D.E.Ü. İ.İ.B.F. Dergisi
Cilt: 9, Sayı: II, 1994, ss.399-415.

GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER REGRESYONUNDA AĞIRLIKLARIN TAHMİNLENMESİ

Levent ŞENYAY(*) Cenk ÖZLER(**)

ÖZET

Doğrusal regresyon modellerinde varyans heterojenliğinin bulunması halinde uygulanan genelleştirilmiş (ağırlıklı) en küçük kareler (GEKK) yönteminin, uygulamada karşılaşılan en önemli sorunu ağırlıkların belirlenmesidir. GEKK tahminleyicilerinin elde edilebilmesi için ağırlıkların bilinmediği çoğu durumda tahminlenmesi gerekmektedir. Bu çalışma içerisinde ağırlıkların tahminlenmesi aşamasında karşılaşılan farklı hata ilişkileri için kullanılan bazı yöntemler araştırılmış ve bunlarla ilgili bazı karşılaştırmalara yer verilmiştir.

1. GİRİŞ

Doğrusal regresyon modeli genel olarak

$$y = X\beta + u \tag{1.1}$$

şeklinde ele alındığında (y, nx1 boyutlu bağımlı değişken vektörü, X, nxp boyutlu bağımsız değişkenler matrisi, β , px1 boyutlu parametre vektörü ve u, nx1 boyutlu hata vektörü) bu model için kullanılan varsayımlar

1. X, stokastik olmayan bir matristir.

2. $E(u) = 0$

3. $Var(u) = E(uu') = \sigma^2 I_n$

şeklindedir. İkinci ve üçüncü varsayımlar $u \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ şeklinde özetlenecek olursa, (burada I_n , nxn boyutlu birim matristir) EKK ile tahminlenen β vektörü

(*) Yrd.Doç.Dr. D.E.Ü. İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü
(**) Arş.Gör. D.E.Ü. İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü

$$b = (X'X)^{-1} X'y \tag{1.2}$$

eşitliğinden elde edilir. X matrisinin tam ranklı olmadığı durumlarda "genelleştirilmiş ters"

$$(X'X)^{-} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} q_i q_i'$$

kullanılabilir (Seber, 1977). Burada $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = ... = \lambda_p$, X'X matrisinin özdeğerleri ve $q_1, q_2, ..., q_r, q_{r+1}, ..., q_p$ bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerdir. Parametre tahminlerinin varyans - kovaryans matrisi ise ;

$$Var(b) = \sigma^2 (X'X)^{-1} \tag{1.3}$$

dir.

EKK tahminleyicilerinin güvenilir sonuçlar vermesi için yukarıda verilen varsayımların gerçekleşmesi gerekmektedir. Varyans heterojenliğinin (heteroscedasticity) varlığı durumunda $E(uu') = \sigma^2 I_n$ varsayımı bozulur ve varyans - kovaryans matrisi

$$E(uu') = \sigma^2 V = \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & & 0 \\ 0 & & \\ & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}_{nxn}$$

olarak ortaya çıkar. σ_i^2'lerin bazıları birbirine eşit olabilir. Varyans heterojenliğinin varlığı durumunda, parametreleri tahminlemek için, EKK yerine daha güvenilir sonuçlar veren genelleştirilmiş (ağırlıklı) en küçük kareler (GEKK) yöntemi kullanılır.

(1.1) modelindeki hata vektörü u için $E(u) = 0$ ve $E(uu') = \sigma^2 V$ durumu sözkonusu olduğunda, (1.1) eşitliği (1.2) de yerine konulursa b'nin EKK tahminleyicisi için

$$b = \beta + (X'X)^{-1} X'u \tag{1.4}$$

yazılabilir. Bu eşitlikten E (b) = β olduğu görülür. Böylece varyans heterojenliğinin varlığı durumunda, EKK tahminleyicilerinin sapmasız oldukları söylenebilir. b'nin varyans - kovaryans matrisi ise

$$Var(b) = E\{(b-\beta)(b-\beta)'\} = (X'X)^{-1} X'\Omega X (X'X)^{-1} \tag{1.5}$$

şeklinde elde edilebilir. Bu durumda b, sapmasız olmasına rağmen minimum varyansa sahip olamaz (Draper ve Smith , 1981).

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER

Orijinal regresyon modeli (1.1)'in her iki tarafı nxn boyutlu, tekil olmayan bir T matrisi ile soldan çarpıldığında

$$Ty = (TX)\beta + Tu$$

$$k = Q\beta + f \tag{2.1}$$

şeklinde transforme edilmiş bir model ortaya çıkar. (2.1) modelindeki hata vektörü f'nin

$$E(f) = E(Tu) = 0$$

eşitliğini sağladığı görülür. f' nin varyans - kovaryans matrisi ise

$$E(ff') = E(Tuu'T') = \sigma^2 TVT' = T\Omega T' \tag{2.2}$$

şeklinde elde edilebilir.

$$TVT' = I_n \tag{2.3}$$

koşulunu sağlayacak bir T matrisi belirlenebilirse (2.1) modeli için $E(f) = 0$ ve $E(ff') = \sigma^2 I_n$ varsayımları sağlanmış olur. Böylece parametre vektörü EKK yöntemi ile tahminlenebilir.

V'nin simetrik ve pozitif tanımlı bir matris olduğu durumlarda

$$V = PP'$$

koşulunu sağlayacak tekil olmayan bir P matrisi bulunabilir (Johnston, 1984). P, tekil olmayan bir matris olduğunda

$$P^{-1} V P'^{-1} = I_n$$

yazılabilir. (2.3) ve (2.4) eşitlikleri karşılaştığında

$$T = P^{-1} \tag{2.4}$$

olarak alınabilir. Ayrıca

$$V^{-1} = P'^{-1} P^{-1} = (P^{-1})' P^{-1} = T' T$$

olduğu görülür. (2.1) modelinin parametreleri EKK yöntemi ile tahminlenirse

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X' T' T X)^{-1} X' T' Ty \\ &= (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} y \\ &= (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} y \end{aligned} \tag{2.5}$$

elde edilir. Böylece (2.5) eşitliği ile β 'nın GEKK tahminleyicisi elde edilmiş olur. $\hat{\beta}$ 'nın varyans - kovaryans matrisi ise

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X' V^{-1} X)^{-1} = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} \tag{2.6}$$

eşitliğinden bulunabilir.

Ağırlık matrisi Ω biliniyor ise β 'nın GEKK tahminleri (2.5) eşitliğinden doğrudan bulunabilir. Ancak genellikle Ω bilinmez. Bu durumda çeşitli yöntemlerle Ω matrisinin köşegen elemanları tahminlenebilir.

3. AĞIRLIKLARIN TAHMİNLENMESİ

Orijinal regresyon modeli (1.1) 'de β yerine EKK tahmini b konulduğunda

$$y = Xb + e = \hat{y} + e \tag{3.1}$$

elde edilir. EKK kalıntı (residual) vektörü e, $e = y - \hat{y}$ eşitliğinden

$$e = [\, I_n - X(X'X)^{-1}X' \,]\, y \;=\; My \tag{3.2}$$

şeklinde elde edilebilir. Burada M, rankı n - p olan simetrik idempotent bir matristir (Vinod ve Ullah, 1981). (3.2) eşitliğinin her iki tarafından E (e) çıkartılırsa

$$e - E(e) = Mu \tag{3.3}$$

elde edilir. E (e) = 0 olduğundan

$$e = Mu \tag{3.4}$$

yazılabilir. Buradan E (ee') = MΩM olarak elde edilebilir. Eğer E (ee') ve MΩM matrislerinin köşegen elemanları kullanılmak istenirse

$$E(\dot{e}) = \dot{M}\sigma \tag{3.5}$$

eşitliği yazılabilir. Burada σ, Ω matrisinin köşegen elemanlarından oluşan n x 1 boyutlu vektör ; $\dot{e} = e * e$, n x 1 boyutlu vektör ve $\dot{M} = M * M$, n x n boyutlu matristir. Burada * operatörü, aynı boyutlu iki vektörün veya matrisin Hadamard çarpımının yapıldığını göstermektedir (Vinod ve Ullah , 1981). Hadamard çarpımına göre A ve B aynı boyutlu iki matris ise, A * B , A'daki her elemanın B'de karşı gelen elemanla çarpılacağı anlamına gelmektedir. Bu durumda $\dot{e}$, (e_i^2) 'lerden oluşan n x 1 boyutlu vektör ve $\dot{M}$, M'deki elemanların karelerinden oluşan n x n boyutlu matris olmaktadır.

Eğer $\mu = \dot{e} - E(\dot{e})$ olarak alınırsa

$$\dot{e} = \dot{M}\sigma + \eta \tag{3.6}$$

eşitliği elde edilir. (3.6) eşitliği, $\dot{M}$ ile $\dot{e}$ arasındaki ilişkiyi gösteren bir doğrusal regresyon modelidir. (3.6) modelinin parametre vektörü σ 'nın tahminlenmesiyle bilinmeyen Ω matrisinin köşegen elemanları tahminlenmiş olàcaktır. σ 'nın EKK tahminleyicisi

$$\hat{\sigma} = (\dot{M}'\dot{M})^{-1}\dot{M}'\,\dot{e} = \dot{M}^{-1}\,\dot{e} \tag{3.7}$$

şeklinde elde edilebilir. Buradaki $\hat{\sigma}$ tahminleyicisi Rao (1970)'in minimum norm kuadratik sapmasız tahminleyicisidir (minimum norm quadratic unbiased estimator = MINQUE). $\hat{\sigma}$, $\dot{M}$ tekil olmadığında tanımlıdır. Tekil olmama durumu için gerek ve yeter koşul Mallela (1972) tarafından verilmiştir. $\dot{M}$ tekil olduğunda $\hat{\sigma}$ tahminleyicisi $\hat{\sigma} = \dot{M}^{-}\dot{e}$ olarak yazılabilir. Burada $\dot{M}^{-}$, $\dot{M}$'nin genelleştirilmiş tersidir. Buna alternatif olarak aşağıdaki genelleştirilmiş ridge tahminleyicisi

$$\hat{\sigma}_K = (\dot{M}'\dot{M} + K)^{-1}\,\dot{M}'\dot{e} \tag{3.8}$$

kullanılabilir (Vinod ve Ullah, 1981). Buradaki K ridge parametre matrisidir. $K = kI_n$ olduğunda ($k > 0$ ve sabit), (3.8) ile verilen tahminleyici "sıradan " ridge tahminleyicisine dönüşür. Ridge regresyon ve k 'nın seçimi ile ilgili ayrıntılı açıklamalar Hoerl ve Kennard (1970), Wichern ve Churchill (1978) ve Vinod ve Ullah (1981) 'de verilmiştir.

Büyük örnekler için $M \cong I_n$ ve dolayısıyla $\dot{M} \cong I_n$ olduğundan σ 'nın başka bir tahminleyicisi

$$\hat{\sigma}_a = \dot{e} \tag{3.9}$$

olarak bulunabilir (Vinod ve Ullah, 1981). $\hat{\sigma}$ ve $\hat{\sigma}_a$ tahminleyicisinden daha etkin bir tahminleyici elde etmek için hesaplanan σ 'nın GEKK tahminleyicisi

$$\sigma^2_{GEKK} = (\dot{M}\dot{\Psi}^{-1}\dot{M})^{-1}\,\dot{M}\dot{\Psi}^{-1}\,\dot{e} \tag{3.10}$$

şeklindedir. Burada $\Psi = (M\,\Omega\,M) * (M\,\Omega\,M)$ olmaktadır. $\dot{\Psi}$, Ω 'ya bağlı olduğundan, uygulamalarda önce Ω, $\hat{\sigma}$ veya $\hat{\sigma}_a$ ile tahminlenir ve $\dot{\Psi}$ buradan hesaplanır. Ardından (3.10) eşitliğinden ağırlıklar tahminlenir. Ancak bu tahminleyicinin $\hat{\sigma}$ ve $\hat{\sigma}_a$ 'ya göre daha etkin olduğu pek açık değildir (Vinod ve Ullah, 1981).

Yukarıda verilen tahminleme yöntemleri kullanıldığında, tahminlenen σ vektöründeki bazı elemanların negatif değer alması durumu ortaya çıkabilir. σ vektörü varyanslardan oluştuğu için gerçek varyansın negatif olması imkansızdır. Böyle bir problem karşısında bir kaç değişik yol izlenebilir (Vinod ve Ullah , 1981): Bunlardan bir tanesi, negatif tahminlerin sıfır olarak kabul edilmesi olabilir. Bir diğer yol ise, σ 'nın eşitsizlik sınırlı en küçük kareler tahminleyicisisin kullanılmasıdır. Buna göre ; $\sigma \geq 0$ kısıtı altında $(\dot{e} - \dot{M}\sigma)'(\dot{e} - \dot{M}\sigma)$ kuadratik formu minimize edilir. Eşitsizlik sınırlı EKK yöntemi ile ilgili ayrıntılı açıklamalar Fomby , Hill ve Johnson (1984) ve Judge , Hill, Griffiths, Lütkepohl ve Lee (1985) 'de verilmiştir.

Ω 'nın köşegen elemanları yukarıda verilen yöntemlerden biri ile tahminlendiğinde β 'nın "tahminlenmiş genelleştirilmiş en küçük kareler (TGEKK) tahminleyicisi "

$$\hat{\hat{\beta}} = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1} X'\hat{\Omega}^{-1} y \tag{3.11}$$

ve tahminlenmiş V(b)

$$\widehat{V(b)} = (X'X)^{-1} X'\hat{\Omega}X\,(X'X)^{-1} \tag{3.12}$$

olmaktadır (Vinod ve Ullah, 1981).

β ve Ω 'nın yukarıda verilen tahminleyicilerinin özellikleri ile ilgili şu yorumlar yapılmaktadır (Vinod ve Ullah , 1981) : $y = X\beta + u$ modelinde varyans heterojenliği durumu var ise, β 'nın EKK tahminleyicisi b, sapmasız olmasına rağmen etkin değildir. Gerçek V(b), (1.5) eşitliği ile, tahmini ise (3.12) eşitliği ile verilmiştir. b ve bunların (3.12) ile verilen standart hataları kullanılarak regresyon katsayılarının anlamlılığı tek tek Student 'in t oranı ile test edilebilir. Ancak küçük örnekler için t oranlarının t dağılımı gösterdiği şüphelidir. Büyük örnekler için σ 'nın bir tahminleyicisine dayanan $\hat{\Omega}$, tutarlılık özelliğini taşımaz. Bununla beraber $X'\Omega X/n$ 'in tahminleyicisi $X'\hat{\Omega}X/n$ tutarlıdır. White , $\hat{\Omega}$, $\hat{\sigma}$ a 'dan elde edildiğinde $X'\hat{\Omega}X/n$ 'in tutarlı olduğunu analitik olarak hesaplamıştır (White , 1980).

Yukarıda verilen tahminleme yöntemleri dışında varyans heterojenliği problemi ile ilgili oldukça fazla miktarda çalışma vardır. Bu çalışmalarda $i=1,2,...,n$ için σ_i 'nin hareketi üzerinde çeşitli kısıtlamalar koyulmuştur. Esas olarak, kısıtlamaların amacı, bilinmeyen n sayıdaki varyansın sayısını azaltmaktır. Oldukça sık kullanılan heterojen varyanslı model σ_i 'nin l sayıda (l<n) dışsal değişken $z_i = [\, z_{1i}, ..., z_{1l} \,]$ setinin bir fonksiyonu olduğunu ve α 'nın l x l boyutlu bilinmeyen katsayılar vektörü olduğunu varsaymaktadır (Vinod ve Ullah, 1981) :

$$\sigma_i = f\,(\,z_i{}'\,\alpha\,) + \text{hata} \tag{3.13}$$

Burada bilinmeyen parametre sayısı n, I parametre α 'ya inmiş olur. (3.13) modelinin formu için değişik varsayımlar yapılabilmektedir. Bu varsayımlardan bazıları :

1. y_i 'nin standart sapmasının, dışsal değişkenlerin doğrusal bir fonksiyonu olması,

2. y_i 'nin varyansının, dışsal değişkenlerin doğrusal bir fonksiyonu olması,

3. y_i 'nin varyansının, beklenen değerinin kuvveti (üssü) ile orantılı olması ve

4. y_i 'nin varyansının log'unun, dışsal değişkenlerin doğrusal bir fonksiyon olmasıdır (Judge , Griffiths , Hill , Lütkepohl ve Lee, 1985).

1. y_i 'nin Standart Sapmasının Dışsal Değişkenlerin Doğrusal Bir Fonksiyonu Olması :

Burada σ_i 'nin bir açıklayıcı değişken setinin doğrusal bir fonksiyonu olduğü varsayılır. Ele alınan model :

$$y_i = x_i{}'\,\beta + u_i \qquad i = 1,2,...,n \tag{3.14}$$

$$E(u_i)=0,\quad E(u_i^2)=\sigma_i^2=(z_i'\alpha)^2,\quad E(u_iu_j)=0\quad (i\neq j) \tag{3.15}$$

şeklindedir. (3.14) modeli $y = X\beta + u$ modelinin i 'inci gözlemini ifade etmektedir. Ayrıca burada α, l x 1 boyutlu bilinmeyen parametreler vektörü ve zi $= (1, z_{2i},..., z_{li})$, , x_i 'deki değişkenlerin aynısı veya bir fonksiyonu olan lx1 boyutlu stokastik olmayan değişkenler vektörüdür. z_i'nin ilk elemanının 1 olduğu varsayılır.

b 'nın GEKK tahminleyicisi

$$\hat{\beta}=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y=\left(\sum_{i=1}^{n}(z_i'\alpha)^{-2}x_ix_i'\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i'\alpha)^{-2}x_iy_i \tag{3.16}$$

şeklinde yazılabilir. Bu tahminleyicinin ortalaması b ve kovaryansı

$$(X\Omega^{-1}X)^{-1}=\left(\sum_{i=1}^{n}(z_i'\alpha)^{-2}x_ix_i'\right)^{-1}$$

olur. (3.16) daki α yerine bir tahminleyicisi, örneğin $\hat{\alpha}$ konulursa bu eşitlik TGEKK tahminleyicisi $\hat{\hat{\beta}}$ 'yi tanımlar. α için üç olası tahminleyici, "EKK tahminleyicisi" $\hat{\alpha}$, "GEKK tahminleyicisi" $\hat{\hat{\alpha}}$, ve "en yüksek olabilirlik (maximum likelihood) (EYO) tahminleyicisi" $\tilde{\alpha}$ dır. Bu tahminleyicilerin her biri ile, β için TGEKK tahminleyicisi elde edilir. $\tilde{\alpha}$ ile elde edilen β ' nın tahminleyicisine EYO tahminleyicisi de denir (Judge ve Arkadaşları , 1985).

Varsayım gereği, standardize değişkenler $\sigma_1^{-1}u_1, \sigma_2^{-1}u_2,...,\sigma_n^{-1}u_n$ biribirinden bağımsız, aynı dağılımlı, ortalaması sıfır ve varyansı bir'dir.

Böylece standardize değişkenlerden birinin mutlak değerinin beklenen değeri $E(\sigma_i^{-1}|u_i|)=C$ olarak yazılabilir. Burada C, i 'den bağımsız ve $\sigma_i^{-1}|u_i|$ 'nin dağılımına bağlı bir sabittir. Burada $E(|u_i|)=C\sigma_i$ olur. u_i 'nin dağılımı normal ise $C=(2/\Pi)^{1/2}$ olduğu gösterilebilir (Judge ve Arkadaşları, 1985).

Bu sonuçlardan ve eşitlik (3.15) 'den

$$|e_i| = C z_i'\alpha + v_i \tag{3.17}$$

yazılabilir. Burada e_i, EKK kalıntısı $e_i = y_i - x_i' b$ ve v_i, yeni "hata" $v_i = |e_i| - E(|u_i|)$ olmaktadır. (3.17) 'ye EKK uygulandığında $C\alpha$ 'nın tahminleyicisi

$$C\hat{\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i z_i'\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} z_i |e_i| = (Z'Z)^{-1} Z' |e| \tag{3.18}$$

şeklinde elde edilebilir. Burada $Z' = (z_1, z_2, .. z_n)$ ve $|e| = (|e_1|, |e_2|, ..., |e_i|)'$ 'dur. α 'nın yerine $C\alpha$ 'nin tahminlenmesinin sonuca bir etkisi yoktur. β 'nın TGEKK tahminleyicisi

$$\hat{\hat{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i'\hat{\alpha})^{-2} x_i x_i'\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (z_i'\hat{\alpha})^{-2} x_i y_i,$$

$\hat{\alpha}$ 'nın yerine $c\hat{\alpha}$ konulduğunda değişmez. Bununla beraber $\hat{\hat{\beta}}$ için kovaryans matrisi tahminlendiğinde bir fark ortaya çıkar. Bu durumda $\hat{\alpha}$ kullanılır (Judge ve Arkadaşları, 1985).

$\hat{\alpha}$ tahminleyicisi tüm "iyi EKK özelliklerini" taşımaz. Bunun nedeni, genellikle v_i 'nin heterojen varyanslı ve otokorelasyonlu olması ve ortalamasının sıfır olmamasıdır. Bununla beraber, belli koşullar altında $|e_i|$, dağılım olarak $|u_i|$ 'ye yakınsamaktadır (Judge ve Arkadaşları, 1985). Böylece $\hat{\alpha}$, α için tutarlı bir tahminleyici olur. Sonuçta β 'nin TGEKK tahminleyicisi GEKK tahminleyicisi ile aynı asimtotik özelliklere sahip olur (Judge ve Arkadaşları , 1985).

α için daha etkin bir tahminleyici (3.17) 'ye GEKK uygulanarak bulunabilir. $C\alpha$ 'nın GEKK tahminleyicisi

$$C\hat{\hat{\alpha}} \; (Z'\hat{\Omega}^{-1} Z)^{-1} Z'\hat{\Omega}^{-1} |e| = \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i'\hat{\alpha})^{-2} z_i z_i'\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (z_i'\hat{\alpha})^{-2} z_i |e_i| \tag{3.19}$$

şeklinde verilmiştir (Judge ve Arkadaşları, 1985).

EYO tahminlemesi α ve β 'nın tahminlenmesinde kullanılan başka bir yöntemdir. e_i 'ler normal dağılımlı ise olabilirlik fonksiyonunun logaritması (Sabit terim hariç).

$$L = -\sum_{i=1}^{n} \ln z'_i \alpha - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - x'_i \beta}{z'_i \alpha} \right) \tag{3.20}$$

şeklindedir. L 'nin α ve β 'ya göre birinci türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde, α ve β 'ya göre doğrusal olmayan denklemler ortaya çıkar. Bu denklemlerin çözümü için doğrusal olmayan yöntemlerin kullanılması gerekmektedir. EYO tahminleyicilerinin hesaplanması, diğer tahminleyicilere göre oldukça zordur.

2. y_i 'nin Varyansının Dışsal Değişkenlerin Doğrusal Bir Fonksiyonu Olması :

Literatürde ele alınan başka bir heterojen varyanslı hata modeli de σ^2_i 'nin dışsal değişken setinin bir doğrusal fonksiyonu olarak varsayıldığı modeldir. Bu durumda model

$$y_i = x'_i \beta + u_i \qquad i = 1,2,\ldots, n \tag{3.21}$$

$$E(u_i) = 0 \quad , \quad E(u_i^2) = \sigma_i^2 = z'_i \alpha \, , \quad E(u_i u_j) = 0 \quad (i \neq j) \tag{3.22}$$

şeklindedir. β 'nın GEKK tahminleyicisi

$$\hat{\beta} = (X'\Omega^{-1} X)^{-1} X'\Omega^{-1} y = \left(\sum_{i=1}^{n} (z'_i \alpha)^{-1} x_i x'_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (z'_i \alpha)^{-1} x_i y_i \tag{3.23}$$

olarak elde edilir. Bu tahminleyicinin ortalaması β, kovaryansı

$$(X'\Omega^{-1} X)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} (z'_i \alpha)^{-1} x_i x'_i \right)^{-1} \text{'dır.}$$

(3.22) 'den

$$e_i^2 = z_i'\alpha + v_i \tag{3.24}$$

yazılabilir. Burada $v_i = e_i^2 - E(u_i^2)$ ve e_i^2 EKK kalıntısı $e_i = y_i - x_i' b$ nin karesidir. (3.24) eşitliğine EKK uygulandığında

$$\hat{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i z_i'\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} z_i e_i^2 = (Z'Z)^{-1} Z'\dot{e} \tag{3.25}$$

tahminleyicisi elde edilir. Burada $Z' = (z_1, z_2, ..., z_n)$ ve $\dot{e} = e_1^2, e_2^2, \ldots, e_n^2)'$

'dur. Bununla beraber (3.24) 'deki v_i, sıfır ortalamaya ve sabit varyansa sahip değildir ve otokorelasyonludur. Bu durumda $\hat{\alpha}$, sapmalıdır ve α 'nın GEKK tahminleyicisine göre etkin değildir (Judge ve Arkadaşları, 1985). Buradaki sapma,

$$E(\dot{e}) = \dot{M} Z \alpha \tag{3.26}$$

eşitliği dikkate alındığında görülebilir. $E(\hat{\alpha}) = (Z'Z)^{-1} Z'\dot{M} Z \alpha$
α 'nın iki sapmasız tahminleyicisi

$$\hat{\alpha}(1) = (Z'\dot{M}\dot{M}Z)^{-1} Z\dot{M}\dot{e} \tag{3.27}$$

ve

$$\hat{\alpha}(2) = (Z'\dot{M}Z)^{-1} Z'\dot{e} \tag{3.28}$$

olarak verilmiştir (Judge ve Arkadaşları , 1985). Birinci tahminleyici,

$$\dot{e} = \dot{M} Z \alpha + w \tag{3.29}$$

modeline EKK uygulandığında elde edilir. Burada (3.26) 'dan E (w) = 0 olduğu görülür. İkinci tahminleyici ise minimum norm kuadratik sapmasız tahminleyicidir (MINQUE).

α için daha başka tahminleyiciler (3.24) eşitliğindeki v_t ve (3.29) eşitliğindeki w 'nin kovaryans yapısı gözönüne alınarak ve bu eşitliklere GEKK uygulanarak tanımlanabilir. (3.24) eşitliği için, eğer e_i^2 'nin dağılımı, u_i^2 'nin dağılımına yakınsar ise, asimtotik olarak v_i, ortalaması sıfır, korelasyonsuz ve $(z'_i\alpha)^2$ 'nin oranı olan bir varyansa sahip olur (Harvey , 1974 ve Amemiya, 1977). Böylece asimtotik bir durumda (3.24) 'e GEKK uygulanırsa

$$\hat{\hat{\alpha}} = \left(\sum_{i=1}^{n} (z'_i\hat{\alpha})^{-2} z_i z'_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (z'_i\hat{\alpha})^{-2} z_i e_i^2 \tag{3.30}$$

tahminleyicisi elde edilir. Burada $(z'_i \hat{\alpha})^2$, v_i 'nin varyansını tahminlemek için kullanılmıştır. Bu tahminleyici (3.25) ;deki $\hat{\alpha}$'dan asimtotik olarak daha etkindir (Judge ve Arkadaşları, 1985).

(3.29) eşitliği için, eğer u_i normal dağılım gösteriyorsa, w 'nin kovaryans matrisi 2 $\dot{Q}$olur. Burada $Q = M\,\Omega\, M$ 'dir. (3.29) 'a GEKK uygulandığında

$$\hat{\hat{\alpha}}(1) = (Z'\dot{M}\hat{\dot{Q}}^{-1}\dot{M}Z)^{-1} Z'\dot{M}\hat{\dot{Q}}^{-1}\dot{e} \tag{3.31}$$

tahminleyicisi elde edilir. Burada Q 'nun yerine $\hat{Q} = M\hat{\Omega}M$ konulmuştur ve $\hat{\Omega}$ 'nin i'inci köşegen elemanı $(z'_i \hat{\alpha}(1))^2$ 'dir. $\dot{Q}$ 'nın köşegen olmayan elemanları sıfır olarak alınmaktadır (Judge ve arkadaşları , 1985). Ancak ; $\hat{\hat{\alpha}}$ ve $\hat{\hat{\alpha}}(1)$ GEKK tahminleyicileri, $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\alpha}(1)$ EKK tahminleyicilerinden asimtotik olarak daha etkin olmalarına rağmen , b 'nın TGEKK tahminleyicilerinin de asimtotik olarak daha etkin olacağının garantisi yoktur (Judge ve Arkadaşları 1985).

3. y_i'nin Varyansının, Beklenen Değerinin Kuvveti İle Orantılı Olması :

Bu durumda $Var(y_i) = \sigma_i^2 = \sigma^2 (x'_i \beta)^p$ olmaktadır. Şimdiye kadar yapılan çalışmaların büyük bir çoğunluğunda p = 2 olduğu varsayılmıştır. p = 2 olarak alındığında

$$y_i = x'_i b + u_i, \quad i = 1,2, \ldots, n \tag{3.32}$$

modelinde

$$E(u_i) = 0, \; E(u_i^2) = \sigma_i^2 = \sigma^2 (x'_i \beta)^2, \; E(u_i u_j) = 0 \; (i \neq j) \tag{3.33}$$

koşulları geçerlidir. u için kovaryans matrisi ise

$$E(uu') = \Omega = \sigma^2 V = \sigma^2 \operatorname{diag}\left((x'_1 \beta)^2, (x'_2 \beta)^2, \ldots, (x'_n \beta)^2 \right)$$

olur. Bu durum, eşitlik (3.15) 'deki $\sigma_i^2 = (z'_i \alpha)^2$ 'nin özel bir hali olarak görülebilir. Burada $z_i = x_i$ ve α ile β orantılıdır.

GEKK tahminleyicisi $\hat{\beta} = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} y$, Ω, β 'ya bağlı olduğu için elde edilemez. Bununla beraber, önce EKK tahminleyicisi $b = (X' X)^{-1} X' y$ kullanıp, elde edilen tahminler TGEKK tahminleyicisinde kullanılabilir :

$$\hat{\beta} = (X' \hat{V}^{-1} X)^{-1} X' \hat{V}^{-1} y = \left(\sum_{i=1}^{n} (x'_i b)^{-2} x_i x'_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x'_i b)^{-2} x_i y_i \tag{3.34}$$

4. y_i'nin Varyansının log 'unun, Dışsal Değişkenlerin Doğrusal Bir Fonksiyon Olması - Çarpımsal Varyans Heterojenliği :

Bu modelin varsayımları

$$y_i = x'_i \beta + u_i, \quad i = 1,2, \ldots, n \tag{3.35}$$

$$E(u_i) = 0, \; E(u_i^2) = \sigma_i^2 = \exp\{ z'_i \alpha \}, \; E(u_i u_j) = 0 \quad i \neq j \tag{3.36}$$

şeklindedir. Örneğin $l = 2$, $\alpha' = (\log k, l)$ ve $z'_i = (1, \log x_{2i})$ olduğu bir durum ele alınırsa, $\sigma_i^2 = k x_{2i}^{\lambda}$ bulunur. Burada varyans açıklayıcı değişkenin kuvveti ile orantılıdır.

β için GEKK tahminleyicisi

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^{n} \exp(-z'_i \alpha) x_i x'_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \exp(-z'_i \alpha) x_i y_i \tag{3.37}$$

şeklindedir. b için TGEKK tahminleyicisi elde etmek için α 'nın tahminlenmesi gerekmektedir. Bunun için önce EKK kalıntıları $e = y - Xb$ 'ler elde edilip

$$\ln e_i^2 = Z'_i \alpha + v_i \tag{3.38}$$

modelinde yerine konulabilir. Burada $v_i = \ln (e_i^2 / \sigma_i^2)$'dir. Bu eşitliğe EKK uygulandığında

$$\hat{\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i z'_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} z_i \ln e_i^2 \tag{3.39}$$

tahminleyicisi elde edilir. Ancak, buradaki v_i 'nin ortalaması sıfır olmayıp heterojen varyanslı ve otokorelasyonludur. Bununla beraber eğer u_i 'nin dağılımı normal ve e_i 'nin dağılımı u_i 'nin dağılımına yakınsıyor ise, Harvey (1976) 'da verildiği gibi asimtotik olarak v_i 'nin ortalaması ve varyansı

$$E(v_i) = -1.2704 \quad \text{ve} \quad E(v_i^2) - (E(v_i))^2 = 4.9348 \tag{3.40}$$

olur. Bu da, $\hat{\alpha}$' daki ilk eleman $\hat{\alpha}_1$ 'in tutarsız olduğu anlamına gelir. Bununla beraber,

$$\hat{\hat{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \exp(-z'_i \hat{\alpha}) x_i x'_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \exp(-z'_i \alpha) x_i y_i \tag{3.41}$$

eşitliğindeki $\hat{\alpha}$'nın değişimi yalnızca orantıdaki sabiti değiştireceğinden bir önemi yoktur. $\hat{\alpha}' = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}^*)$ olarak alınırsa $\hat{\alpha}^*$ tutarlı ve $\hat{\hat{b}}$ asimtotik olarak etkin olurlar (Judge ve Arkadaşları, 1985).

Harvey (1976) α için, $\hat{\alpha}$ ile aynı asimtotik dağılıma sahip olan başka bir tahminleyici önermiştir :

$$\hat{\hat{\alpha}} = \hat{\alpha} + d + 0.2807 (Z' Z)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(z_i \exp(-z'_i \hat{\alpha}) e_i^2 \right) \tag{3.42}$$

Burada d, ilk elemanı 0.2704 , diğer elemanları sıfır olan 1 x 1 boyutlu bir vektördür.

4. SONUÇ

Testler sonucunda varyans heterojenliğinin varlığı kabul edilmişse, uygun bir modelin seçilmesi gerekmektedir. Varyans heterojenliğinin formu hakkında kuvvetli ön bilgi mevcutsa, model buna bağlı olarak seçilebilir. Model spesifikasyonu ile ilgili kesin bir bilgi yoksa, Godfrey (1979) tarafından önerilen test kullanılabilir (Judge ve Arkadaşları , 1985).

Model (2.1) 'de β yerine TGEKK tahminleyicisi $\hat{\hat{\beta}}$ konduğunda kestirilmiş değerler $\hat{k} = Q\hat{\hat{\beta}}$ ve kalıntılar $\hat{f} = k - \hat{k}$ eşitliğinden elde edilebilir. Model spesifikasyonu hakkında kesin bilgi olmadığı durumlarda, tek tek bütün modeller denenerek ve elde edilen sonuçlara göre $\hat{k}$ değerlerine karşı $\hat{f}$ değerleri karşılıklı olarak grafik üzerinde gösterilerek uygun modelin seçilmesi bir yol olarak önerilebilir. TGEKK tahminleyicisi $\hat{\hat{\beta}}$ 'nın özelliklerinin daha ayrıntılı olarak ve $\hat{\hat{\beta}}$ 'nin kovaryans yapısının incelenmesi de bir çalışma alanı olarak önerilebilir.

SUMMARY

Generalized least square regression has be applied in the situation of heterocedasticity on the linaer models. The most important problem of the applieotions is to determine of the weights. Generalized least square estimators should be estimated, in most eases, if the weights are not known. In this study; while the estimators have been estimated for different types of relations between errors, some methods which are used have been investigated, and some comparations have been stated about these methods.

KAYNAKÇA

AMEMIYA , T. (1977) " A Note on a Heteroscedastic Model", **Journal of Econometrics**, 6, 365-370; ve "Corrigenda", Journal of Econometrics, 8, 275.

DRAPER, N.R. , H. Smith (1981) **Applied Regression Analysis**, Second Edition, Wiley, New York.

FOMBY, T. B. , R.C. Hill ve S. R. Johnson (1984) **Advanced Econometric Methods,** Springer - Verlag, New York.

HARVEY, A.C. (1974) "Estimation of Parametres in a Heteroscedastic Regression Model" , Europan Meeting of the Econometric Society, Grenoble, France.

HARVEY , A. C. (1976) "Estimating Regression Models with Multicative Heteroscedesticity", **Econometrica,** 44, 461-465

HOERL , A. E. , R. W. Kennard (1970) "Ridge Regression : Biased Estimation for Nonorthogonal Problems", **Technometrics,** 12, 55-67.

JOHNSTON , S. (1984) **Econometric Methods,** Third Edition , McGraw - Hill, Auckland.

JUDGE, G. G. , R. Hill, W. Griffiths, H. Lütkepohl ve T. Lee (1985) **The Theory and Practice of Econometrics,** Second Edition , Wiley, New York.

MALLELA, P. (1972) "Necessery and Sufficient Conditions for MINQU Estimation of Heteroscedastic Variances in Linear Model" **Journal of the American Statistical Association,** 67, 486-487.

RAO, C. R. (1970) "Estimation of Heteroscedastic Variances in Linear Models", **Journal of the American Statistical Association,** 65, 161-162.

SEBER, G. A. F. (1977) **Linear Regression Analysis,** Wiley, New York.

VINOD , H.D. ve A. Ullah (1981) **Recent Advances in Regression Methods,** Marcel Dekker, New York.

WHITE , H. (1980) "A Heteroscedasticity - Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroscedasticity", **Econometrica,** 48, 817-838.

WICHERN, D. ve G. Churchill (1978) "A Comparison of Ridge Estimatos", **Technometrics,** 20, 301-311.