_{ij}^k$ ve kazancı $w_i^k = \sum_{j=0}^{2} w_{ij}^k$ olarak tanımlanmıştır. Bu değerler her duruma ilişkin beklenen kazanç ve maliyet değerleridir.

Geçiş olasılıklarının hesaplanmasında talep verilerinin Poisson dağılıma uyması doğrultusunda Poisson olasılık değerlerinden faydalanılmıştır. $\lambda = 15$ için Microsoft Excel programında Poisson dağılımına ilişkin olasılık değerleri hesaplanmıştır. Hesaplanan olasılık değerleri tablo biçiminde EK 3'de gösterilmektedir. Bu olasılık değerleri kullanılarak her durum için farklı alternatiflere göre geçiş olasılıklarının ve seçilen hareket alternatifleri sonucunda durumlar arası geçişlerle ortaya çıkan ödüllerin (kazanç ve maliyet) hesaplanması aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

- Dönem başı envanteri 0 parti (*i=0*) olduğunda ve karar verici *k=1* (10 parti üretim yapma) alternatifini seçtiğinde, işletmenin bir sonraki döneme 0 stokla (*j=0*) başlaması, bu dönemde ürüne olan talebin 10 parti ya da daha fazla olması sonucunda gerçekleşebilir. Talep 10 parti olduğunda üretimle tüm talep karşılanmakta ve dönem sonuna 0 stok kalmaktadır. Talep 10'dan fazla olduğunda ise örneğin 12 parti olduğunda 10 parti talep karşılanmakta ve 2 partilik talep karşılanamamakta diğer bir ifadeyle işletme stoksuz kalmakta ve karşılanamayan her parti için stoksuzluk maliyeti ortaya çıkmaktadır. Bu doğrultuda *i=0* iken ve *k=1* alternatifinin seçilmesi ile sürecin *j=0* durumuna geçiş yapma olasılığı $p_{00}^{1} = 0{,}9301$ olarak bulunmaktadır. *i=0, j=0,1,2* ve *k=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11* ($k \in A_0$) için benzer şekilde geçiş olasılıkları hesaplanmıştır.

- Dönem başı envanteri 0 (*i=0*) iken ve karar verici *k=1* (10 parti üretim yapma) alternatifini seçtiğinde bir sonraki döneme 0 stokla başlanması (*j=0* durumuna geçiş yapılması) ile ortaya çıkan ödüller birim (parti) maliyet ve kazanç verileri kullanılarak hesaplanmıştır. İşletme 10 parti ürün üretmekte ve bunun sonucunda $u_{00}^{1} = 472{,}5$ YTL $(\times 1000)$ üretim maliyeti ortaya çıkmaktadır. Bir sonraki döneme 0 stokla başlanması diğer bir ifadeyle içinde bulunulan dönemin sonunda 0 stok kalmış olması nedeniyle stoklama maliyeti ($h_{00}^{1} = 0$) ortaya çıkmamaktadır. Geçiş olasılıklarının hesaplanmasında belirtildiği üzere, *i=0, k=1* olduğunda *j=0* olması ancak talebin 10 parti ya da daha fazla olması sonucunda ortaya çıkmaktadır. Talep 10 parti olduğunda stoksuzluk söz konusu olmazken 11 veya daha fazla olduğunda işletme stoksuz kalmakta ve karşılanamayan her parti ürün için ek maliyete katlanmaktadır. Bu durum göz önünde bulundurularak *i=0, k=1* ve *j=0* için stoksuzluk maliyetine ilişkin beklenen değer hesaplanmıştır. 11 partilik talep olduğunda 1 partilik stoksuzluk bunun sonucunda 21 YTL $(\times 1000)$'lik stoksuzluk maliyeti ortaya çıkmaktadır ve talebin 11 parti olması olasılığı (Poisson olasılık değerlerinden) 0,0663'dür. 12 partilik talep olduğunda ise 2 partilik talep karşılanamamakta, 42 YTL $(\times 1000)$'lik stoksuzluk maliyeti ortaya çıkmaktadır ve talebin 12 parti olması olasılığı 0,0829'dur. Benzer şekilde olası talep miktarları için maliyet ve olasılık değerleri çarpılıp toplanarak beklenen stoksuzluk maliyeti $l_{00}^{1} = 107{,}85$ YTL $(\times 1000)$ olarak hesaplanmıştır.

- Ele alınan üretim/envanter sisteminde yer alan 3 durum için ve her duruma ilişkin tüm hareket alternatiflerine göre, Microsoft Excel programı kullanılarak hesaplanan geçiş olasılıkları ve ödüller EK 4'de yer alan tabloda özetlenmektedir.

▪ *Karar Kuralı ve Politika:* Daha önce tanımlandığı üzere, karar kuralı bir karar döneminde her durum için hareketin seçilmesine yönelik prosedürü ifade etmektedir. Birinci bölümde yapılan sınıflandırma içerisinden, işletmenin üretim/envanter sisteminin modellenmesinde MD (Markovian-hafızasız ve deterministik) karar kuralı kullanılmaktadır. Diğer bir ifadeyle sistemin gelecekteki durumu geçmişe sadece mevcut durum ile bağlıdır ve her durumda kesin olarak bir hareket seçilmektedir. Politika ise hareket belirleme kuralıdır ve süreç boyunca alınması gereken tüm kararları tanımlamaktadır. Ele alınan işletme probleminde durağan (zamana bağlı olmayan) ve karar kuralının özelliği doğrultusunda arı (rassal olmayan) politika izlenmektedir. Kullanılan politika başlangıç durumu aynı olduğunda zaman içinde farklılaşmamaktadır ve ayrıca her durum için kesin olarak bir tane hareket seçilebilmektedir.

Ele alınan üretim/envanter sorununa ilişkin olarak öğeleri tanımlanan MDP problemi, sonraki kısımda, LP ve GP yaklaşımları ile modellenmekte ve çözülmektedir.

### 3.2.3. Markov Karar Süreci Probleminin Doğrusal Programlama Yaklaşımı İle Çözülmesi

Çalışmanın bu bölümünde, karşılaştırma olanağı sunmak için, ele alınan ve MDP süreci ile formüle edilen işletme sorununun GP modelinde (2.7) ortaya konan üç farklı amaç için tek amaçlı olarak ayrı ayrı formüle edilen LP modelleri ele alınmakta ve elde edilen sonuçlar ortaya konmaktadır.

### 3.2.3.1. Markov Karar Süreci Probleminin Doğrusal Programlama Modelinin Oluşturulması

(2.7) ile ortaya konan GP modelinde ele alınan 3 amaç; kazanç maksimizasyonu, maliyet minimizasyonu ve stoksuzluk riskinin minimizasyonu olarak tanımlanmıştır. İşletmenin üretim/envanter problemi için ortaya konan MDP yaklaşımı ve bu yaklaşım sonucunda elde edilen veriler ile sorunun çözümünde LP yaklaşımının kullanılması için bu 3 farklı amaca yönelik ayrı ayrı üç LP modeli oluşturulmalıdır. Her bir amaç için LP modeli oluşturulurken diğer amaçlar modelin kısıtları olarak ele alınmaktadır. İkinci bölümde beklenen ortalama ödül yapısına göre (2.2) ile verilen LP notasyonu problemin verileri doğrultusunda revize edilerek kullanılacaktır.

***LP Modeli I: Kazanç Maksimizasyonu***

İşletme verileri ve MDP bileşenleri doğrultusunda kazancı maksimize etmeyi amaçlayan LP formülasyonunda yer alan bileşenler aşağıdaki biçimde özetlenmektedir:

▪ *<u>Karar Değişkenleri</u>:* LP modelinde yer alan karar değişkenleri daha önce tanımlandığı gibi denge durumuna ilişkin olasılıklardır ( $x_i^k$ , *i=0,1,2* ve $k = 1,2,\ldots,11$ için).

▪ *<u>Amaç Fonksiyonu</u>:* Amaç, aylık beklenen ortalama kazancı maksimize etmek olduğundan LP modelinin amaç fonksiyonu probleme ilişkin veriler kullanılarak aşağıdaki biçimde formüle edilmektedir:

$$Z_{\max} = \sum_{i=0}^{2} \sum_{k=1}^{11} w_i^k x_i^k$$

▪ *<u>Kısıtlar</u>:* (2.2)'de verilen LP formülasyonunda yer alan olasılık yapısına ve denge durumuna ilişkin kısıtlar dışında, GP modelinde hedef olarak ele alınan maliyet (en fazla 1800 YTL olması istenmektedir) ve stoksuzluk riskine ilişkin (en fazla 0,10 olması istenmektedir) hedef kısıtları da LP modelinin kısıtlarını oluşturmaktadır. Bu kısıtlar da gerçek kısıt olarak ele alınmaktadır. Bu doğrultuda tüm kısıtlar ve yukarıda verilen amaç fonksiyonu ile kazancı maksimize eden LP modeli (3.1)'de gösterilmektedir:

$$Z_{\max} = \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} w_i^k x_i^k$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} x_i^k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{11} x_j^k = \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} x_i^k p_{ij}^k \qquad (j = 0,1,2 \ \text{ için}) \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} c_i^k x_i^k \leq 1800 \qquad \textit{(Maliyet Kısıtı)}$$

$$\sum_{k=1}^{11} x_0^k \leq 0{,}10 \qquad (\textit{Stoksuzluk Riskine İlişkin Kısıt})$$

$$x_i^k \geq 0 \qquad (i = 0,1,2 \ \text{ ve } \ k = 1,2,\ldots,11 \ \text{ için})$$

***LP Modeli II: Maliyet Minimizasyonu***

Karar değişkenleri ( $x_i^k$ ) önceki LP modeli ile aynıdır. Amaç fonksiyonu ve kısıtlar gözden geçirilmelidir.

▪ *Amaç Fonksiyonu:* Amaç, aylık beklenen ortalama maliyeti minimize etmektir ve bu doğrultuda problemin verileri ile amaç fonksiyonu aşağıdaki biçimde gösterilmektedir:

$$Z_{\min} = \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} c_i^k x_i^k$$

▪ *Kısıtlar:* Önceki LP modelinde yer alan maliyet kısıtı amacı oluşturduğundan bu modelde bu kısıt yer almamaktadır. GP modelinde hedef olarak ele alınan beklenen ortalama kazancın maksimizasyonuna (en az 2100 YTL olması istenmektedir) ilişkin hedef kısıtı LP modelinde gerçek kısıt olarak ele alınmalıdır. Önceki LP modeli bu doğrultuda gözden geçirildiğinde ve verilen amaç fonksiyonu ile elde edilen, beklenen ortalama aylık maliyeti minimize eden LP modeli (3.2)'de özetlenmektedir:

$$Z_{\min} = \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} c_i^k x_i^k$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} x_i^k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{11} x_j^k = \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} x_i^k p_{ij}^k \qquad (j = 0,1,2 \text{ için}) \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} w_i^k x_i^k \geq 2100 \qquad \textit{(Kazanç Kısıtı)}$$

$$\sum_{k=1}^{11} x_0^k \leq 0{,}10 \qquad (\textit{Stoksuzluk Riskine İlişkin Kısıt})$$

$$x_i^k \geq 0 \qquad (i = 0,1,2 \text{ ve } k = 1,2,\ldots,11 \text{ için})$$

***LP Modeli III: Stoksuzluk Riskinin Minimizasyonu***

Yukarıda tanımlanan karar değişkenleri aynı olduğundan önceki LP modellerinde yer alan amaç fonksiyonu ve kısıtlar yeni model için revize edilmelidir.

▪ *Amaç Fonksiyonu:* Amaç, herhangi bir ayda stoksuz kalma olasılığını minimize etmektir ve bu doğrultuda amaç fonksiyonu aşağıdaki biçimde ifade edilmektedir:

$$Z_{\min} = \sum_{k=1}^{11} x_0^k$$

▪ *Kısıtlar:* Amaç stoksuzluk riskini minimize etmek olduğundan, bu modelde GP modelinde yer alan kazanç ve maliyet hedefleri gerçek kısıt olarak ele alınmaktadır. Bu doğrultuda, tanımlanan amaç fonksiyonu ile kısıtların gözden geçirilmesi sonucunda stoksuz kalma riskini (olasılığını) minimize eden LP modeli (3.3)'de verilmektedir:

$$Z_{\min} = \sum_{k=1}^{11} x_0^k$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} x_i^k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{11} x_j^k = \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} x_i^k p_{ij}^k \qquad (j = 0,1,2 \text{ için}) \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} w_i^k x_i^k \geq 2100 \qquad \textit{(Kazanç Kısıtı)}$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} c_i^k x_i^k \leq 1800 \qquad \textit{(Maliyet Kısıtı)}$$

$$x_i^k \geq 0 \qquad (i = 0,1,2 \text{ ve } k = 1,2,\ldots,11 \text{ için})$$

GP modelinde yer alan üç amaç için ayrı ayrı oluşturulan LP modellerinin çözüm sonuçları 3.2.3.2'de ele alınmaktadır.

### 3.2.3.2. Doğrusal Programlama Modelinin Çözümü İle Elde Edilen Sonuçlar

GP modelinde hedef olarak ele alınan beklenen aylık ortalama kazanç, maliyet ve stoksuzluk riski hedeflerinin ayrı ayrı birer amaç olarak ortaya konduğu 3 farklı doğrusal programlama modeli formüle edilmiştir. Bu kısımda ortaya konan bu modellerin çözümüne yer verilmektedir.

Beklenen ortalama aylık kazancı maksimize eden, beklenen ortalama aylık maliyeti minimize eden ve stoksuz kalma olasılığını minimize eden ve de sırasıyla (3.1), (3.2) ve (3.3)'de verilen LP modelleri POM-QM for Windows 3.0. programı kullanılarak çözülmüş ve üç LP modelinin de olursuz çözüme sahip olduğu belirlenmiştir.

Elde edilen bu sonuçlara göre; beklenen ortalama aylık kazancı maksimize etmek amaçlandığında beklenen ortalama aylık maliyetin en fazla 1800 YTL ve stoksuz kalma olasılığının en fazla %10 olmasına ilişkin hedeflerin kısıt olarak ele alınması, beklenen ortalama aylık maliyeti minimize etmek amaçlandığında beklenen ortalama aylık kazancın en az 2100 YTL ve stoksuz kalma olasılığının en fazla %10 olmasına ilişkin hedeflerin kısıt olarak ele alınması ve de stoksuz kalma olasılığını minimize etmek amaçlandığında beklenen ortalama aylık kazancın en az 2100 YTL ve beklenen ortalama aylık maliyetin en fazla 1800 YTL olmasına ilişkin hedeflerin kısıt olarak ele alınması sonucunda LP modelinde olurlu çözüm kümesi oluşmamaktadır.

İkinci bölümde belirtildiği gibi birden fazla amacın ele alındığı problemlerin çözümünde LP yaklaşımının kullanılması durumunda amaç fonksiyonu dışındaki diğer amaçlar birer kısıt olarak ele alınmaktadır ve optimal çözümün bütün kısıtları sağlaması gerekmektedir. LP modelinde yer alan bu kısıtların modelin karar değişkenleri üzerinde sapmaya izin vermeyen sınırlayıcı etkisi vardır. Ele alınan sorunda 3 farklı amaç bulunmaktadır ve her bir amaç tek tek ele alınırken diğer amaçlar kısıt olarak tanımlanmıştır. Olursuz çözüm çıkmasının nedeni de LP yaklaşımı ile ortaya konan kısıtların yani gerçek kısıtların belirlenen değerlerden (kısıtların sağ tarafı) aşağı ya da yukarı sapmalara izin vermemesidir. Bu doğrultuda tüm kısıtları sağlayan olurlu bir çözüm ortaya çıkmamaktadır.

Birden fazla amacın ele alındığı MDP sorunlarının çözümünde LP yaklaşımının yerine GP yaklaşımının kullanılması olurlu çözümlerin elde edilebilmesini ve de karar vericilerin çeşitli subjektif faktörleri de modele dahil edebilmesini sağlamaktadır. Bu nedenle ve çalışmanın amacı doğrultusunda 3.2.4’de, MDP olarak ele alınan üretim/envanter sorununun GP yaklaşımı ile modellenmesi ve çözümlenmesi ortaya konmaktadır.

### 3.2.4. Markov Karar Süreci Probleminin Hedef Programlama Yaklaşımı İle Çözülmesi

MDP problemlerinin LP ve GP yaklaşımlarıyla formüle edilerek çözülmesine yönelik olarak yapılmış, literatürde yer alan çalışmalar doğrultusunda (2.7) ile ortaya konan GP modeli, ele alınan işletmenin MDP olarak modellenen üretim/envanter probleminin önceki bölümde belirtilen verileri ile ele alınmakta ve bu probleme ilişkin hedef programlama modeli ortaya konmaktadır.

#### 3.2.4.1. Markov Karar Süreci Probleminin Hedef Programlama Modelinin Oluşturulması

Ele alınan işletme için GP modelinin oluşturulmasından önce modeldeki karar değişkenleri, kısıtlar, işletmenin amaçları ve bu amaçların hedef değerleri ve hedeflerin öncelik düzeyleri (öncelik hiyerarşisi belirleniyorsa) aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

▪ *<u>Karar Değişkenleri</u>:* Ele alınan üretim/envanter sisteminin GP modelinin oluşturulması için öncelikle karar değişkenleri tanımlanmalıdır. 2.bölümde MDP'lerinin LP yaklaşımı ile modellenmesinde iki farklı ödül kriterinin kullanılabildiği üzerinde durulmuş ve her iki ödül kriterine göre de LP formülasyonu verilmiştir. MDP olarak modellenen üretim/envanter sorununun doğrusal GP modelinin oluşturulmasında 2.bölümde belirtilen süreç özellikleri doğrultusunda beklenen ortalama ödül kriteri kullanılmaktadır. Beklenen ortalama ödül kriteri ile formüle edilecek modelin çözümü sonucunda, denge durumu olasılıkları kullanılarak işletmenin birim zamanda beklenen ortalama ödülü (kazanç ve maliyet değerleri) hesaplanabilecektir. Diğer bir ifadeyle beklenen ortalama ödül kriteri için verilen LP formülasyonunda tanımlandığı gibi (2.7) ile verilen GP modelinin karar değişkenleri durumlara ilişkin denge durumu olasılıkları ve buna ek olarak GP yaklaşımının temelini oluşturan negatif ($d^-$) ve pozitif sapma ($d^+$) değişkenleridir. Denge durumu vektöründe yer alan değerler $i \in S$ için $\Pi_i$ ile gösterilmiş ve her $i$ durumu için olası tüm hareket alternatifleri altındaki denge durumu olasılıklarının toplamına eşit ($\Pi_i = \sum_{k=1}^{K} x_i^k$) olduğu belirtilmiştir.

▪ *<u>Kısıtlar</u>:* GP modelinde yer alan hedef kısıtları dışındaki kısıtlar diğer bir deyişle gerçek kısıtlar, LP formülasyonunda yer alan ve MDP'nin olasılık yapısından ve de denge durumundan kaynaklanan kısıtlardır. Bunlardan ilki denge durumu vektöründe yer alan $\Pi_i$ değerlerinin tüm $i \in S$ durumları için toplamının 1'e eşit olmasına ilişkindir. Diğer kısıt seti ise her $j \in S$ için ortaya konan ve sürecin denge durumuna ulaşması ile denge olasılıklarının, bu olasılıklarla geçiş olasılıklarının çarpımına eşit olmasına ilişkin kısıtlardır. Gerçek kısıtlar aşağıdaki biçimde işletmenin üretim/envanter sistemindeki veriler dikkate alınarak yeniden düzenlenmektedir. Durum uzayı $S = \{0,1,2\}$ olarak tanımlanan sürecin gerçek kısıtları aşağıdaki biçimde gösterilmektedir:

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{k=1}^{11} x_i^k = 1 \qquad (3.4)$$

$$\sum_{k=1}^{11} x_j^k = \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} x_i^k p_{ij}^k \qquad (j = 0,1,2 \text{ için}) \qquad (3.5, 3.6, 3.7)$$

▪ *Amaçlar ve Hedef Değerleri:* (2.7) ile ortaya konan modelde tanımlanan amaçlar, işletmenin planlama ve kalite yöneticileriyle yapılan görüşmeler doğrultusunda ele alınarak bu amaçların hedef değerleri aşağıdaki şekilde özetlenmektedir:

- Amaç I: İlk amaç, birim zamanda (ay) beklenen ortalama kazancı maksimize etmektir. Beklenen ortalama kazanç, denge durumu olasılıkları ile her duruma ilişkin beklenen kazanç değerleri (geçiş olasılıkları ve kazanç değerlerinin çarpılmasıyla elde edilen) kullanılarak ortaya konmaktadır. İşletmenin ele alınan ürünün aylık üretim kapasitesi doğrultusunda bir aylık dönemde beklenen ortalama kazanca ilişkin belirlediği hedef değeri $b_w = 2100$ YTL ($\times 1000$)'dir. İşletme, bir aylık dönemde en az 2100 YTL'lik kazanç elde etmeyi amaçlamaktadır. Bu verilere göre I.amaca ilişkin hedef kısıtı aşağıdaki şekilde gösterilmektedir:

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} w_i^k x_i^k \geq 2100 \qquad (3.8)$$

- Amaç II: İşletmenin bir diğer amacı beklenen ortalama maliyeti (üretim, stoklama ve stoksuzluk maliyetlerinin toplamından oluşmaktadır) minimize etmektir. İşletmenin bu amaç için belirlediği hedef değeri $b_c = 1800$ YTL ($\times 1000$)'dir. Bu doğrultuda işletme en fazla 1800 YTL'lik maliyeti hedeflemektedir. Denge durumu olasılıkları ($x_i^k$) ve her duruma ilişkin beklenen maliyetler kullanılarak II.amaca ilişkin hedef kısıtı aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} c_i^k x_i^k \leq 1800 \qquad (3.9)$$

- Amaç III: İşletme, müşterilerinin ürün taleplerini zamanında karşılama amacı doğrultusunda stoksuz kalma olasılığını minimize etmeyi hedeflemektedir. Bu hedef, işletmenin herhangi bir aya 0 stokla başlamasına ilişkin denge durumu olasılığı ( $x_0^k$ ) ile ortaya konmaktadır. Farklı üretim miktarlarına (*k* alternatife) göre işletmenin herhangi bir ayda stoksuz kalma olasılığına yönelik hedef değeri $b_s$ = %10 olarak belirlenmiştir. Diğer bir ifadeyle stoksuzluk olasılığının en fazla %10 olması istenmektedir. Bu verilere göre III.amaca ilişkin hedef kısıtı aşağıdaki şekilde gösterilmektedir:

$$\sum_{k=1}^{11} x_0^k \leq 0{,}10 \qquad (3.10)$$

▪ *<u>Hedeflerin Öncelik Düzeyleri</u>:* İşletme yöneticileri ortaya konan üç amaç arasında çok farklılık yaratacak bir öncelik sıralaması yapmamış ve bu nedenle de bir öncelik hiyerarşisi belirlenmemiştir. Karar vericilerin bu görüşleri doğrultusunda, (2.7)'de öncelikli yapıda verilen model formülasyonu revize edilerek önceliklerin belirlenmediği (nonpreemptive) GP modeli oluşturulmuştur. Bu durumda eşit öncelikli 3 amaç söz konusu olmaktadır.

▪ *<u>Hedef Programlama Modeli</u>:* Tanımlanan amaçlar ve karar vericilerle birlikte belirlenen hedef değerlerine göre GP modelinin amaç fonksiyonunda; kazanç hedefinin negatif sapma değişkeni ( $d_w^-$ ), maliyet hedefinin pozitif sapma değişkeni ( $d_c^+$ ) ve stoksuz kalma riskine ilişkin hedefin pozitif sapma değişkeni ( $d_s^+$ ) yer almaktadır. GP modelinin amaç fonksiyonu bu sapmaların toplamını minimize eden fonksiyondur ve aşağıdaki şekilde gösterilmektedir:

$$Z_{\min} = d_w^- + d_c^+ + d_s^+ \qquad (3.11)$$

(3.4)-(3.11) ile tanımlanan gerçek kısıtlar, hedef kısıtları ve amaç fonksiyonu ile işletmenin MDP olarak modellenen üretim/envanter sistemi için; ele alınan kısıtlara ve hedeflere, denge durumu olasılıklarının ve sapma değişkenlerinin pozitif olması koşunun eklenmesi ile önceliklerin belirlenmediği GP modeli aşağıda (3.12) biçiminde özetlenmektedir:

$$Z_{\min} = d_w^- + d_c^+ + d_s^+$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} w_i^k x_i^k - d_w^+ + d_w^- = 2100 \quad \textit{(Kazanç Hedefi)}$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} c_i^k x_i^k - d_c^+ + d_c^- = 1800 \quad \textit{(Maliyet Hedefi)}$$

$$\sum_{k=1}^{11} x_0^k - d_s^+ + d_s^- = 0{,}10 \qquad \textit{(Stoksuzluk Riskine İlişkin Hedef)} \qquad (3.12)$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} x_i^k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{11} x_j^k = \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} x_i^k\, p_{ij}^k \qquad (j = 0{,}1{,}2 \ \text{ için})$$

$$x_i^k, d_w^+, d_w^-, d_c^+, d_c^-, d_s^+, d_s^- \geq 0 \quad (i = 0{,}1{,}2 \ \text{ ve } \ k = 1{,}2{,}\ldots{,}11 \ \text{ için})$$

(3.12) gösteriminde özetlenen modelde her durum için 11 alternatif olması nedeniyle denge durumu olasılıklarını simgeleyen 33 değişken ile 4 gerçek kısıt ve 3 hedef kısıtı olmak üzere toplam 7 kısıt bulunmaktadır. Modelin çözümü ve elde edilen sonuçlara 3.2.4.2'de yer verilmektedir.

### 3.2.4.2. Hedef Programlama Modelinin Çözümü İle Elde Edilen Sonuçlar

(3.12) ile verilen GP modeline, farklı hareket alternatiflerine göre (üretilen parti sayısı kararları) her duruma ilişkin olarak hesaplanan ve EK 4'de verilen beklenen kazanç, beklenen maliyet ve geçiş olasılıkları değerleri yerleştirildiğinde ve düzenlendiğinde elde edilen model EK 5'de gösterilmektedir.

EK 5'de yer alan eşit öncelikli üç amaca sahip GP modelinin çözümünün gerçekleştirilmesinde, daha önce belirtildiği gibi, POM-QM for Windows 3.0. programının Hedef Programlama modülü kullanılmış ve modelin çözümü ile işletmenin dönem (ay) başı envanter miktarı doğrultusunda belirlediği hedeflere ulaşmak için gerçekleştirmesi gereken üretim miktarları belirlenmiştir. Modelin çözümü ile verilen kararlara bağlı olarak işletmenin belirlediği hedeflere ulaşma düzeyi ve de hedeflerden sapmalar elde edilmiştir.

Hedef programlama modeline ilişkin değişkenlerin, kısıtların ve katsayıların POM-QM for Windows 3.0. programında girişinin yapıldığı ekran EK 6'da verilmektedir. Çözüm sonuçları ise Tablo 3.4'de özetlenmektedir. Tabloda denge durumu olasılıklarını gösteren değişkenlerin tümü değil sadece 0'dan farklı değer alan değişkenlere yer verilmiştir.

**Tablo 3.4.** Hedef Programlama Modelinin Çözüm Sonuçları

| **Hedeflere İlişkin Sonuçlar** | | | |
|---|---|---|---|
| | *Hedef Değeri* | *Negatif Sapma ($d^-$)* | *Pozitif Sapma ($d^+$)* |
| *Kazanç Hedefi* **($d_w^-$)** | 2100 (YTL) | $d_w^- = 763{,}56$ | $d_w^+ = 0$ |
| *Maliyet Hedefi* **($d_c^+$)** | 1800 (YTL) | $d_c^- = 892{,}14$ | $d_c^+ = 0$ |
| *Stoksuzluk Riski Hedefi* **($d_s^+$)** | 0,10 | $d_s^- = 0$ | $d_s^+ = 0{,}03$ |
| **Karar Değişkenlerine İlişkin Sonuçlar** | | | |
| *Denge Durumu Olasılıkları* | $x_0^{11} = 0{,}13$ | $x_1^{10} = 0{,}06$ | $x_2^{11} = 0{,}82$ |

Eşit öncelikli üç hedefin yer aldığı GP modelinin çözümü ile elde edilen ve tablonun üst kısmında verilen hedeflere ilişkin sonuçlara göre işletme kazanç hedefine ulaşamamakta ve yaklaşık olarak aylık ortalama 1336 YTL ($\times 1000$) kazanç elde etmektedir. Diğer bir ifadeyle aylık beklenen ortalama kazanç hedefinden yaklaşık 764 YTL ($\times 1000$) daha az kazanç ortaya çıkmaktadır ($d_w^- = 763{,}56$). İşletmenin aynı önceliğe sahip bir diğer amacı, beklenen ortalama maliyeti minimize etmek olarak belirtilmiştir. Beklenen aylık ortalama maliyeti (üretim, stoklama ve stoksuzluk maliyetlerinin toplamı) yaklaşık 908 YTL ($\times 1000$)'dir. Bu doğrultuda 1800 YTL'lik maliyet hedefine ulaşılmakta ve hedeflenen düzeyden daha düşük maliyet ($d_c^- = 892{,}14$) ortaya çıkmaktadır. Son olarak, işletmenin, herhangi bir ayda stoksuz kalma olasılığının en fazla %10 düzeyinde olmasına ilişkin hedefe ulaşamadığı ve %3 lük bir pozitif sapmayla ($d_s^+ = 0{,}03$) işletmenin stoksuz kalma olasılığının bu veriler altında %13 olduğu görülmektedir. Hedeflere ilişkin bu sonuçlar özetlenecek olursa mevcut stoklama ve üretim kapasitesi ve fiyat ve maliyet yapısı doğrultusunda işletmenin aylık kazanç hedefine ve stoksuz kalma olasılığına yönelik belirlenen hedefe ulaşamazken hedeflediğinden daha düşük maliyete katlandığı sonucuna varılmaktadır.

Tablonun alt bölümünde denge durumu olasılıklarına ilişkin olarak verilen sonuçlara göre; işletmenin gelecek dönemlerde stoksuz kalma olasılığı %13'dür ve işletmenin herhangi bir döneme %6 olasılıkla 1 parti ve %82 olasılıkla 2 parti ürünle başlaması beklenmektedir. İşletmenin 0 stokla döneme başlaması durumunda 20 parti üretim yapmayı (*k=11*), dönem başı stok 1 parti olduğunda 18 parti üretim yapmayı (*k=10*) ve başlangıçta 2 stok bulunduğunda da 18 parti üretim yapmayı (*k=11*) tercih etmesi beklenmektedir. Bu üretim kararları doğrultusunda da belirtildiği gibi sadece aylık maliyet hedefine ulaşılabilmektedir.

İşletmenin stokastik yapıdaki üretim/envanter probleminin hedef programlama yaklaşımı ile modellenmesi ve çözülmesi ile, doğrusal programlama yaklaşımından farklı olarak, 3 amaç eş zamanlı olarak ele alınabilmekte ve bu hedeflere ulaşma düzeyleri belirlenebilmektedir. LP ve GP yaklaşımları ile elde edilen sonuçlar sonraki bölümde karşılaştırılmaktadır.

### 3.2.5. Markov Karar Süreci Probleminin Hedef Programlama Ve Doğrusal Programlama Yaklaşımlarıyla Çözülmesi İle Elde Edilen Sonuçların Karşılaştırılması

Problemin LP yaklaşımı ile modellenerek çözülmesi sonucunda 3 farklı amaç için formüle edilen LP modellerinin hiçbirinde olurlu çözüm ortaya çıkmamıştır. Amaç fonksiyonu dışındaki diğer tüm amaçların, LP yaklaşımında kısıt olarak ele alınması gerekliliğinden dolayı ve ele alınan işletme probleminde tüm kısıtların sağlanamaması sonucunda olurlu çözüm ortaya çıkmamıştır. LP yaklaşımı sınırlayıcı özelliği ile kısıtlar için belirlenen değerlerden hiçbir sapmaya (negatif ya da pozitif) izin vermemekte ve bu nedenle çözümün ortaya çıkmasını engellemektedir.

İşletmenin MDP ile modellenen üretim/envanter sorunu hedef programlama yaklaşımı ile çözüldüğünde elde edilen sonuçlar Tablo 3.4'de verilmiştir. İşletme kazanç ve stoksuzluk riskine ilişkin hedeflere ulaşamazken hedeflediği ortalama aylık maliyetten daha düşük maliyet ortaya çıkmıştır. İşletmenin beklenen ortalama aylık kazancı 1336 YTL, beklenen ortalama aylık maliyeti 908 YTL ve stoksuz kalma olasılığı %13'dür.

GP yaklaşımı ile elde edilen çözüm sonuçlarına göre; işletmenin stoksuz kalma olasılığının %13 ve bu durumda üreteceği miktarın 20 parti, işletmenin herhangi bir aya 1 parti ürün stokuyla başlama olasılığının %6 ve bu stok düzeyinde gerçekleştireceği üretimin 18 parti ve son olarak 2 parti ürün stokuyla döneme başlama olasılığının %82 ve vereceği üretim kararının 18 parti olması beklenmektedir.

Hedef programlama yaklaşımı da daha önce de belirtildiği gibi ilk olarak, LP ile elde edilen olursuz çözümleri ortadan kaldırmak üzere Charnes ve Cooper tarafından ortaya konmuştur. GP yaklaşımı ile birden fazla amaç eş zamanlı olarak ele alınarak bu amaçlara mümkün olabildiğince yaklaşmaya çalışılmaktadır. Tek bir amaç değil birden çok amaç vardır ve amaçlara mümkün olabildiğince yaklaşmayı sağlamaya odaklanıldığından hedef kısıtlarının LP modelindeki gerçek kısıtlar gibi kesin sınırlayıcı bir rolü yoktur ve sapmalar söz konusu olabilmektedir. Bu nedenle de olursuz çözüm ortaya çıkmamakta, hedef kısıtları sağlanamadığında negatif ya da pozitif sapmalar olmaktadır.

Belirtilen özellikleri ile GP yaklaşımı, iş dünyasında yer alan artan belirsizlik ve rekabet nedeniyle olabilecek değişmeler ile hedef değerlerinden sapmaların da ortaya çıkabileceğini dikkate alarak daha esnek çözümlerin elde edilmesini sağlamaktadır.

Yapılan uygulama ile işletmelerin belirsizlik ortamında karar verirken karşı karşıya kaldıkları üretim/envanter problemlerinin çözümünde stokastik yaklaşımlar ile çok amaçlı karar verme araçlarını bir arada kullanabilmelerine yönelik olarak bütünleşik bir model önerilmiş ve modelin uygulanmasına ilişkin olarak otomotiv yan sanayinde faaliyet gösteren bir işletmenin 2006 yılı verileri kullanılarak bir çalışma yapılmıştır. Elde edilen sonuçlara ve LP formülasyonuyla yapılan kıyaslamalara göre GP yaklaşımının birden fazla ve birbiriyle çatışan amacın ele alınması gerektiğinde karar vericilere daha esnek çözümler sunduğu sonucuna varılmaktadır.

**SONUÇ**

İşletmeler, varlıklarını sürdürmek ve rekabet avantajı elde ederek bunu sürekli kılmak üzere faaliyetlerine ilişkin pek çok stratejik karar vermek durumunda kalmaktadır. Diğer bir ifadeyle farklı davranış biçimlerini değerlendirerek bu alternatiflerden birini tercih ederler ve bu tercih ya da karar ile bir sonuç ortaya çıkar. Yönetim bilgi sistemlerindeki ve teknolojideki gelişmelere paralel olarak işletmeler kararlarını rekabetin ve rekabetin yarattığı belirsizliğin çok daha yoğun olduğu bir ortamda vermektedir. Bu doğrultuda işletmelerin verdikleri kararların etkinliği, geleceği daha iyi tahminleyebilmelerine ve karar verme sürecinde belirsizlik unsurunu da göz önünde bulundurmalarına bağlı olmaktadır. İşletme kararlarının etkin olmasında daha objektif sonuçlara dayanan kararların verilmesi büyük önem taşımaktadır. Karar verme sürecinde çeşitli yönetim bilimi teknikleri kullanılarak elde edilen sonuçlar işletme yöneticilerine bu konuda destek sağlayabilmektedir.

İşletmelerin sürekli ve hızla değişen koşullar ve müşteri istek ve ihtiyaçları karşısında faaliyet göstererek global pazarlarda varlıklarını sürdürebilmeleri ve rekabet avantajlarını korumaları için belirsizlik unsurunu da karar verme sürecinde ele alabilmelerini sağlayan yönetim bilimi tekniklerinden biri de Markov Karar Süreci (MDP)'dir. MDP kavramı ilk olarak Howard'ın (1960) dinamik programlama ve Markov zinciri kavramlarını bir arada ortaya koymak ve geliştirdiği politika iterasyonu yöntemini ele almak üzere yaptığı çalışma ile gelişmiştir. Bu temel çalışmanın ardından bu alanda pek çok teorik ve uygulamalı çalışma yapılmıştır. Yapılan çalışmalar incelendiğinde MDP yaklaşımının başta ürünlere ilişkin optimal üretim/envanter/sipariş politikalarının saptanması ve makine-teçhizata ilişkin optimal bakım/onarım/yenileme politikalarının bulunması olmak üzere reklam stratejilerinin ve reklam harcamalarının belirlenmesi, en iyi pazarlama ve promosyon stratejisinin seçilmesi, kuyruk sistemlerinin modellenmesi ile hizmet sağlayıcılara ve kapasiteye ilişkin planların yapılması, işgücü planlamasına ilişkin kararların verilmesi, ürün fiyatlama stratejilerinin belirlenmesi, teknoloji seçimi gibi çeşitli yatırım kararlarının verilmesi, hizmet düzeyinin belirlenmesi gibi pek çok işletme kararında uygulandığı görülmektedir.

MDP, stokastik bir karar probleminin modellenmesinde kullanılan ve ele alınan sorunda stokastik süreç olarak ortaya konan sistemin mevcut durumunun, ödüllerinin ve bir hareket alternatifi seçmek üzere yapılan gözlemin sadece mevcut duruma bağlı bulunduğu ve önceki durum ve hareketlerden bağımsız olduğu (sadece mevcut durum aracılığıyla bağlı olduğu) bir yaklaşımdır. MDP'ni diğer stokastik süreçlerden ayıran temel özelliği bu hafızasızlık özelliğidir.

MDP'nde her zaman periyodunda ele alınan sistem tek bir durumda olabilmektedir ve sistem gözlemlenerek mevcut duruma ilişkin olası hareket alternatiflerinden oluşan hareket kümesinden bir alternatif seçilmekte, bu seçimin sonucunda bir ödül ortaya çıkmakta ve sistem bir sonraki zaman periyodunda durum değiştirmekte diğer bir ifadeyle bir durumdan diğerine geçiş yapmakta ve sistemin bir sonraki duruma geçişine ilişkin olasılık değerleri de bu seçimden etkilenmektedir. Bu doğrultuda MDP bir sıralı karar problemidir ve durum, hareket, zaman periyodu, geçişler ve geçişlere ilişkin olasılıklar, ödüller, amaca ulaşmak üzere seçilen karar kuralı ve kararlar dizisini gösteren politika bileşenleri ile tanımlanmaktadır. Ödüller, kazanç ya da maliyet olabilmektedir. Süreci gözlemleyerek kontrol etmenin amacı her zaman periyodunda mevcut duruma ve alternatiflere göre bir tercih yapılması için politika belirlemektir. Bu politika doğrultusunda hareketler seçilerek sistemden elde edilen ödüllerle optimal sonuca ulaşılmaya çalışılmaktadır. Ele alınan zaman periyodları sonlu ya da sonsuza yaklaşabilen özellikte olduğunda, amaç, bu planlama dönemi boyunca beklenen toplam ödülün ya da paranın zaman değerini de dikkate alarak beklenen toplam indirgenmiş ödülün optimizasyonu olmaktadır. Ele alınan süreç sonsuz zaman periyoduna sahip ise bu durumda amaç beklenen toplam indirgenmiş ödülü ya da birim zamanda (1 zaman periyodunda) beklenen ortalama ödülü optimize etmektir. Tüm karar dönemlerinde sistem gözlemlenerek hareket alternatiflerinden seçim yapılabildiği gibi süreç içinde rassal olarak veya istenilen zamanda ya da sürekli olarak da karar verilebilmektedir. Diğer bir ifadeyle karar dönemleri kümesi kesikli ya da sürekli olabilmektedir.

Tek bir amaç söz konusu olduğunda, MDP olarak modellenen sorunların çözümünde sürecin yapısına bağlı olarak dinamik programlama, değer iterasyonu, politika iterasyonu ve doğrusal programlama (LP) gibi farklı yöntem ve yaklaşımlar kullanılabilmektedir. Belirlenen ödül kriteri doğrultusunda optimal politikanın bulunması için, sonlu zaman periyoduna sahip MDP'lerinde dinamik programlama yaklaşımı ve bu yaklaşıma dayalı olarak geliştirilmiş değer iterasyonu yöntemi, sonsuz zaman periyoduna sahip MDP'lerinde ise politika iterasyonu yöntemi ve LP yaklaşımı kullanılabilmektedir. Dinamik programlama yaklaşımında, belirli sayıda periyot sonucunda ele alınan sistemin beklenen getirisi Bellman'ın optimallik ilkesine dayanarak ve geçiş olasılıkları kullanılarak hesaplanmaktadır. Dinamik programlama yaklaşımına dayanarak geliştirilen değer iterasyonu yönteminde bu yaklaşımdan farklı olarak, bir duruma ilişkin farklı hareket alternatifleri için geçiş olasılıkları matrisinin ve ödül matrisinin farklı olması göz önünde bulundurularak dinamik programlamanın yineleme ilişkisi bu alternatifleri de ortaya koymaktadır. Howard tarafından ortaya konan, değer belirleme ve politika geliştirme yordamı olmak üzere 2 aşamadan oluşan politika iterasyonu yönteminin temeli, rastgele seçilen bir başlangıç politikasını her iterasyonda biraz daha iyileştirmektir. Bir önceki iterasyonla aynı karar vektörü seçildiğinde çözüm süreci sona ermektedir.

.

Bir tek amacın ele alındığı MDP'lerinin modellenmesinde kullanılan bir diğer yaklaşım belirtildiği gibi LP'dır. LP yaklaşımı çok geniş uygulama alanına sahip bir yönetim bilimi tekniğidir. Bir araştırma alanı olarak ilk kez II.Dünya Savaşı sıralarında ordudaki kararlara yönelik olarak Dantzig tarafından ortaya konan ve doğrusal kısıt seti ve karar değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonu ile formüle edilen LP modelinde amaç, bu fonksiyonun optimal değeri almasını sağlayan karar değişkeni değerlerini elde etmektir. Dantzig tarafından çözüm yöntemi olarak simpleks algoritmasının geliştirilmesi ile bu alandaki çalışmalar yoğunlaşmış ve LP yaklaşımının işletmecilik, petrol, eğitim gibi pek çok farklı alanda uygulamalar gerçekleştirilmiştir.

Literatürde yer alan çalışmalar incelendiğinde LP yaklaşımının; üretim ve işgücü planlarının yapılması, envanter kontrolü, bakım/onarım faaliyetlerinin çizelgelenmesi, iş-makine ve çalışan-iş atamalarının yapılması, hat dengeleme sorunları, işyeri düzeni sorunları, üretimde kullanılacak optimal hammadde miktarlarının belirlenmesi (ürün karışımı), satın al-üret kararları, ürün dağıtımı ve ulaştırma sorunları, tedarikçi seçimi, kapasite planlaması, proje yönetimi, işletme kaynaklarının optimal dağıtımının yapılması, yeni ürün geliştirme, reklam stratejilerinin belirlenmesi, bütçe ve finansal planlama süreçleri, fon yönetimi, bilanço yönetimi, yatırım portföyü oluşturulması ve portföy seçimi kararları, nakit yönetimi, optimal vergi paketinin ve politikalarının saptanması, bankaların kredi derecelendirme işlemleri gibi pek çok işletme sorununun çözülmesinde kullanıldığı görülmektedir.

LP yaklaşımı sonsuz zamanlı MDP'lerinin çözümünde de kullanılabilmekte ve karar vericilere çeşitli sistem kısıtlarını da LP modelinde ele alabilme imkanı sunmaktadır. MDP'lerinin LP ile çözülmesinde beklenen ortalama ödül kriterine göre, ergodik süreçlerin denge durumuna ulaşması durumunda ortaya çıkan denge durumu olasılıkları karar değişkenleri olarak tanımlanmakta ve modelin çözümü ile farklı durum ve bu durumların farklı hareket alternatifleri için denge durumu olasılıkları elde edilmektedir. Amaç, sürecin birim zamandaki beklenen ortalama kazancını ya da maliyetini optimize etmektir. Beklenen toplam indirgenmiş ödül kriteri kullanıldığında ise karar değişkenleri belirli sayıda periyot sonra sistemin bir $i$ durumunda olması ve $k$ hareketinin seçilmesine ilişkin ortak olasılıktır. MDP problemlerinin LP yaklaşımı ile çözülmesine ilişkin olarak yapılmış çalışmalarda, yöntemin üretim/envanter ve makine bakım/onarım/yenileme problemlerinde kullanıldığı görülmektedir.

İşletmelerin MDP olarak modellenen sorunlarında tek bir amacın ele alınması durumunda LP yaklaşımı yöneticilere soruna ilişkin çeşitli kısıtların da modele dahil edilmesiyle diğer yöntemlere kıyasla daha fazla esneklik sağlamaktadır fakat günümüzde artan rekabet işletmelerin sadece tek bir amaca değil birden fazla birbiriyle çatışan amaca odaklanmalarını zorunlu kılmaktadır. Bu doğrultuda karar verme sürecinde, birden fazla amacın tek bir yapı içerisinde ele alınabildiği çok amaçlı karar verme tekniklerinin kullanılması gerekmektedir. Hedef programlama

(GP) yaklaşımı da yöneticilere bu yapıyı sağlamaktadır. GP yaklaşımında birden fazla amaç eş zamanlı olarak ele alınmakta, karar verici tarafından her amaç için hedef değerleri belirlenmekte ve bu hedef değerlerinden aşağı (negatif) ve yukarı (pozitif) sapmaların toplamını minimize etmek amaçlanmaktadır. GP yaklaşımı hedeflerden sapmalara imkan vermektedir. Diğer bir ifadeyle GP ile tüm hedeflere mümkün olabildiğince yaklaşan çözümler elde edilmektedir. Ayrıca hedefler için öncelik hiyerarşisinin ortaya konması ile karar vericinin bu tercihleri de modele dahil edilebilmektedir. Öncelik hiyerarşisine göre, hedeflerden sapmalar en yüksek öncelikli hedefin sapmasından başlamak üzere minimize edilmeye çalışılmaktadır. Belirli öncelik düzeyindeki bir hedefe ulaşıldığında bir sonraki öncelik düzeyindeki hedef ele alınmaktadır. Bu yapısı itibariyle GP yaklaşımı tek amaçlı yaklaşımlara göre daha fazla esneklik sağlamaktadır.

GP yaklaşımı ilk olarak LP yaklaşımıyla elde edilen olursuz çözümleri ele almak üzere Charnes ve Cooper tarafından ortaya konmuştur. LP'de yer alan kısıtlar setinin tümünü sağlayan bir çözüm bulunamaması durumunda olursuz çözüm ortaya çıkmaktadır. Hedef kısıtları ile belirlenen değerlerden negatif ve pozitif sapmalar olanaklı olduğundan hiçbir hedefe ulaşılamıyor olsa bile olursuz çözüm ortaya çıkmamaktadır. Bu doğrultuda birden fazla amacın ele alınması gereken işletme sorunlarının çözümünde GP yaklaşımı hedeflerden sapmaları minimize eden çözümler çıkmasını sağlamaktadır. Charnes ve Cooper (1961)'ın GP kavramını ele aldığı ilk çalışmanın ardından; Ijiri, Lee, Arthur ve Ravindran, Ignizio, ve Olson'un çalışmaları ile tamsayılı, öncelikli gibi farklı GP yapıları ve çeşitli simpleks yöntemleri ortaya konmuştur. 1970'li yılların sonlarında bu alandaki uygulamalı çalışmalar artmaya başlamış ve günümüze kadar GP yaklaşımının işletmelerin; bütünleşik üretim planlarının hazırlanması, envanter kontrolü, kuruluş yeri seçimi, ulaştırma ve dağıtım sorunları, atama sorunları (makine-iş ve çalışan-iş atamaları), hat dengeleme sorunu, kalite kontrol sorunlarının çözümü, tedarikçi seçimi, partner işletme seçimi, projelerin değerlendirilmesi ile proje seçimi ve fonların projelere dağıtımı, ürün tasarımı, reklamlar için medya karmasının belirlenmesi, işletme kaynaklarının dağıtımı, personel seçimi, işgücü planlaması, çalışanların mesailerinin planlaması, performans değerlendirmesi, muhasebe faaliyetlerinin planlanması, bilanço yönetimi, yatırım planlaması, bütçelerin hazırlanması, bireysel ve kurumsal portföy yönetim kararları, uluslararası proje finansman stratejilerinin oluşturulması, ihracat planlaması gibi çeşitli sorun ve kararlarının modellenmesinde ve çözümünde kullanıldığı görülmektedir.

GP yaklaşımı birden fazla amacın bir arada ele alınabilmesini, hedeflerden sapmalara olanak vermesi ile olursuz çözümlerin ortadan kaldırılmasını, öncelik hiyerarşisinin belirlenmesi ile de hem karar vericinin tercihlerinin modele dahil edilmesini hem de farklı öncelik yapılarında modelin simule edilebilmesini sağlamaktadır. Bu doğrultuda çalışmada MDP yaklaşımı ile modellenen üretim/envanter sorunlarının çözümünde birden fazla amacın ele alınabildiği GP yaklaşımı kullanılmaktadır. Amaç, stokastik ve çok amaçlı karar sorunlarının modellenmesinde ve çözümünde MDP ile GP yaklaşımlarının bir arada kullanılması ile bütünleşik bir yapı oluşturmaktır.

MDP ile modellenen sorunların GP yaklaşımı ile ele alınmasına ilişkin olarak literatürde işgücü planlaması ve proje yönetimine yönelik birkaç çalışma olduğu görülmektedir. Çalışmada literatürde yer alan GP modelleri temel alınarak işletmelerin MDP ile modellenebilen stokastik üretim/envanter sorunlarının çözümü için öncelikli ve öncelikli olmayan GP modelleri önerilmiştir.

Önerilen modelin uygulanmasında otomotiv yan sanayinde yirmi yılı aşkın süredir faaliyet göstermekte olan bir işletmenin farklı modeller içinden en çok talep edilen ürününe ilişkin veriler ele alınmış ve üretim/envanter sistemi MDP olarak modellenmiştir. Ele alınan sorunda her ayın başında stokta bulundurulan ürün miktarı diğer bir ifadeyle başlangıç stoku MDP'nin durumları olarak tanımlanmış ve talebin Poisson dağılıma uyması ile durumlar arası geçişlere ilişkin olasılıklar dağılımdan faydalanarak elde edilmiştir. Üretimin partiler halinde gerçekleştirilmesi nedeniyle ve aylık stoklama kapasitesi doğrultusunda 3 duruma (0, 1 ya da 2 parti stok) sahip bir stokastik süreç ortaya konmuştur. İşletmenin her durumda seçebileceği olanaklı hareketler üretim miktarlarıdır, diğer bir ifadeyle sınırlı stoklama kapasitesine sahip işletme başlangıç stokuna bağlı olarak o ayda kaç parti üretmesi gerektiğine karar vermektedir. Her durum için bu hareket alternatifleri, üretim ve stoklama kapasitelerine bağlı olarak belirlenmiştir. Ele alınan sürecin durumlar arası geçiş yapması ile ortaya çıkan ödüller; üretim maliyetleri, stoklama maliyetleri, stoksuzluk maliyetleri ve satıştan elde edilen kazançtan oluşmaktadır. Geçişlerle ortaya çıkan ödüller birim maliyet ve kazanç verileri kullanılarak her durumun tüm hareket alternatifleri için Excel programında hesaplanmıştır.

Durumlar, geçiş olasılıkları, zaman periyodu, hareket alternatifleri, ödüller gibi MDP bileşenleri tanımlanan üretim/envanter sorununun çözümü için hem LP hem de GP yaklaşımları kullanılmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. İşletme yönetimi 3 farklı amacı ele almaktadır: satışlardan elde edilen beklenen aylık ortalama kazancın maksimizasyonu, beklenen aylık ortalama maliyetin minimizasyonu ve stoksuz kalma riskinin minimizasyonu. İşletmenin bu amaçlar için belirlediği hedef değerleri ve hesaplanan geçiş olasılıkları ve ödüller doğrultusunda LP ve GP modelleri formüle edilerek çözülmüştür. Modellerde yer alan karar değişkenleri markovian sürecin denge durumu olasılıklarıdır. Hedef kısıtlarının dışında modellerde yer alan diğer kısıtlar ise denge durumuna (her durum için) ve denge olasılıklarının toplamının 1 olmasına ilişkindir. Süreçte 3 durum ve her durum için 11 hareket alternatifi olması nedeniyle modellerde 33 değişken yer almaktadır.

Üç farklı amacın LP yaklaşımı ile ele alınabilmesi için her bir amaca yönelik ayrı ayrı LP modellerinin oluşturulması ve diğer iki amacın da gerçek kısıt olarak LP modelinde yer alması gerekmektedir. LP modellerinde 4’ü markov yapısına ilişkin ve 2’si hedef kısıtlarının gerçek kısıt olarak ortaya konması ile ortaya çıkan, toplam 6 kısıt bulunmaktadır. Bu doğrultuda üç amaç için ayrı ayrı LP modelleri formüle edilerek çözüldüğünde ise her üç problemde de olursuz çözüm ortaya çıkmıştır.

Kar hedefinden negatif, maliyet hedefinden ve stoksuz kalma olasılığına ilişkin hedeften de pozitif sapmaların ele alınarak bu sapmaların toplamının minimize edilmesi amaçlandığında yani GP yaklaşımı kullanıldığında ise olursuz çözüm sorunu ortadan kalkmaktadır. İşletme yöneticileriyle yapılan görüşmeler doğrultusunda amaçlara ilişkin hedef değerleri belirlenmiştir ve işletmenin bu 3 amacı için birbirine kıyasla çok büyük farklılık yaratan bir öncelik hiyerarşisi ortaya konmadığından önceliklerin belirlenmediği yapı ele alınmıştır.

Önceliksiz GP modelinin POM-QM for Windows 3.0. programının hedef programlama modülü kullanılarak çözülmesi sonucunda; işletmenin beklenen aylık ortalama 2100 YTL kazanç hedefine ve %10 stoksuzluk riski hedefine ulaşamadığı belirlenmiştir. İşletmenin hedeflediğinden yaklaşık olarak 764 YTL daha az kazanç elde etmesi ve stoksuz kalma riskinin de hedeflenenden %3 daha fazla olması beklenmektedir. Maliyet hedefi sağlanmakta ve hedeflenenden de yaklaşık 892 YTL daha az ortalama aylık maliyet ortaya çıkması beklenmektedir. Karar değişkenlerinin aldıkları değerlere göre uzun dönemde, işletmenin herhangi bir aya 0 stokla başlama olasılığı 0,13; 1 parti stokla başlama olasılığı 0,06 ve 2 parti stokla başlama olasılığı da 0,82’dir. Bu verilere göre 0 stokla döneme başlayan işletmenin 20 parti üretim yapması ve 1 ya da 2 stokla başladığında da 18 parti üretim yapması beklenmektedir.

İşletmenin MDP olarak modellenen üretim/envanter sorununa ilişkin olarak LP ve GP yaklaşımları ile elde edilen sonuçlar kıyaslanmak istendiğinde, birden fazla amaç ele alındığında LP yaklaşımında bir hedefin amaç ve diğer hedeflerin gerçek kısıtlar olarak ele alınması nedeniyle olursuz çözüm ortaya çıkabildiği görülmektedir. GP yaklaşımında ise sapmaların tanımlanması ile hedeflere tam ulaşamama söz konusu olduğunda bile olursuz çözüm sorunu olmamaktadır. Bu anlamda GP yaklaşımı karar vericilere bu tür çok amaçlı karar problemlerinin çözümünde önemli avantaj ve destek sağlamaktadır.

Çalışma ile, tüketici ihtiyaçlarının zamanında karşılanabilmesi ve maliyetler açısından işletmelerin rekabet avantajında büyük önem taşıyan üretim/envanter konusundaki kararlarının verilmesinde hem belirsizlik unsurunun ele alınmasına olanak sağlayan stokastik bir yaklaşımın hem de birden fazla amacın eş zamanlı olarak ele alınmasına olanak sağlayan çok amaçlı bir karar verme yaklaşımının bir arada kullanılmasına ilişkin model önerilmiş ve modelin uygulanabilirliği gerçek işletme verileri ile ortaya konmaya çalışılmıştır. İşletmelerin artan belirsizlik ve global rekabet ortamında üretim/envanter kararlarını vermelerinde MDP ve GP yaklaşımları bütünleşik olarak kullanılabilmektedir. Olasılıklı ve çok amaçlı yapıyı bir arada ele almayı sağlamasından dolayı önerilen modelin işletme yöneticilerine işgücü, pazarlama, finansman vb. konularla ilgili kararlarında da yardımcı olabileceği düşünülmektedir.

**KAYNAKLAR**

Advani, S. (1974). A Linear-Programming Approach to Air-Cleaner Design. *Operations Research*. 22(2): 295-297.

Agarwala, R., Goodson, G.C. (1970). A Linear Programming Approach to Designing an Optimum Tax Package. *Operational Research Quarterly*. 21(2): 181-192.

Ahmed, S. I. (2005). *Fuzzifying Markov Decision Process*. Yayınlanmamış Yükseklisans Tezi. Louisiana: Graduate Faculty of the Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College.

Ahn, H-S., Righter, R., Shanthikumar, J.G. (2005). Staffing Decisions for Heterogeneous Workers with Turnover, *Mathematical Methods of Operations Research*. 62(3): 499-514.

Akinyele, S.T. (2007). Determination of the Optimal Manpower Size Using Linear Programming Model. *Research Journal of Business Management*. 1(1): 30-36.

Albright, C., Winston, W. (1979). Markov Models of Advertising and Pricing Decisions, *Operations Research*. 27(4): 668-681.

Archibald, T.W., Sassen, S.A.E., Thomas, L.C. (1997). An Optimal Policy for a Two Depot Inventory Problem with Stock Transfer, *Management Science*. 43(2): 173-183.

Arenas P, M.M., Lafuente R, E., Rodriguez U, V.M. (1997). Goal Programming Model for Evaluating Hospital Service Performance. *Proceedings of the Second International Conference on Multi-Objective Programming and Goal Programming* (ss.57-65), Departamento de Economia Aplicada (Mathematicas) of the University of Malaga. Spain. 16-18 May 1996.

Arthur, J. L., Ravindran A. (1978). An Efficient Goal Programming Algorithm Using Constraint Partitioning and Variable Elimination. *Management Science*. 24(8): 867-868.

Aviv, Y., Federgruen, A. (2001). Capacitated Multi-Item Inventory Systems with Random and Seasonally Fluctuating Demands: Implications for Postponement Strategies. *Management Science*. 47(4): 512-531.

Ayomoh, M.K.O., Oke, S.A. (2006). A Framework for Measuring Safety Level for Production Environments. *Safety Sciences*. 44(3): 221-239.

Azaiez, M.N., Sharif, S.S.A. (2005). A 0-1 Goal Programming Model for Nurse Scheduling. *Computers and Operations Research*. 32(3): 491-507.

Azaron, A., Katagiri, H., Sakawa, M. (2007). Time-Cost Trade-off Via Optimal Control Theory in Markov PERT Networks. *Annals of Operations Research*. 150(1): 47-64.

Badri, M.A. (2001). A Combined AHP-GP model for Quality Control Systems. *International Journal of Production Economics*. 72(1): 27-40.

Badri, M.A., Davis, Donald., Davis, Donna. (2001). A Comprehensive 0-1 Goal Programming Model for Project Selection. *International Journal of Project Management*. 19(4): 243-252.

Baker, K.R., Taylor, R.E. (1979). A Linear Programming Framework for Cost Allocation and External Acquisition when Reciprocal Services Exist. *The Accounting Review*. 54(4): 784-790.

Barbosa, P.S.F., Pimentel, P.R. (2001). A Linear Programming Model for Cash Flow Management in the Brazilian Construction Industry. *Construction Management and Economics*. 19(5): 469-479.

Barsov, A.S. (1964). *What is Linear Programming?*. Translated and adapted from the firs Russian edition (1959) by Michale B.P.Slater and Daniel A.Levine, Boston: D.C. Heath and Company.

Beebe, J.H., Beightler, C.S., Stark, J.P. (1968). Stochastic Optimization of Production Planning. *Operations Research*. 16(4): 799-818.

Berman, O., Kim, E. (2004). Dynamic Inventory Strategies for Profit Maximization in a Service Facility with Stochastic Service, Demand and Lead Time, *Mathematical Methods of Operations Research*. 60(3): 497-521.

Berman, O., Sapna, K.P. (2001). Optimal Control of Service for Facilities Holding Inventory. *Computers and Operations Research*. 28(5): 429-441.

Bhatnagar, S., Gaucherand, E.F., Fu, M.C., He, Y., Marcus, S.I. A Markov Decision Process Model for Capacity Expansion and Allocation. *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control* (ss.1380-1385), Phoenix, Arizona USA. 7-10 Aralık 1999.

Bilgen, B., Özkarahan, İ. (2007). A Mixed-Integer Linear Programming Model for Bulk Grain Blending and Shipping. *International Journal of Production Economics*. 107(2): 555-571.

Blake, J.T., Carter, M.W. (2002). A Goal Programming Approach to Strategic Resource Allocation in Acute Care Hospitals. *European Journal of Operational Research*. 140(3): 541-561.

Bowman, E.H. (1960). Assembly-Line Balancing by Linear Programming. *Operations Research*. 8(3): 385-389.

Calvete, H.I., Gale, C., Oliveros, M-J., Sanchez-Valverde, B. (2007). A Goal Programming Approach to Vehicle Routing Problems with Soft Time Windows. *European Journal of Operational Research*. 177(3): 1720-1733.

Chan, G.K., Asgarpoor, S. (2006). Optimum Maintenance Policy with Markov Processes. *Electric Power Systems Research*. 76(6-7): 452-456.

Chandler, J.S. (1982). A Multiple Criteria Approach for Evaluating Information Systems. *MIS Quarterly*. 6(1): 61-74.

Charnes, A., Cooper, W.W., DeVoe, J.K., Learner, D.B., Reinecke, W. (1968). A Goal Programming Model for Media Planning. *Management Science*. 14(8): B423-B430.

Charnes, A., Cooper, W.W., Miller, M.H. (1959). Application of Linear Programming to Financial Budgeting and the Costing of Funds. *The Journal of Business*. 32(1): 20-46.

Chen, M., Wang, W. (1997). A Linear Programming Model for Integrated Steel Production and Distribution Planning. *International Journal of Operations and Production Management*. 17(6): 592-610.

Cheng, F., Sethi, S.P. (1999). A Periodic Review Inventory Model with Demand Influenced by Promotion Decisions. *Management Science*. 45(11): 1510-1523.

Cheng, L., Subrahmanian, E., Westerberg, A.W. (2003). Design and Planning Under Uncertainty: Issues on Problem Formulation and Solution. *Computers and Chemical Engineering*. 27(6): 781-801.

Cheng, L., Subrahmanian, E., Westerberg, A.W. (2004). Multi-Objective Decisions on Capacity Planning and Production-Inventory Control Under Uncertainty. *Industrial and Engineering Chemistry Research*. 43(9): 2192-2208.

Ching, W-K., Ng, M.K. (2006). *Markov Chains: Models, Algorithms and Applications*. USA: Springer.

Chvatal, V. (1983). *Linear Programming*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.

Cohen, K.J., Hammer, F.S. (1967). Linear Programming and Optimal Bank Asset Management Decisions. *The Journal of Finance*. 22(2): 147-165.

Collins, L. (1970). *Markov Chains and Industrial Migration: Forecasting Aspects of Industrial Activity in Ontorio Towns*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Toronto: University of Toronto School of Graduate Studies.

Coman, A., Ronen, B. (2000). Production Outsourcing: A Linear Programming Model for the Theory-Of-Constraints. *International Journal of Production Research*. 38(7): 1631-1639.

Cooper, L., Cooper, M. (1996). *Introduction to Dynamic Programming*. Hungary: Pergamon Press.

Copley, J.M., Corbett, A.J. (1988). The Minimization of Capital Gains Tax Liabilities by Linear Programming. *Journal of Operational Research Society*. 39(5): 437-446.

Cusack, M.M. (1985). The Use of Integer Linear Programming for Modelling Project Control Information. *Construction Management and Economics*. 3(2): 91-104.

Çebi, F., Bayraktar, D. (2003). An Integrated Approach for Supplier Selection. *Logistics Information Management*. 16(6): 395-400.

D'epenoux, F. (1963). A Probabilistic Production and Inventory Problem, *Management Science*. 10(1): 98-108.

Dantzig, G.B. (1998). *Linear Programming and Extensions*. New Jersey: Princeton University Press.

Dantzig, G.B. (2002). Linear Programming. *Operations Research*. 50(1): 42-47.

Demir, M.H. (1974). *Dinamik Programlama Modelleri Yardımıyla Üretim Kararlarında Minimum Maliyet Giderlerinin Hesaplanması*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, İzmir: Ege Üniversitesi: İ.İ.B.F.

Dempster, M.A.H., Hutton, J.P. (1999). Pricing American Stock Options by Linear Programming. *Mathematical Finance*. 9(3): 229-254.

Denardo, E.V. (1970). On Linear Programming in a Markov Decision Problem. *Management Science*. 16(5): 281-288.

Derman, C. (1962). On Sequential Decisions and Markov Chains. *Management Science*. 19(1): 16-24.

Derman, C., Klein, M. (1965). Some Remarks on Finite Horizon Markovian Decision Models. *Operations Research*. 13(2): 272-278.

Derman, C., Lieberman, G.J. (1967). A Markovian Decision Model for a Joint Replacement and Stocking Problem, *Management Science*. 13(9): 609-617.

Devries, M. (1963). *A Dynamic Model for Product Strategy Selection*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Michigan: The University of Michigan Institute of Science and Technology, Industiral Development Research Program.

Durinovic, S., Lee, H.M., Katehakis, M.N., Filar, J.A. (1986). Multiobjective Markov Decision Process with Average Reward Criterion. *Large Scale Systems*. 10(3): 215-226.

Dutta, G., Sinha, G.P., Roy, P.N., Mitter, N. (1994). A Linear Programming Model for Distribution of Electrical Energy in a Steel Plant. *International Transactions in Operational Research*. 1(1): 17-29.

Fabozzi, F.J., Daddio, R. (1977). A Linear Programming Salary Evaluation Model for High School Personnel. *Operations Research Quarterly*. 28(2)Part2: 401-413.

Feiring, B.R. (1986). *Linear Programming: An Introduction*. Beverly Hills: Sage Publications.

Fetter, R.B. (1961). A Linear Programming Model for Long Range Capacity Planning. *Management Science*. 7(4): 372-378.

Fuller, J.A. (1975). A Linear Programming Approach to Aggregate Scheduling. *The Academy of Management Journal*. 18(1): 129-136.

Furukawa, N. (1980). Characterization of Optimal Policies in Vector-Valued Markov Decision Processes. *Mathematics of Operations Research*. 5(2): 271-279.

Gagnon, R.J., Sheu, C. (1997). A Strategic MIGP Model for Acquiring Advanced Technologies. *Computers and Industrial Engineering*. 32(1): 145-168.

Gans, N., Zhou, Y-P. (2002). Managing Learning and Turnover in Employee Staffing. *Operations Research*. 50(6): 991-1006.

Gass, S.I. (1975). *Linear Programming: Methods and Applications*. Fourth Edition, Tokyo: McGraw-Hill.

Georgiou, A.C. (1999). Aspirations and Priorities in a Three Phase Approach of a Nonhomogeneous Markov System. *European Journal of Operational Research*. 116(3): 565-583.

Georgiou, A.C., Tsantas, N. (2002). Modelling Recruitment Training in Mathematical Human Resource Planning. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*. 18(1): 53-74.

Ghellinck, G.T.D., Eppen, G.D. (1967). Linear Programming Solutions for Separable Markovian Decision Problems. *Management Science*. 13(5): 371-394.

Ghodsypour, S.H., Brien, C.O. (1998). A Decision Support System for Supplier Selection Using an Integrated Analytic Hierarchy Process and Linear Programming. *International Journal of Production Economics*. 56-57(1): 199-212.

Giannikos, I., El-Darzi, E., Lees, P. (1995). An Integer Goal Programming Model to Allocate Offices to Staff in an Academic Institutions. *Journal of Operational Research Society*. 46(6): 713-720.

Golany, B., Yadin, M., Learner, O. (1991). A Goal Programming Inventory Control Model Applied at a Large Chemical Plant. *Production and Inventory Management Journal*. 32(1): 16-23.

Gosavi, A. (2003). *Control Optimization with Stochastic Dynamic Programming*. http://www.eng.buffalo.edu/~agosavi/chapdp.pdf. (08.08.2004).

Goto, J.H., Lewis, M.E., Puterman, M.L. (2004). Coffee, Tea, or…?: A Markov Decision Process Model for Airline Meal Provisioning. *Transportation Science*. 38(1): 107-118.

Gökçen, H., Ağpak, K. (2006). A Goal Programming Approach to Simple U-Line Balancing Problem. *European Journal of Operational Research*. 171(2): 577-585.

Gökçen, H., Erel, E. (1997). A Goal Programming Approach to Mixed-Model Assembly Line Balancing Problem. *International Journal of Production Economics*. 48(2): 177-185.

Grant, E.W., Hendon, F.N. (1987). An Application of Linear Programming in Hospital Resource Allocation. *Journal of Health Care Marketing*. 7(3): 69-72.

Güven, S., Persentili, E. (1997). A Linear Programming Model for Bank Balance Sheet Management. *Omega The International Journal of Management Science*. 25(4): 449-459.

Hajidimitriou, Y.A., Georgiou, A.C. (2002). A Goal Programming Model for Partner Selection Decisions in International Joint Ventures. *European Journal of Operational Research*. 138(3): 649-662.

Halaç, O. (2001). *Kantitatif Karar Verme Teknikleri (Yöneylem Araştırmasına Giriş)*. İstanbul: Alfa Basım Yayım Dağıtım.

Han, B.S., Chen, S.K., Ebrahimpour, M., Sodhi, M.S. (2001). A Conceptual QFD Planning Model. *International Journal of Quality and Reliability Management*. 18(8): 796-812.

Hanssmann, F., Hess, S.W. (1960). A Linear Programming Approach to Production and Employment Scheduling. *Management Technology*. 1(1): 46-51.

Hardy, W.E., Adrian, J.L. (1985). A Linear Programming Alternative to Discriminant Analysis in Credit Scoring. *Agribusiness*. 1(4): 285-292.

Hemaida, R.S., Kwak, N.K. (1994). A Linear Goal Programming Model for Trans-Shipment Problems with Flexible Supply and Demand Constraints. *Journal of Operational Research Society*. 45(2): 215-224.

Henig, M.I. (1983). Vector-Valued Dynamic Programming. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 21(3): 490-499.

Herniter, J.D., Magee, J. (1961). Customer Behavior as a Markov Process. *Operations Research*. 9(1): 105-122.

Hill, R.M., Johansen, S.G. (2006). Optimal and Near-Optimal Policies for Lost Sales Inventory Models with at Most One Replenishment Order Outstanding. *European Journal of Operational Research*. 169(1): 111-132.

Hillier, F.S., Lieberman, G.J. (1990). *Introduction to Stochastic Models in Operations Research*. USA: McGraw-Hill Publishing Company.

Hillier, F.S., Lieberman, G.J. (2001). *Introduction to Operations Research*. Seventh Edition, New York: McGraw-Hill.

Hinomoto, H. (1971a). Selective Control Independent Activities: Linear Programming of Markovian Decisions. *Management Science*. 18(1): 88-96.

Hinomoto, H. (1971b). Sequential Control of Homogeneous Activities-Linear Programming of Semi-Markovian Decisions. *Operations Research*. 19(7): 1664-1674.

Hofflander, A.E., Drandell, M. (1969). A Linear Programming Model of Profitability, Capacity and Regulation in Insurance Management. *The Journal of Risk and Insurance*. 36(1): 41-54.

Hoffman, J.J., Schniederjans, M.J. (1996). A Two-Stage Model for Structuring Global Facility Site Selection Decisions: The Case of the Brewing Industry. *Facilities*. 14(12/13): 23-34.

Hoffman, J.J., Schniederjans, M.J., Flynn, L. (1996). Test Market City Evaulation: A Goal Programming Approach. *Journal of Product and Brand Management*. 5(3): 24-33.

Hordijk, A., Kallenberg, C.M. (1979). Linear Programming and Markov Decision Chains. *Management Science*. 25(4): 352-362.

Howard, R.A. (1960). *Dynamic Programming and Markov Processes*. USA: M.I.T. Press.

Hu, Q., Yue, W. (2003). Optimal Replacement of a System According to a Semi-Markov Decision Process in a Semi-Markov Environment, *Optimization Methods and Software.* 18(2): 181-196.

Huq, F., Cutright, K., Martin, C. (2004). Employee Scheduling and Makespan Minimization in a Flow Shop with Multi-Processor Work Stations: A Case Study. *Omega The International Journal of Management Science*. 32(2): 121-129.

Ignizio, J.P. (1978). A Review of Goal Programming: A Tool for Multiobjective Analysis. *Journal of Operational Research Society*. 29(11): 1109-1119.

Ijiri, Y., Levy, F.K., Lyon, R.C. (1963). A Linear Programming Model for Budgeting and Financial Planning. *Journal of Accounting Research*. 1(2): 198-212.

Iravani, S.M.R., Duenyas, I., Olsen, T.L. (2000). A Production/Inventory System Subject to Failure with Limited Repair Capacity, *Operations Research.* 48(6): 951-964.

Jaaskelainen, V. (1969). A Goal Programming Model of Aggregate Production Planning. *The Swedish Journal of Economics*. 71(1): 14-29.

Jayakumar, A., Asgarpoor, S. (2006). Maintenance Optimization of Equipment by Linear Programming. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 20(1): 183-193.

Jonker, J-J., Piersma, N., Potharst, R. (2006). A Decision Support System for Direct Mailing Decisions, *Decision Support Systems*. 42(2): 915-925.

Kalu, T.Ch.U. (1994). Determining the Impact of Nigeria's Economic Crisis on the Multinational Oil Companies: A Goal Programming Approach. *The Journal of the Operational Research Society*. 45(2): 165-177.

Kalu, T.Ch.U. (1999). Capital Budgeting Under Uncertainty: An Extended Goal Programming Approach. *International Journal of Production Economics*. 58(3): 235-251.

Keown, A., Taylor III, B. (1980). A Chance-Constrained Integer Goal Programming Model for Capital Budgeting in the Production Area. *Journal of Operational Research Society*. 31(7): 579-589.

Khorramshahgol, R., Steiner, H.M. (1988). Resource Analysis in Project Evaluation: A Multicriteria Approach. *Journal of Operational Research Society*. 39(9): 795-803.

Kijima, M. (1997). *Markov Processes for Stochastic Modeling*. Great Britain: Chapman&Hall.

Killough, L.N., Souders, T.L. (1973). A Goal Programming Model for Public Accounting Firms. *The Accounting Review*. 48(2): 268-279.

King, I. (2002). *A simple Introduction to Dynamic Programming in Macro Economics Models*. New Zealand: Department of Economics University of Auckland.

Kislev, Y., Amiad, A. (1968). Linear and Dynamic Programming in Markov Chains. *American Journal of Agricultural Economics*. 50(1): 111-129.

Klein, M. (1962). Inspection-Maintenance-Replacement Schedules Under Markovian Deterioration. *Management Science*. 9(1): 25-32.

Klein, M. (1966). Markovian Decision Models for Reject Allowance Problems. *Management Science*. 12(5): 349-358.

Kolesar, P. (1966). Minimum Cost Replacement Under Markovian Deterioration, *Management Science.* 12(9): 694-706.

Kolesar, P. (1967). Randomized Replacement Rules Which Maximize the Expected Cycle Length of Equipment Subject to Markovian Deterioration. *Management Science*. 13(11): 867-876.

Kolesar, P. (1970). A Markovian Model for Hospital Admission Scheduling, *Management Science.* 16(6): B384-B396.

Kolman, B., Beck, R. (1995). *Elementary Linear Programming with Applications*. Second Edition, USA: Academic Press.

Konarzewska, E., Zajaczkowski, A. (1997). Goal Programming in Distribution System Design. *Proceedings of the Second International Conference on Multi-Objective Programming and Goal Programming* (ss.93-101), Departamento de Economia Aplicada (Mathematicas) of the University of Malaga. Spain. 16-18 May 1996.

Kornbluth, J.S.H. (1981). Aggregate Manpower Planning Using a Markovian Goal Programming Approach. *The Journal of the Operational Research Society*. 32(10): 940-943.

Kristensen, A.R. (1996), Dynamic Programming and Markov Decision Processes. http://www.jbs.agrsci.dk/~ejo/nova/notat48.pdf. (18.04.2006).

Kuo, Y. (2006). Optimal Adaptive Control Policy for Joint Machine Maintenance and Product Quality Control. *European Journal of Operational Research*. 171(2): 586-597.

Kwak, N.K., Lee, C.W. (1997). A Linear Goal Programming Model for Human Resource Allocation in a Health-Care Organization. *Journal of Medical Systems*. 21(3): 129-140.

Kwak, N.K., Lee, C.W., Kim, J.H. (2005). An MCDM Model for Media Selection in the Dual Consumer/Industrial Market. *European Journal of Operational Research*. 166(1): 255-265.

Land, A.H. (1957). An Application of Linear Programming to the Transport of Coking Coal. *Journal of the Royal Statistical Society*. 120(3): 308-319.

Lee, J.W., Kim, S.H. (2000). Using Analytic Network Process and Goal Programming for Interdependent Information System Project Selection. *Computers and Operations Research*. 27(4): 367-382.

Lee, S.M. (1979). *Goal Programming Methods for Multiple Objective Integer Programs*. OR Monograph Series No:2, Atlanta: American Institute of Industrial Engineers Inc.

Lee, S.M., Eom, H.B. (1989). A Multi-Criteria Approach to Formulating International Project-Financing Strategies. *Journal of Operational Research Society*. 40(6): 519-528.

Lee, S.M., Moore, L.J. (1975). *Introduction to Decision Science*. New York: Petrocelli/Charter.

Lee, S.M., Nicely, R.E. (1974). Goal Programming for Marketing Decisions: A Case Study. *Journal of Marketing*. 38(1): 24-32.

Lee, S.M., Schniederjans, M.J. (1983). A Multicriteria Assignment Problem: A Goal Programming Approach. *Interfaces*. 13(4): 75-81.

Leung, S.C.H., Wu, Y., Lai, K.K. (2006). Cross-Border Logistics with Fleet Management: A Goal Programming Approach. *Computers and Industrial Engineering*. 50(3): 263-272.

Levary, R., Choi, T.S. (1983). A Goal Programming Model for Planning the Exports of Emerging Countries. *Journal of Operational Research Society*. 34(11): 1057-1067.

Li, N., Li, L.X. (2000). Modeling Staffing Flexibility: A Case of China. *European Journal of Operational Research*. 124(2): 255-266.

Lin, S-J., Wei, C-C. (2005). A Study on the Linear Programming in Time Cost Analysis of Product Improve Design-A Focus on Computer Mouse Products. *The Journal of American Academy of Business*. 7(2): 182-186.

Liu, Q-S., Ohno, K. (1992). Multiobjective Undiscounted Markov Renewal Program and its Application to a Tool Replacement Problem in an FMS. *Information and Decision Technologies*. 18(1): 67-77.

Liu, Q-S., Ohno, K., Nakayama, H. (1992). Multi-objective Discounted Markov Decision Processes with Expectation and Variance Criteria. *International Journal of Systems Science*. 23(6): 903-914.

Lockett, A.G., Muhlemann, A.P. (1978). A Problem of Aggregate Scheduling An Application of Goal Programming. *International Journal of Production Research*. 16(2): 127-135.

Loomba, N.P. (1964). *Linear Programming: An Introductory Analysis*. USA: McGraw-Hill.

Madani, O. (2000). *Complexity Results for Infinite-Horizon Markov Decision Processes*, Yayınlanmamış Doktora Tezi. USA: University of Washington.

Maffei, R.B. (1960). Brand Preferences and Simple Markov Processes. *Operations Research*. 8(2): 210-218.

Manne, A.S. (1960). Linear Programming and Sequential Decisions. *Management Science*. 6(3): 259-267.

Mathirajan, M., Ramanathan, R. (2007). A (0-1) Goal Programming Model for Scheduling the Tour of a Marketing Executive. *European Journal of Operational Research*. 179(2): 554-566.

Matthews, C.H. (2005). Using Linear Programming to Minimize the Cost of Nurse Personnel. *Journal of Health Care Finance*. 32(1): 37-49.

Michnik, J., Trzaskalik, T. (1997). Linear Goal Programming Model for Managing Balance Sheet of a Commercial Bank. *Multiple Criteria Decision Making, Proceedings of the Twelfth International Conference* (ss.661-666), Hagen, Germany, 1997.

Miller, B.L. (1969). A Queueing Reward System with Several Customer Classes, *Management Science*. 16(3): 234-245.

Mine, H., Osaki, S. (1970). *Markovian Decision Processes*. New York: Elsevier Publishing Company Inc.

Minner, S., Silver, E.A. (2005). Multi-Product Batch Replenishment Strategies Under Stochastic Demand and a Joint Capacity Constraint, *IIE Transactions*. 37(5): 469-479.

Monahan, G.E. (1983). Optimal Advertising with Stochastic Demand. *Management Science*. 29(1): 106-117.

Monahan, G.E. (1984). A Pure Birth Model of Optimal Advertising with Word-of-Mouth, *Marketing Science*. 3(2): 169-178.

Morris, J.G. (1973). A Linear Programming Approach to the Solution of Constrained Multi-Facility Minimax Location Problems where Distances are Rectangular. *Operational Research Quarterly*. 24(3): 419-435.

Moustafa, M.S., Maksoud, A.E.Y., Sadek, S. (2004). Optimal Major and Minimal Maintenance Policies for Deteriorating Systems. *Reliability Engineering and System Safety*. 83(3): 363-368.

Mrkaic, M. (2002). Policy Iteration Accelerated with Krylov Methods. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 26(4): 517-545.

Nair, S.K. (1995). Modeling Strategic Investment Decisions under Sequential Technological Change, *Management Science*. 41(2): 282-297.

Nakashima K., Arimitsu, H., Nose, T., Kuriyama, S. (2004). Optimal Control of a Remanufacturing System, *International Journal of Production Research*. 42(17): 3619-3625.

Nazareth, J.L., Kulkarni, R.B. (1986). Linear Programming Formulations of Markov Decision Processes. *Operations Research Letters*. 5(1): 13-16.

Nepal, B., Monplaisir, L., Singh, N. (2006). A Methodology for Integrating Design for Quality in Modular Product Design. *Journal of Engineering Design*. 17(5): 387-409.

Nollau, V. (1996). The Bellman Equation for Vector-Valued Semi-Markovian Dynamic Programming. *Optimization*. 38(1): 85-92.

Olson, D. (1984). Comparison of Four Goal Programming Algorithms. *Journal of Operational Research Society*. 35(4): 347-354.

Özdemir, A. (2004). *Yönetsel Karar Verme Sürecinde Dinamik Amaç Programlama Yaklaşımı ve Bir Uygulama*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Parzen, E. (1962). *Stochastic Processes*. USA: Holden-Day Inc.

Patrascu, R-E. (2004). *Linear Approximations for Factored Markov Decision Processes*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Canada: University of Waterloo.

Perez, S.J. (1985). *Multiple Objective Decision Making Using Goal Programming Techniques: An Interactive Microcomputer Approach*, Yayınlanmamış Doktora Tezi. Texas: Graduate College of Texas A&M University.

Pfeifer, P.E., Carraway, R.L. (2000). Modeling Customer Relationships as Markov Chains, *Journal of Interactive Marketing*. 14(2): 43-55.

Powell, J.G., Premachandra, I.M. (1998). Accommodating Diverse Institutional Investment Objectives and Constraints Using Non-Linear Goal Programming. *European Journal of Operational Research*. 105(3): 447-456.

Puelz, A.V., Lee, S.M. (1992). A Multiple-Objective Programming Technique for Structuring Tax-Exempt Serial Revenue Debt Issues. *Management Science*. 38(8): 1186-1200.

Puterman, L. (1994). *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming*. UK: John Wiley&Sons Inc.

Ravindran, A., Phillips, D.T., Solberg, J.J. (1987). *Operations Research: Principles and Practice*. Second Edition, USA: John Wiley and Sons Inc.

Rifai, A., Hanna, N. (1975). Planning the Media Mix Through Goal Programming. *American Economist*. 19(2): 21-26.

Ronn, E.I. (1987). A New Linear Programming Approach to Bond Portfolio Management. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 22(4): 439-466.

Rosenthal, R.E., White, J.A., Young, D. (1978). Stochastic Dynamic Location Analysis, *Management Science*. 24(6): 645-653.

Saatçioğlu, Ö. (1987). A Multi-Attribute Assignment Goal-Programming Model with Incentives. *Journal of Operational Research Society*. 38(4): 361-365.

Salvia, A., Ludwig, W.R. (1979). An Application of Goal Programming at Lord Corporation. *Interfaces*. 9(4): 129-133.

Saydam, C., Cooper, W.D. (2002). A Decision Support System for Scheduling Jobs on Multi-Port Dyeing Machines. *International Journal of Operations and Production Management*. 22(9): 1054-1065.

Schmee, J., Hannan, E., Mirabile, M.P. (1979). An Examination of Patient Referral and Discharge Policies Using a Multiple Objective Semi-Markov Decision Process. *The Journal of Operational Research Society*. 30(2): 121-129.

Schniederjans, M.J. (1995). *Goal Programming: Methodology and Applications*. London: Springer.

Schniederjans, M.J., Garvin, T. (1997). Using the Analytic Hierarchy Process and Multi-Objective Programming for the Selection of Cost Drivers in Activity-Based Costing. *European Journal of Operational Research*. 100(1): 72-80.

Schniederjans, M.J., Kwak, N.K. (1982). An Alternative Solution Method for Goal Programming Problems: A Tutorial. *Journal of Operational Research Society*. 33(3): 247-251.

Schniederjans, M.J., Kwak, N.K., Helmer, M.C. (1982). An Application of Goal Programming to Resolve a Site Location Problem. *Interfaces*. 12(3): 65-72.

Schrage, L. (1984). *Linear, Integer, and Quadratic Programming with Lindo*. USA: Scientific Press.

Selen, W., Hott, D. (1986). A Mixed-Integer Goal-Programming Formulation of the Standard Flow-Shop Scheduling Problem. *Journal of Operational Research Society*. 37(12): 1121-1128.

Sengupta, S. (1981). Goal Programming Approach to a Type of Quality Control Problem. *Journal of Operational Research Society*. 32(3):207-211.

Sharpe, W.F. (1967). A Linear Programming Algorithm for Mutual Fund Portfolio Selection. *Management Science*. 13(7): 499-510.

Sierksma, G. (2001). *Linear and Integer Programming: Theory and Practice*. Second Edition, New York: Marcel Dekker Inc.

Singh, N., Agarwal, S.K. (1983). Optimum Design of an Extended Octagonal Ring by Goal Programming. *International Journal of Production Research*. 21(6): 891-898.

Sloan, TW. (2004). A Periodic Review Production and Maintenance Model with Random Demand, Deteriorating Equipment, and Binomial Yield, *Journal of the Operational Research Society*. 55(6): 647-656.

Song, H., Liu, C-C., Lawarree, J., Dahlgren, R.W. (2000). Optimal Electricity Supply Bidding by Markov Decision Process. *Transactions on Power Sysytems*. 15(2): 618-624.

Spitter, J.M., Hurkens, C.A.J., Kok, A.G.D., Lenstra, J.K., Negenman, E.G. (2005). Linear Programming Models with Planned Lead Times for Supply Chain Operations Planning. *European Journal of Operational Research*. 163(3): 706-720.

Spronk, J. (1981). *Interactive Multiple Goal Programming: Applications to Financial Planning*. USA: Martinus Nijhoff Publishing.

Stafford, E.F. (1988). On the Development of a Mixed-Integer Linear Programming Model for the Flowshop Sequencing Problem. *Journal of Operational Research Society*. 39(12): 1163-1174.

Stapleton, D.M., Hanna, J.B., Markussen, D. (2003). Marketing Strategy Optimization: Using Linear Programming to Establish an Optimal Marketing Mixture. *American Business Review*. 21(2): 54-62.

Stone, B.K. (1973). A Linear Programming Formulation of the General Portfolio Selection Problem. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 8(4): 621-636.

Summers, E.L. (1972). The Audit Staff Assignment Problem: A Linear Programming Analysis. *The Accounting Review*. 47(3): 443-453.

Taha, H.A. (1997). *Operations Research: An Introduction*. Sixth Edition, USA: Prentice-Hall Inc.

Tahar, D.N., Yalaoui, F., Chu, C., Amodeo, L. (2006). A Linear Programming Approach for Identical Parallel Machine Scheduling with Job Splitting and

Sequence-Dependent Setup Times. *International Journal of Production Economics*. 99(1-2): 63-73.

Talluri, S., Baker, R.C., Sarkis, J. (1999). A Framework for Designing Efficient Value Chain Networks. *International Journal of Production Economics*. 62(1-2): 133-144.

Tamiz, M., Hasham, R., Jones, D.F., Hesni, B., Fargher, E.K. (1996). *A Two-Staged Goal Programming Model for Portfolio Selection*. Multi-Objective Programming and Goal Programming Theories and Applications (ss.286-299). Germany: Springer-Verlag.

Tamiz, M., Jones, D., Romero, C. (1998). Goal Programming for Decision Making: An Overview of the Current State-of-the-Art. *European Journal of Operational Research*. 111(3): 569-581.

Tamiz, M., Jones, D.F. (1996). *An Overview of Current Solution Methods and Modelling Practices in Goal Programming*. Multi-Objective Programming and Goal Programming Theories and Applications (ss.198-211). Germany: Springer-Verlag.

Tamiz, M., Jones, D.F. (1997). An Example of Good Modelling Practice in Goal Programming: Means for Overcoming Incommensurability. *Proceedings of the Second International Conference on Multi-Objective Programming and Goal Programming* (ss.29-37), Departamento de Economia Aplicada (Mathematicas) of the University of Malaga. Spain. 16-18 May 1996.

Tapia, C.G., Murtagh, B.A. (1992). A Markovian Process in Interactive Multiobjective Decision-Making. *European Journal of Operational Research*. 57(3): 421-428.

Taylor III, B.W., Moore, L.J., Clayton, E.R. (1982). R&D Project Selection and Manpower Allocation with Integer Nonlinear Goal Programming. *Management Science*. 28(10): 1149-1158.

Tektaş, A., Özkan-Günay, E.N., Günay, G. (2005). Asset and Liability Management in Financial Crisis. *The Journal of Risk Finance*. 6(2): 135-149.

Thomas, J. (1971). Linear Programming Models for Production-Advertising Decisions. *Management Science*. 17(8): B474-B484.

Trivedi, V.M. (1981). A Mixed-Integer Goal Programming Model for Nursing Service Budgeting. *Operations Research*. 29(5): 1019-1034.

Trzaskalik, T. (1998). *Multiobjective Analysis in Dynamic Environment*. Katowice: The Karol Adamiecki University of Economics Press.

Tütek, H., Gümüşoğlu, Ş. (2005). *Sayısal Yöntemler: Yönetsel Yaklaşım*. 4. Baskı, İstanbul: Beta Basım Yayım.

Vanguri, U.P. (1998). *Goal Programming for Pension Fund Portfolio Modeling*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Manitoba: University of Manitoba The Warren Centre for Actuarial Studies and Research.

Venkatesan, M. (1984). Production-Inventory with Equipment Replacement-PIER, *Operations Research.* 32(6): 1286-1295.

Vericourt, F.D., Karaesmen, F., Dallery, Y. (2000). Dynamic Scheduling in a Make-To-Stock System: A Partial Characterization of Optimal Policies, *Operations Research*. 48(5): 811-819.

Vericourt, F.D., Zhou, Y-P. (2005). Managing Response Time in a Call-Routing Problem with Service Failure, *Operations Research*. 53(6): 968-981.

Viswanathan, B., Aggarwal, V.V., Nair, K.P.K. (1977). Multiple Criteria Markov Decision Processes. *TIMS Studies in the Management Sciences*. 6: 263-272.

Wadhwa, V., Ravindran, A.R. (2007). Vendor Selection in Outsourcing. *Computers and Operations Research*. 34(12): 3725-3737.

Wagner, H.M. (1959). Linear Programming Techniques for Regression Analysis. *Journal of the American Statistical Association*. 54(285): 206-212.

Wagner, H.M., Giglio, R.J., Glaser, G.R. (1964). Preventive Maintenance Scheduling by Mathematical Programming. *Management Science*. 10(2): 316-334.

Wakuta, K. (2001). A Multi-Objective Shortest Path Problem. *Mathematical Methods of Operations Research*. 54(3): 445-454.

Wakuta, K., Togawa, K. (1998). Solution Procedures for Multi-Objective Markov Decision Processes. *Optimization*. 43(1): 29-46.

Wein, A.S. (1992). Random Yield, Rework and Scrap in a Multistage Batch Manufacturing Environment. *Operations Research*. 40(3): 551-563.

Whan, B.M., Scott, C.H., Jefferson, T.R. (1978). A Stochastic Model of Sugar Cane Crop Rotation. *Journal of Operational Research Society*. 29 (4): 341-348.

White, C.C., Kim, K.W. (1980). Solution Procedures for Vector Criterion Markov Decision Processes. *Large Scale Systems*. 1: 129-140.

White, D.J. (1969). *Dynamic Programming*. California: Holden-Day Inc.

White, D.J. (1982a). Multi-objective Infinite-Horizon Discounted Markov Decision Processes. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 89(2): 639-647.

White, D.J. (1982b). A Multi-objective Version of Bellman's Inventory Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 87(1): 219-227.

White, D.J. (1985). Real Applications of Markov Decision Processes. *Interfaces*. 15(6): 73-83.

White, D.J. (1988). Further Real Applications of Markov Decision Processes. *Interfaces*. 18(5): 55-61.

White, D.J. (1993). A Survey of Applications of Markov Decision Processes, *The Journal of the Operations Research Society*. 44(11): 1073-1096.

Wiering, M.A., Jong, E.D.D. (2007). Computing Optimal Stationary Policies for Multi-Objective Markov Decision Processes. *Proceedings of the 2007 IEEE Symposium on Approximate Dynamic Programming and Reinforcement Learning* (ss.158-165), Honolulu, Hawai, USA.

Winston, W.L. (2004). *Operations Research-Applications and Algorithms.* Fourth Edition, USA: Brooks/Cole.

Wolfe, P., Dantzig, G.B. (1962). Linear Programming in a Markov Chain. *Operations Research*,. 10(5): 702-710.

Wright, E.A. (1996). *Planning with Linear Programming: A Practical Approach with the Program LP-Tools*. Netherlands: Balkema Publishers.

Yates, C.M., Rehman, T. (1998). A Linear Programming Formulation of the Markovian Decision Process Approach to Modelling the Dairy Replacement Problem. *Agricultural Systems*. 58(2): 185-201.

Yazgaç, T., Özdemir, R.G. (2004). A Cutting Sequencing Approach to Modular Manufacturing. *Journal of Manufacturing Technology Management*. 15(1): 20-28.

Young, M.R. (1998). A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming. *Management Science*. 44(5): 673-683.

Yüksek Özdemir, A. (2004). *Markov Analizi İle İşletmelerdeki Tahminleme Sorunlarının Çözümü ve Bir Uygulama*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Zadeh, M.Y. (2002). A Linear Programming Framework for Flexible Budgeting and its Application to Classroom Teaching. *Issues in Accounting Education*. 17(1): 69-93.

Zanakis, S.H., Maret, M.W. (1980). A Markov Chain Application to Manpower Supply Planning, *Journal of Operational Research Society*. 31(12): 1095-1102.

Zanakis, S.H., Maret, M.W. (1981). A Markovian Goal Programming Approach to Aggregate Manpower Planning. *The Journal of the Operational Research Society*. 32(1): 55-63.

Zolfaghari, S., Jaber, M.Y., Hamoudi, H. (2004). A Goal Programming Approach for a Multi-Period Task Assignment Problem. *Infor*. 42(4): 299-309.

# EKLER

**EK 1. Çalışmada Kullanılan Notasyon**

$X_t$ : Rassal değişken

$t$ : Zaman birimi (periyot)

$T$ : Karar dönemleri kümesi

$S$ : Durumlar kümesi (durum uzayı)

$A_i$ : *i* durumunda seçilebilecek hareketlerin kümesi

$A$ : Hareket uzayı

$p_{ij}^k$ : *i* durumunda iken *k* hareketinin seçilmesiyle sistemin *j* durumuna geçiş yapma olasılığı

$P$ : Geçiş olasılıkları matrisi

$r_{ij}$ : *i* durumundan *j* durumuna geçişle elde edilen ödül (maliyet ya da kazanç)

$r_{ij}^k$ : *k* alternatifinin seçilmesi halinde *i* durumundan *j* durumunda geçişle elde edilen ödül

$R$ : Ödül matrisi

$d$ : Karar vektörü

$\pi$ : Politika (karar kuralları dizisi)

$q_i$ : Durum *i*'den olacak bir sonraki geçişten beklenen ödül

$q_i^k$ : *i* durumunda *k* alternatifini kullanmanın beklenen ödülü (bu alternatifin kullanımıyla bir sonraki geçişten beklenen ödül)

$w_i^k$ : *i* durumunda *k* alternatifini kullanmanın beklenen kazancı

$c_i^k$ : *i* durumunda *k* alternatifini kullanmanın beklenen maliyeti

$v_i(n)$ : Durum *i*'de olan sistemin gelecek *n* geçişinden beklenen toplam getirisi

$\beta$ : İndirgeme faktörü

$g$ : Sistemin ortalama getirisi

$\Pi$ : Denge durumu vektörü

$c_j$ : Amaç fonksiyonu katsayısı

$x_j$ : LP modelinde yer alan karar değişkeni

$a_{ij}$ : *i* kaynağının *j* değişkenine ilişkin teknoloji katsayısı

$a_i$ : *i* kaynağının kullanılabilecek toplam niceliği

$x_i^k$ : Sistem denge durumuna ulaştığında *i* durumunda olması ve seçilen hareketin *k* olması olasılığını ifade eden karar değişkeni

$z_i^k(n)$ : Sistemin, *n.* periyotta *i* durumunda olması ve *k* hareketinin seçilmesine ilişkin ortak olasılık

$B$ : Başlangıç durum vektörü

$y_i^k$ : Başlangıç durumu $B_j$ olduğunda sürecin *i* durumunda kalması beklenen süre

$Pr_k$ : Hedefin öncelik düzeyi *(k.* düzey*)*

$b_i$ : *i* hedefi için hedef düzeyi (ulaşılmak istenen hedef değeri)

$d_i^-$ : *i* hedefinden negatif sapma

$d_i^+$ : *i* hedefinden pozitif sapma

$w_{ik}^-$ : *k* önem düzeyindeki *i* hedefine ilişkin negatif sapma değişkeninin ağırlığı

$w_{ik}^+$ : *k* önem düzeyindeki *i* hedefine ilişkin pozitif sapma değişkeninin ağırlığı

$u_{ij}^k$ : Süreç durum *i*'de iken *k* alternatifi seçildiğinde sürecin *j* durumuna geçiş yapması ile ortaya çıkan üretim maliyeti (*i:* başlangıç stoku, *k:* üretim miktarına ilişkin hareket alternatifi)

$h_{ij}^k$ : Süreç durum *i*'de iken *k* alternatifi seçildiğinde sürecin *j* durumuna geçiş yapması ile ortaya çıkan stoklama maliyeti

$l_{ij}^k$ : Süreç durum *i*'de iken *k* alternatifi seçildiğinde sürecin *j* durumuna geçiş yapması ile ortaya çıkan stoksuzluk maliyeti

$c_{ij}^k$ : Süreç durum *i*'de iken *k* alternatifi seçildiğinde sürecin *j* durumuna geçiş yapması ile ortaya çıkan toplam maliyet (üretim, stoklama, stoksuzluk maliyetlerinin toplamı)

$w_{ij}^k$ : Süreç durum *i*'de iken *k* alternatifi seçildiğinde sürecin *j* durumuna geçiş yapması ile ortaya çıkan kazanç

$b_w$ : Kazanç hedefine ilişkin hedef değeri

$b_c$ : Maliyet hedefine ilişkin hedef değeri

$b_s$ : Stoksuzluk riski hedefine ilişkin hedef değeri

$d_w^-$ : Kazanç hedefine ilişkin negatif sapma

$d_w^+$ : Kazanç hedefine ilişkin pozitif sapma

$d_c^-$ : Maliyet hedefine ilişkin negatif sapma

$d_c^+$ : Maliyet hedefine ilişkin pozitif sapma

$d_s^-$ : Stoksuz kalma riskine ilişkin hedeften negatif sapma

$d_s^+$ : Stoksuz kalma riskine ilişkin hedeften pozitif sapma

## EK 2. Farklı Hareket Alternatifleri İçin Geçiş Olasılıkları ve Ödüller

| ***Durum*** | ***Hareket*** | ***Geçiş Olasılıkları*** | | | | | ***Maliyet*** | | | | | ***Kazanç*** | | | | | ***Beklenen Maliyet*** | ***Beklenen Kazanç*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i | k | $p_{i0}^k$ | $p_{i1}^k$ | $p_{i2}^k$ | $p_{i3}^k$ | $p_{i4}^k$ | $c_{i0}^k$ | $c_{i1}^k$ | $c_{i2}^k$ | $c_{i3}^k$ | $c_{i4}^k$ | $w_{i0}^k$ | $w_{i1}^k$ | $w_{i2}^k$ | $w_{i3}^k$ | $w_{i4}^k$ | $c_i^k$ | $w_i^k$ |
| 0 (0 stok) | 1 (1 birim üret) | 0,6321 | 0,3679 | 0 | 0 | 0 | 4,2642 | 4 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,1670 | 2,5284 |
| | 2 (2 birim üret) | 0,2642 | 0,3679 | 0,3679 | 0 | 0 | 6,5286 | 7 | 8 | 0 | 0 | 8 | 4 | 0 | 0 | 0 | 7,2434 | 3,5852 |
| 1 (1 stok) | 1 (0 birim üret) | 0,6321 | 0,3679 | 0,0000 | 0 | 0 | 1,2642 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,1670 | 2,5284 |
| | 2 (1 birim üret) | 0,2642 | 0,3679 | 0,3679 | 0 | 0 | 3,5286 | 4 | 5 | 0 | 0 | 8 | 4 | 0 | 0 | 0 | 4,2434 | 3,5852 |
| | 3 (2 birim üret) | 0,0803 | 0,1839 | 0,3679 | 0,3679 | 0 | 6,0380 | 7 | 8 | 9 | 0 | 12 | 8 | 4 | 0 | 0 | 8,0265 | 3,9064 |
| 2 (2 stok) | 1 (0 birim üret) | 0,2642 | 0,3679 | 0,3679 | 0 | 0 | 0,5286 | 1 | 2 | 0 | 0 | 8 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1,2434 | 3,5852 |
| | 2 (1 birim üret) | 0,0803 | 0,1839 | 0,3679 | 0,3679 | 0 | 3,0380 | 4 | 5 | 6 | 0 | 12 | 8 | 4 | 0 | 0 | 5,0265 | 3,9064 |
| | 3 (2 birim üret) | 0,0190 | 0,0613 | 0,1839 | 0,3679 | 0,3679 | 6,0074 | 7 | 8 | 9 | 10 | 16 | 12 | 8 | 4 | 0 | 9,0045 | 3,9824 |
| 3 (3 stok) | 1 (0 birim üret) | 0,0803 | 0,1839 | 0,3679 | 0,3679 | 0,0000 | 0,0380 | 1 | 2 | 3 | 0 | 12 | 8 | 4 | 0 | 0 | 2,0265 | 3,9064 |
| 4 (4 stok) | 1 (0 birim üret) | 0,0190 | 0,0613 | 0,1839 | 0,3679 | 0,3679 | 0,0074 | 1 | 2 | 3 | 4 | 16 | 12 | 8 | 4 | 0 | 3,0045 | 3,9824 |

**EK 3. Poisson Dağılıma İlişkin Olasılık Değerleri ($\lambda = 15$)**

| TALEP (X:parti sayısı) | P(X<=x) | P(X=x) | P(X>=x) |
|---|---|---|---|
| **0** | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 |
| **1** | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 |
| **2** | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 |
| **3** | 0,0002 | 0,0002 | 1,0000 |
| **4** | 0,0009 | 0,0006 | 0,9998 |
| **5** | 0,0028 | 0,0019 | 0,9991 |
| **6** | 0,0076 | 0,0048 | 0,9972 |
| **7** | 0,0180 | 0,0104 | 0,9924 |
| **8** | 0,0374 | 0,0194 | 0,9820 |
| **9** | 0,0699 | 0,0324 | 0,9626 |
| **10** | 0,1185 | 0,0486 | 0,9301 |
| **11** | 0,1848 | 0,0663 | 0,8815 |
| **12** | 0,2676 | 0,0829 | 0,8152 |
| **13** | 0,3632 | 0,0956 | 0,7324 |
| **14** | 0,4657 | 0,1024 | 0,6368 |
| **15** | 0,5681 | 0,1024 | 0,5343 |
| **16** | 0,6641 | 0,0960 | 0,4319 |
| **17** | 0,7489 | 0,0847 | 0,3359 |
| **18** | 0,8195 | 0,0706 | 0,2511 |
| **19** | 0,8752 | 0,0557 | 0,1805 |
| **20** | 0,9170 | 0,0418 | 0,1248 |
| **21** | 0,9469 | 0,0299 | 0,0830 |
| **22** | 0,9673 | 0,0204 | 0,0531 |
| **23** | 0,9805 | 0,0133 | 0,0327 |
| **24** | 0,9888 | 0,0083 | 0,0195 |
| **25** | 0,9938 | 0,0050 | 0,0112 |
| **26** | 0,9967 | 0,0029 | 0,0062 |
| **27** | 0,9983 | 0,0016 | 0,0033 |
| **28** | 0,9991 | 0,0009 | 0,0017 |
| **29** | 0,9996 | 0,0004 | 0,0009 |
| **30** | 0,9998 | 0,0002 | 0,0004 |
| **31** | 0,9999 | 0,0001 | 0,0002 |
| **32** | 1,0000 | 0,0001 | 0,0001 |

## EK 4. MDP’nin Farklı Durum Ve Alternatiflere İlişkin Geçiş Olasılıkları ve Ödülleri

| ***Durum*** | ***Hareket*** | ***Geçiş Olasılıkları*** | | | ***Maliyet*** | | | ***Kazanç*** | | | ***Beklenen Maliyet*** | ***Beklenen Kazanç*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *i* | *k* | $p_{i0}^k$ | $p_{i1}^k$ | $p_{i2}^k$ | $c_{i0}^k$ | $c_{i1}^k$ | $c_{i2}^k$ | $w_{i0}^k$ | $w_{i1}^k$ | $w_{i2}^k$ | $c_i^k$ | $w_i^k$ |
| 0 (0 stok) | 1 (10 birim üret) | 0,9301 | 0,0324 | 0,0374 | 580 | 499 | 525 | 1.050 | 945 | 28 | 576 | 1008 |
| | 2 (11 birim üret) | 0,8815 | 0,0486 | 0,0699 | 609 | 546 | 572 | 1.155 | 1.050 | 59 | 603 | 1073 |
| | 3 (12 birim üret) | 0,8152 | 0,0663 | 0,1185 | 639 | 593 | 620 | 1.260 | 1.155 | 110 | 634 | 1117 |
| | 4 (13 birim üret) | 0,7324 | 0,0829 | 0,1848 | 671 | 641 | 667 | 1.365 | 1.260 | 187 | 668 | 1139 |
| | 5 (14 birim üret) | 0,6368 | 0,0956 | 0,2676 | 705 | 688 | 714 | 1.470 | 1.365 | 291 | 706 | 1144 |
| | 6 (15 birim üret) | 0,5343 | 0,1024 | 0,3632 | 741 | 735 | 761 | 1.575 | 1.470 | 421 | 748 | 1145 |
| | 7 (16 birim üret) | 0,4319 | 0,1024 | 0,4657 | 779 | 782 | 809 | 1.680 | 1.575 | 572 | 793 | 1153 |
| | 8 (17 birim üret) | 0,3359 | 0,0960 | 0,5681 | 819 | 830 | 856 | 1.785 | 1.680 | 733 | 841 | 1178 |
| | 9 (18 birim üret) | 0,2511 | 0,0847 | 0,6641 | 861 | 877 | 903 | 1.890 | 1.785 | 895 | 890 | 1220 |
| | 10 (19 birim üret) | 0,1805 | 0,0706 | 0,7489 | 905 | 924 | 950 | 1.995 | 1.890 | 1.046 | 940 | 1277 |
| | 11 (20 birim üret) | 0,1248 | 0,0557 | 0,8195 | 949 | 971 | 998 | 2.100 | 1.995 | 1.179 | 990 | 1340 |
| 1 (1 stok) | 1 (9 birim üret) | 0,9301 | 0,0324 | 0,0374 | 533 | 452 | 478 | 1.050 | 945 | 28 | 528 | 1008 |
| | 2 (10 birim üret) | 0,8815 | 0,0486 | 0,0699 | 562 | 499 | 525 | 1.155 | 1.050 | 59 | 556 | 1073 |
| | 3 (11 birim üret) | 0,8152 | 0,0663 | 0,1185 | 592 | 546 | 572 | 1.260 | 1.155 | 110 | 587 | 1117 |
| | 4 (12 birim üret) | 0,7324 | 0,0829 | 0,1848 | 624 | 593 | 620 | 1.365 | 1.260 | 187 | 621 | 1139 |
| | 5 (13 birim üret) | 0,6368 | 0,0956 | 0,2676 | 658 | 641 | 667 | 1.470 | 1.365 | 291 | 658 | 1144 |
| | 6 (14 birim üret) | 0,5343 | 0,1024 | 0,3632 | 694 | 688 | 714 | 1.575 | 1.470 | 421 | 700 | 1145 |
| | 7 (15 birim üret) | 0,4319 | 0,1024 | 0,4657 | 732 | 735 | 761 | 1.680 | 1.575 | 572 | 746 | 1153 |
| | 8 (16 birim üret) | 0,3359 | 0,0960 | 0,5681 | 772 | 782 | 809 | 1.785 | 1.680 | 733 | 794 | 1178 |

**EK 4. (Devamı)**

| ***Durum*** | ***Hareket*** | ***Geçiş Olasılıkları*** | | | ***Maliyet*** | | | ***Kazanç*** | | | ***Beklene Maliyet*** | ***Beklenen Kazanç*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $k$ | $p_{i0}^k$ | $p_{i1}^k$ | $p_{i2}^k$ | $c_{i0}^k$ | $c_{i1}^k$ | $c_{i2}^k$ | $w_{i0}^k$ | $w_{i1}^k$ | $w_{i2}^k$ | $c_i^k$ | $w_i^k$ |
| 1 (1 stok) | 9 (17 birim üret) | 0,2511 | 0,0847 | 0,6641 | 814 | 830 | 856 | 1.890 | 1.785 | 895 | 843 | 1220 |
| | 10 (18 birim üret) | 0,1805 | 0,0706 | 0,7489 | 858 | 877 | 903 | 1.995 | 1.890 | 1.046 | 893 | 1277 |
| | 11 (19 birim üret) | 0,1248 | 0,0557 | 0,8195 | 902 | 924 | 950 | 2.100 | 1.995 | 1.179 | 943 | 1340 |
| 2 (2 stok) | 1 (8 birim üret) | 0,9301 | 0,0324 | 0,0374 | 486 | 404 | 431 | 1.050 | 945 | 28 | 481 | 1008 |
| | 2 (9 birim üret) | 0,8815 | 0,0486 | 0,0699 | 515 | 452 | 478 | 1.155 | 1.050 | 59 | 509 | 1073 |
| | 3 (10 birim üret) | 0,8152 | 0,0663 | 0,1185 | 545 | 499 | 525 | 1.260 | 1.155 | 110 | 539 | 1117 |
| | 4 (11 birim üret) | 0,7324 | 0,0829 | 0,1848 | 577 | 546 | 572 | 1.365 | 1.260 | 187 | 573 | 1139 |
| | 5 (12 birim üret) | 0,6368 | 0,0956 | 0,2676 | 610 | 593 | 620 | 1.470 | 1.365 | 291 | 611 | 1144 |
| | 6 (13 birim üret) | 0,5343 | 0,1024 | 0,3632 | 647 | 641 | 667 | 1.575 | 1.470 | 421 | 653 | 1145 |
| | 7 (14 birim üret) | 0,4319 | 0,1024 | 0,4657 | 685 | 688 | 714 | 1.680 | 1.575 | 572 | 699 | 1153 |
| | 8 (15 birim üret) | 0,3359 | 0,0960 | 0,5681 | 725 | 735 | 761 | 1.785 | 1.680 | 733 | 747 | 1178 |
| | 9 (16 birim üret) | 0,2511 | 0,0847 | 0,6641 | 767 | 782 | 809 | 1.890 | 1.785 | 895 | 796 | 1220 |
| | 10 (17 birim üret) | 0,1805 | 0,0706 | 0,7489 | 810 | 830 | 856 | 1.995 | 1.890 | 1.046 | 846 | 1277 |
| | 11 (18 birim üret) | 0,1248 | 0,0557 | 0,8195 | 855 | 877 | 903 | 2.100 | 1.995 | 1.179 | 896 | 1340 |

## EK 5. Hedef Programlama Modeli

***Amaç Fonksiyonu:***

$$Z_{\min} = d_w^- + d_c^+ + d_s^+$$

***Hedef Kısıtları:***

*1. Kazanç Hedefi:*

$$\begin{aligned}1008(x_0^1 + x_1^1 + x_2^1) + 1073(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) + 1117(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) + 1139(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4) + 1144(x_0^5 + x_1^5 + x_2^5) + 1145(x_0^6 + x_1^6 + x_2^6)\\ + 1153(x_0^7 + x_1^7 + x_2^7) + 1178(x_0^8 + x_1^8 + x_2^8) + 1220(x_0^9 + x_1^9 + x_2^9) + 1277(x_0^{10} + x_1^{10} + x_2^{10}) + 1340(x_0^{11} + x_1^{11} + x_2^{11}) - d_w^+ + d_w^- = 2100\end{aligned}$$

*2. Maliyet Hedefi:*

$$\begin{aligned}576x_0^1 + 603x_0^2 + 634x_0^3 + 668x_0^4 + 706x_0^5 + 748x_0^6 + 793x_0^7 + 841x_0^8 + 890x_0^9 + 940x_0^{10} + 990x_0^{11} + 528x_1^1 + 556x_1^2 + 587x_1^3 + 621x_1^4 + 658x_1^5 + 700x_1^6\\ + 746x_1^7 + 794x_1^8 + 843x_1^9 + 893x_1^{10} + 943x_1^{11} + 481x_2^1 + 509x_2^2 + 539x_2^3 + 573x_2^4 + 611x_2^5 + 653x_2^6 + 699x_2^7 + 747x_2^8 + 796x_2^9 + 846x_2^{10} + 896x_2^{11} - d_c^+ + d_c^- = 1800\end{aligned}$$

*3. Stoksuzluk Riskine İlişkin Hedef:*

$$x_0^1 + x_0^2 + x_0^3 + x_0^4 + x_0^5 + x_0^6 + x_0^7 + x_0^8 + x_0^9 + x_0^{10} + x_0^{11} - d_s^+ + d_s^- = 0{,}10$$

***Gerçek Kısıtlar:***

*<u>Denge Durumu Vektöründeki Olasılıkların Toplamına İlişkin Kısıt</u>*

$$x_0^1 + x_0^2 + x_0^3 + x_0^4 + x_0^5 + x_0^6 + x_0^7 + x_0^8 + x_0^9 + x_0^{10} + x_0^{11} + x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1^4 + x_1^5 + x_1^6 + x_1^7 + x_1^8 + x_1^9 + x_1^{10} + x_1^{11} + x_2^1 + x_2^2 + x_2^3 + x_2^4 + x_2^5 + x_2^6 + x_2^7 + x_2^8 + x_2^9 + x_2^{10} + x_2^{11} = 1$$

*<u>Denge Durumuna İlişkin Kısıtlar</u>*

*j=0 için*

$$
\begin{aligned}
&0{,}0699x_0^1+0{,}1105x_0^2+0{,}1848x_0^3+0{,}2676x_0^4+0{,}3632x_0^5+0{,}4657x_0^6+0{,}5681x_0^7+0{,}6641x_0^8+0{,}7489x_0^9+0{,}8195x_0^{10}+0{,}8752x_0^{11}\\
&-0{,}9301x_1^1-0{,}8815x_1^2-0{,}8152x_1^3-0{,}7324x_1^4-0{,}6368x_1^5-0{,}5343x_1^6-0{,}4319x_1^7-0{,}3359x_1^8-0{,}2511x_1^9-0{,}1805x_1^{10}-0{,}1248x_1^{11}\\
&-0{,}9301x_2^1-0{,}8815x_2^2-0{,}8152x_2^3-0{,}7324x_2^4-0{,}6368x_2^5-0{,}5343x_2^6-0{,}4319x_2^7-0{,}3359x_2^8-0{,}2511x_2^9-0{,}1805x_2^{10}-0{,}1248x_2^{11}=0
\end{aligned}
$$

*j=1 için*

$$
\begin{aligned}
&-0{,}0324x_0^1-0{,}0486x_0^2-0{,}0663x_0^3-0{,}0829x_0^4-0{,}0956x_0^5-0{,}1024x_0^6-0{,}1024x_0^7-0{,}0960x_0^8-0{,}0847x_0^9-0{,}0706x_0^{10}-0{,}0557x_0^{11}\\
&+0{,}9676x_1^1+0{,}9514x_1^2+0{,}9337x_1^3+0{,}9171x_1^4+0{,}9044x_1^5+0{,}8976x_1^6+0{,}8976x_1^7+0{,}9040x_1^8+0{,}9153x_1^9+0{,}9294x_1^{10}+0{,}9443x_1^{11}\\
&-0{,}0324x_2^1-0{,}0486x_2^2-0{,}0663x_2^3-0{,}0829x_2^4-0{,}0956x_2^5-0{,}1024x_2^6-0{,}1024x_2^7-0{,}0960x_2^8-0{,}0847x_2^9-0{,}0706x_2^{10}-0{,}0557x_2^{11}=0
\end{aligned}
$$

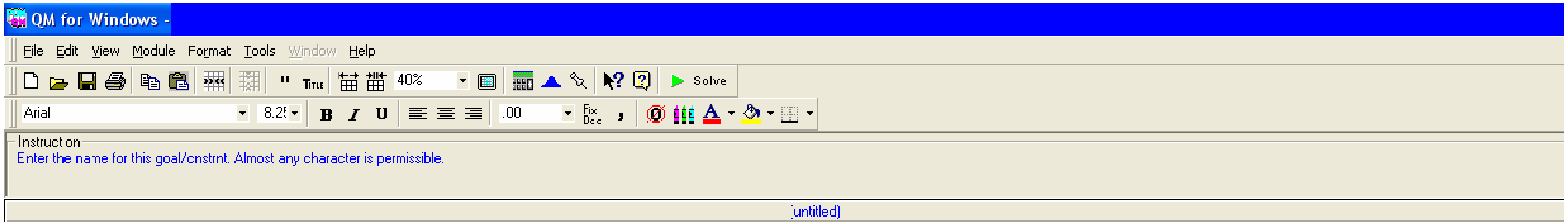
*j=2 için*

$$
\begin{aligned}
&-0{,}0374x_0^1-0{,}0699x_0^2-0{,}1185x_0^3-0{,}1848x_0^4-0{,}2676x_0^5-0{,}3632x_0^6-0{,}4657x_0^7-0{,}5681x_0^8-0{,}6641x_0^9-0{,}7489x_0^{10}-0{,}8195x_0^{11}\\
&-0{,}0374x_1^1-0{,}0699x_1^2-0{,}1185x_1^3-0{,}1848x_1^4-0{,}2676x_1^5-0{,}3632x_1^6-0{,}4657x_1^7-0{,}5681x_1^8-0{,}6641x_1^9-0{,}7489x_1^{10}-0{,}8195x_1^{11}\\
&+0{,}9301x_2^1+0{,}8815x_2^2+0{,}8152x_2^3+0{,}7324x_2^4+0{,}6368x_2^5+0{,}5343x_2^6+0{,}4319x_2^7+0{,}3359x_2^8+0{,}2511x_2^9+0{,}1805x_2^{10}+0{,}1248x_2^{11}=0
\end{aligned}
$$

***Pozitiflik Koşulu:***

$$x_0^1,x_0^2,x_0^3,x_0^4,x_0^5,x_0^6,x_0^7,x_0^8,x_0^9,x_0^{10},x_0^{11},x_1^1,x_1^2,x_1^3,x_1^4,x_1^5,x_1^6,x_1^7,x_1^8,x_1^9,x_1^{10},x_1^{11},x_2^1,x_2^2,x_2^3,x_2^4,x_2^5,x_2^6,x_2^7,x_2^8,x_2^9,x_2^{10},x_2^{11},d_w^+,d_w^-,d_c^+,d_c^-,d_s^+,d_s^-\geq 0$$

# EK 6. QM for Windows Veri Giriş Sayfası




| | Wt(d+) | Prty(d+) | Wt(d-) | Prty(d-) | X01 | X02 | X03 | X04 | X05 | X06 | X07 | X08 | X09 | X010 | X011 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| KAZANC | 0 | 0 | 1 | 1 | 008 | 073 | 117 | 139 | 144 | 145 | 153 | 178 | 220 | 1277 | 1340 |
| MALIYET | 1 | 1 | 0 | 0 | 576 | 603 | 634 | 668 | 706 | 748 | 793 | 841 | 890 | 940 | 990 |
| STOKSUZ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| toplam 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| i=0 icin | 0 | 0 | 0 | 0 | ,07 | ,11 | ,18 | ,27 | ,36 | ,47 | ,57 | ,66 | ,75 | ,82 | ,88 |
| i=1 icin | 0 | 0 | 0 | 0 | -,03 | -,05 | -,07 | -,08 | -,1 | -,1 | -,1 | -,1 | -,08 | -,07 | -,06 |
| i=2 icin | 0 | 0 | 0 | 0 | -,04 | -,07 | -,12 | -,18 | -,27 | -,36 | -,47 | -,57 | -,66 | -,75 | -,82 |

| | X11 | X12 | X13 | X14 | X15 | X16 | X17 | X18 | X19 | X110 | X111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| KAZANC | 008 | 073 | 117 | 139 | 144 | 145 | 153 | 178 | 220 | 1277 | 1340 |
| MALIYET | 528 | 556 | 587 | 621 | 658 | 700 | 746 | 794 | 843 | 893 | 943 |
| STOKSUZ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| toplam 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| i=0 icin | -,93 | -,88 | -,82 | -,73 | -,64 | -,53 | -,43 | -,34 | -,25 | -,18 | -,12 |
| i=1 icin | ,97 | ,95 | ,93 | ,92 | ,9 | ,9 | ,9 | ,9 | ,92 | ,93 | ,94 |
| i=2 icin | -,04 | -,07 | -,12 | -,18 | -,27 | -,36 | -,47 | -,57 | -,66 | -,75 | -,82 |

| | X21 | X22 | X23 | X24 | X25 | X26 | X27 | X28 | X29 | X210 | X211 | | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| KAZANC | 008 | 073 | 117 | 139 | 144 | 145 | 153 | 178 | 220 | 1277 | 1340 | = | 2100 |
| MALIYET | 481 | 509 | 539 | 573 | 611 | 653 | 699 | 747 | 796 | 846 | 896 | = | 1800 |
| STOKSUZ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | ,1 |
| toplam 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | = | 1 |
| i=0 icin | -,93 | -,88 | -,82 | -,73 | -,64 | -,53 | -,43 | -,34 | -,25 | -,18 | -,12 | = | 0 |
| i=1 icin | -,03 | -,05 | -,07 | -,08 | -,1 | -,1 | -,1 | -,1 | -,08 | -,07 | -,06 | = | 0 |
| i=2 icin | ,96 | ,93 | ,88 | ,82 | ,73 | ,64 | ,53 | ,43 | ,34 | ,25 | ,18 | = | 0 |