D.E.Ü. İ.İ.B.F. Dergisi
Cilt: 9, Sayı: II, 1994, ss381-398.

ZAMAN SERİSİ BİLEŞENLERİNDE BİR OPTİMALİTE KRİTERİ

İbrahim HASGÜR (*)

ÖZET

Zamanla sürekli x(t) gibi bir prosese bakıldığında bunda kesikli zaman noktaları olduğu görülür. İdeal düzgün bileşenler olarak bir genel diferensiyal operatörün Boş uzayın elamanları seçilir. optimallik kriteri olarak bir kuadratik düzgünlük ve bir kuadratik uygunluk kriterinin ağırlıklı toplamı alınır. genel çözüm açık olarak türetilmekte ve bunun hesaplanması için formüller verilmektedir. Diferansiyel operatörün özel seçilmesi durumunda polinomial ve trigonometrik terimlerin doğrusal kombinasyonu olarak bilinen "Trend - artı - mevsim bileşenleri" ne ulaşılmaktadır. Bu tekrar tabii yoldan tek tek kısmi bileşenlerine ayrılabilir. Eşit aralıklı veriler durumunda bu ifade hareketli ortalamaları oluşturmada da uygulanabilir.

1. GİRİŞ

Aşağıda bir zaman serisinin çeşitli bileşenlere ayrılması için bir yöntem takdim edilecektir. Buna ön analiz işlemi denilebilir.Çıkış noktası $y_1,...,y_n$ verileridir. Bunları [a,b] aralığında tarifli bir x(t) (zamanla sürekli) prosesin $t_1,...t_n$ anlarındaki hata içeren gözlemler olarak mütalaa edelim.

$$(a < t_1 < ..... < t_n < b)\text{, yani :}$$

$$y_k = x(t_k) + \varepsilon_k$$

Burada k = 1, ... ,n olmak üzere ε_k bir toplam hatayı göstermektedir.

Amaç, x(t) düzgün gidişini tahmin etmek ve trend - konjonktür ve mevsim gibi tek tek bileşenlere ayırmaktır. Alışılagelmiş tanım şeklinden farklı olarak, düzgün bileşenler dediğimizde mevsimle beraber trend ve konjonktürü (yani sadece orta ve uzun vadeli dalgalanmalar değil) ele alıyoruz. Özel olarak II. Bölümde polinomial trend - konjonktür bileşenlerini ve trigonometrik mevsim şekillerini inceliyeceğiz. III. Bölümde veri dizilerinin düzgünleştirilmesi (durağanlaştırılması)için genel bir prensip verilmektedir. Daha sonra IV. de örneklendirmek suretiyle önceden anlatılan bileşenler birkaç somut hal için tespit edilecektir. V. Bölümde sonuç mütalaaları ve daha ileri durumlar için görüşler mevcuttur.

(*) Doç.Dr., İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü.

II . Trend - Konjonktür ve Mevsim

Bir zaman serisinin net bir trend - konjonktür bileşenini tasvir etmek için (düşük dereceli) bir polinom uygundur. (p-1) dereceden bir polinom $D^P x(t) = 0$ dif. denkleminin çözümüyle karakterize edilir. Buradaki D, $\frac{d}{dt}$ dif. operatörünü belirtir. Bundan dolayı D^P yi $P \in N$ ile bir (polinomial) Trend konjonktü operatörü olarak adlandırıyoruz.

Net bir mevsim bileşeninin şekli, cos λj t ve sin λj t trigonometrik fonksiyonlarının bir doğrusal kombinasyonu ile modellendirilebilir. Zamanın kesikli olduğu bir gözlem biçiminde değişken değiştirme etkisine dikkat etmek gerekir. Bu etki Schlittgen / Streitberg (1984) te etraflıca ele alınmıştır. Gözlem frekansını doğru tanımlamak için $\lambda_j \in (0,\pi]$, j=1 ...q, $q \in N$ seçilir. Bilinen p periyot uzunluğu için frekanslar $\lambda_j = 2\pi j / p$,j=1, ..., [p/2] şeklinde ele alınır. λj frekanslı bir titreşim, $(D^2 + \lambda_j^2)$ operatörü ile ortadan kaldırıldığı için, yani $(D^2_q + \lambda_j^2)$ x(t) = 0 nin temel çözümleri cos λ_jt ve sin λ_j t fonksiyonları olduğu için $\prod_{j=1}$ $(D^2 + \lambda_j^2)$ yi bir mevsim operatörü olarak tanımlıyoruz.

"Net eğilim" i (p-1). dereceden bir polinom, $P \in N$, "Net mevsim" i de λ_j j=1, ... ,q, $q \in N$ frekanslarının titreşimlerinin doğrusal kombinasyonu olarak tarif edersek, bunların toplamı olarak "Net düzgün bileşenler"

$$D^P \prod_{j=1}^{q} (D^2 + \lambda_j^2)\, x(t) = 0,\ t \in [a,b]$$

diferansiyel denkleminin genel çözümü olur.

Bu anlamda $D^P \prod_{j=1}^{q} (D^2 + \lambda_j^2)\, x(t)$ dif. operatörü, Net düzgün bileşenler için eşanlamlı olarak kullanılabilir.

$$\int_{[a,b]} (D^P \prod_{j=1}^{q} (D^2 + \lambda_j^2)\, x(t))^2 dt \quad ....(1)$$

ifadesi, bu sebeple [a,b] aralığındaki herhangi bir uygun x(t) fonksiyonu için global bir "düzgünlük ölçeği" olarak değerlendirilebilir. Değeri sıfır ise yukarıda tarif edilen net düzgün bileşenleri elde edilir. Sıfırdan farklı bir değeri de ideal seyirden sapmanın derecesi olarak görürüz.

III . Metodun Açıklanması :

A - Optimizasyon programı

Pratikte, uzun bir zaman bölgesinde düzgün bileşenlerin ortaya konmasında polinomların ve trigonometrik fonksiyonların kullanılması iyi sonuç vermektedir, bkz Heiler (1981) . Eğilim - Konjonktür ve Mevsim , net bir biçimde nadiren ortaya çıkar. Bunun için ideal gidişten sapan düzgün bir bileşen, x(t), aranmalıdır. Bu esnada

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - x(t_k))^2 \tag{2}$$

"uygunluk ölçeği" de çok büyük olmamalıdır. Aksi taktirde düzgün bileşenlerin gözlemlere göre sapmaları öyle büyük olur ki verilerdeki önemli dinamik (hareketlilik) farkedilmez.

Düzgünlük ve uygunluk ölçekleri bu bakımdan rekabet halindeki kaideler olarak görülürler. Eğri ne kadar düzgün ise veriler o kadar kötü temsil edilmiş olup , veriler ne kadar iyi yaklaşıklıkla verilmişse (veya hemen hiç interpolasyon yapılmamışsa) eğri o kadar daha az düzgün olacaktır. Bu durumda (1) ile (2) arasında bir uzlaşma bulunmalıdır.

Bu sebepten

$$\min_{x(t} \left(\sigma^2 \int_{[a\ ,\ b]} \left(D^p \prod_{j=1}^{q} (D^2 + \lambda_j^2)\, x(t)\right)^2 dt + \sum_{k=1}^{n} (y_k - x(t_k))^2 \right) \tag{3}$$

optimizasyon programını ele alıyoruz. Burada x uygun bir fonksiyon bölgesinden, tam anlamıyla $W_{m2}[a,b]$ den seçilir ki, [a,b] aralığında m = p + 2q defa diferansiyeli alınabilir fonksiyonun bölgesinde çift katlı integralli m mertebeden türevi olur.

Buradaki $\sigma^2 \varepsilon R$ "sapma parametresi" keyfi olarak önceden verilebilir. Bu parametre düzgünlüğün derecesinden sorumludur.

B. Genel Çözüm

Keyfi bir $T = \sum_{j=0}^{p} a_j D^j$ diferansiyel operatörü için, verilmiş

$a_j \varepsilon R$, $j=0 \ldots, p$ ve $a_p = 1$

katsayılarıyla (3) optimizasyon programını araştırıyoruz. 0;

$$W_0 = 0, \quad \sum_{j=0}^{q} q_j = p \ \text{ile}\ T = \prod_{j=0}^{q} (D - w_j)^{q_j}$$

faktöryel şekline şu karakteristik polinomun teşkiline uygun olarak sahip olsun

$$P(W) = \sum_{j=0}^{p} a_j w^j = \prod_{j=0}^{q} (W - W_j)^{q_j} \quad , W \in C \ \text{için}$$

Burada $j = 0, \ldots. q$ olup W_j ; q_j çok katlılığının reel sayı çiftleriyle komplex düzlemdeki ifadesidir. Şayet bahsedilen ayrıştırıcı

$$T^* = \sum_{j=0}^{p} a_j (-D)^j \ \text{operatörü} \qquad T^* = (-1)^p \prod_{j=0}^{q} (D + W_j)^{q_j}$$

biçiminde faktörize edilirse böylece

$$TT^* = (-1)^p . D^{2q0} \sum_{j=1}^{r} (D - \lambda_j)^{r_j} . (D + \lambda_j)^{r_j}$$

bulunmuş olur. Burada $\lambda_j^2 \neq 0$, $j = 1, \ldots r$ için olup değer çiftleri

farklıdırlar $(\sum_{j=1}^{r} r_j = p - q_0)$ yani w_j kare olup,0 T de negatif işaretlerle de ortaya çıkabilir, böylece uygun biçimde T*T de toplanmış olur.

Minimizasyon Probleminin Çözümü :

$\sigma^2 \varepsilon R$ ve $a<t_1<....<t_n<b$ için

$$\min_{X \varepsilon W_{p2}[a,b]} \left((\sigma^2 \int_{[a,b]} (Tx(t))^2 dt + \sum_{k=1}^{n} (y_k - x(t_k))^2 \right)$$

$$\hat{X}(t) = \sum_{j=0}^{q} \sum_{h=1}^{q_j} \hat{\beta}_{jh} t^{h-1} e^{w_j t} + \sum_{k=1}^{n} \hat{\gamma}_k g(t-t_k),\ t \varepsilon [a,b] \ ...(4) \text{ vasıtasıyla}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{\gamma}_k t_k^{h-1} e^{W_j t_k} = 0,\ h=1, q_j, j = 0,...q$$

$$\sum_{j=0}^{q} \sum_{h=1}^{q_j} \hat{\beta}_{jh} t_k^{h-1} e^{w_j t_k} + \sum_{\ell=1}^{n} \hat{\gamma}_\ell (g(t_k - t_\ell) + \sigma^2 \delta_{k\ell}) = y_k \quad \delta_{kl}$$

k =1, ...n ve k=l için =1 ve aksi taktirde 0

ve $g(t - s) = H(t - s)$

$$\left(\sum_{h=1}^{q_0} (b_0 2h/(2h-1)!)(t-s)^{2h-1} + \sum_{j=1}^{r} \sum_{h=1}^{r_j} (b_{jh}/(h-1)!)(t-s)^{h-1} (e^{\lambda_j (t-s)} + (-1)^h . e^{-\lambda_j (t-s)}) \right)$$

$s = t_1, ...,t_n$ ile verilmiştir.

$b_{0,2h}$; $h = 1, ..., q_0$ ve b_{jh}; $h = 1,...r_j$; $j = 1,...r$

T*T ye ait invers karakteristik

$$\left((-1)^p W^{2q_0} \prod_{j=1}^{r} (w - \lambda_j)^{r_j} (w + \lambda_j)^{r_j} \right)^{-1} =$$

$$= \sum_{h=1}^{q_0} b_0 2h W^{-2h} + \sum_{j=1}^{r} \sum_{h=1}^{r_j} b_{jh} \left((w - \lambda_j)^{-h} + (-1)^h (w + \lambda_j)^{-h} \right)$$

polinomundan bulunurlar. H(t - s) , Heaviside fonksiyonunu belirtir. t > s için H (t - s) = 1 ve aksi taktirde sıfır olarak tariflenir.

$$\text{İspat : Önce} \quad T^{*}T\, f(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \delta(t - t_k),\ t \leq t_1 \ \text{ve} \ t \geq t_n \ \text{için}\ T f(t) = 0$$

olan dif. denkleminin genel çözümünü ele alalım. Buradaki δ impuls fonksiyonunu (H veya Dirac fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi) belirtir.

$\int_{[a,b]} f(t)\, \delta(t - s)\, dt = f(s)$, a<s<b özelliği ile tarifli, keyfi, sınırlı, integre edilebilir s de sürekli f fonksiyonları için tarif edilir. (Kanval (1983) sayfa 4 e bakınız)

$t \leq t_1$ için Tf(t) = 0 yan şartını dikkate alarak genel çözüm

$$f(t) = \sum_{j=0}^{q} \sum_{h=1}^{q_j} \beta_{jh} t^{h-1} e^{w_j t} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k g(t - t_k)$$

ile verilir. Buradaki ilk terim Tf (t) = 0 un genel çözümünü gösterir. İkinci terimi ise verilen dif. denkleminin bir özel çözümüdür. Bu özel çözümde $T^{*}T\, g(t - s) = \delta\,(t - s)$ ve $t \leq s$ ve $s = t, \ldots t_n$ için $g(t - s) = 0$ dır ve (5) formunu açıklamıştır. karşılaştırmak için bkz (Hebbel / Heiler (1987)) f(t) çözümü, Tf(t) = 0 yan

şartını ve $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k T_g(t - t_k) = 0$ yı $t > t_n$ için sağlamalıdır

Konstrüksiyon sonucu g(t -) = 0 olmak üzere $t \leq t_k$, k = 1, ..n için $t_k T^{*}Tg\,(t - t_k) = \delta\,(t -$) geçerli olur. Buradan (5) tekine benzer olarak

$$T_g(t - t_k) = H(t - t_k) \sum_{j=0}^{q} \sum_{h=1}^{q_j} (a^{*}_{jh} / {*}(h - 1)!)\, (t - t_k)^{h-1} . e^{-w_j(t - t_k)}$$

elde edilir. Buradaki a^{*}_{jh}, $h = 1, \ldots q_j, \ldots j = 0, \ldots q$ katsayıları

$$\left((-1)^{p} \prod_{j=0}^{q} (W + W_j)^{q_j}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{q} \sum_{h=1}^{q_j} a^{*}_{jh} (W + W_j)^{-h}$$

kısmi ayırımından elde edilir. Böylece $t > t_n$ için

$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k T_g(t - t_k)$, yine $t > t_n$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \sum_{j=0}^{q} \sum_{h=1}^{q_j} (a^{*}_{jh} / (h-1)!)(t-t_k)^{h-1} e^{-W_j(t-t_k)} = 0$$ 'a eşdeğer dur.

$$\sum_{h=1}^{q_j} (a^{*}_{jh} / (h-1)!)(t-t_k)^{h-1} = \sum_{h=1}^{q_j} \sum_{m=1}^{h} (a^{*}_{jh}/(h-1)! \binom{h-1}{m-1} (-t_k)^{m-1} t^{h-m}$$

$$= \sum_{m=1}^{q_j} \sum_{h=m}^{q_j} ((-1)^{m-1} / (m-1)!)(a^{*}_{jh} / (h-m)!) t^{h-m} t_k^{m-1},$$

ile, ki burada

$$P_{q_j-m}(t) = ((-1)^{m-1} / (m-1)!) \sum_{h=m}^{q_j} (a^{*}_{jh}/(h-m)!) t^{h-m} q_j - m.$$

dereceden bir polinomdur, $t > t_n$ için

$$\sum_{j=0}^{q} \sum_{k=1}^{q_j} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k (t_k^{m-1} e^{w_j t_k}) P_{q_j-m}(t) e^{-w_j t} = 0$$ elde edilir.

$P_{q_j-h}(t) e^{-w_j t}$ fonksiyonları lineer bağımsız olduklarından

$h = 1, q_j; j = 0 \ldots\ldots q_n$ için $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k t_k^{h-1} e^{w_j t_k} = 0$ geçerli olmalıdır.

Keyfi $x \varepsilon W_{p2}[a, b]$ için $\int (Dx(t))(Tf(t))\,dt = x(t)\,Tf(t) + \int x(t)(-D)\,Tf(t)\,dt$

integrasyon kuralının birden çok uygulanması ile ve $Tf(a) = Tf(b) = c$ olmasına dikkat ederek

$$\int_{[a,\, b]} (Tx(t))\,(Tf(t))\,dt = \int_{[a,\, b]} x(t)\, T^*\, Tf(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \int_{[a,\, b]} x(t)\, \delta(t-t_k)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\, x(t_k)$$

elde edilir. Böylece bütün $x \in w_{p2}[a, b]$ için

$$\sigma^2 \int_{[a,\, b]} (T(x(t) - f(t)))\,(Tf(t))dt + \sum_{k=1}^{n} (y_k - f(t_k))\,(f(t_k) - x(t_k)) =$$

$$\sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \gamma_k (x(t_k) - f(t_k)) + \sum_{k=1}^{n} (y_k - f(t_k))(f(t_k) - x(t_k)) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - f(t_k) - \sigma^2_{\gamma_k})(f(t_k) - x(t_k))$$

ortadan kalktığı taktirde, yani $f(t_k) + \sigma^2_{\gamma_k} = y_k$ veya

$$\sum_{j=0}^{q} \sum_{h=1}^{q_j} \beta_{jh}\, t_k^{h-1}\, c^{w_j t_k} + \sum_{l=1}^{n} \gamma_k (g(t_k - t_l) + \sigma^2 \delta_{kl}) = y_k, \quad k = 1, \ldots. n$$

geçerli olduğu taktirde $\displaystyle \sigma^2 \int_{[a,\, b]} (Tx(t))^2 dt + \sum_{k=1}^{n} (y_k - x(t_k))^2 =$

$$\sigma^2 \int_{[a\, b]} (T(x(t) - f(t)))^2 dt + \sum_{k=1}^{n} (f(t_k) - x(t_k))^2 + \sigma^2 \int_{[a,b]} (Tf(t))^2 dt + \sum_{k=1}^{n} (y_k - f(t_k))^2 +$$

$$2\sigma^2 \int_{[a,b]} (T(x(t) - f(t)))\,(Tf(t))dt + 2\sum_{k=1}^{n} (y_k - f(t_k))\,(f(t_k) - x(t_k)) \geq$$

$$\sigma^2 \int_{[a,b]} (Tf(t))^2 dt + \sum_{k=1}^{n} (y_k - f(t_k))^2$$

olur. Başta verilen f fonksiyonu katsayılar hakkındaki eşitlik kısıtlamaları ile buna göre minimizasyon probleminin bir çözümü olur.

Tek anlamlılık için yukarıdaki eşitsizliği ele alalım. Burada eşitlik işareti, k = 1, ..., n için T (x(t) - f(t)) = 0 ve $x(t_k) - f(t_k) = 0$ olduğunda geçerlidir. Buna göre $t_1, \ldots, t_n$ sıfır yerlerine sahip T nin sıfır bölgesinden trivial olmayan hiçbir çözüm bulunmadığı taktirde tam bir çözüm vardır. Bu, $(t_1^{h-1} e^{w_j t_1} \ldots t_n^{h-1} e^{w_j t_n})$ vektörlerinin lineer bağımsız olmalarına eşdeğerdir.

$h = 1, \ldots q_j, j = 0, \ldots q$

İHTAR.: Kismi ayırımın katsayıları aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$b_{0}, {}_{2h} = (1/(2q_0 - 2h)!)\ [(((-1)^p \prod_{j=1}^{r} (W - \lambda_j)^{r_j} (W + \lambda_j)^{r_j})^{-1})^{(2q_0 - 2h)}]\ W = 0'$$

$$h = 1, \ldots, q_0$$

$$b_{jh} = (1/(r_j - h)!)\ [(((-1)^p W^{2q_0} (W + \lambda_j)^{r_j} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 1}}^{r} (W - \lambda_l)^{r_l})^{-1})^{(r_j - h)}]\ W = \lambda_j$$

$h = 1, \ldots r_j$; $j = 1, \ldots, r$ ve rekursif yazım şekliyle :

$$b_{0,2}(q_0 - h) = (1/h) \sum_{m=1}^{h} b_{0,2}(q_0 - h + m) \sum_{l=1}^{r} r_l / \lambda_l^{2m}, \quad h = 1, \ldots q_0 - 1,$$

$$b_{0,2} q_0 = ((-1)^{q_0} \prod_{l=1}^{r} \lambda_l^{2r_l})^{-1}$$

$$b_j, r_j - h = (1/h) \sum_{m=1}^{h} b_j, r_j - h + m\ (-1)^m ((2^{m+1} q_0 + r_j)/(2\lambda_j)^m +$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq 1}}^{r} r_l (1/(\lambda_j - \lambda_l)^m + 1/(\lambda_j + \lambda_l)^m)$$

$$h = 1, r_j - 1 \Rightarrow b_j\ r_j = ((-1)^p 2^{r_j} \lambda_j^{2q_0 + r_j} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 1}}^{r} (\lambda_j^2 - \lambda_l^2)^{r_l})^{-1}, \quad j = 1, \ldots r \text{ geçerli olur.}$$

C. GENEL ÇÖZÜMÜN ÖZELLİKLERİ

Aşağıda (4) le verilmiş olan düzgün bileşenin $\hat{x}(t)$ Prognos ' unun en önemli özellikleri verilecektir. $\hat{x}(t)$ çözümü, $t_{1,\dots}t_n$ gözlem yerlerinde daima yeni (Dirac) impulslarına sahip olan bir lineer sisteme uygundur. (4) gösteriminde bu esneklik mevcuttur. t_1 anına kadar sadece T bakımından homojen çözüm tesirlidir. t_1 den itibaren normal gidiş $\hat{\gamma}_1 g(t - t_1)$ in eklenmesiyle t_2 ye kadar değişir. Daha sonra $\hat{\gamma}_2 g(t - t_2)$ de eklenir ve t_n den sonra yine ideal düzgün gidişi elde ederiz. $\hat{x}(t)$, [a,b] aralığında 2p - 2 kere sürekli türetilebilir olup, kismi aralıklarda daima ayni temel fonksiyonlardan meydana gelir. Yalnız katsayılar farklıdır. Bu cinsten fonksiyonlara, verilen temel fonksiyonların Spilines ' i de denir. (Bakınız Hebbel (1982))

$\hat{x}(t)$ düzgün bileşeni verilerde lineer homojendir.

$$\{ (f_j(t) ; \hat{\beta}_j) ; j = 1....p \} = \{ (t^{h-1} e^{w_j t}, \hat{\beta}_{jh}) ; h = 1,...q_j, j = 0,...q \} \text{ ve}$$

$$\mathbf{F}(t) = (f_1(t)...f_p(t)) ; \mathbf{G}(t) = (g(t - t_1)...g(t - t_n))' ; \hat{\beta} = (\hat{\beta}_1....\hat{\beta}_p^{o})' , \hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1...\hat{\gamma}_n)'$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1(t_1)...f_p(t_1) \\ \vdots \\ f_1(t_n)...f_p(t_n) \end{pmatrix} , \quad G = \begin{pmatrix} g(t_1 - t_1)....g(t_1 - t_n) \\ \vdots \\ g(t_n - t_1)....g(t_n - t_n) \end{pmatrix} , \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

konduğu taktirde (4) e göre matris yazım şekliyle

$$\hat{\chi}(t) = \mathbf{F}(t)'\hat{\beta} + \mathbf{G}(t)'\hat{\gamma} \quad \left\{ \begin{array}{l} F'\hat{\gamma} = 0 \\ F\hat{\beta} + (G + \sigma^2 I)\hat{\gamma} = y \end{array} \right\} \qquad (6)$$

bulunur. F nin sütun rang maksimum ise

$$H = G + \sigma^2 I \text{ ile } \hat{\gamma} = H^{-1}y - H^{-1}F\hat{\beta} \text{ dur ve } F'\hat{\gamma} = 0 .$$

$$\hat{\beta} = (F'H^{-1}F)^{-1}F'H^{-1}y$$

$$\hat{\gamma} = (H^{-1} - H^{-1}F(F'H^{-1}F)^{-1}F'H^{-1})y$$

yı verir. Buradan

$$W(t)' = (F(t)' - G(t)'H^{-1}F')(F'H^{-1}F)^{-1}F'H^{-1} + G(t)'H^{-1} \text{ ile } \hat{\chi}(t) = W(t)'y \quad \ldots (7)$$

elde edilir.

$$GH^{-1} = (G + \sigma^2 I - \sigma^2 I)(G + \sigma^2 I)^{-1} = I - \sigma^2 H^{-1} \qquad \text{olduğu için}$$

$$W = (I - GH^{-1})F(F'H^{-1}F)^{-1}F'H^{-1} + GH^{-1} = I - \sigma^2 H^{-1} + \sigma^2 H^{-1}F(F'H^{-1}F)^{-1}F'H^{-1}$$

ile $t_1, \ldots t_n$ görülen noktaları $\hat{\chi} = (\hat{x}(t_1) \ldots \hat{x}(t_n))'$ için

$$\hat{\chi} = Wy$$

geçerli olur. $q_0 \geq 1$ den dolayı F, sadece birlerden meydana gelen bir sütuna sahiptir. $F'W = F'$ ve $WF = F$ olduğundan, yani özel olarak $1'W = 1'$ ve $W1 = 1$ olduğundan W deki sütun ve satır toplamları (bir) dir. Ayrıca W nin simetrik olduğu ve zaman ekseninin $(t \rightarrow t - t_0)$ a kaymasında değişmeden kaldığı gösterilebilir. İkinci özellik dolayısıyla eş aralı verilerde işlem önce küçük bölgelerde kullanılabilir. Daha sonra bütün gözlem periyoduna yayılır. (Bkz Hebbel / Kuhlmeyer (1983)). Bu, Berlin işleminin temel versiyonundakine benzerdir (Nullan (1969 ve 1970), Heiler (1970)).

7 'ye göre keyfi β için $\hat{x}(t) = W(t)'y$ ve $W(t)'F\beta = F(t)'\beta$ geçerlidir. y verileri buna göre ideal düzgün bir gidiş üzerinde ise, yani $y = F\beta$, ise, $\hat{x}(t) = F(t)\beta$ olur ve böylece tahmin ile bütün $t \in [a, b]$ için (Sadece gözlem yerlerinde değil) tam bir düzgün bileşen yeniden üretilir.

Nihayet $\sigma^2 \rightarrow 0$ ve $\sigma^2 \rightarrow \infty$ sınır halleri enteresandır. $\sigma^2 \rightarrow 0$ için minimizasyon kriterinde sadece uygunluk önşartı değerlendirilir. (6) ya göre $\hat{\chi} = F\hat{\beta} + G\hat{\gamma} = y$ dir. Yani y verileri $\hat{x}(t)$ düzgün bileşenleri tarafından interpole edilir. $\sigma^2 \to \infty$ $(\sigma^{-2} \to 0)$ durumunda minimizasyon kriterinde uygunluk ölçüsü rol oynamaz. Çözüm olarak ideal düzgün bileşen çıkar. Bu uygunluk şartında verileri en iyi temsil eder.

$$H = G + \sigma^2 I = \sigma^2(\sigma^{-2} G + I) \text{ ve } H^{-1} = \sigma^{-2}(\sigma^{-2} G + I)^{-1} \quad \text{olduğundan}$$

$$H^{-1} \to 0, \; (\sigma^{-2} G + I)^{-1} \to I \text{ ve } (F'H^{-1}F)^{-1} F'H^{-1} \to (F'F)^{-1} F', \; \sigma^{-2} \to 0$$

elde edilir. Ayrıca (7) ye göre $\sigma^{-2} \to 0$ için $W(t)' \to F(t)'(F'F)^{-1}$ ile $\hat{x}(t) = w(t)'$y olur. Burada II. deki diferensiyal operatör seçilirse $\sigma^2 \to \infty$ için Berlin işleminin çıkış modeli temel olur.

D. BİLEŞENLERE AYIRMA

$\hat{x}(t)$ düzgün bileşeninin (4) ve (6) daki tahmini, çeşitli kısımlara ayrılabilir. Mesela $\hat{x}(t) = \hat{x}^{(1)}(t) + \hat{x}^{(2)}(t)$ şeklinde olabilir. Burada

$$\left.\begin{aligned} \hat{\chi}^{(1)}(t) &= \sum_{h=1}^{q_0} \hat{\beta}_{0h} t^{h-1} + \sum_{k=1}^{n} \hat{\gamma}_k g^{(1)}(t - t_k) \\ \hat{\chi}^{(2)}(t) &= \sum_{j=1}^{q} \sum_{h=1}^{q_j} \hat{\beta}_{jh} t^{h-1} e^{w_j t} + \sum_{k=1}^{n} \hat{\gamma}_k g^{(2)}(t - t_k) \end{aligned}\right\} \; t \in [a, b]$$

$$g^{(1)}(t - s) = H(t - s)\,(b_0, 2q_0/(2q_0 - 1)!)\,(t - s)^{2q_0 - 1},$$

$$g^{(2)}(t-s) = H(t-s)\left(\sum_{h=1}^{q_0-1} (b_0\, 2h/(2h-1)!)\,(t-s)^{2h-1} + \right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{r}\sum_{h=1}^{r_j} (b_{jh}/(h-1)!)\,(t-s)^{h-1}\left(e^{\lambda_j(t-s)} + (-1)^h e^{-\lambda_j(t-s)}\right)\right), \quad s = t_1, t_2 \ldots t_n \text{ dır.}$$

Ayırma kanonik değildir. Her bir bileşene bağlıdır. (6) Yazım şeklinde

$\mathbf{F}(t)' = (\mathbf{F}^{(1)}(t)^{(1)}\mathbf{F}^{(2)}(t))$ ve $\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}^{(1)}(t) + \mathbf{G}^{(2)}$ nin uygun ayırımında

$$W_1(t)' = ((\mathbf{F}^{(1)}(t)', 0) - \mathbf{G}^{(1)}(t)'\,H^{-1}F)\,(F'H^{-1}F)^{-1}F'H^{-1} + \mathbf{G}^{(1)}(t)'H^{-1}$$

$$W_2(t)' = ((0, \mathbf{F}^{(2)}(t)') - \mathbf{G}^{(2)}(t)'H^{-1}F)\,(F'H^{-1}F)^{-1}F'H^{-1} + \mathbf{G}^{(2)}(t)'H^{-1}$$

ile

$$\hat{x}^{(1)}(t) = (\mathbf{F}^{(1)}(t)', 0)\,\hat{\beta} + \mathbf{G}^{(1)}(t)'\hat{\gamma} = W_1(t)'y$$
$$\hat{x}^{(2)}(t) = (0, \mathbf{F}^{(2)}(t)')\hat{\beta} = \mathbf{G}^{(2)}(t)'\hat{\gamma} = W_2(t)'y \qquad \text{(C)}$$

bağıntıları elde edilir. Buradan $W_1(t)'F = (\mathbf{F}^{(1)}(t)'0)$, $W_2(t)'F = (0, \mathbf{F}^{(2)}(t)')$ ve özel olarak $W_1(t)'1 = 1$, $W_2(t)'1 = 0$ elde edilir. (C) deki gibi burada da verilerdeki ideal kısmi bileşenlerin tahminde yeniden üretilebileceği geçerlidir. Hatta her $t \in (a,b)$ için bu yapılabilir.

IV. ÖRNEKLER

Verilerde bir trend konjonktürü ve mevsim bileşeni varsa optimizasyon programı

$$T = D^p \Pi_{j=1}^{p} (D^2 + \lambda_j^2) = D^p \Pi_{j=1}^{q} (D - I\lambda_j)(D + I\lambda_j)$$

operatörü ile çözülür. (4)'e göre :

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{\gamma}_k t_k^{h-1} = 0, \; h = 1 \ldots p; \; \sum_{k=1}^{n} \hat{\gamma}_k e^{I\lambda_j t_k} = 0, \; \sum_{k=1}^{n} \hat{\gamma}_k e^{-I\lambda_j t_k} = 0, \; J = 1 \ldots q$$

$$\hat{X}(t) = \sum_{h=1}^{p} \hat{\alpha}_h t^{h-1} + \sum_{j=1}^{q} (\hat{\beta}_{j1} e^{i\lambda_j t} + \hat{\beta}_{j1}^{*} e^{-i\lambda_j t}) + \sum_{k=1}^{n} \hat{\gamma}_k g(t - t_k), \quad t \in [a,b]$$

$$\sum_{h=1}^{p} \hat{\alpha}_k t_k^{h-1} + \sum_{j=1}^{q} (\hat{\beta}_{j1} e^{i\lambda_j t_k} + \hat{\beta}_{j1}^{*} e^{-il t_k}) + \sum_{e=1}^{n} \hat{\gamma}_e (g(t_k - t_e) \sigma^2 \delta_{ke}) = y_k \quad k = 1,2 \ldots n$$

$$g(t-s) = H(t-s) \left(\sum_{h-1}^{p} (a_{2h} / (2h-1)!) (t-s)^{2h-1} + \sum_{j=1}^{q} \sum_{h=1}^{2} (b_{jh} / (h-1)!) (t-s)^{h-1} (e^{il_j (t-s)} + (t)^{h} e^{-i\lambda_j} c^{-i\lambda_j (t-s)} \right)$$

geçerlidir (Oradaki $\dot{w}j$, $i\lambda i$ ve $-i\lambda i$ ile yer değiştirip

$T * T = (-1)^p D^{2p} \Pi_{j=1}^{q} (D - i\lambda_j)^2 (D + i\lambda_j)^2$ kullanılır $k = \ell$ için δ kl=1, aksi halde sıfır.

Burada $\quad a_2(p-h) = (1/h) \sum_{m=1}^{h} a_2(p-h+m) \sum_{\ell=1}^{q} 2/(i\lambda_\ell)^{2m} \;, h = 1, \ldots p-1$

$$b_{j1} = -b_{j2} \left((4p+2)/2i\lambda_j + 2 \sum_{\ell \neq j}^{1} 2i\lambda_j / (\lambda_e^2 - \lambda_j^2) \right) \qquad a_{2p} = ((-1)^p \prod_{\ell=1}^{q} i\lambda_\ell)^4)^{-1}$$

$$b_{j2} = ((-1)^p 4 (i\lambda_j)^{2p+2} \prod_{\ell=1}^{q} ((i\lambda_j)^2 - (i\lambda_\ell)^2)^2)^{-1}, \; j = 1, \ldots q$$

$$\hat{\beta}_{j1}=\frac{1}{2}(\hat{\beta}_j-i\hat{\beta}_j^*),\ \hat{\beta}^*_{j1}=\frac{1}{2}(\hat{\beta}_j+i\hat{\beta}^*_j) \text{ ve } \hat{\beta}_{j1}e^{i\lambda_j t}+\hat{\beta}^*_{j1}e^{-i\lambda_j t}=$$

$$\frac{1}{2}\hat{\beta}_j(e^{i\lambda_j t}+e^{-i\lambda_j t})-\frac{1}{2}i\hat{\beta}^*_j(e^{i\lambda_j t}-e^{-i\lambda_j t})=\hat{\beta}_j\cos\lambda_j t+\hat{\beta}^*_j\sin\lambda_j t \qquad \text{ile}$$

$$\hat{X}(t)=\sum_{h=1}^{p}\hat{\alpha}_h t^{h-1}+\sum_{j=1}^{q}\hat{\beta}_j\cos\lambda_j t+\hat{\beta}^*_j\sin\lambda_j t)+\sum_{k=1}^{n}\hat{\gamma}_k g(t-t_k)\ ,\ t\in[a,b]$$

geçerlidir. burada

$$\sum_{k=1}^{n}\hat{\gamma}_k t_k^{h-1}=0,\quad h=1,\dots p;\quad \sum_{k=1}^{n}\hat{\gamma}_k\cos\lambda_j t_k=0,\quad \sum_{k=1}^{n}\hat{\gamma}_k\sin\lambda_j t_k=0,\ j=1,\dots q$$

$$\sum_{h=1}^{p}\hat{\alpha}_h t_k^{h-1}+\sum_{j=1}^{q}(\hat{\beta}_j\cos\lambda_j t_k+\hat{\beta}_j^*\sin\lambda_j t_k)+\sum_{\ell=1}^{n}\hat{\gamma}_\ell(g(t_k-t_\ell)+\sigma^2\delta_{k\ell})=y_k \text{ ve}$$

$$g(t-s)=H(t-s)\Big(\sum_{h-1}^{p}(\partial_{2h}/(2h-1)!)(t-s)^{2h-1}+\sum_{j=1}^{q}b_j\Big(((2p+1)/\lambda_j+4\sum_{\ell=1}^{q}\lambda_j/(\lambda_j^2-\lambda_\ell^2)^2\Big)$$

$$\sin\lambda_j(t-s)-(t-s)\cos\lambda_j(t-s)\Big)\Big)\quad s=t_1,\dots t_n \text{ dir. Ayrıca } \ell\neq j$$

$$a_{2(p-h)}=(2/h)\sum_{m=1}^{h}a_{2(p-h+m)}(-1)^m\sum_{j=1}^{q}1/\lambda_j^{2m},\quad h=1,\dots p\text{-}1$$

$$a_{2p}=((-1)^p\prod_{j=1}^{q}\lambda_j^4)^{-1} \text{ ve } b_j=(2\lambda_j^{2p+2}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 1}}^{q}(\lambda_j^2-\lambda_l^2)^2)^{-1},\quad j=1,\dots q$$

Trend konjonktürü ve mevsimdeki ayırma III.D' de anlatıldığı gibi yapılır. Mutad olduğu üzere $p=2$ seçilir. Aylık veriler mevcutsa frekanslar $\lambda_j = \Pi_j/6$, $j\in\{1,..5\}$ alınır. tam sayılı gözlem noktalarında $k=1 \dots ,n$ için $\sin \Pi t_k$ kaybolduğu ve böylece çözüm tek anlamlı olmadığı için Π frekanslı üst dalga dahil edilir.

$T = D^p \prod_{j=1}^{q} (D^2 + \lambda_j^2)(D - i\Pi)$ operatörü kullanılır. Çözüm bu durumda sadece tam sayılı t ε (a,b] için reeldir.

Başlangıçta düzgün bileşenin sadece bir Trend veya bir mevsiminden meydana geldiği tespit edilirse, bu hemen ifadede dikkata alınabilir. Bu durumda ya $T = D^p$ veya $T = \prod_{j=1}^{q} (D^2 + \lambda_j^2)$ kullanılır. (4) genel çözümü doğrudan uygulanamaz. Fakat ispattan kolayca trüretilebilir. Diğer bileşenle ilgili terimlerin düştüğü gösterilebilir.

V. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Burada anlatılan bir zaman serisinin çeşitli bileşenlere ayrılması metodu çok çeşitli şekilde modifiye edilebilir. Trend ve Mevsim'in bir multiplikatif ifadesi mesela, bir üstel Trend'in girişi gibi mümkündür $(T = \prod_{j=1}^{q} (D^2 + \lambda_j^2)^p$ seçilir.

Çözümün düzgünlük derecesi σ^2 ε R sapma parametresi ile tespit edilir. Toplam bileşenin ne kadar düzgün olduğu hakkında bir fikir mevcut değilse σ^2 nin tespiti için otomatik bir metot arzu edilir. Bunun için Heiler / Hebbel (1985) bir stokastik model olusturmuşlardır. Burada düzgun bileşen en iyi lineer tahmindir. Bilinmeyen σ^2 parametresi ifadeden uygun bir şekilde tahmin edilebilir. Model formülasyon olmaksızın σ^2 nin tespiti için Wahba / Wold (1975), Wahba (1977)'nin çapraz değerlendirme metodu kullanılır. Trend ve Mevsim'deki toplam düzgün bileşenin ayrılma şekli kullanıcıya ve onun betimlenmesine bağlıdır. Tanımlar gerçi keyfidir (tabii yoldan tespit edilemez) fakat trend ve mevsim için sürekli operasyonel önşartlar verilir (Bkz. Stier (1980-1985)-).

Çözümün kenarlarda önceden belirtilen anlamda düzgün olması özelliği ile bir "kenar stabilitesi" çıkar. Yeni gözlemler eklenirse bunların trend tesirleri, sürekli yön değişimi yapacak şekilde ağırlıklı değildir. Trend kenarda önceden beklenen davranışı gösterir.

Sonuç olarak denebilir ki III'de anlatılan metot birçok sahalarda uygulanabilir (Bkz. Titteringston (1985)). Mesela spektral tahminlerde (Hebbel / Heiler (1978)) , çekirdek tahminlerinde (Silverman (1984)), veya doğrusal modelde (Heckman (1985)),Green/Jennison /Seheult (1985) metot benzer olarak kesikli zaman değişkeni için de formüle edilebilir. Bu durumda diferansiyel operatör sadece bir diferans/ fark operatörüyle yer değiştirir (Bkz. Hebbel (1982 ve 1983).

SUMMARY

It can bee seen that there are discrete time points when a time continuous process of x(t) is taken in to account. A generall differential operator is chosen from the elements of the null space as an ideally smooth component. The optimality criteria is defined as the weighted sam of the quadnatic smoothness and quadratic compatibility. A general solution procedure is developed explicitly and the frmulae are given for its computation. The case where differential operator is determined specially leads the researcher to "trend-plus-season components" which is known as the linear combination of polynomial and trigonometric term. This linear combination could be decomposed into its partical components again. The expression we have here may also be used to obtain moving averages.

KAYNAKÇA

GREEN, P. / Jennison, C. / Seheult, A. (1985) : Analysis of Field experiments by least squares smoothing. dRSS B47.

HEBBEL, H. (1982) : Lineare Systeme, Analysen, Schätaungen und Prognosen (unter Verwendung von Splinefunktionen). Habilitationsschrift Dortmund.

HEBBEL, H. (1983) : Allgemeine Komponentenmodelle zur Analyse und prognose von Zeitreihen. Forschungsbericht Nr. 83/3, Fachbereich Statistik Universität Dortmund.

HEBBEL, H. / Heiler, S. (1978) : Die Verwendung von Splinefunktionen bei der Schötzung von Spektraldichten. In : Schaffer, K. - A. (Hrsg).

HEBBEL, H./ Heiler, S (1987): Ein optimierendes Verhafren zurZeitreihenzerlegung. Forschungsbericht Nr. 87/2, Fochbereich Statistik Universitat Dortmund.

HEBBEL , H / Kuhlmeyer, N, (1983): Eine Weiterentwicklung von Heilers Berliner Verhafren. Forschungsbericht Nr. 83 / 9 , Fachbereich Statistik Universitat Dortmund.

HECKMAN, N.E. (1985): Spline Smoothing in a partly Linear Model Preprint, Department of Statistics, University of British Columbia

HEİLER, S. (1970): Theoretische Grundlagen des, Berliner Verhofrens in : wetsel, W(tirsg).

HEİLER, S. (1981) : Zeitreihenanalyse heute - Ein Uberblick. Allg Statis Archiv 65, 376-402.

HEİLER, S. / Hebbel, H. (1985) : Zeitreihenglöttung in einem Fehler in den - Variablen - Modell in : Statistik zwischen Theorie und Praxis (Hrsg; Buttler / Dickmann / Helten / Vogel). Göttingen

KANWAL, R. P. (1983) : Generalized Functions : Theory and technique. New York, London.

ULLAU, B. (1969) : Derstellung des Verhafrens, in : Das " BerlinerVerhafren " Ein Beitrag zur Zeitreihen analyse, DIW Beitrage zur Strukturforschung Helft 7.

NULLAU, B. (1970) : Probleme bei Praktischen Anwerdungen des "Berliner Verhafres" In : Wefzel W. (Hrsg).