T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
EKONOMETRİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BULANIK DOĞRUSAL OLMAYAN ÇOKLU HEDEF PROGRAMLAMA VE UYGULAMA

Bülent TATAR

Danışman
Doç. Dr. Kaan YARALIOĞLU

2010

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **"Bulanık Doğrusal Olmayan Çoklu Hedef Programlama ve Uygulama"** adlı çalışmanın, tarafımdan, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

..../..../.......

Bülent TATAR

YÜKSEK LİSANS TEZ SINAV TUTANAĞI

Öğrencinin

Adı ve Soyadı	**: Bülent TATAR**
Anabilim Dalı	**: Yöneylem Araştırması**
Programı	**: Ekonometri**
Tez Konusu	**: Bulanık Doğrusal Olmayan Çoklu Hedef Programlama ve Uygulama**
Sınav Tarihi ve Saati :	

Yukarıda kimlik bilgileri belirtilen öğrenci Sosyal Bilimler Enstitüsü'nün …………………….. tarih ve ………. Sayılı toplantısında oluşturulan jürimiz tarafından Lisansüstü Yönetmeliğinin 18.maddesi gereğince yüksek lisans tez sınavına alınmıştır.

Adayın kişisel çalışmaya dayanan tezini ………. dakikalık süre içinde savunmasından sonra jüri üyelerince gerek tez konusu gerekse tezin dayanağı olan Anabilim dallarından sorulan sorulara verdiği cevaplar değerlendirilerek tezin,

BAŞARILI OLDUĞUNA	O	OY BİRLİĞİ	O
DÜZELTME	O*	OY ÇOKLUĞU	O
REDDİNE	O**	ile karar verilmiştir.	

Jüri teşkil edilmediği için sınav yapılamamıştır.	O***
Öğrenci sınava gelmemiştir.	O**

* Bu halde adaya 3 ay süre verilir.
** Bu halde adayın kaydı silinir.
*** Bu halde sınav için yeni bir tarih belirlenir.

	Evet
Tez burs, ödül veya teşvik programlarına (Tüba, Fullbrightht vb.) aday olabilir.	O
Tez mevcut hali ile basılabilir.	O
Tez gözden geçirildikten sonra basılabilir.	O
Tezin basımı gerekliliği yoktur.	O

JÜRİ ÜYELERİ				İMZA
……………………………	□ Başarılı	□ Düzeltme	□ Red	……………..
……………………………	□ Başarılı	□ Düzeltme	□ Red	……….........
……………………………	□ Başarılı	□ Düzeltme	□ Red	…..…………

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BULANIK DOĞRUSAL OLMAYAN ÇOKLU HEDEF PROGRAMLAMA VE UYGULAMA

Bülent TATAR

Dokuz Eylül Üniversitesi

Sosyal Bilimleri Enstitüsü

Ekonometri Anabilim Dalı

Ekonometri Programı

Problem, doğrusal bir amaç ve doğrusal yapıdaki kısıtlardan oluşan bir modelle kurulmuş ise bir çok yöntem ile optimal çözüme ulaşılır. Ancak modelin yapısının doğrusal olmadığı çok amaçlı durumlarda aynı yöntemlerin kullanması sapmalı ve tutarsız sonuçlar verecektir. Bu sebeple, "Doğrusal Olmayan Programlama" problemlerinin çözümü için birçok algoritma geliştirilmiştir. Ancak bu algoritmalardan sadece bir kaçı gerçek dünya problemlerine uygulanabilmektedir.

1960'lı yılların başında "Hedef Programlama" konusu incelenmeye başlanmış ve günümüze kadar ister tek bir amaca ister birçok amaca aynı anda optimal çözümler üreterek gelişimini sürdürmüştür.

1965 yılında Loutfi A. Zadeh tarafından "Bulanık Küme Teorisi"nin geliştirilmesi ile geleneksel yapıya yeni bir bakış açısı kazandırılmıştır. Bu sayede karar vericilerin gerçek dünya problemleri ile ilgili sözel düşüncelerinin modellerde yer alması sağlanmıştır.

Bu çalışmada, Doğrusal Olmayan Çoklu Hedef Programlama konusu içerisinde yer alan Şans Kısıtlı Hedef Programlama tekniğinin Bulanık Mantık yaklaşımı ile birleştirilerek gerçek bir üretim sürecinde ne gibi sonuçlar vereceği araştırılmış ve konuyla ilgili öneri ve eleştiriler yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: **Bulanık Mantık, Doğrusal Olmayan Programlama, Doğrusal Olamayan Hedef Programlama, Stokastik Programlama, Şans Kısıtlı Programlama**

ABSTRACT

Master's Thesis

FUZZY NONLINEAR MULTIOBJECTIVE GOAL PROGRAMMING AND APPLICATON

Bülent TATAR

Dokuz Eylul University

Institute Of Social Sciences

Department of Econometrics

Programme of Econometrics

Problems modeled by linear objectives and linear constraints may be optimized using various methods. However, same methods give deviated and/or inconsistent results in case of nonlinear multi-objective models. For this reason, many algorithms are developed to solve "Nonlinear Programming" problems, but only very few of these algorithms can be applied to real-life problems.

"Goal Programming" became a topic of interest in the early 1960's and since then it has been expanded to produce optimal solutions to both single and multi-objective cases.

In 1965, Loutfi A. Zadeh developed the "Fuzzy Set Theory" and this brought a new perspective to the traditional structure. It allowed decision-makers to insert ideas into models of real-life problems.

In this study, we investigate and discuss the effects of an algorithm obtained by combining a Fuzzy Logic approach with Chance-Constrained Goal Programming, which is a subtopic in Nonlinear Multi-objective Programming, on a real-life production process.

Key World: Fuzzy Logic, Non-Linear Programming, Non-Linear Multi-objective Goal Programming, Stochastic Programming, Chance-Constrained Programming

BULANIK DOĞRUSAL OLMAYAN ÇOKLU HEDEF PROGRAMLAMA VE UYGULAMA

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

BEŞİNCİ BÖLÜM

KISALTMALAR

DOP	Doğrusal Olmayan Programlama
DOHP	Doğrusal Olmayan Hedef programlama
HP	Hedef Programlama
ŞKHP	Şans Kısıtlı Hedef Programlama
DP	Doğrusal Programlama
ÇHP	Çoklu Hedef Programlama
ŞKBHP	Şans Kısıtlı Bulanık Hedef Programlama
DHP	Doğrusal Hedef Programlama

TABLO LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

EK LİSTESİ

GİRİŞ

Günlük yaşantımızda karşılaştığımız sorunlar sürekli olarak çeşitli kararlar almamıza neden olur. Burada sorun; amaçların planlanan şekilde ve zamanda gerçekleştirilmesini engelleyen, istenmeyen oluşumlar olarak tanımlanır. Bu sorunları çözmekle yükümlü kişiler ise karar vericiler olarak adlandırılmaktadır (Yaralıoğlu 2004,1). Karar vericileri "süreklilik sağlayıcılar" olarak da adlandırabiliriz. Çünkü bu kişiler vermiş oldukları kararlar ile hem günlük yaşantılarının hem de kuruluşların sürekliliklerini sağlarlar.

Günümüzde karar problemlerinin bazıları çeşitli varsayımlar altında doğrusal olarak modellenip çözümleri bulunurken bazıları da bu yapılara uymayıp kendi içlerinden kaynaklanan nedenlerden dolayı doğrusal olmayan modeller şeklinde tanımlanır ve bilinen optimizasyon teknikleri desteği ile çözülmeye çalışılır.

Optimizasyon tekniklerinin genel amacı; karar problemlerinin çözümünde kullanılan kaynaklardan en uygun şekilde nasıl yararlanılabileceğini araştırmak ve problemin içinde yaşandığı organizasyonları optimal şartlardaki faaliyetler içinde tutmaktır.

Bu çalışmada dikkate alınan ana düşünce doğrusal modellenen karar problemlerinden ziyade doğrusal olmayan modelleme çalışmalarını araştırmak ve özellikle doğrusal olmayan karar modellerine bulanık mantık teorisini uygulamaktır.

Karar problemlerinin pek çoğu birden fazla amaç taşımaktadırlar. Doğrusal olarak modellenen çok amaçlı karar probleminin çözümü için geliştirilen algoritmalar günümüzde etkin olarak kullanılmaktadır. Ancak her bir amacın getireceği kısıtlar birlikte ele alındığında çok amaçlı modellenen karar probleminin çözümü daha da zorlaşmakta ve bazen uygun çözümü bulmak mümkün olamamaktadır. Bu nedenle bu ve benzeri modellerin daha rahat çözülmesini sağlayabilmek amacıyla algoritmalar ve yazılımlar geliştirilmiştir.

Çalışmada Bulanık Mantık, Hedef Programlama (HP) ve Doğrusal Olmayan Hedef Programlama (DOHP) ilişkisi incelenip literatür taraması yapılmış ve gerçek karar problemi üzerinde çözümler geliştirilmiştir.

Beş ana bölümden oluşan çalışmada öncelikle Literatür taraması bölüm halinde verilmiştir. Takip eden bölümde DOP teorisi verilmiştir. DOP problemleri için çok sayıda algoritma altında çözüm teknikleri önerilmiş olmasına rağmen bunların tamamının gerçek hayat problemlerinin çözümüne uygulanması mümkün olamamaktadır. Genellikle, problemlerin yapısına göre belirlenmiş özel modellerin kendilerine has çözüm teknikleri vardır. Çalışmamızda bu konu Kısıtlanmamış Doğrusal Olmayan Algoritmalar ve Kısıtlanmış Doğrusal Olmayan Algoritmalar olarak iki başlık altında toplanmıştır.

Üçüncü bölümde Bulanık Mantık ve Hedef Programlama arasındaki ilişki incelenmiştir. Bulanık Küme Teorisi, Üyelik Fonksiyonu ve Bulanık Aritmetik konuları verildikten sonra Bulanık Mantığın çalışmamızla ilgili olan Hedef Programlamaya uyarlanması anlatılmıştır.

Takip eden bölümde Doğrusal Olmayan Hedef Programlama Algoritması ayrıntılı olarak incelenmiştir. Gradient Tabanlı Doğrusal Olmayan Hedef Programlama başlığı altında yer alan Şans Kısıtlı Hedef Programlama ve Stokastik Hedef Programlama çalışmamızın uygulamasında kullanacağımız çözüm teknikleri olarak alınmış ve "Şans Kısıtlı Bulanık Hedef Programlama" adlı konu anlatılmıştır.

Son bölümde ise çok amaçlı bir üretim sürecinde, bu çalışmanın konusunu oluşturan "Şans Kısıtlı Bulanık Hedef Programlama" yaklaşımı uygulanmıştır. Elde edilen veriler LINGO paket programında incelenmiştir.

BİRİNCİ BÖLÜM

LİTERATÜR TARAMASI

Bu bölümde çalışmada incelenen makaleleri kapsayan literatür taraması verilmiştir. Tarama yapılırken Hedef programlama, şans kısıtlı programlama, doğrusal olmayan çoklu hedef programlama anahtar kelimeleri kullanılmıştır. Ayrıca bu kelimelerin Bulanık Mantık ilişkisi ile olan sonuçları araştırılmıştır.

H. Weistroffer (1983), Doğrusal olmayan çok amaçlı karar verme problemlerinin çözümü için bir etkileşimli hedef programlama metodu sunmuştur. Geliştirilen bu yöntemde amaç; kısıtlı çok amaçlı problemin, kısıtsız tek amaçlı alt problemlerin bir serisi şekline dönüştürülmesidir.

Sang M. Lee ve David L. Olson (1985), Optimal basamak uzunluğu hesabını temel alan şans kısıtlı DOHP modelleri için bir Gradient algoritma geliştirmişlerdir. Bu algoritma, doğrusal yapıda olmayan fonksiyonların sürekli ve diferansiyeli alınabilir olmasını ve optimal bir noktayı bulmak için çözüm uzayının konveks olmasını gerektirir.

Hussein M. Saber ve A. Ravindran (1993), Doğrusal Olmayan Hedef Programlama (DOHP) problemleri için çözüm yöntemleri dört ana başlık altında incelenmiş, yapılan literatür taraması ile DOHP'nin uygulama alanları verilmiştir.

Hussein M. Saber ve A. Ravindran (1996), DOHP problemlerinin çözümü için etkili ve güvenilir bir metot olan Partitioning Gradient tabanlı algoritma incelenmiştir. Bu algoritma, DOHP problemlerinin çözümü için modifiye edilmiş pattern arama metodu ile karşılaştırılarak test edilmiştir.

R. E. Bellman ve L. A. Zadeh (1970), Bulanık karar kuramını, bulanık hedefler ve bulanık kısıtlar; alternatif uzay içerisindeki bulanık kümeler olarak tanımlanmıştır. Bulanıklık altında karar verme sürecinde bu üç kavramın uygulamalarını araştırmışlardır.

Marc J. Schniederjans ve N.K. Kwak (1982), Hedef programlama problemi için yeni bir hesaplama yöntemi basitleştirilmiş olarak bir örnek üzerinde adım adım açıklanmıştır. Bu yöntem Baumol'un minör modifikasyonlu doğrusal programlama probleminin çözümü için kullandığı simpleks metoduna dayanmaktadır.

Ramadan Hamed Mohamed (1997), Hedef programlama ile bulanık programlama arasındaki benzerlikler ve ilişki açıklanmıştır. Her iki yaklaşımın da her bir amaç için arzu edilen seviyelere ihtiyaç duyduğu ve çoklu hedef programlama problemlerinin çözümü için birden fazla seçenek sundukları vurgulanmıştır.

Liang-Hsuan Chen ve Feng-Chou Tsai (2001), Bu çalışmada, tüm bulanık hedeflerin başarılma dereceleri toplamını maksimize etmeyi amaçlayan toplamsal modelin kullanılmasıyla farklı önem ve tercih önceliklerini birleştiren Bulanık Hedef Programlama yöntemi geliştirilmiştir. Elde edilen çözümler hem tercih öncelik yapısının korunmasını hem de toplamdaki maksimum başarı derecesine sahip olunmasını sağlamıştır.

A.Charnes ve W.W. Cooper (1959), Modelde yer alan belirsiz kısıtlardaki belirsizliği bir güven seviyesi belirleyerek kontrol altına almak için Şans Kısıtlı Programlamayı geliştirmişlerdir.

P.K. De, D Acharya ve K.C. Sahu (1982), Şans Kısıtlı formülasyonu, teknoloji kısıtlarındaki katsayıların Stokastik olduğu 0-1 Hedef Programlama için kullanmışlar ve sermaye bütçelemesi için sayısal bir örnek vermişlerdir.

R.N. Tiwari, S. Dharmar ve J.R. Rao (1986), Bu araştırma da hedeflerin bulanık olduğu ve öncelik yapılarının da sıralı önceliklerle birlikte ele alındığı varsayılmıştır. Çözüm algoritmasının ardından sayısal örnek verilerek sonuçlar değerlendirilmiştir.

David L. Olson ve Scott R. Swenseth (1987), Makalede gerek tek gerekse çok amaçlı durumlarda kullanılmak üzere şans kısıtları için bir yaklaşım formüle edilmiştir. Bu yaklaşımla şans kısıtları üzerinde, en az gerçek doğrusal olmayan formlarda olduğu kadar sıkı bir bağ kurup diğer kısıt veya amaçların genişletilmesi sağlanmıştır.

Yrjö Seppälä (1988), Şans kısıtlı programlama problemleri için CHAPS (Chance Constrained Programming System – Şans Kısıtlı Programlama Sistemi) algoritmasını geliştirmiştir. Bu algoritma doğrusallaştırma teknikleri kullanmaktadır. Yazar bu sistem ile şans kısıtlı problemlerin sonuçlarını, doğrusal olanlar kadar kolay hesaplayabildiğini belirtmiştir.

Ramadan Hamed Mohamed (1992), Bu çalışmada arzu edilen seviyelerin bulanık olduğu Şans Kısıtlı Hedef Programlama açıklanmıştır. Düşünülen hedef kısıtları, olasılıklı ve bulanık kısıtlardır. Eşdeğer deterministik hedef program geliştirilmiş ve tanımlayıcı örnek verilmiştir.

İKİNCİ BÖLÜM

DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA

Karşılaşılan problemlerin yapısının doğrusallıktan uzaklaşması bu problemlerin çözümlerinin bulunmasını zorlaştırmaktadır. Bu durum araştırmacıları yeni çözüm algoritmaları geliştirmeye ve çeşitli matematiksel modeller kurmaya teşvik etmiştir. DOP'nın genel hali matematiksel olarak;

$$\begin{aligned}
&\text{Maksimum / Minimum } f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\
&\text{Kısıtlar;} \\
&g_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\left(\leq, =, \geq\right) b_1 \\
&g_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\left(\leq, =, \geq\right) b_2 \\
&\quad\vdots \\
&g_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\left(\leq, =, \geq\right) b_m
\end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada, $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ amaç fonksiyonu ve $g_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\left(\leq, =, \geq\right) b_1 \ldots$ $g_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\left(\leq, =, \geq\right) b_m$ fonksiyonları ise kısıtlardır.

(2.1) modelinin yanı sıra, kısıtlayıcı fonksiyonlara sahip olmayan DOP problemleriyle de karşılaşılabilir (Winston, 1991:613).

Hedef değişkenlerinin terimleri içindeki amaç fonksiyonu ve kısıtların anlamları benzer olduğunda yani doğrusal olduklarında problemin çözümü için klasik optimizasyon metotları kullanılabilir. Diğer yandan eğer optimizasyon problemi, hedef değişkenlerinde açık olarak belirlenmemiş veya işlemleri çok karmaşık olan amaç fonksiyonu ve/veya kısıtlar içeriyorsa kısacası doğrusal olmayan bir yapı söz konusu ise problemin çözümünde klasik metotlar kullanamayız (Rao, 1984:215).

Optimizasyonun klasik metotları, sürekli ve diferansiyellenebilen fonksiyonların optimum noktalarını bulmada kullanışlıdır. Bu metotlar analitiktir ve optimum noktaların yerleştirilmesinde diferansiyel hesaplama tekniklerinden yararlanırlar (Rao, 1984:37).

Doğrusal olmayan bir amaç fonksiyonunun uç noktasının yani maksimum ve minimum noktalarının araştırılması ile ilgili işlemelere DOP problemi denir. Bu işlem eşitlik ve / veya eşitsizlik olarak modelde bulunan doğrusal veya doğrusal olmayan kısıtlayıcı fonksiyonların sınırlayıcı koşulları altında gerçekleşmektedir. Bununla birlikte temeli en çok "DOP algoritmalarının geliştirilmesi" olan klasik optimizasyon teorisi, kısıtlanmış ve kısıtlanmamış fonksiyonların uç noktalarını belirleyebilmek için diferansiyel hesabını kullanır.

En uç noktaların belirlenmesi için gerekli ve yeterli koşullar, eşitlik kısıtlı problemler için Jakobien ve Lagrange yöntemleri, eşitsizlik kısıtlı problemler için ise Khun – Tucker koşullarıdır (Baray ve Esnaf, 2000:765). Çalışmamızın kapsamı gereği doğrusal olmayan kısıtlanmış problemin uç noktalarının eşitsizlik kısıtlarına göre belirlenmesi için Khun – Tucker gerekli koşulları ve bunların yeterlilik durumları incelenecektir.

Khun – Tucker koşulları*;* bu koşullar 1951'de Khun ve Tucker tarafından, gelişimi Lagrange metoduna dayanan bu yöntem, bir doğrusal olmayan kısıtlandırılmış problem için optimum noktanın belirlenmesini sağlayan ve koşulları eşitsizlik kısıtları durumu için kurulmuştur.

Aşağıdaki problem verilsin;

Maksimum $Z = f(x)$

Kısıtlar; (2.2)

$$g(x) \leq 0$$

(2.2)'de eşitsizlik kısıtları negatif olmayan aylak değişkenler kullanılarak eşitlik durumuna getirilip genel Lagrange fonksiyonu oluşturulur. Khun – Tucker şartları da bu fonksiyonun gerek şartlarından oluşturulur. i. kısıt $g_i(x) \le 0$'a eklenecek aylak miktarı $S_i^2 \ (\ge 0)$ ve $S = (S_1, S_2, \cdots, S_m)^T$ ve $S^2 = (S_1^2, S_2^2, \cdots, S_m^2)^T$ olarak varsayalım. Burada m, eşitsizlik kısıtlarının toplam sayısıdır. Lagrange fonksiyonu ise

$$L(X, S, \lambda) = f(x) - \lambda\left[g(x) + S^2\right]$$

Kısıtlar (2.3)

$$g(x) \le 0$$

şeklinde verilsin. Bu durumda optimumluk için gerek koşul; λ'nın maksimizasyon problemleri için negatif olmayan ve minimizasyon problemleri için pozitif olmayan bir değer almasıdır. Bu durumu doğrulamak için maksimizasyon durumunu inceleyelim : $\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial g}$ olduğu için, $g(x) \le 0$ kısıtının sağ tarafı üzerine çıktıkça çözüm uzayı daha az kısıtlanmış hale gelir ve dolayısıyla f azalmaz. Bu $\lambda \ge 0$ anlamını taşımaktadır. Benzer şekilde, minimizasyon içinde kaynak arttıkça f artamaz ve bu da $\lambda \le 0$ anlamına gelir. Eğer kısıtlar eşitlikse yani $g(x) = 0$ ise λ'nın işareti sınırlandırılmamış hale gelir (Şenyay, 1987:35).

λ üzerindeki sınırlamalar Khun – Tucker gerekli koşullarının bir parçasıdır. Diğer koşullar ise L'nin X, S ve λ'ya göre kısmi türevleri alındıktan sonra aşağıdaki gibi elde edilir (Hillier ve Lieberman, 2001:1167).

$$\frac{\partial L(X,S,\lambda)}{\partial X} = \nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial L(X,S,\lambda)}{\partial S} = -2\,\lambda_i\,S_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial L(X,S,\lambda)}{\partial \lambda} = -\left(g(x) + S_i^2\right) = 0 \tag{2.6}$$

Burada (2.5) denklem kümesi aşağıdaki sonuçları verir:

1. $\lambda_i \neq 0$ ise $S_i^2 = 0$'dır. Bu da buna karşılık gelen kaynağın kıt olması anlamına gelir ki bu kaynak sonuç olarak tamamen tüketilir. (Eşitlik Kısıtı)

2. $S_i^2 > 0$, $\lambda_i = 0$ ise bu $i.$kaynağın kıt olmaması demektir ki bu f'nin değerini etkilemez. (Başka bir deyişle $\lambda_i = \dfrac{\partial f}{\partial g_i} = 0$'dır.)

İkinci (2.5) ve üçüncü (2.6) denklem takımlarından

$$\lambda_i \; g_i \, (x) = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (2.7)$$

bulunur.

Bu yeni koşul temelde yukarıdaki çıkarımı tekrarlar, çünkü $\lambda_i > 0$ ise $g_i\,(x) = 0$ veya $S_i^2 = 0$ olur. Benzer şekilde, $g_i\,(x) < 0$ ise $S_i^2 > 0$ ve $\lambda_i = 0$ olur.

X ve λ'nın maksimizasyon probleminin sabit (uç) noktası olması için gerekli Khun – Tucker koşulları aşağıdaki gibi özetlenebilir (Rao, 1984:78).

$$\begin{aligned} &\lambda_i \geq 0 \\ &\nabla f(x) - \lambda \nabla g_i(x) = 0 \\ &\lambda_i g_i(x) = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (2.8) \\ &g_i\,(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Gerek minimizasyon da gerekse maksimizasyonda eşitlik kısıtlarına karşılık gelen Lagrange çarpanlarının işareti sınırlandırılmamış olmalıdır. Ancak bu şartlar çözümün optimal oluşunu garantilemekte yeterli değildirler. Kısmi türevlerin sıfır olduğu kısıtsız problemlerde bu şartlar gayet iyi sonuç verir. Bu şartlar optimumluğu sağlamak için yeterli olmayıp sadece gereklidir. Eğer bu şartlarla birlikte konvekslik ve konkavlık durumları da gerçekleşiyorsa bu şartlar optimumluğu garantilemekte yeterli olmaktadır.

Tablo 1.: Khun – Tucker Koşullarının Yeterliliği

	Gereken Koşullar	
Optimizasyon Yönü	**Amaç Fonksiyonu**	**Çözüm Uzayı**
Maksimizasyon	Konkav	Konveks Küme
Minimizasyon	Konveks	Konkav Küme

Çözüm uzayının konveks küme olduğunu bulmak zordur. Bu koşulları sağlamak için genelleştirilmiş doğrusal olmayan problemi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Baray ve Esnaf, 2000:768).

Maks. / Min. $Z = f(x)$

Kısıtlar; (2.9)

$$g_i(x) \leq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

$$g_i(x) \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

$$g_i(x) = 0 \qquad i = p+1, 2, \ldots, m$$

$$L(X, S, \lambda) = f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left[g_i(x) + S_i^2 \right] - \sum_{i=r+1}^{p} \lambda_i \left[g_i(x) + S_i^2 \right] - \sum_{i=p+1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

Burada λ_i ; i kısıtına ilişkin Lagrange çarpanıdır. Khun – Tucker koşullarının yeterliliğini sağlayan alt koşullar Tablo 2'de özetlenmiştir.

Tablo 2: Khun – Tucker Koşullarının Yeterliliğini Sağlayan Alt Koşullar

	Gereken Koşullar			
Optimizasyonun Yönü	$f(x)$	$g(x)$	λ_i	
Maksimizasyon	Konkav	Konveks	≥ 0	$1 \leq i \leq r$
		Konkav	≤ 0	$r+1 \leq i \leq p$
		Doğrusal	Sınırlandırılmamış	$p+1 \leq i \leq m$
Minimizasyon	Konveks	Konveks	≤ 0	$1 \leq i \leq r$
		Konkav	≥ 0	$r+1 \leq i \leq p$
		Doğrusal	Sınırlandırılmamış	$p+1 \leq i \leq m$

Bu tablonun geçerliliği, verilen koşulların maksimizasyon durumunda konkav bir $L(X, S, \lambda)$ Lagrange fonksiyonu, minimizasyon durumunda ise konveks bir $L(X, S, \lambda)$ Lagrange fonksiyonu vermesi gerçeğine dayanır. Bu sonuç $g_i(x)$ konveks ise $\lambda_i\, g_i\,(x)$'in $\lambda_i \geq 0$ ise konveks, $\lambda_i \leq 0$ ise konkav olduğunun dikkate alınmasıyla doğrulanır.

2.1. KISITLANMAMIŞ ALGORİTMALAR

Kısıtlanmamış optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan bir çok yöntem bulunmaktadır. Burada kısıtlanmamış problem için Doğrudan Arama Yöntemi ve Gradient Yöntemi olarak iki başlık altında aşağıdaki gibi sınıflandırılmıştır (Bal, 1995:93).

Kısıtsız Optimizasyon Yöntemleri

<u>Doğrudan Arama Yöntemleri</u>

i. Rasgele Arama Yöntemi
ii. Tek Değişkenli Arama Yöntemi
iii. Model Arama Yöntemi
   a. Powwel Yöntemi
   b. Hooke ve Jeeves Yöntemi
iv. Simpleks Yöntemi
v. Rosenbrock Yöntemi

<u>Gradient Yöntemi</u>

i. En Hızlı Akış Yöntemi
ii. En Hızlı İniş Yöntemi
iii. Newton Yöntemi
iv. Eşlenik Gradient Yöntemi
v. Değişken Metrik Yöntemi

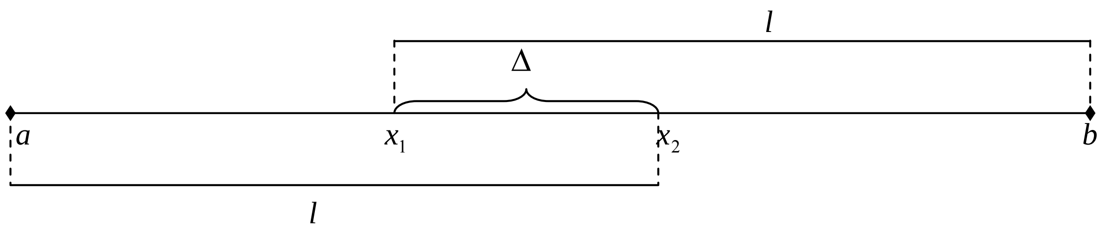
Doğrudan arama yöntemi, belirli bir bölge üzerinde yalnızca amaç fonksiyonu değerlerini kullanarak optimumu arar. Bu işlemi yaparken kısmi türevleri kullanmaz. Gradient yöntemi ise optimumu bulmak için fonksiyonun gradyanını alır. Yani fonksiyon değerleri ile beraber fonksiyonun birinci ve daha yüksek mertebeden türevlerini de göz önüne alarak optimumu araştırır.

2.1.1. Doğrudan Arama Yöntemi

Doğrudan arama yöntemi her şeyden önce tek değişkenli fonksiyonlarda uygulanır. Ancak, tek değişkenli fonksiyonların optimizasyonunun çok değişkenli algoritmaların geliştirilmesinde kullanıldığı unutulmamalıdır. Bu yöntemin genel mantığı; öncelikle belirli bir optimumu içerdiği bilinen bir aralığın belirlenmesine çalışılmasıdır. Bu aralığın genişliği optimumu kaybetmediğini garantilediği sürece sistematik olarak küçültülür. Bu işlem kesin optimumu belirleyemez ancak optimum noktayı içeren aralığın içinde nispi optimumu belirlememizi sağlar. Bu yöntemdeki sınırlamalardan birisi optimize edilecek fonksiyonun arama aralığı içerisinde unimodal varsayılmasıdır. Bu durum sadece bir yerel optimum noktayı belirlemektedir. Buna ek olarak, fonksiyonun eğimini sıfır yapan sonlu aralık mevcut değildir. İlave edilen bu varsayımla, optimize edilecek bu fonksiyon kesinlikle unimodal olmalıdır, anlamı çıkmaktadır (Şenyay, 1987:38).

Bu yöntemde $a \le x \le b$ aralığı içerisinde tanımlanan ve yerel optimuma sahip ilk aralık varsayılır. Burada, eğer $f(x)$ fonksiyonu maksimize edilecekse simetrik olarak x_1 ve x_2 gibi iki nokta tanımlanır ve bu tanımlama $a \le x \le x_2$ ve $x_1 \le x \le b$ şeklinde olur. $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ fonksiyonlarının incelenmesi sonucunda üç durum mevcuttur (Himmelblau ve Lindsay, 1980:670).

1. Eğer $f(x_1) > f(x_2)$ ise x^* (optimum x), a ile x_2 arasında olmalıdır.
2. Eğer $f(x_1) < f(x_2)$ ise $x_1 < x^* < b$ olur.
3. Eğer $f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 < x^* < x_2$ olur.



Bu durumların her birindeki aralıklar x^* içermiyorlarsa bir sonraki iterasyona geçilir. Burada Δ mümkün olduğu kadar küçük seçilmelidir. Bu işlemi matematiksel olarak göstermek istersek;

$$\max f(x) \qquad a \le x \le b \tag{2.10}$$

şeklindedir. Burada a'yı x'in sol sınırı b'yi de sağ sınırı olarak tanımlarsak

$a \le x \le x_2$ ve $x_1 \le x \le b$ ifadesi

$x_L \le x \le x_2$ ve $x_1 \le x \le x_R$ şeklini alır.

Burada $x_1 - x_L = x_R - x_2$ ve $\Delta = x_2 - x_1$'dir. Yani

$$x_1 = x_L + \frac{x_R - x_L - \Delta}{2} \quad \text{ve} \tag{2.11}$$

$$x_2 = x_L + \frac{x_R - x_L + \Delta}{2}$$

olarak bulunur.

K iterasyon sayısını göstermek üzere; verilen bir Δ (keyfi olarak seçilmiş çok küçük bir aralık) değeri için fonksiyonun en iyi değerini bulmak için "doğrudan arama tablosu" kullanılır.

Tablo 3: Doğrudan Arama Tablosu

K	x_L	x_R	x_1	x_2	$f(x_1)$		$f(x_2)$
1	a	b	x_1^1	x_2^1	$f(x_1^1)$	$>$	$f(x_2^1)$
2	x_1^1	b	x_1^{11}	x_2^{11}	$f(x_1^{11})$	$<$	$f(x_2^{11})$
3	x_1^1	x_2^{11}	x_1^{111}	x_2^{111}	$f(x_1^{111})$	$>$	$f(x_2^{111})$
:	:	:	:	:	:		:
:	:	:	:	:	:		:
K	x_1^L	x_2^R	x_1^k	x_2^k	$f(x_1^k)$		$f(x_2^k)$

Bu iterasyonlara yukarıda belirtildiği gibi $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ karşılaştırması sonucuna bağlı olarak devam edilir. Son iterasyonda x_1^L ve x_2^R elde edilmiştir (Şenyay, 1987:40). Bunun anlamı $f(x)$ fonksiyonunu, maksimum yapan x^*, $x_1^L \le x^* \le x_2^R$ arasında bulunmaktadır. Her bir iterasyonda, iterasyon sayısı arttıkça $x_R - x_L$ aralığı giderek küçülmektedir. Eğer K. iterasyonda bu aralık kullanılabilir aralıksa

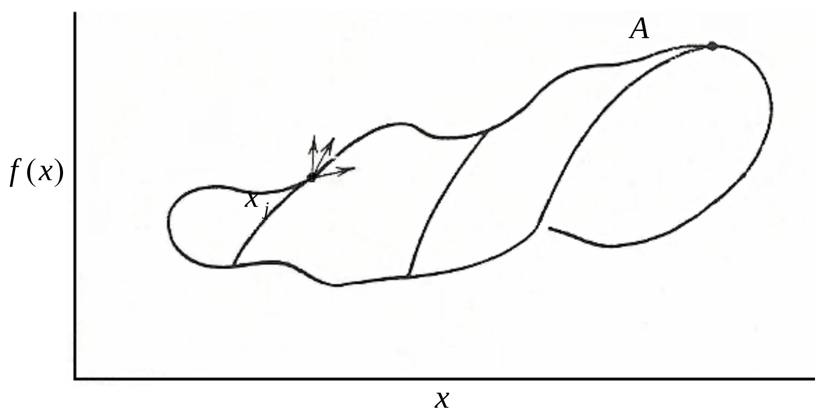
$$x^* = \frac{x_1^L + x_2^R}{2} \qquad (2.12)$$

noktası optimum nokta olarak alınabilir.

2.1.2. Gradient Yöntemi

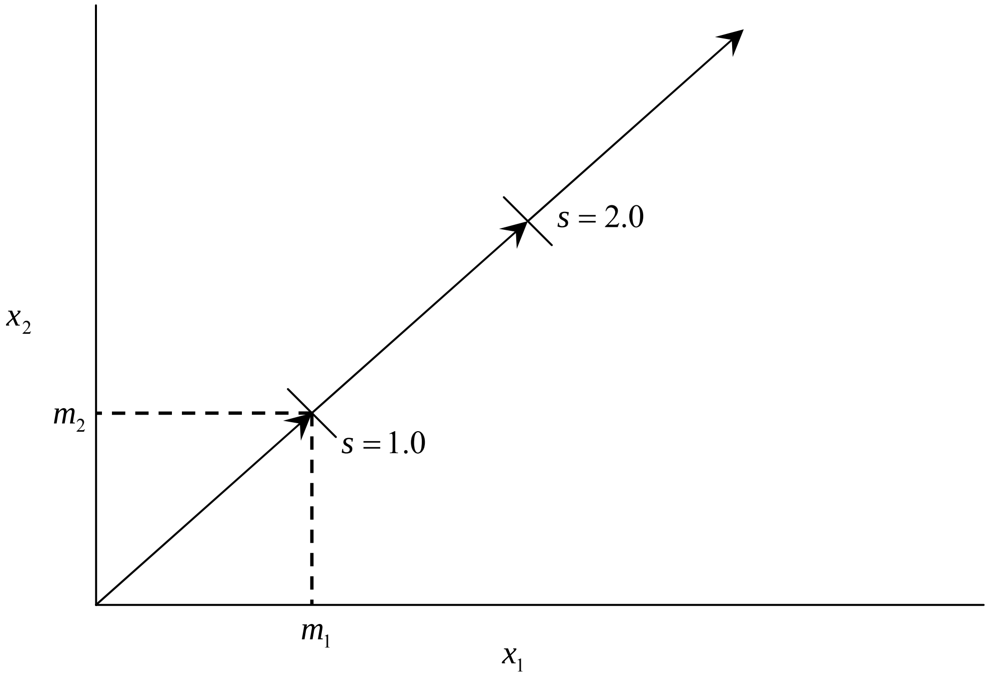
Bu bölümde incelenecek olan ikinci dereceden sürekli diferansiyel fonksiyonların optimizasyonu, doğrusal olmayan programlamada yaygın olarak kullanılan unsur olan gradient fonksiyondur. Gradient fonksiyonun doğasını tam olarak anlayabilmek için şekildeki x_j noktasını ele alalım. Buradaki düşünce, fonksiyonun gradyanı yönünde birbirini izleyen noktaları üretmektir. Şekilde x_j noktasında olunduğu varsayılır ve A noktasında oluşabilecek maksimum değerin etkisi araştırılsın (Ravindran,Phillips,Solberg, 1984:515).

Şekil 1: Çok Yönlü Doğrusal Olmayan Fonksiyon



Optimuma ulaşabilmenin, yalnızca geçerli çözüm vektörü koordinatları ile mümkün olabileceği varsayılmaktadır. Yerel optimum noktasının sağladığı bilginin kullanabilmesi için verilen x_j noktasından x_{j+1} noktasına ulaşmak için mümkün olan en kısa optimum oranı bulmak gerekmektedir. x_j ile x_{j+1} arasındaki bu uzaklığı r_j olarak adlandırılsın. Ulaşılan x_{j+1} noktasının oluştuğu yer; optimum noktaya r_j kadar yaklaştığımız noktadır.

Şekil 2.2: İki Boyutlu Hareket



Boyutsal alan i olarak aldığında oluşacak formül:

$$x_{j+1}^{(i)} = x_j^{(i)} + r_j m_i \tag{2.13}$$

şeklindedir. Burada m_i; i. parçanın hareket yönünü gösterir. Amaç fonksiyonu $y = f(x)$ de dr_j gibi küçük bir adım atıldığında fonksiyon da aynı oranda (olasılıkta) artacak veya azalacaktır. Aşağıda verilen eşitlik, atılan adımın uzunluğunu – büyüklüğünü verir.

$$dr_j = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2} \tag{2.14}$$

y'nin değişken olduğu farz edilsin; y'deki bu değişkenliği dx_i 'ye bağlı olarak göstermek istersek

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) dx_i \tag{2.15}$$

veya

$$\frac{dy}{dr_j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\left(\frac{dx_i}{dr_j}\right) \tag{2.16}$$

olarak ifade edebiliriz. Meydana gelen her türlü değişiklik bu formüllerde uygulamaya koyulduğunda artış ya da azalışın yönü bulunmuş olur.

Bildiğimiz gibi optimizasyon problemlerinin amacı maksimizasyon veya minimizasyondur.

maksimum veya minimum $\frac{dy}{dr_j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\left(\frac{dx_i}{dr_j}\right)$ (2.17)

kısıt: $dr_j=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}dx_i^2}$

Bu eşitliğin Lagrange fonksiyonu formu

maksimum veya minimum $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\left(\frac{dx_i}{dr_j}\right)-\lambda\left[1-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{dx}\right)^2\right]$ (2.18)

$$\left(\frac{dx_i}{dr_j}\right)$$

ifadesine göre türevlendiğinde

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}-2\lambda\left(\frac{dx_i}{dr_j}\right)=0 \qquad i=1,2,\ldots,n \tag{2.19}$$

ve Lagrange çarpanı; λ ,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{dr_j}\right)^2=1$$

olduğundan

$$\frac{1}{4\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2=1$$

veya

$$2\lambda = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2} \tag{2.20}$$

elde edilir. Bu parametrik form $i.$ parça için yazılırsa;

$$\begin{aligned} x_{j+1}^{(i)} &= x_j^{(i)} + \left[\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{1}{2\lambda}\right] r_j \\ &= x_j^{(i)} + r_j m_i \end{aligned} \tag{2.21}$$

Buradan, (2.19)

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} - 2\lambda\left(\frac{dx_i}{dr_j}\right) = 0$$

eşitliğini kullanarak m_i aşağıdaki formül yardımı ile bulunur;

$$m_i = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.22}$$

Gradyan yönteminin sona erdirilişi gradyan vektörünün sıfır (0) olduğu noktada gerçekleşir. Bu optimumluk için sadece gerekli bir koşuldur (Baray ve Esnaf, 2000:776). $f(x)$'in konveks veya konkav olması önceden bilinmedikçe optimumluk doğrulanamaz. $f(x)$'in maksimum kılındığını varsayalım; X_0, prosedürün başladığı sıradaki başlangıç noktası olsun ve $\nabla f(x_j)$, $i.$nokta x_j de f'nin gradyanı olarak tanımlansın. Buradaki düşünce, verilen bir nokta da $\frac{df}{dr}$'nin maksimum kılındığı belirli bir r yolunu belirlemektir. Bu sonuç birbirini izleyen x_j ve x_{j+1} noktaları için aşağıdaki gibi seçilirse

$$x_{j+1}^{(i)} = x_j^{(i)} + r_j \nabla f(x_j) \tag{2.23}$$

şeklinde oluşur.

Burada r_j, optimum adım büyüklüğüdür. r_j'yi belirleyebilmek için x_{j+1}, f'deki en büyük iyileştirmeyle sonuçlanır. Diğer bir deyişle

$$h(r) = f\left[x_j + r\nabla f\left(x_j\right)\right] \tag{2.24}$$

olacak şekilde bir $h(r)$ fonksiyonu tanımlanırsa, r_j; $h(r)$'yi maksimum kılan r değeridir.

Önerilen prosedür, birbirini izleyen iki deneme noktası x_j ve x_{j+1} yaklaşık olarak eşit olduğu zaman durdurulur. Bu $r_j\nabla f\left(x_j\right) \approx 0$ olmasıyla eşdeğerdir. $r_j \neq 0$ olarak verildiğinde, gerekli koşul $\nabla f\left(x_j\right) = 0$, x_j de sağlanır.

2.2. KISITLANMIŞ ALGORİTMALAR

2.2.1. Ayrılabilir Programlama

Ayrılabilir programlama, amaç fonksiyonunun ve kısıtlarının ayrılabilir formda olduğu doğrusal olmayan problemlerin çözümüyle ilgilenen, konveks programlamanın özel bir durumudur. Çoğu doğrusal olmayan programlama problemleri aşağıdaki formda olduğu gibidir (Bazaraa, Sherali ve Shetty, 2006:684).

$$\text{Maksimum / Minimum } Z = \sum_{i=1}^{i=n} f_i\left(x_i\right)$$

Kısıtlar (2.25)

$$\sum_{i=1}^{i=n} g_i^j\left(x_i\right) \leq b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Karar değişkenleri ayrı terim ve ifade olarak bulunduklarından, bu tipteki doğrusal olmayan programlama problemlerine "ayrılabilir programlama problemi" denir. Burada $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonu $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$ şeklinde tek değişkenli n fonksiyonun toplamı olarak ifade edilmektedir. Diğer bir deyişle; $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n)$ şeklindedir.

Bazı doğrusal olmayan fonksiyonlar ayrık olmamalarına rağmen, bu fonksiyonlarda uygun değişiklikler yapılarak ayrık hale getirilip çözülebilirler. Genellikle ayrılabilir programlamada doğrusal olmayan fonksiyonlar $\left[f_i(x_i)\ ve\ g_i^j(x_i)\right]$ parçalı doğrusal fonksiyonlara yaklaştırılarak doğrusal olmayan programlama modelleri ile çözülebilirler.

Tek değişkenli fonksiyon $f(x)$, karma tamsayılı programlamayı kullanan parçalı doğrusal fonksiyonla yaklaştırılabilir (Baray ve Esnaf, 2000:781). f_i ve g_i^j fonksiyonlarını $[a, b]$ kapalı aralığı boyunca yaklaştırabileceğini varsayalım. Öyle a_i ve b_i sayıları bulunmalı ki $(i = 1,2,3,\ldots,n)$ için optimal çözümdeki x_i'nin değeri $a_i \le x_i \le b_i$ koşuluna uysun. Sonra her x_i değişkeni için $a_i = p_{i1} \le p_{i2} \le \ldots \le p_{ik} = b_i$ koşuluna uyan $p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ik}$'yı x ekseni üzerindeki kırılma noktaları olarak tanımlanır. Bunun sonucu olarak $f(x)$ aşağıdaki gibi yaklaştırılabilir.

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{k} f(a_i)\delta_i \tag{2.26}$$

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i\, \delta_i \tag{2.27}$$

Burada δ_i, i. kırılma noktasına ilişkin pozitif ağırlıktır. Ve

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_i = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k = 1 \tag{2.28}$$

şeklinde tanımlanır.

Karma tamsayılı programlama, yaklaştırmanın geçerliliğini sağlar ve özel olarak yaklaştırma;

- En çok iki δ_i pozitif ise geçerlidir.
- δ_i pozitif ise bu durumda sadece bir komşu δ_{i+1} veya δ_{i-1} pozitif değer olarak varsayılabilir.

Bu koşulların nasıl sağlandığını göstermek için (2.25) modeli ele alınırsa:

Maksimum / Minimum $Z = \sum_{i=1}^{i=n} f_i(x_i)$

Kısıtlar

$$\sum_{i=1}^{i=n} g_i^j(x_i) \le b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

Bu problem karma tam sayılı programlama olarak şöyle yaklaştırılabilir. i. değişken x_i için kırılma noktaları sayısı K_i'ye eşit olsun, p_i^k da k. kırılma değeri olsun, δ_i^k , i. değişkenin k. kırılma noktasına ilişkin ağırlık olsun;

Bu durumda karma problem,

Maks. / Min. $\hat{Z} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_i} f_i\left(p_i^k\right)\delta_i^k$ (2.29)

veya

Maks. / Min. $\hat{Z} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\delta_i^1 \, f_i\left(p_i^1\right) + \delta_i^2 \, f_i\left(p_i^2\right) + \ldots + \delta_i^k \, f_i\left(p_i^k\right)\right]$

Kısıtlar; (2.30)

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[\delta_i^1 \, g_i^j\left(p_i^1\right) + \delta_i^2 \, g_i^j\left(p_i^2\right) + \ldots + \delta_i^k \, g_i^j\left(p_i^k\right)\right] \le b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$0 \le \delta_i^1 \le y_i^1$$

$$0 \le \delta_i^1 \le y_i^{k-1} + y_i^k \qquad k = 2,\, 3,\, \ldots, K_i - 1$$

$$0 \le \delta_i^{K_i} \le y_i^{K_i - 1}$$

$$\sum_{k=1}^{K_i - 1} y_i^k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{K_i} \delta_i^k = 1$$

$$y_i^k = 0 \text{ veya } 1 \ , \ k = 1, 2, 3, \ldots, K_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Yaklaştırma problemi için değişkenler δ_i^k ve y_i^k'dır.

Bu formülasyon herhangi bir problemin, en azından ilkesel olarak, karma tamsayılı programlamayla nasıl çözüleceğini gösterir. Buradaki zorluk kısıt sayısının kırılma noktalarının sayısıyla birlikte hızla yükselmesidir (Baray ve Esnaf, 2000:782).

Bilinen basit simpleks yöntemini kullanarak da yaklaşık modelin çözümü gerçekleştirebilir. Karma tamsayılı programlama yöntemi yaklaşık probleme global optimum verirken basit simpleks yöntemi sadece lokal optimumu garanti eder.

2.2.2. Kuadratik Programlama

Kuadratik Programlama amaç fonksiyonunun maksimizasyonu veya minimizasyonu ve kısıt koşulların doğrusal olduğu hallerde kullanılır. İkinci dereceden bir amaç fonksiyonu için doğrusal olan Khun-Tucker eşitliklerinin çözümü ve doğrusal kısıtların belirli özellikleri ile global optimumu garantiler.

n değişkenli bir $Q(x)$ fonksiyonu,

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \tag{2.31}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

olmak üzere

$$Q(x) = X^T A \ X \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlanır ki bu fonksiyona Kuadratik Form veya Kareli Form denir. $Q(x)$ fonksiyonu daha açık olarak;

$$
\begin{aligned}
Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j &= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\
&+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\
&+ \cdots \\
&+ a_{n1}x_2x_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_nx_n
\end{aligned}
\qquad (2.34)
$$

şeklinde de yazılabilir. Buradan hareketle Kuadratik fonksiyonun genel formu yazılacak olursa:

Maksimum / Minimum $Z = CX + X^T A X$

Kısıtlar (2.35)

$$DX \leq b$$

$$X \geq 0$$

Burada $X^T A X$ yukarıda tanımlandığı gibi bir Kuadratik formdur ve

$$C = (c_1, c_2, \ldots,, c_n) \qquad (2.36)$$

$$b = (b_1, b_2, \ldots,, b_m)^T \qquad (2.37)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.38)$$

A matrisi problem maksimizasyonsa negatif tanımlı, problem minimizasyon ise pozitif tanımlıdır. Bu da Z'nin X'te minimizasyon için kesinlikle konveks, maksimizasyon için de konkav olması anlamına gelir. Bu durumda konveks çözüm uzayını garanti eden kısıtların doğrusal olduğu varsayılır (Baray ve Esnaf, 2000:790).

Kuadratik programlama probleminin çözümü Khun-Tucker koşullarına dayanmaktadır. Z kesinlikle konkav veya konveks ve çözüm uzayı da konveks küme olduğu için Khun-Tucker koşulları global optimum için yeterlidir.

Aşağıda maksimizasyon durumlu Kuadratik programlama problemi incelenmiştir.

$$\text{Maks. } Z = CX + X^T A X$$

$$G(X) = \begin{bmatrix} D \\ -I \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0 \tag{2.39}$$

$$DX - b \leq 0$$

ve

$$X \geq 0$$

olur.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)^T$, $DX - b \leq 0$ kısıtına karşılık gelen Lagrange çarpanı, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^T$, $-X \leq 0$ kısıtına karşılık gelen Lagrange çarpanı olsunlar ve Khun-Tucker koşulları uyguladığın da;

$$\lambda \geq 0 \quad , \quad \mu \geq 0$$

$$\nabla Z - (\lambda^T, \mu^T) \nabla G(X) = 0$$

$$\lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.40}$$

$$\mu_j x_j = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$DX \leq b$$

$$X \geq 0$$

denklemleri elde edilir.

$$\nabla Z = C + 2X^T A$$

$$\nabla G(X) = \begin{bmatrix} D \\ -I \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

olur. $S = b - DX \geq 0$, kısıtların aylak değişkenleri olsun, koşullar,

$$-2X^T A + \lambda^T D - \mu^T = C$$

$$DX + S = b$$

$$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i \quad \text{, tüm } i \text{ ve } j \text{'ler için}$$

$$\mu, X, S, \lambda \geq 0 \tag{2.42}$$

şekline indirgenir.

$A^T = A$ olduğu için ilk denklem kümesinin transpozesi

$$-2AX + D^T \lambda - \mu = C^T \tag{2.43}$$

olur ve gerekli koşullar aşağıdaki gibi birleştirilir.

$$\begin{bmatrix} -2A & D^T & -I & 0 \\ D & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \lambda \\ \mu \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T \\ b \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

$$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i \quad \text{, tüm } i \text{ ve } j \text{'ler için}$$

$$\mu, X, S, \lambda \geq 0$$

Bu problemin $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i$ ek şartları ile çözümü doğrusal denklem sisteminin çözümüne benzer ve çözüm iki aşamalı simpleks metodunun birinci aşaması kullanılarak elde edilir.

Buradaki tek kısıt $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i$ koşulunun sağlanmasıdır ki bu da λ_i'nin pozitif bir katsayı ile temelde yer alıyorsa S_i'nin pozitif bir katsayı ile temel çözümde yer alamayacağını gösterir. Benzer şekilde μ_j ve x_j de aynı anda pozitif olamazlar.

2.2.3. Stokastik Programlama

Genellikle gerçek hayatta parametrelerin kesin olarak belirlenmesinin zor olduğu problemlerle karşılaşabiliriz. Böyle durumlarda stokastik programlama, problemin bazı veya tüm parametrelerinin rassal değişkenlerle tanımlandığı durumlara çözüm bulmaya çalışır. Stokastik programlanın ana düşüncesi; problemin olasılıklı yapısını eşdeğer deterministik forma dönüştürmektir.

Bu bölümde çalışmamızın içeriği açısından aşağıdaki gibi tanımlanan "Şans Kısıtlı Programlama" tekniği incelenecektir (Nanda,Panda ve Dash, 2008:67).

Maksimum $\qquad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Kısıtlar; (2.45)

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right\} \ge 1-\alpha_i \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0 \quad , \ \forall j \text{ için}$$

Modelde görüldüğü gibi her kısıtın $1-\alpha_i$ minimum olasılığıyla gerçekleştirilmesinden dolayı bu modele "Şans Kısıtlı" denilmektedir. Burada $0 \le \alpha_i \le 1$'dir. Tüm a_{ij} ve b_i'lerin rassal değişkenler olduğu varsayılır. Stokastik programlama probleminde üç durum söz konusudur. İlk iki durum a_{ij} ve b_i rassal değişkenlerinin ayrı ayrı ele alınmasına karşılık gelir. Üçüncü durum ise a_{ij} ve b_i'nin rassal etkilerinin birleştirildiği durumdur. Bu üç durumun hepsinde de bilinen ortalama ve sapmalarla normal dağıldığı varsayılmaktadır (Hulsurkar, Biswal ve Sinha, 1997:175).

Durum 1 : Her a_{ij}, ortalaması $E\{a_{ij}\}$ ve varyansı $Var\{a_{ij}\}$ ile "normal" dağılır. Ayrıca a_{ij} ve $a_{i'j'}$'nin kovaryansı $Cov\{a_{ij}, a_{i'j'}\}$ ile verilmiştir.

i. kısıtı ele alınırsa;

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right\} \ge 1-\alpha_i \qquad (2.46)$$

ve

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{2.47}$$

olarak tanımlansın.

h_i, $E\{h_i\} = \sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\} x_j$ ve $Var\{h_i\} = X^T A_i X$ ile normal dağılsın. Burada $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 'dir.

$$A_i = i.\ \text{kovaryans matris} = \begin{bmatrix} Var\{a_{i1}\} & \cdots & Cov\{a_{i1}, a_{in}\} \\ \vdots & & \vdots \\ Cov\{a_{in}, a_{i1}\} & \cdots & Var\{a_{in}\} \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

Ve

$$P\{h_i \le b_i\} = P\left\{ \frac{h_i - E\{h_i\}}{\sqrt{Var\{h_i\}}} \le \frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{Var\{h_i\}}} \right\} \ge 1 - \alpha_i \tag{2.49}$$

olur. Burada, $\dfrac{h_i - E\{h_i\}}{\sqrt{Var\{h_i\}}}$; ortalaması 0 (sıfır), varyansı 1 (bir) olan standart normaldir. Bunun da anlamı

$$P\{h_i \le b_i\} = \Phi\left\{ \frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{Var\{h_i\}}} \right\} \tag{2.50}$$

'dir. Burada Φ, standart normal dağılımın "Kümülâtif Yoğunluk Fonksiyonunu" gösterir. $K_{\alpha i}$, standart normal değer ve $\Phi(K_{\alpha i}) = 1 - \alpha_i$ olsun. Bu durumda $P\{h_i \le b_i\} \ge 1 - \alpha_i$ ifadesi ancak ve ancak

$$\frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{Var\{h_i\}}} \ge K_{\alpha i} \tag{2.51}$$

olması durumunda gerçekleşir. Bu da aşağıdaki doğrusal olmayan deterministik kısıtı verir.

$$\sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\}x_j + K_{\alpha i}\sqrt{X^T A_i X} \leq b_i \tag{2.52}$$

Normal dağılımın bağımsız olduğu özel durum için $Cov\{a_{ij}, a_{i'j'}\} = 0$ olur ve yukarıdaki kısıt (2.52)

$$\sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\}x_j + K_{\alpha i}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} Var\{a_{ij}\}x_j^{\,2}} \leq b_i \tag{2.53}$$

şeklinde indirgenebilir. Bu kısıt aşağıdaki değişiklik kullanılarak ayrılabilir programlama formuna eklenebilir.

$$y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} Var\{a_{ij}\}x_j^{\,2}}\,, \qquad \text{tüm } i \text{'ler için} \tag{2.54}$$

Böylelikle orijinal kısıt;

$$\sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\}x_j + K_{\alpha i} y_i \leq b_i$$

$$\text{ve} \tag{2.55}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Var\{a_{ij}\}x_j^{\,2} - y_i^{\,2} = 0$$

denklemlerine eşdeğer hale gelir.

Durum 2 : Sadece b_i, ortalaması $E\{b_i\}$ ve sapması $Var\{b_i\}$olan normal dağılımdır. Burada da işlemler durum 1'dekine benzerdir. Aşağıdaki Stokastik kısıtı ele alalım:

$$P\left\{b_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\right\} \geq \alpha_i \tag{2.56}$$

Durum 1'deki gibi,

$$P\left\{\frac{b_i - E\{b_i\}}{\sqrt{Var\{b_i\}}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - E\{b_i\}}{\sqrt{Var\{b_i\}}}\right\} \geq \alpha_i \tag{2.57}$$

olur. Bu ancak ve ancak

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - E\{b_i\}}{\sqrt{Var\{b_i\}}} \leq K_{\alpha i} \tag{2.58}$$

ise korunabilir. Böylece Stokastik kısıt aşağıdaki deterministik doğrusal kısıta eşdeğer olur (Hulsurkar, Biswal ve Sinha, 1997:176).

$$\sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\} x_j \leq E\{b_i\} + K_{\alpha i} \sqrt{Var\{b_i\}} \tag{2.59}$$

<u>Durum 3 :</u> Bu durumda tüm a_{ij} ve b_i 'ler rassal normal değişkenlerdir.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \tag{2.60}$$

kısıtını ele alalım. Bu kısıt aşağıdaki gibi de ifade edebilir.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \leq 0 \tag{2.61}$$

Tüm a_{ij} ve b_i 'ler normal olduğundan, istatistik teorisinden $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$ 'nin de normal olduğu sonucu çıkar. Bu şans kısıtının durum 1 de verilenle aynı duruma indirgendiğini ve aynı şekilde ele alınacağını gösterir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

BULANIK MANTIK VE HEDEF PROGRAMLAMA İLİŞKİSİ

HP ve bulanık mantık, aşağıdaki çok amaçlı problemin çözümünde kullanılan iki uygulamadır. İkisi de her bir amaç için arzu edilen seviyelere ihtiyaç duyar. Bu arzu edilen seviyeler karar vericiler tarafından tanımlanır (Mohamed, 1997:219).

$$\text{opt } Z = CX$$
$$\text{kısıt } DX \leq b$$

Burada $Z = (z_1\, z_2 \cdots z_k)$ amaç vektörü, C; $(k\, x\, n)$ boyutlu sabitler matrisi, X; $(n\, x 1)$ boyutlu karar değişkeni vektörü, D; $(m\, x\, n)$ boyutlu sabitler matrisi ve b; $(m\, x 1)$ boyutlu sabitler vektörüdür.

3.1. BULANIK MANTIK

Bulanık küme ve bulanık mantık kavramları 1960'lı yılların ortalarında Azerbaycanlı matematikçi Prof. Dr. Loutfi Askerzade ZADEH tarafından geliştirilmiştir. Bu kavramın dayandığı temel nokta; gerçek dünya problemlerinde kesin olmayan, belirsiz ve bulanık verileri bünyesinde barındırmasıdır – bulundurmasıdır.

Klasik kümelere dayanılarak oluşturulan önermeler, klasik mantıkta sadece iki doğruluk değeri (0 veya 1) ile eşleştirilebilir ve bununla birlikte önermelerin tamamen doğru veya tamamen yanlış olduğu kabul edilmektedir. Bu sebepten geleneksel – klasik mantıkta "iki değerli" mantıkta denmektedir. Çoklu değerlilik ise; klasik kümelere dayanarak oluşturulan önermelerin, ikiden fazla doğruluk değeri ile eşleştirilebildiği mantık sistemlerine denir. Çok değerli mantıkta önermelerin bütünüyle doğru, bütünüyle yanlış ve kısmen doğru – kısmen yanlış olduğu kabul edilir. Bu nokta da kelime anlamı ile bulanık, hayal meyal, puslu mantık anlamına gelen Bulanık Mantık; klasik – ikili mantık sistemine karşı geliştirilen, etrafımızda olup biten olayların meydana geliş olasılıkları ile değil belirli kümelere üyelik dereceleri ile ilgilenen ve üzerinde çalışılan değişkenlerin – elemanların hangi oranlarda gerçekleştiğini belirleyen çoklu mantık sistemidir. Prof. L.A.Zadeh problem çözerken insan düşünüş tarzını ele almıştır: "Büyük", "uzun", "sıcak", "yaşlı" gibi nispi kavramların derecelendirilmesinde Zadeh'in geliştirdiği "Bulanık Küme Teorisi" ve matematiksel formülasyonu, klasik mantığın aksine çok daha geniş ufuk açmıştır (Güneş, 1997:248).

Kısacası, belirsizlik altında akıl yürütme ile çok değerli mantığın birleştirildiği mantıksal bir sistem olan Bulanık Mantık'ın temelinde insan düşünüş tarzına yakın çalışan makinelerin ve sistemlerin geliştirilmesi yatmaktadır.

3.1.1. Bulanık Küme Teorisi

İkili mantıkta olduğu gibi bulanık mantık teorisinin de kendine ait matematiği ve küme yapıları ile ilgili tanımlamaları vardır. Aşağıda bulanık küme teorisinde kullanılan temel notasyon verilmiştir.

X : Küme
E : X 'in alt kümesi
Ø : Boş Küme
$\{0,1\}$: Sadece 0 ve 1 den oluşan küme
$[0,1]$: 0'dan 1'e kadar tüm reel sayılar kümesi
M : Üyelik Uzayı
$\widetilde{A}$: Bulanık Küme
$\mu_{\widetilde{A}}(x)$: $\widetilde{A}$ kümesindeki x 'lerin üyelik fonksiyonu

Tanım : x 'lerden oluşturulan elemanlar X ile gösterilsin. Bulanık bir $\widetilde{A}$ kümesinin sıralı ikilileri

$$\widetilde{A} = \{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)) | x \in X\} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Bellman ve Zadeh, 1970:143). Bu ifade de; bulanık bir kümenin sıralı ikililerinden oluşan elemanlarından birincisi kümenin elemanı, ikincisi ise bu elemanın üyelik derecesini belirten değerdir.

Bulanık küme teorisinde, küme işlemleri üyelik fonksiyonu yardımı ile aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Zimmermann, 1987:17).

- Birleşme İşlemi : $\tilde{D} : \tilde{A} \cup \tilde{B}$ olmak üzere

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \qquad x \in X \tag{3.2}$$

- Kesişme Özelliği : $\tilde{D} : \tilde{A} \cap \tilde{B}$ olmak üzere

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \qquad x \in X \tag{3.3}$$

- Kümenin Tümleyeni : $\mu_{\not\subset \tilde{A}}(x)$, bulanık bir $\tilde{A}$ kümesinin tümleyeninin üyelik fonksiyonu olmak üzere

$$\mu_{\not\subset \tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \qquad x \in X \tag{3.4}$$

- Konveks Küme : $\tilde{A}$'nın konveks olabilmek için aşağıdaki şartı sağlaması gerekmektedir.

$$\mu_{\tilde{A}}\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}\right], \quad x_1, x_2 \in X \text{ ve } \lambda \in [0,1] \tag{3.5}$$

3.1.2. Üyelik Fonksiyonu

Bulanık küme tanımında yer alan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ifadesine X'in üyelik fonksiyonu denir. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ fonksiyonu X kümesini M üyelik uzayına eşler. Üyelik fonksiyonu $[0,1]$ kapalı aralığında değerler alabilir ve bu değerler x elemanının üyelik derecesini gösterir (Lai-Hwang, 1992:20). Matematiksel olarak,

$$\mu : X \rightarrow [0,1] \tag{3.6}$$

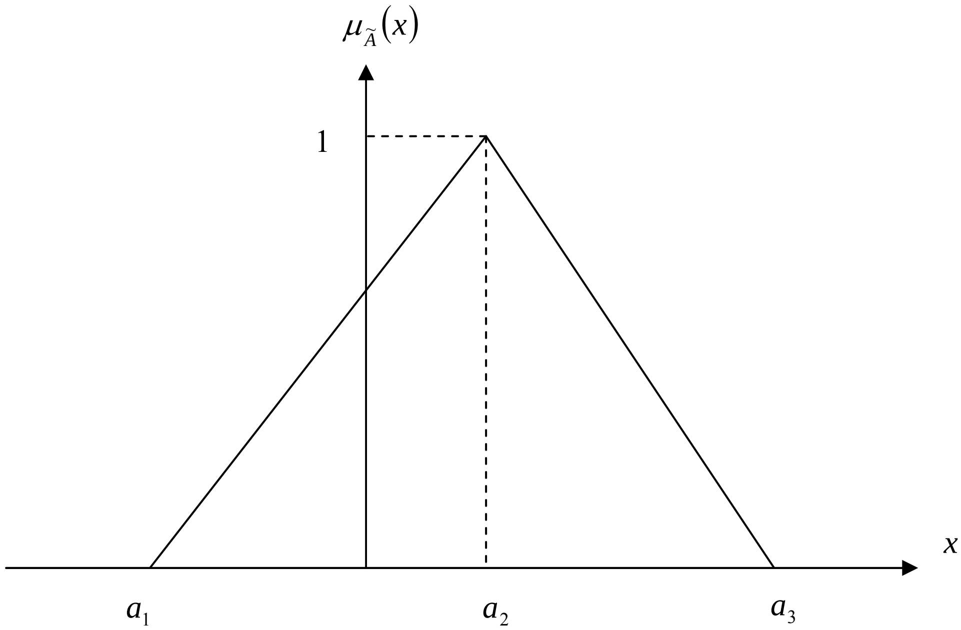
olarak tanımlanabilir.

Üyelik fonksiyonları birçok farklı şekillerde olabilir. Özel bir şeklin uygun olup olmayacağını tespit etmek; çalışılan uygulama alanı tarafından elde edilen verilerle belirlenir. Fakat birçok uygulama bu tür şekil değişikliklerine karşı çok fazla duyarlılık göstermezler. Hesaplama açısından getirdiği kolaylıklar göz önüne alınarak istenilen şekilde üyelik fonksiyonunun seçilmesi, bulanık küme teorisinin esnekliğini yansıtmasında öne çıkan bir durumdur. Aşağıda bazı üyelik fonksiyonları verilmiştir (Huang, 2007:151).

- Üçgen Üyelik Fonksiyonu : $\tilde{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & , \; a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & , \; a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & , \; x > a_3 \end{cases} \tag{3.7}$$

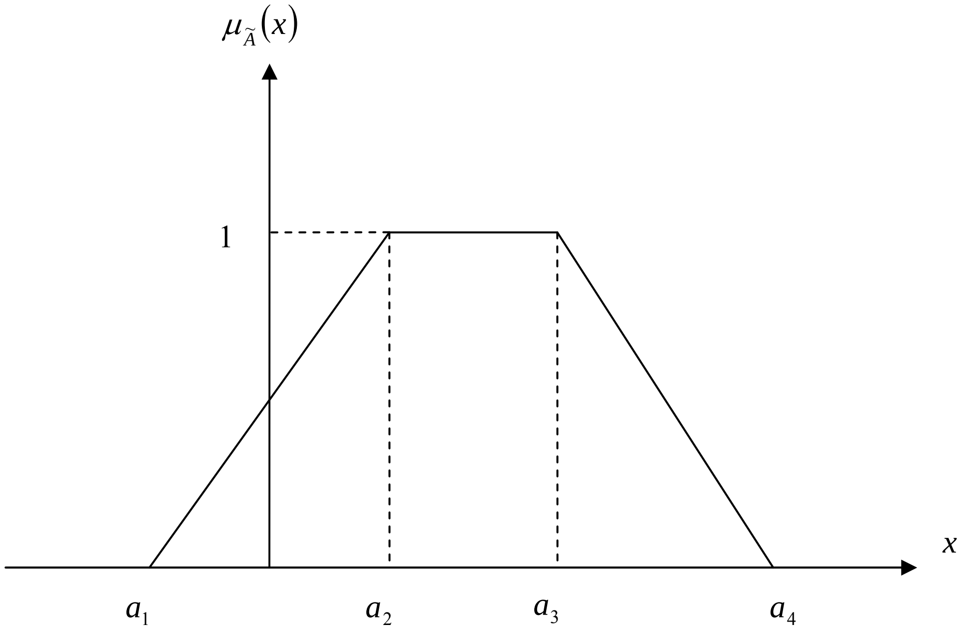
Şekil 3: Üçgen Üyelik Fonksiyonu



- Yamuk Üyelik Fonksiyonu : $\widetilde{A} = \{a_1 , a_2 , a_3 , a_4\}$

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & , x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & , a_1 \le x \le a_2 \\ 1 & , a_2 \le x \le a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & , a_3 \le x \le a_4 \\ 0 & , x > a_4 \end{cases} \tag{3.8}$$

Şekil 4: Yamuk Üyelik Fonksiyonu



Tanım: Destek Küme, bulanık bir $\widetilde{A}$ kümesinin destek kümesi "üyelik dereceleri sıfırdan büyük olan x'ler" olarak

$$\widetilde{A} = \{ x \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0 , x \in X \} \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Lai-Hwang, 1992:21).

Üyelik fonksiyonunun aralığı "sıfır" üyelik derecesini karşılamasına rağmen, bu dereceye sahip olan eleman ve üyelik derecesi "sıralı ikilisi" şeklinde listeye dâhil edilmemektedir.

3.1.3. Bulanık Aritmetik

Bulanık küme teorisinde cebirsel işlemler altı başlık altında toplanmıştır (Zimmermann, 1992:28).

- Cebirsel Toplam:

$$\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B} \tag{3.10}$$

ve

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x) \tag{3.11}$$

olmak üzere

$$\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) \mid x \in X)\} \tag{3.12}$$

dır.

- Sınırlı Toplam:

$$\tilde{C} = \tilde{A} \oplus \tilde{B} \tag{3.13}$$

ve

$$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x) = \min\{1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)\} \tag{3.14}$$

olmak üzere

$$\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x) \mid x \in X)\} \tag{3.15}$$

dır.

- Sınırlı Fark:

$$\tilde{C} = \tilde{A} \Theta \tilde{B} \tag{3.16}$$

ve

$$\mu_{\tilde{A}\Theta\tilde{B}}(x) = \max\{0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1\} \tag{3.17}$$

olmak üzere

$$\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{A}\Theta\tilde{B}}(x) \mid x \in X)\} \tag{3.18}$$

dır.

- <u>İki Kümenin Farkı:</u>

$$\widetilde{C} = \widetilde{A}.\widetilde{B} \tag{3.19}$$

olmak üzere

$$\widetilde{C} = \{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x).\mu_{\widetilde{\mathbf{B}}}(x) \mid x \in X)\} \tag{3.20}$$

dır.

- <u>Bulanık Kümenin Kuvveti</u>: Bulanık bir $\widetilde{A}$ kümesinin n . Kuvveti aşağıda olduğu gibi ifade edilir.

$$\mu_{\widetilde{A}^n}(x) = [\mu_{\widetilde{A}}(x)]^n \quad , \qquad x \in X \tag{3.21}$$

- <u>Kartezyen Çarpım</u>: $\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_n$ kümeleri $X_1, \ldots, X_n$ 'de bulanık kümeler olmak üzere kartezyen çarpım;

$$\mu_{(\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_n)}(x) = \min_i \{\mu_{\widetilde{A}_i}(x) \mid x = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in X_i\} \tag{3.22}$$

şeklindedir.

3.2. HEDEF PROGRAMLAMA

Çok amaçlı karar verme teknikleri içerisinde en yaygın olarak kullanılan Hedef Programlamada her bir hedef için farklı bir ölçeğin kullanılabiliyor olması bu tekniğin yaygınlığının bir sebebidir. HP, DP de olduğu gibi amaç kriterini doğrudan maksimize veya minimize etmek yerine hedefler arasındaki sapmaları minimize yapmayı amaçlar. Doğrusal programlamanın simpleks algoritmasında yer alan bu gibi sapmalar aylak değişkenler olarak isimlendirilirken, bu sapan değişkenler hedef programlamada yeni bir anlam kazanırlar. Sapan değişkenler her bir hedeften hem pozitif yönde hem de negatif yönde sapmalar şeklinde iki boyutta gösterilir. Amaç fonksiyonu yalnızca bu sapan değişkenlerden oluşur (Umarusman, 2002:25).

d_i^+ : pozitif sapan değişken

d_i^- : negatif sapan değişken

Bir hedeften hem negatif hem de pozitif sapma olamayacağı için aynı anda sapan değişkenlerden herhangi biri veya her ikisi birden sıfır olmalıdır. Sapan değişkenlerin her ikisi de sıfır ise hedef değerlerimize kesin olarak ulaşmışız demektir.

Hedef programlamada kullanılan üç hedef tipi mevcuttur (Romero, 2001:64).

a. $f(x) \leq b_i$

i'inci hedef belirlenen başarı düzeyinden küçük veya eşit ise oluşacak pozitif sapan değişken d_i^+ için mümkün olan en küçük pozitif değerin alınması gerekir.

b. $f(x) \geq b_i$

i'inci hedef belirlenen başarı düzeyinden büyük veya eşitse oluşacak negatif sapan değişken d_i^- için mümkün olan en küçük pozitif değerin alınması gerekir.

c. $f(x) = b_i$

i'inci hedef belirlenen başarı düzeyini tam olarak karşılıyor ise hem pozitif sapan değişken d_i^+'nin hem de negatif sapan değişken d_i^-'nin toplamlarının aynı anda minimize yapılması gerekir.

3.2.1. Hedef Programlama Çözüm Yöntemleri

Hedef programlama modellerinin çözüm yöntemleri 4 başlık altında toplanmıştır (Schniederjans, 1994:45).

1. Doğrusal Hedef Programlama
2. Tamsayılı Hedef Programlama
3. Doğrusal Olmayan Hedef Programlama
4. Bulanık Hedef Programlama

3.2.1.1. Doğrusal Hedef Programlama

Burada amaç fonksiyonları üç şekilde incelenebilir.

a. $Min\ Z = \sum d_i^- + d_i^+ \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.23)$

Bu tür amaç fonksiyonları, sapan değişkenler için herhangi bir ağırlık ya da öncelik olmadığında kullanılır. Bu eşitlikte Z her iki yönlü sapmanın toplamının minimumudur.

b. $Min\ Z = \sum P_k \left(d_i^- + d_i^+\right) \quad i = 1,2,\ldots,n \quad \text{ve} \quad k = 1,2,\ldots,K$ (3.24)

K hedef sayısı olmak üzere, her bir hedef için P_k öncelikleri kullanılır. Bu tür amaç fonksiyonu, hedefler önceliklerine göre sıralandığında kullanılır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta sapan değişkenleri için herhangi bir ağırlıklandırma söz konusu değildir.

c. $Min\ Z = \sum w_{k\,i}\ P_k \left(d_i^- + d_i^+\right) \; i = 1,2,\ldots,n \text{ ve } k = 1,2,\ldots,K$ (3.25)

Bu tipteki amaç fonksiyonunda ise hedeflerin önceliklerine göre sıralanması ile birlikte her seviyedeki sapma değişkenleri ağırlıklandırılmıştır.

3.2.1.2. Tamsayılı Hedef Programlama

Hedef programlama problemlerinin oluşturulmasında karar değişkenlerinin tümü ya da bir kısmı tamsayı değerleri ile sınırlandırılmıştır. Birçok HP modeli Tamsayılı HP modeline dayanmaktadır.

3.2.1.3. Doğrusal Olmayan Hedef Programlama

HP uygulamalarında genellikle hedefler ve kısıtlar doğrusal bir yapı göstermektedir. Bazı uygulamalarda ise çalışmamız da olduğu gibi DOHP kullanılır. Bu konu ayrıntılı olarak Bölüm 4'te incelenmiştir.

3.2.1.4. Bulanık Hedef Programlama

Bulanık küme teorisinin hedef programlama modeline uygulanması Bölüm 3.4'te incelenmiştir.

3.3. BULANIK ORTAMDA KARAR VERME

Bulanık hedef ve bulanık kısıtlayıcı durumunda nasıl karar verilebileceğini Bellman ve Zadeh 1970 yılında "Bulanık Karar Kümesi" kavramı ile açıklamaya çalışmışlardır. Bulanık bir hedef $\tilde{G}$ veya $\mu_{\tilde{G}}(x)$ üyelik fonksiyonu ile ifade edilebilir. $\mu_{\tilde{G}}(x)$, $\mu_{\tilde{G}}(x) \in [0,1]$ şartı ile belirli bir x çözüm vektörünün bulanık hedefe üyelik derecesini gösterir.

- $\mu_{\tilde{G}}(x) = 1$ olduğunda hedefe tamamen ulaşıldığını,
- $\mu_{\tilde{G}}(x) = 0$ olduğunda hedefe tamamen ulaşılamadığını,
- $0 < \mu_{\tilde{G}}(x) < 1$ olduğunda hedefe kısmen ulaşıldığını göstermektedir.

Aynı şekilde bulanık bir kısıt $\tilde{C}$ veya $\mu_{\tilde{C}}(x)$ üyelik fonksiyonu ile ifade edilebilir. $\mu_{\tilde{C}}(x)$, $\mu_{\tilde{C}}(x) \in [0,1]$ şartı ile belirli bir x çözüm vektörünün bulanık kısıtlayıcıdaki üyelik derecesini gösterir.

- $\mu_{\tilde{C}}(x) = 1$ olduğunda kısıtlayıcının tamamen doyurulduğunu,
- $\mu_{\tilde{C}}(x) = 0$ olduğunda kısıtlayıcının tamamen doyurulamadığını,
- $0 < \mu_{\tilde{C}}(x) < 1$ olduğunda kısıtlayıcının kısmen doyurulduğunu göstermektedir.

Bulanık bir karar, verilen hedefler ve kısıtlayıcıların bir kesişimi olarak tanımlanır. Bulanık hedef ve bulanık kısıtlayıcıların bir alt kümesi olan bulanık karar kümesi, $\tilde{D}$ kümesi veya $\mu_{\tilde{D}}(x)$ üyelik fonksiyonu ile ifade edilir (Bellman ve Zadeh, 1970:148).

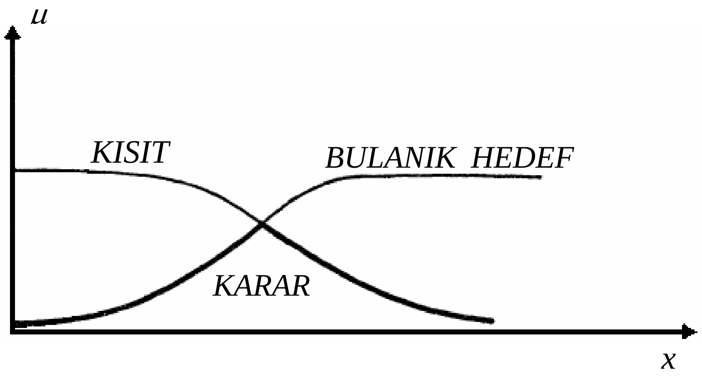
$$\tilde{D}(x) = \tilde{G}(x) \cap \tilde{C}(x) \tag{3.26}$$

ve

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{G}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)\} \tag{3.27}$$

dir.

Şekil 5: Bulanık Hedef, Kısıt ve Karar Arasındaki İlişki



Tüm hedef ve kısıtların kesişimi

$$\tilde{D}(x) = \tilde{G}_1(x) \cap \tilde{G}_2(x) \cap \ldots \cap \tilde{G}_n(x) \cap \tilde{C}_1(x) \cap \tilde{C}_2(x) \cap \ldots \tilde{C}_m(x) \qquad (3.28)$$

şeklindedir. Bu ifade

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{G}_1}(x), \ldots, \mu_{\tilde{G}_n}(x), \mu_{\tilde{C}_1}(x), \ldots, \mu_{\tilde{C}_m}(x)\} \qquad (3.29)$$

$$= \min\{\mu_{\tilde{G}_i}(x), \mu_{\tilde{C}_j}(x)\}$$

$$i = 1,2,\ldots,n \quad , \quad j = 1,2,\ldots,m$$

şeklinde ifade edilir. Bununla birlikte $\mu_{\tilde{D}}(x)$ üyelik fonksiyonun da; bulanık karar kümesinin en yüksek üyelik dereceli elemanının belirlenmesi kararın maksimizasyonu anlamına gelmektedir. Bu da

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{G}_i}(x), \ \mu_{\tilde{C}j}(x)\} \qquad (3.30)$$

$$i = 1,2,\ldots,n \qquad j = 1,2,\ldots,m$$

şeklinde ifade edilir (Sakawa, 2000:17).

3.4. BULANIK HEDEF PROGRAMLAMA

Bulanık küme teorisi hedef programlama modeline uygulandığı zaman, hedeflerin erişim düzeyleri ve tercih öncelikleri kesin olmayan ifadelerle (bulanık olarak) nitelenebilir. Bulanık küme teorisi, karar vericilerin subjektif yargılara dayanan hedefler için, "yaklaşık olarak …'e eşit" ve "…'den oldukça küçük" gibi bir dilin doğal yapısına göre ifade edilebilen erişim düzeylerinin tanımlanmasına izin verir. Hedeflere ilişkin bu tür tanımlamalar, bulanık kümelerde üyelik fonksiyonları ile anılır. Bu sayede, hedef programlama modelinin bir optimizasyon düşüncesinden daha çok bir doyum düşüncesine dayanma özelliği ön plana çıkarılmış olur (Özkan, 2003:181).

Standart bir hedef programlama formülasyonun da hedefler ve kısıtlar açık ve kesin olarak tanımlanıp verilen bir çevre yardımı ile birden fazla amacın optimal gerçekleşmesi araştırılır. Hedefler, kesin ve matematiksel eşitlikler kullanılarak belirlenen hedef değerlere dayanılarak formülasyonu yapılır. Hedef programlama içerisinde bulanık küme teorisinin uygulanmasındaki en önemli avantaj karar vericinin bulanık hedef değerlerinin belirlenmesidir. Çok amaçlı karar vermenin bu tekniğindeki bir diğer önemli avantaj ise hedefler ve kısıtların tamamen simetrik olarak oluşturulmasıdır.

Hedefler için belirlenen eğitim düzeylerinin bulanık olduğu varsayımı ile genelleştirilmiş bir bulanık hedef programlama modeli aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\text{Amaç} \quad (Ax)_i \left(\cong, \tilde{\leq}, \tilde{\geq}\right) b_i$$

$$\text{Kısıtlar} \quad (Ax)_l \left(\cong, \tilde{\leq}, \tilde{\geq}\right) b_l$$

$$x \geq 0$$

Burada b kullanılabilir kaynak ve hedeflerin vektörü iken A teknik katsayıların matrisidir. $\cong, \tilde{\leq}, \tilde{\geq}$: kısıtların b_l çevresinde olduğunu belirtmek için kullanılmıştır.

Karar verici hedeflerin kesin olarak belirlenmesi konusunda bir belirsizliğe düşebilir. Bu sebep ile hedef değer b yerine bu değere bağlı olarak, hedefini bulanık olarak düşünce ve cümlelerle açıklayabilir. Bulanık düşünce ve cümleler şeklinde ifade edilen bir hedef programlama formülasyonu;

$$\text{Amaç} \quad (Ax)_i \left(\cong, \tilde{\leq}, \tilde{\geq}\right) b_i$$

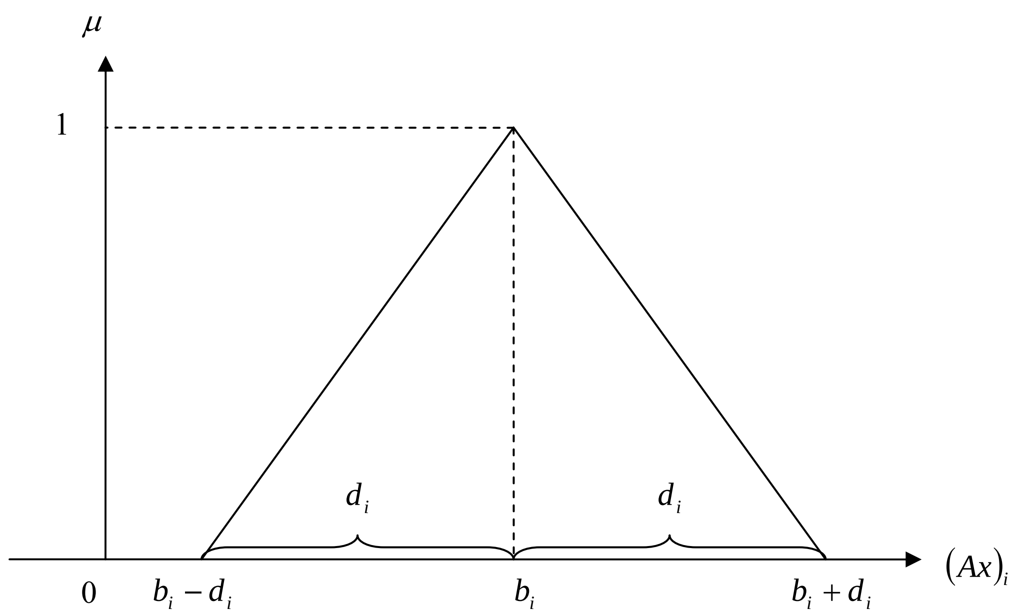
$$\text{Kısıtlar} \quad (Ax)_l \left(=, \leq, \geq\right) \tilde{b}_l$$

$$x \geq 0$$

$\tilde{b}_l$: Her l için düşünceler ve cümleler ile açıklanan hedeflerdir.

Karar verici belirleme sorunu yaşadığı için b_l hedef değerinin çevresinde kabul edilebilir maksimum miktarda sapmalar oluşabilir. Bu sapmalar d_i olarak gösterilsin,

Şekil 6: Kesin Olarak Belirlenemeyen Hedef ve Kabul Edilebilir Maksimum Sapmanın Üçgensel Formu



Burada $(Ax)_i$; gerçekleşmesi istenen x amaçları satırıdır.

Bulanık hedefler için Zimmermann tipi üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi çıkartılabilir (Mohamed, 1997:218).

$$(Ax)_i \cong b_i \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ,(Ax)_i < b_i - d_i \\ 1 - \dfrac{b_i - (Ax)_i}{d_i} & ,b_i - d_i \le (Ax)_i \le b_i \\ 1 - \dfrac{(Ax)_i - b_i}{d_i} & ,b_i \le (Ax)_i \le b_i + d_i \\ 0 & ,(Ax)_i \ge b_i + d_i \end{cases} \tag{3.31}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m_1$$

$$(Ax)_i \,\tilde{\leqq}\, b_i \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ,(Ax)_i \ge b_i + d_i \\ 1 - \dfrac{b_i - (Ax)_i}{d_i} & ,b_i \le (Ax)_i \le b_i + d_i \\ 1 & ,(Ax)_i \le b_i \end{cases} \tag{3.32}$$

$$i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2$$

$$(Ax)_i \,\tilde{\geqq}\, b_i \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ,(Ax)_i \le b_i - d_i \\ 1 - \dfrac{(Ax)_i - b_i}{d_i} & ,b_i - d_i \le (Ax)_i \le b_i \\ 1 & ,(Ax)_i \ge b_i \end{cases} \tag{3.33}$$

Burada;

d_i: hedef değerden subjektif olarak belirlenen maksimum kabul edilebilir sapmalardır.

b_i : tercih edilen değer,

$b_i - d_i$: en kötümser değer,

$b_i + d_i$: en iyimser değer olarak tanımlanır.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

DOĞRUSAL OLMAYAN ÇOKLU HEDEF PROGRAMLAMA

Gerçekte üzerinde çalıştığımız modellerin birçoğu tek bir amaca sahip olmamakta; aynı anda birçok amacın gerçekleşmesini istemektedir. Bu sebeple doğrusal olmayan modellerin çözümü için çeşitli teknikler geliştirilmiştir. DOHP da bu tekniklerden biridir. DOHP, doğrusal olmayan amaçlar ve doğrusal olmayan kısıtları içeren çok kriterli matematiksel programlama problemlerinin çözümü için kullanılan bir tekniktir.

Doğrusal olmayan hedef programlama modelinin genel şekli aşağıdaki gibidir (Saber ve Ravindran, 1993:276);

Minimize $Z = \sum_{k=1}^{p} P_k \sum_{i=L+1}^{M} \left(w_{ik}^{-} d_i^{-} + w_{ik}^{+} d_i^{+} \right)$ (4.1)

Kısıtlar;

$$R_i(X) = b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, L \tag{4.2}$$

$$g_{i-L}(X) + d_i^{-} - d_i^{+} = t_{i-L} \qquad i = L+1, \ldots, M \tag{4.3}$$

$$d_i^{-}, d_i^{+} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, M$$

Burada,

p ; modeldeki sıralı önceliklerin sayısı

P_k ; k'ıncı sıralı öncelik $(P_{k-1} >>> P_k)$

L ; modeldeki gerçek kısıtların sayısı

$M - L$; modeldeki hedef kısıtlarının sayısı

w_{ik}^{-} ; P_k sıralı önceliğindeki d_i^{-} 'ye atanmış ağırlık

w_{ik}^{-} ; P_k sıralı önceliğindeki d_i^{+} 'ya atanmış ağırlık

d_i^{-}, d_i^{+} ; DOHP modelindeki sapma değişkenleri (ki bunlar hedef sınırlamasında başarı altında ya da üstünde olunup olunmadığını gösterirler.)

X ; karar değişkeni vektörü

b_i ; i'inci kısıtın sağ taraf sabiti

t_i ; hedef ya da i hedefindeki (g_i) arzu edilen seviye

Hangi DOHP metodunun daha uygun olduğuna karar vermede yardımcı olabilecek yaklaşımlar dört ana başlıkta açıklanmıştır (Saber ve Ravindran, 1993:275).

1. Simpleks Yaklaşımı
2. Direkt Arama Yaklaşımı
3. Gradient Yaklaşımı
4. İnteraktif (etkileşimli) Yaklaşım

4.1. SİMPLEKS YAKLAŞIMI

Bu yöntem DOHP modellerinin çözümünde kullanılmak üzere;

a. MAP Yaklaşımı
b. Ayrılabilir Programlama
c. Kareli Programlama

üç temel yaklaşımı içerisinde bulundurmaktadır.

4.1.1. MAP Yaklaşımı

Bu yaklaşım Griffith ve Steward tarafından tek amaçlı doğrusal olmayan programlama problemlerini çözmek için geliştirilmiş ve 1976'da Ignizio tarafından doğrusal olmayan hedef programlama problemlerinin çözümü için uyarlanmıştır. Bu metodoloji DOHP modeli içinde doğrusal olmayan hedef kısıtlarına izin verir. (Schniederjans, 1994:48)

Yaklaşım genel olarak aşağıdaki gibi verilen doğrusal olmayan programlama problemlerini çözer (Saber ve Ravindran, 1993:277).

Minimize $\quad Z(X) \qquad (4.4)$

Kısıtlar;

$$f_i(X) \qquad i = 1,\ldots,M \qquad (4.5)$$

$$0 \le X_j \le u_j \qquad j = 1,\ldots,n \qquad (4.6)$$

Burada Z ve f_i'ler doğrusal olmayan diferansiyellenebilen fonksiyonları ve u_j'ler ise modeldeki karar değişkenleri için üst sınır değerlerini göstermektedir.

Bu yaklaşım, Taylor Serisi açılımını kullanırken herhangi bir X noktasının komşuluğunda bulunan doğrusal bir fonksiyon yardımıyla $f(X)$ doğrusal olmayan fonksiyonunun yakınsamasını temel alır. Ve daha sonra bu işlemler sonucunda elde edilen doğrusal programlama problemini çözmek için kullanılır. Bununla birlikte DOHP problemi DOP problemlerinin özel bir şekli olduğundan MAP yaklaşımı DOHP problemlerinin çözümü içinde kullanılabilir.

Bu noktadan hareketle DOHP modelinin genel şeklinde yer alan

$$R_i(X) = b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, L$$

ve

$$g_{i-L}(X) + d_i^- - d_i^+ = t_{i-L} \qquad i = L+1, \ldots, M$$

kısıtlarının diferansiyellenebilen olduğunu varsaydığımızda DOHP probleminin doğrusal yapıya dönüştürülmesi aşağıdaki gibidir;

Minimize $Z = \sum_{k=1}^{p} P_k \sum_{i=L+1}^{M} \left(w_{ik}^- d_i^- + w_{ik}^+ d_i^+ \right) \qquad (4.7)$

Kısıtlar ;

$$R_i(\overline{X}) + \nabla R_i(\overline{X})(X - \overline{X}) = b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, L \qquad (4.8)$$

$$g_{i-L}\left(\overline{X}\right)+\nabla g_{i-L}\left(\overline{X}\right)\left(X-\overline{X}\right)+d_i^- - d_i^+ = t_{i-L} \qquad i=L+1,\ldots,M \tag{4.9}$$

$$d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad i=1,\ldots,M \tag{4.10}$$

Burada $X=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$'dir.

Ek olarak, $\left(X-\overline{X}\right)$ olan basamak ölçüsü terimi yeni bir y vektörü ile tanımlanabilir;

$$y_j = x_j - \overline{x}_j \qquad j=1,\ldots,n \tag{4.11}$$

ve y_j sınırsız olduğundan

$$y_j = y_j^+ - y_j^- \qquad j=1,\ldots,n \tag{4.12}$$

olarak ifade edilir. Burada

$$y_j^+, y_j^- \geq 0 \qquad j=1,\ldots,n$$

y, basamak ölçüsü vektörünü kısıtlayarak - sınırlayarak; tahminleme hatalarını minimize etmek de MAP yaklaşımının bir amacıdır.

$$-s_j \leq y_j^+ - y_j^- \leq s_j \qquad j=1,\ldots,n \tag{4.13}$$

Burada s_j'ler kısıtlardır.

Kısıtlamalar da herhangi bir olumsuzluk olmadığından

$$-s_j \leq y_j^+ - y_j^- \leq s_j$$

ifadesi

$$0 \leq y_j^+ \leq s_j \qquad j=1,\ldots,n \tag{4.14}$$

$$0 \leq y_j \leq s_j \qquad j=1,\ldots,n \tag{4.15}$$

olarak yazılabilir.

Sınırlandırılmış X vektörünün de (4.6) ve (4.11) – (4.15) denklemleriyle bağıntılı olduğunu göz önünde bulundurulduğunda

$$0 \leq y_j^+ \leq \min\left\{s_j, u_j - x_j\right\} \tag{4.16}$$

$$0 \leq y_j^- \leq \min\{s_j, x_j\} \tag{4.17}$$

doğrusallaştırılmış sabit (4.8), (4.9), (4.16) ve (4.17) kısıtlarını içerir.

(4.14) no'lu denklemde belirtildiği gibi MAP algoritması doğrusallaştırılmış DOHP problemlerinin çözümü için vardır ve bu problemler yalnızca $(L = 0)$ hedef kısıtlarını içerir. Aşağıda ise gerçek kısıtlı $(L \neq 0)$ DOHP problemlerini, gerçek kısıtların en yüksek öncelikli hedef kısıtlarına dönüştürerek çözümü aşama aşama incelenmektedir.

<u>**Aşama 1:**</u> (4.8), (4.16) ve (4.17)'deki bütün gerçek kısıtların her birine (d_i^-, d_i^+) sapma değişkenleri eklenerek her bir kısıtın hedef kısıtına çevrilmesi gerekir.

$$Z_0 = \sum_{j=1}^{L}\left(d_j^- + d_j^+\right) + \sum_{j=M+1}^{M+2n} d_j^+$$

$$Z_k = \sum_{i=L+1}^{M}\left(w_{ik}^- d_i^- + w_{ik}^+ d_i^+\right) \qquad k = 1, \ldots P$$

Şimdi de doğrusallaştırılmış DOHP problemini aşağıdaki gibi yazabiliriz;

Minimize $Z = P_0 Z_0 + \sum_{k=1}^{P} P_k Z_k$

Kısıtlar; (4.18)

$$f_i(\overline{X}) + \nabla f_i(\overline{X})(y^+) - \nabla f_i(\overline{X})(y^-) + d_i^- - d_i^+ = b_i \qquad i = 1, \ldots, M$$

$$y_j^+ + d_{M+j}^- - d_{M+j}^+ = \min\{s_j, u_j - x_j\} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$y_j^+ + d_{M+n+j}^- - d_{M+n+j}^+ = \min\{s_j, x_j\} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$y^-, y^+, d^-, d^+ \geq 0$$

Burada

$$f_i(X) = \begin{cases} R_i(X) - b_i & i = 1, \ldots, L \\ g_{i-L}(X) - t_{i-L} & i = L+1, \ldots, M \end{cases} \text{'dir.}$$

Aşama 2: $\overline{X}$; ilk başlangıç noktası, ε_1 ve ε_2 ; yeter derecede küçük pozitif sayılar ve β ; eksiltme parametresinin basamak ölçüsü olarak verildiğinde;

$k = 0$ olduğunda

$$Z_k = \sum_{j=1}^{L} \left(d_j^- + d_j^+ \right) + \sum_{j=M+1}^{M+2n} d_j^+ \tag{4.19}$$

olur.

Aşama 3: $k = k + 1$ olduğunda, eğer gerekliyse sınırlar düzenlenebilir.

Sınırlar $\frac{u_j}{10} \leq s_j \leq \frac{u_j}{5}$ olarak düzenlenmiştir (L.Cooper ve D.Steinberg,1970).

Aşama 4: Verilen bir $\overline{X}$ noktasında doğrusallaştırılmış DOHP'un herhangi bir doğrusal hedef programlama algoritması kullanılarak biçimlendirilmesi ve çözülmesi.

Bu aşamada $\overset{*-}{y}, \overset{*+}{y}, \overset{*-}{d}$ ve $\overset{*+}{d}$ ifadelerinin optimal çözüm için uyarlandığı düşünülür.

Aşama 5: Z_k^* hesaplanır. Burada $Z_k = \sum_{i=L+1}^{M} \left(w_{ik}^- d_i^- + w_{ik}^+ d_i^+ \right)$

(a) Eğer $Z_k^* - Z_{k-1}$ gerçek anlamıyla negatifse bu durumda amaç fonksiyonu değeri düzeltilmiş demektir. Yeni çözüm noktasına yani $\overline{X}_{yeni}$'ye doğru hareket edilir. Burada; $\overline{X}_{yeni} = \left(\overset{*-}{y} - \overset{*+}{y} \right) + \overline{X}_{eski}$'dir.

(b) Eğer basamak ölçüsü $s \geq \varepsilon_2$ ise "s" s_{yeni}'ye dönüştürülür. Burada $s_{yeni} = \beta_s$'dir. Ve ardından Aşama 3'e geri dönülür.

(c) Çıkan sonuç algoritmayı sınırlandırıyorsa, bu sonuç nihai sonuçtur. Eğer DOHP problemi gerçek kısıtları içeriyorsa bu durumda ulaşılabilirlik kontrolünün yapılması şarttır. Eğer $\overline{X}_{yeni}$ 'ye ulaşılamazsa bu durumda Aşama 5(b)'ye dönülmesi gerekir.

Genel olarak MAP'in aşamalarında;

1. Karar değişkenleri her zaman uygun sınırlar içindedir.
2. $\overline{X}$ 'e hareketteki maksimum basamak ölçüsü (yani $\overline{X}$ 'nin komşuluğu) küçük ve kesin bir ilişkidir.

Bu iki özelliği korumak için problemdeki hem kısıt sayısı hem de değişken sayısındaki artış, problemin ölçüsünü de artırır. (4.7)–(4.10) denklemlerinde gösterilmiş olan DOHP problemi m kısıtlı $n+2M$ değişkenle açıklanmıştır. Burada $n > M$ 'dir. Doğrusallaştırılmış (4.15) modelinde gösterildiği gibi kısıtların sayısı $m+2n$'e çıkmış ve değişkenlerin sayısı $6n+2M$ haline gelmiştir. Doğrusal tahminlenmiş problemdeki net artışın ölçüsü $2n$ kısıt, $5n$ değişken olarak gerçekleşmiştir. Böylece MAP yaklaşımı küçük DOHP problemleri için bile çok daha fazla hesaplama zamanı ve hazırlık aşamasında daha fazla gayret gerektirmektedir.

4.1.2. Ayrılabilir Programlama Yaklaşımı

1963'te Miller tarafından geliştirilen bu uygulama 1978 de Wynne tarafından hedef programlama için modifiye edilmiştir. Bu metodoloji, doğrusal olduğu varsayılan ayrılabilir fonksiyonlar içinde karar değişkenlerinin oranları tarafından kısıtlanan doğrusal olmayan hedef kısıtlarına izin verir. Bu yöntem piece-wise (parçalı) doğrusal tahminler mantığına dayanır.

Bu teknik; geniş bir aralıkta tanımlanan herhangi bir doğrusal olmayan yapıdaki doğrusal yaklaşımını elde etmek için tanımlanan fonksiyonun aralığını öncelikle alt aralıklara ayırır ve daha sonra her bir alt aralıktaki kısmi doğrusal fonksiyonların geometrik olarak belirtilmesini ister. Bu çözüm yolu fonksiyonun doğrusal yaklaşımının elde edilmesi için iyi bir çözüm yoludur (Schniederjans, 1994:48). Bölüm 2.2.1. de ayrıntıları verilen ayrılabilir programlama kısaca; amaç fonksiyonu ve kısıtların ayrılabildiği, tek amaçlı DOP modellerinin çözümü için kullanılan bir tekniktir.

Genel olarak ayrılabilir DOP modeli aşağıdaki gibidir;

Minimize $F(X) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{t=1}^{M} f_i\,(x_i)$

Kısıtlar; (4.20)

$$\sum_{j=1}^{n} g_{i\,j}(x_j) = b_i$$

$$x_j \geq 0 \;\; i = 1, \ldots, m\,,\; j = 1, \ldots, n$$

Burada f_i ve $g_{i\,j}$ konveks fonksiyonlardır. Buradaki konvekslik; parçalı doğrusal fonksiyonların konveks olduğunu ve tahminlenen DOP problemine global optimal bir çözümün olduğunu garanti etmektedir. Bölümün başında verilen (4.1), (4.2) ve (4.3) no'lu denklemlerden oluşan DOHP modeli ayrılabilir DOHP olarak aşağıdaki şekilde açıklanabilir.

Minimize $Z = \sum_{k=1}^{p} P_k \sum_{i=L+1}^{M} \left(w_{ik}^{-}\, d_i^{-} + w_{ik}^{+}\, d_i^{+} \right)$

Kısıtlar; (4.21)

$$R_i\,(x_j) = b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, L$$

$$g_{i-L}\,(x_j) + d_i^{-} - d_i^{+} = t_{i-L} \qquad i = L+1, \ldots, M$$

$$d_i^{-}, d_i^{+} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, M$$

Burada R_i ve g_{i-L} ayrılabilir fonksiyonların kümeleridir.

Wynne 1978'de hazırladığı doktora tezinde modifiye edilmiş ayrılabilir programlama yaklaşımını özel yapılanmış DOHP modellerinin çözümünde kullanmıştır. Bu yaklaşım aynı zamanda ŞKHP problemi olarak da bilinmektedir.

Ayrılabilir DOHP'ta her bir karar değişkeni X_j, alt sınır a_j ile üst sınır b_j arasındadır. Ayrılabilir DOHP modelinin tam formülasyonu aşağıdaki şekilde yapılabilir;

Minimize $\quad Z = \sum_{k=1}^{p} P_k \sum_{i=L+1}^{M} \left(w_{ik}^{-} d_i^{-} + w_{ik}^{+} d_i^{+} \right)$

Kısıtlar ; (4.22)

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{v_j} \alpha_{jr} R_{ij}\left(x_j\right) = b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, L$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{v_j} \alpha_{jr}\, g_{i-L}\left(x_{jr}\right) + d_i^{-} - d_i^{+} = t_{i-L} \qquad i = L+1, \ldots, M$$

$$d_i^{-}, d_i^{+} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, M$$

Burada

(i) $\quad X_j = \sum_{r=0}^{v_j} \alpha_{jr}\, x_{jr}$ ve

(ii) $\quad$ En fazla iki tane ard arda α_{jr} pozitif olabilir.

(ii)'nin sonraki hali ayrılabilir programlamada "sınırlandırma temelli giriş kuralı" olarak bilinir. Bu kural nihai sonucun parçalı doğrusal yaklaşım içinde olduğunu garanti etmektedir. Parçalı DOHP modeli için çözüm prosedürü geleneksel ayrılabilir programlamanın modifiye edilmiş versiyonudur. Bu versiyonda X_j'lerin üst sınırlarının ayrılabilir programlamanın "sınırlandırma temelli giriş kuralı" ile birlikte yani bu kuralın içinde düşünülmektedir.

Ayrılabilir DOHP metodu her bir karar değişkeni x_j için gerekli olan v_j kırılma noktalarının sayısını belirlerken sabit aralıklar kullanır. Yaklaşım yalnızca bazı doğrusal olmayan elemanları ayrılabilen fonksiyonlar olarak tanımlanabilen uygulamalarla sınırlıdır.

4.1.3. Kuadratik Programlama Yaklaşımı

Kuadratik programlama metodolojisinin ilk tartışmaları 1967'de Beale tarafından ortaya atılmıştır. Bu uygulama düşüncesine göre hedef programlama metodolojisi ilk defa Gary Reeves tarafından 1977'de San Francisco'da Yönetim Bilimleri Enstitüsü ve Yöneylem Araştırması Topluluğunun Birleşik Yıllık Konferansında sunulmuştur. Reeves konveks Kuadratik amaç fonksiyonlu ve doğrusal kısıtlı Kuadratik hedef programlama problemi için bir çözüm prosedürü sunmuştur. Bu prosedür; doğrusal kısıtlı Kuadratik programlama probleminin çözümünde kullanılan Beale'nin geliştirmiş olduğu metodu temel alır. Bu metodoloji Kuadratik hedef kısıtlarına ve amaç fonksiyonunda Kuadratik tanımlı değişkenlere izin verir (Schniederjans, 1994:52).

Kuadratik programlama yaklaşımı, Kuadratik olan ya da Kuadratik modele dönüştürülebilen DOHP modellerine uygulanabilmektedir. Model genel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\text{Min.} \quad Z=\sum_{k=1}^{p} P_k \left[\sum_{i=L+1}^{M} \left(w_{ik}^- d_i^- + w_{ik}^+ d_i^+ \right) + \sum_{i=L+1}^{M} \left(d_i^- + d_i^+ \right)\left(w_{ik}^- d_i^- + w_{ik}^+ d_i^+ \right) \right]$$

Kısıtlar; (4.23)

$$R_i(X)=b_i \qquad i=1,2,\ldots,L$$

$$g_{i-L}(X)+d_i^- - d_i^+ = t_{i-L} \qquad i=L+1,\ldots,M$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad i=1,\ldots,M$$

Burada $R_i(X)$ ve $g_{i-L}(X)$ fonksiyonları tüm i değerleri için ya doğrusal ya da Kuadratik fonksiyonlardır.

Kuadratik hedef kısıtları sapma değişkenlerinin terimleri ile de ifade edilip amaç fonksiyonunun içinde şu şekilde yer alabilir; $\min\left(d_i^- + d_i^+\right)$, amaç fonksiyonundaki $\left(d_i^- + d_i^+\right)$ yerine ikame edildiğinde, $g_{i-L}(X)$ Kuadratik fonksiyon olmak üzere;

$$d_i^- = -g_{i-L}(X) + d_i^+ + t_{i-L}$$
$$d_i^+ = -g_{i-L}(X) + d_i^- - t_{i-L}$$

Bu ikameler modeli, arkasında doğrusal kısıtlar bırakan Kuadratik amaç fonksiyonlu başka bir Kuadratik hedef programlama modeline dönüştürmektedir. Eğer bütün amaç fonksiyonları öncelik seviyelerinin hepsinde konveks ise bu durumda Kuadratik sapma değişkenli Kuadratik Hedef Programlamanın içinde, amaç fonksiyonunun çözümü için yukarıda sözü geçen prosedür kullanılabilecek ve global optimal çözüm elde edilecektir. Eğer öncelik seviyelerine sahip amaç fonksiyonları konveks değil ise Kuadratik Hedef Programlama problemi çözümü çok daha zor bir hal alacaktır.

4.2. DİREK ARAMA YAKLAŞIMI

Bu tip doğrusal olmayan hedef programlama metotları, en başarılı ya da başarısız olan çözümleri belirleme de kullanılan mantığa dayalı araştırma modellerinden yararlanır. Bu mantık süreci, verilmiş olan bir çözümü amaç fonksiyonu ve/veya hedef kısıtlarını hesaplayarak geliştirmek için sürekli tekrar eden bir sisteme dayanır. Bu yüzden bu yaklaşım her ne kadar doğruların birbirine yakınsamasını garantileyemese de çoğunlukla optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır.

Temel araştırma düşüncesi 1965'de Box ile gelişmiştir. Yaklaşım, Box'ın kompleks arama metodu; kısıtlandırılmış tek amaçlı optimizasyon problemlerinin çözümü için uygulanan direkt arama metotlarından biridir. Monarchi 1975'te DOHP problemlerinin çözümü için Box'ın kompleks arama metodunu modifiye ederek kullanmıştır. Box'ın bu metodu birçok araştırmacı tarafından hedef programlamaya uygulanmıştır (Saber ve Ravindran, 1993:281).

4.2.1. Modifiye Edilmiş Pattern Arama Yaklaşımı

1961'de Hook ve Jeeves'in geliştirdiği tek amaçlı, sürekli değişkenli, kısıtsız optimizasyon metodu daha sonraları 1976'da Ignizio ve 1979'da Hwang ve Masud tarafından DOHP için uyarlanmıştır. Yaklaşımda tüm yapısal kısıtlar amaç fonksiyonunda yüksek öncelikli hedef kısıtlarına dönüştürülmüştür. Daha sonra DOHP problemi her biri farklı farklı öncelik seviyelerine sahip olan tek amaçlı DOP alt problemleri (ikincil problemler) şeklinde parçalanmıştır.

Her bir alt problem şu iki noktadan oluşur;

(i) İlk önce tek amaçlı fonksiyonla bağıntılı hedef kısıtlarının göz önünde bulundurulması gerekir.

(ii) İlerleyen aşamalar da bir önceki aşamada erişilen hedefleri sağlayan kısıtlayıcıların bir kümesi modele dâhil edilir.

Kısıtlı tek amaçlı DOP problemlerinin çözümü için modifiye pattern arama tekniği defalarca tekrarlanarak kullanılır. Her bir basamakta pattern arama tekniği, kısıtlı bir alt problemin çözümü için uygulanır. Daha önce verilen DOHP probleminin genel gösterimini ele aldığımızda denklemlerin 1. öncelikli hedefler olarak yazıldığını ve gerçek kısıtları olduğunu varsayalım. Bu duruma ek olarak sapma değişkenleri ile birlikte model aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

Minimize $$Z = P_1 \sum_{i=1}^{L} \left(d_i^- + d_i^+ \right) + \sum_{k=2}^{P+1} P_k \sum_{i=1}^{M} \left(w_{ik}^- d_i^- + w_{ik}^+ d_i^+ \right)$$

Kısıtlar ; (4.24)

$$R_i\left(X\right) + d_i^- - d_i^+ = b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, L$$

$$g_{i-L}\left(X\right) + d_i^- - d_i^+ = t_{i-L} \qquad i = L+1, \ldots, M$$

$$d^-, d^+ \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, M$$

Alt problemler de şu şekilde yazılabilir;

Alt Problem I:

Minimize $\quad Z_1 = \sum_{i=1}^{L} \left(d_i^- + d_i^+ \right)$

Kısıtlar; (4.25)

$$R_i\left(X\right) + d_i^- - d_i^+ = b_i \qquad i = 1,2,\ldots,L \ , \quad d^-, d^+ \geq 0$$

Bu problemdeki L hedef kısıtlarının gerçek kısıtlar olmasından dolayı bütün i değerleri için tüm d_i^+'lar da sıfır olmalıdır. Diğer bir deyişle eğer $\min Z_1 > 0$ ise DOHP probleminin herhangi bir uygun çözümü yoktur.

Alt Problem II:

Minimize $\quad Z_2 = \sum_{i=L+1}^{M} \left(w_{i2}^- d_i^- + w_{i2}^+ d_i^+ \right)$

Kısıtlar; (4.26)

$$R_i\left(X\right) + d_i^- - d_i^+ = b_i \qquad i = 1,2,\ldots,L$$

$$\sum_{i=1}^{L} \left(d_i^- + d_i^+ \right) = 0$$

$$g_{i-L}\left(X\right) + d_i^- - d_i^+ = t_{i-L} \qquad i = L+1,\ldots,M$$

$$d^-, d^+ \geq 0$$

Burada $g_{i-L}\left(X\right)$ ikinci alt problem için düşünülen hedefleri simgeler. P_2 önceliğine göre çözüm aranmaktadır. Bu yüzden $\min Z_2 = Z_2^* \ \left(Z_2^* \geq 0\right)$ olduğunu varsayarız.

Alt Problem K:

Minimize $\quad Z_k = \sum_{i=L+1}^{M} \left(w_{ik}^- d_i^- + w_{ik}^+ d_i^+ \right)$

Kısıtlar ; (4.27)

$$R_i\left(X\right) + d_i^- - d_i^+ = b_i \qquad i = 1,2,\ldots,L$$

$$Z_j = Z_j^* \qquad j = 1,\ldots,k-1$$

$$g_{i-L}\left(X\right) + d_i^- - d_i^+ = t_{i-L} \qquad i = L+1,\ldots,M$$

$$d^-, d^+ \geq 0$$

Burada $g_{i-L}(X)$ K alt problemi için düşünülen – göz önüne alınan hedefleri simgeler.

Her bir alt problemdeki sabit X noktasına hareketler, amaç fonksiyonunun $\overline{X}$ değerindeki başarıya göre belirlenir. Ele alınan alt problemdeki kısıtların değerlendirilmesi ve sapma değişkenlerinin değerlerinin kararlı hale getirilmesiyle amaç fonksiyonu tanımlanır.

Modifiye edilmiş pattern arama metodunun avantajları; kolay olması ve herhangi bir özel amaç fonksiyonuna veya kısıta gerek duymamasıdır. Bu metodun asıl eksik noktası ise partitioning yaklaşımından tam anlamıyla – belirli bir avantaj sağlamıyor olmasıdır. Her bir alt problemde tekrarlanan amaç ve kısıtların sıkıcı değerlendirilmesine rağmen, metot herhangi bir alt problemde (eğer varsa) kendine özgü çözümler bularak önceden sonlandırılamamaktadır. Metot tüm alt problemleri sıralı bir şekilde çözmek zorundadır. Oysaki partitioning (bölünebilir) yaklaşımında herhangi bir alt problemde özel sonuç olup olmadığını kontrol ederek önceden sonlandırma olanağı mevcuttur (Saber ve Ravindran, 1993:282).

4.2.2. Modifiye Edilmiş Pattern/Gradient Arama Yaklaşımı Algoritması

Direkt arama yaklaşımına alternatif bir uygulamada ise araştırma prosedüründe simülasyon metotlarından yararlanılmış ve Clayton, Weber ve Taylor tarafından 1982'de yayınlanmıştır. Bahse konu olan yayında çok yanıtlı simülasyon modelinin optimizasyonu için sistematik bir arama prosedürü sunulmuştur. Bu model sıralı hedef programlama problemi şeklinde yapılandırılmıştır. Bu algoritmada, modifiye edilmiş pattern arama ile Gradient arama teknikleri birleştirilmiştir. Ayrıca algoritma tam sayılı DOHP'nın çözümünde de kullanılabilir.

Algoritmanın ana fikri, "tatminkâr" bir model hareketiyle birlikte, düzenli model arama tekniğinin kullanılmasıdır. Buradaki tatminkâr model hareketinden kasıt; p noktası bulunana kadar hedef gelişmeleri doğrultusunda hareket etmektir. Buradaki p gelişme yönündeki noktadır, öyle ki bu noktanın ötesinde tatmin edilmiş hedef g_k tatminsiz hale gelir.

Geleneksel direkt arama optimizasyon tekniklerindeki tüm avantaj ve dezavantajlar bu algoritma içinde geçerlidir. Her ne kadar algoritmadaki karar değişkenleri tamsayılar ile limitli olsa da bu kısıtlama, tam sayı olmayan karar değişkenleri için esnetilebilir. Bu durumda sonuç, araştırılması gereken bir sürü sayı içerebilir. Ve çözüm için harcanan zaman oldukça artabilir.

4.3. ETKİLEŞİMLİ (İNTERAKTİF) YAKLAŞIM

Birçok etkileşimli matematiksel programlama metodu MCDM problemlerinin çözümü için önerilmiştir. Etkileşimli hedef programlama yaklaşımı bir metotlar sınıfı olarak tanımlanmıştır (Masud ve Hwang, 1981:391). Bu açıklık ve berraklığa dayalı gelişim, karar vericinin mevcut çözüm üzerindeki değişim ya da tercih bilgisinin olduğu her bir tekrarlamada karar verici ile etkileşimde bulunur. Bu yaklaşımın avantajı; karar vericinin çözüm sürecini de içine alması ve bu süreç doğrultusunda daha iyi bir sürecin karar verici tarafından kabul edilmesine izin verir (Saber ve Ravindran, 1993:284).

Weistroffer 1983'de yayınlanan makalesinde doğrusal olmayan çok amaçlı karar verme problemlerinin çözümü için bir etkileşimli hedef programlama metodu sunmuştur. Geliştirilen bu yöntemde amaç; kısıtlı çok amaçlı problemin, kısıtsız tek amaçlı alt problemlerin bir serisi şekline dönüştürülmesidir (Weistroffer, 1983:311). Her bir alt problem ise;

(i) Yapısal kısıtların sağ taraf sabitlerinden sapma miktarlarını belirlemek,
(ii) Hedef kısıtlarının arzu edilen seviyelerindeki sapmaların kareleri toplamını minimize etmek

için oluşturulur.

Etkileşimli yaklaşımda dönüştürülmüş problem aşağıdaki gibi yazılabilir:

Minimize $F_r(X) = \sum_{i=1}^{L} \max^2\left[0, \left(b_i - R_i(X)\right)\right] + \sum_{i=L+1}^{M} \max^2\left[0, \left(d_{i,r}^{-} - d_{i,r}^{+}\right)\right]$ (4.28)

Burada $\left(d_{i,r}^{-} - d_{i,r}^{+}\right) = t_{i-L} - g_{i-L}(X)$ ve $t_{i-L,r}$ ise r. tekrardaki $(i-L)$. hedef kısıtının erişim seviyesi veya hedef değeridir. Kareler toplamı fonksiyonunun kullanılmasındaki amaç; bu fonksiyonun konveks yapıda, diferansiyellenebilir ve genel olarak kullanımının kolay olmasındandır.

Karar verici her bir aşamadan önce hedef kısıtı için erişim düzeylerinin kümesini oluşturur. Daha sonra elde edilen kısıtsız tek amaçlı problem çözülmeye başlanır. Nihai çözümde tüm yapısal kısıtların bir araya geldiği ve karar vericinin $F_r(X)$ fonksiyonunun sıfır veya sıfıra yakın bir değerinin bulunduğu çözümdür.

Masud ve Hwang, çok amaçlı karar verme problemleri için doğrusal veya doğrusal olmayan hedef programlama modellerinin çözümünde kullanılacak bir etkileşimli metot sunmuşlardır (Masud ve Hwang,1981:392).

Model;

Maksimize $\left[f_1(X), f_2(X), \ldots, f_k(X)\right]$

Kısıtlar; (4.29)

$g_i(X) \le 0$, $i = 1, \ldots, M$

şeklinde ifade edilmiştir.

Burada sözü edilen k amaçlarının önceden belirlenmiş herhangi bir öncelik seviyeleri ya da ağırlıkları yoktur. Ancak metot, k amaçları için alt ve üst sınır değerlerinin üretilmesi-tanımlanmasıyla işleme başlar. Ardından karar verici "en iyi uzlaşma" sonucuna varıncaya kadar her bir aşamada elde ettiği çözüm değerini kullanarak hedefleri sağlamaya çalışır. Karar verici k amaçları için istenilen hedefleri yani t_i'leri şu şekilde gösterir;

$$\underline{f_i} \leq t_i \leq \overline{f_i}$$

Burada $\underline{f_i}$, f_i'nin alt sınırını ve $\overline{f_i}$, f_i'nin üst sınırını göstermektedir.

Bundan bir sonraki basamak, f_i'lerin yani amaç fonksiyonu değerlerinin $\underline{f_i}$'lerden daha küçük olamayacağını garanti eden tek amaçlı optimizasyon probleminin çözülmesidir. Bu çözümle birlikte her bir hedefin sıralı olarak gerçekleştirilmesi için alternatif uzlaşma çözümleri elde edilir. Eğer karar verici herhangi bir çözümde doyuma ulaştıysa algoritma bitmiş demektir ve işlem sonlandırılır. Aksi halde, karar verici önceki çözümlerin ışığı altında yeni hedef seviyeleri $(t_{r+1,i})$ düzenleyerek aynı basamakları yeniden ancak yeni hedefi için tekrarlar.

4.4. GRADIENT TABANLI YAKLAŞIM

Bu yaklaşım algoritmanın aradığı sonuca ulaşabilmesi için gerekli yönü ya da gerekli hareketleri (kaç basamakta) bulmak için amaç fonksiyonunun birinci dereceden kısmi türevlerini kullanır. Bu metotlardaki yakınsama oranları genellikle direkt arama metotlarına nazaran çok daha hızlıdır. Yani gradient tabanlı metotlar genellikle bir çözüm elde etmek için daha yeterli olurlar. Ancak hedef kısıtları veya amaç fonksiyonu diferansiyellenemeyen DOHP modelleri için uygun değildir.

Zoutendik'in 1960'da ortaya attığı algoritmayı (optimal basamak uzunluğu hesabı) temel alan Lee ve Olson 1985'de şans kısıtlı DOHP modelleri için bir Gradient algoritma geliştirmişlerdir. Bu algoritma, doğrusal yapıda olmayan fonksiyonların sürekli ve diferansiyeli alınabilir olmasını ve optimal bir noktayı bulmak için çözüm uzayının konveks olmasını gerektirir.

Şans kısıtlarının önemi; karar vericinin hedeflere ulaşmada olasılık süreçlerine göre hedefleri değerlendirmesini sağlamasıdır. β'nın seçimi tamamıyla süreklilik sağlayıcının elindedir. Eğer β, süreklilik sağlayıcı tarafından önceden belirlenen ve güvenli bir seviyedeyse kısıt en fazla (1-β) olur. Yaklaşımın olasılıklı doğası, özellikle hedef programlama analizleri için en uygun yaklaşım olmasını desteklemektedir.

Şans kısıtlı metot parametrelerin olasılık dağılımları boyunca değerler almasına izin verir. Bu metodun altındaki olasılık ya da şans kavramları "olasılık dağılımlarından" gelir. Bu şans kısıtlı metodun kullanılabilmesi için teknoloji katsayılarının normal dağıldığı varsayılır. Gerek veri tabanının normal özellik gösteriyor olmasından gerekse örnekleme teorisindeki merkezi limit teoremi üzerindeki güven nedeniyle, genelde en çok karşılaşılan hata dağılımı tipi normal dağılımdır. Ve teknoloji katsayılarındaki risk gösterimi, doğrusal olmayan modellerin kullanımını gerektirmektedir.

Hedef programlama modelleri, tek amaçlı modellerin serisi ile ifade edilir. Bu nedenle, ŞKHP modelleri DOP teknikleri kullanarak matematiksel programlama modellerinin bir serisi şeklinde ifade edilerek çözülebilir. HP modelinde şans kısıtlarının deterministik eşitlikleri doğrusal olmayan yapıdaki kısıtlayıcılardır (Lee ve Olson, 1985:360).

HP modelinde tanımlanan herhangi bir i şans kısıtı ile gösterildiğinde

$$\text{Prob}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right] \leq b_i \tag{4.30}$$

Burada a_{ij}'ler rassal değişkenlerdir. Eğer rassal değişken a_{ij}'ler normal dağılıyorlarsa i. şans kısıtlı hedef kısıtı aşağıda verildiği gibi deterministik doğrusal olmayan hedef kısıtına eşit olacaktır (De, Acharya ve Sahu, 1982:637).

$$E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) + F^{-1}(\beta_i)\left[V\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right]^{1/2} \leq E(b_i) \tag{4.31}$$

E; beklenen değer, V; varyans, F ise

$$\left[\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) - E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right)}{V\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right)}\right]^{1/2} \tag{4.32}$$

ifadesinin kümülatif standartlaştırılmış normal olasılık dağılışı fonksiyonudur. F^{-1}, F fonksiyonunun tersidir.

(4.31) modelinde hedef kısıtının beklenen değeri alındıktan sonra sapma değişkenlerini eklediğimizde

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_j + D\left\{\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j^2\right\}^{1/2} + d_i^- d_i^+ = b_i \tag{4.33}$$

elde edilir.

Burada $u_{ij} = E(a_{ij})$'dir. D, α önem seviyesinde normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur. a_{ij} değişkenlerinin varyans-kovaryans matrisi ise

$$\left(\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j^2\right) \tag{4.34}$$

şeklindedir.

HP da doğrusal olmayan yapıyı elde edebilmek için şans kısıtları deterministik yapıya dönüştürülmelidir. Dönüşümdeki amaç; yapısal kısıtlayıcılarla sınırlı hedef kısıtları için uygun çözüm noktalarını belirlemektir. Dolayısıyla, çözüm algoritmasında uygun yönün tayini HP formülasyonunda doğrusal olmayan kısıtların yer almasını sağlar.

4.4.1. Şanş Kısıtlı Bulanık Hedef Programlama

Çok Kriterli HP modellerinde, karar kriteri sonuçlarının direkt olarak çözümlenmesi yerine, HP modelleri her bir karar kriteri için istenilen hedef değerlerini gösterir ve bu hedeflerden sapmaları optimize eder. Sonuç farklı hedeflerin ölçüm metodu ile olduğu kadar sapmalar için kullanılan ölçümlere de dayanır (Hu, Teng ve Li, 2007:1320). Genelde iki ortak ölçüm metodu vardır. Birincisi; hedeflerin sabit olarak sıralanmasıdır. Ve bu sıralanmış sapma vektörünün lexicographic minimumunun araştırılması ile uygulanır. İkincisi ise; hedefler üzerindeki ağırlıkların ve hedef sapmalarının toplam ölçüsünün minimizasyonunu araştırır. Nadir olarak da maksimum sapmaların minimizasyonu kullanılır.

Bu çalışmada lexicographic minimizasyon formu kullanılmıştır.

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$olmak üzere;

Lexico. Min $\quad Z = \{g_k\,(d_i^-, d_i^+ : i \in P_k) : k = 1, 2, \ldots, K\}$

Kısıtlar; (4.35)

$$f_i(X) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad ,$$
$$\Phi_h(X) \geq 0 \quad , \quad h = 1, 2, \ldots, S$$
$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

olarak tanımlanmıştır (Mohamed,1992,183).

Burada d_i^-; negatif sapma, d_i^+; pozitif sapmayı gösterir. i'inci hedef için X $(n\,x1)$ boyutlu karar değişkenleri vektörü, $f_i(X)$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$ hedef kısıtlarını gösteren X'in gerçek değerli fonksiyonları ve M hedeflerin sayısı, $\Phi_h(X)$

$(h = 1, 2, \ldots, S)$ sistem kısıtlarını gösteren X'in gerçek değerli fonksiyonları ve S sistem kısıtları sayısı, $b_i \; (i = 1, 2, \ldots, M)$ i'inci hedefin arzu edilen seviyesi, $g_k \left(d_i^- , d_i^+ : i \in P_k\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, K)$ k. öncelik seviyesindeki hedeflerin dağılımının sapmalı gerçek değer fonksiyonlarıdır ve K öncelik seviyelerinin sayısıdır.

Şans Kısıtlı Bulanık Hedef Programlamanın (ŞKBHP) aşağıdaki şekilde olduğunu düşünelim;

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olmak üzere,

$$P\left(G_i(X) \geq b_i\right) \tilde{\geq} \alpha_i \;,\; i = 1, 2, \ldots, M$$

Kısıtlar, (4.36)

$$A X' \geq C'$$

$$X \geq 0$$

Burada X karar değişkenleri vektörü, P olasılık, $G_i(X)$; i. hedef kısıtı, b_i; bilinen dağılım fonksiyonu $F_i(y) = P(b_i \leq y)$ ile birlikte rassal olduğu varsayılan (kesikli ya da sürekli) arzu edilen seviyedir. $\geq \alpha_i$; i. hedefi gerçekleştirebilmek için önceden hesaplanan toleranslı olasılık ölçümü, $A X' \geq C'$; sistem kısıtlarıdır.

Sınırların $\beta_i (\beta_i < \alpha_i)$ olarak varsayıldığı durumda i. bulanık hedef için μ_i üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Zimmermann, 1992:257).

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & , P\left(G_i(X) \geq b_i\right) \geq \alpha_i \\ \dfrac{P\left(G_i(X) \geq b_i\right) - \beta_i}{\alpha_i - \beta_i} & , \beta_i \leq P\left(G_i(X) \geq b_i\right) \leq \alpha_i \\ 0 & , P\left(G_i(X) \geq b_i\right) \leq \beta_i \end{cases} \qquad (4.37)$$

Olasılık dağılım fonksiyonu $F_i(y)$ monoton azalmayan bir fonksiyon olduğu için yukarıda açıklanmış olan μ_i'leri maksimize eden $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ değerleri aşağıda verilen $I\mu_i$ üyelik fonksiyonunu da maksimize eder (Mohamed, 1992:184).

$$I\mu_i(x)=\begin{cases} 1 & , G_i(X)\geq F_i^{-1}(\alpha_i) \\ \dfrac{G_i(X)-F_i^{-1}(\beta_i)}{F_i^{-1}(\alpha_i)-F_i^{-1}(\beta_i)} & , F_i^{-1}(\beta_i)\leq G_i(X)\leq F_i^{-1}(\alpha_i) \\ 0 & , G_i(X)\leq F_i^{-1}(\beta_i) \end{cases} \tag{4.38}$$

Burada $F_i^{-1}(.)$; rassal değişken b_i'nin olasılık dağılım fonksiyonunun tersidir. $P(G_i(X)\leq b_i)\tilde{\geq}\alpha_i$ şeklindeki hedefler için $I\mu_i$ deki α_i ve β_i yerine sırasıyla $1-\alpha_i$ ve $1-\beta_i$ değerleri konur.

$P(G_i(X)\geq b_i)\tilde{\geq}\alpha_i$ eşitliği μ_i'nin maksimizasyonuna ki bu da $P(G_i(X)\geq b_i)$'nin α_i'ye olabildiğince yaklaşık olabilmesi için X'lerin bulunması anlamına gelir. $I\mu_i$ de $G_i(X)$'in $F_i^{-1}(\alpha_i)$'ye mümkün olduğunca yaklaştıran X'lerin bulunmasını ifade eder.

Optimal değerler olan μ_i ve $I\mu_i$ her ne kadar aynı olmasalar da her iki yolla da X değerleri bulunabilir. Eğer X değerleri için $G_i(X)$ doğrusal ise $I\mu_i$ de doğrusaldır. Ancak bu μ_i için geçerli değildir ve bu sebepten maksimizasyon problemleri için $I\mu_i$ seçilir.

$I\mu_i$'nin maksimizasyonu demek $Z=\{g_k(d_i^-, d_i^+ : i\in P_k) : k=1,2,\ldots,K\}$ Z'deki negatif sapmaların minimizasyonu demektir. Bu da (4.36) modelinin deterministik yapıya dönüştürülebileceği anlamını taşır. Buradan Lexicographical minimizasyondaki X'lerin bulunması için aşağıda verilen çözüm yöntemi kullanılır.

$$Z=\left\{\sum d_i^- : i\in P_k : k=1,2,\ldots,K\right\}, \quad i=1,2,\ldots,M \tag{4.39}$$

Kısıtlar;

$$\frac{G_i(X)-F_i^{-1}(\beta_i)}{F_i^{-1}(\alpha_i)-F_i^{-1}(\beta_i)}+d_i^- - d_i^+ = 1 \quad , \quad i=1,2,\ldots,M \tag{4.40}$$

$$AX' \geq C' \tag{4.41}$$

$$d_i^- \, d_i^+ = 0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,M \tag{4.42}$$

$$X' \geq 0 \ , \ d_i^- \geq 0 \ , \ d_i^+ \geq 0 \ , \ i=1,2,\ldots,M \tag{4.43}$$

Bu modelin çözümü ile elde edilen X^* değerleri μ_i de yerine konmasıyla optimal çözüm olan μ^* değeri bulunur.

BEŞİNCİ BÖLÜM

UYGULAMA

Seramik sektörü; kaplama malzemeleri, sağlık gereçleri, sofra ve süs eşyası ile elektrik yalıtımında kullanılan teknik seramiklerden oluşmaktadır. Ancak ekonomik büyüklüğü ve uluslararası ticarete konu olması bakımından bu çalışmada ağırlıklı olarak kaplama malzemeleri üretimi yapan bir işletme incelenmiştir.

Uygulamaya konu olan işletme, 1000'den fazla çalışanı ile 275 dönüm arazi üzerindeki tesislerinde yıllık yaklaşık 25 milyon m^2 üretim kapasitesine sahiptir. İzmir ve İstanbul olmak üzere iki merkezi bulunan firmanın yurt içi ve yurt dışında birçok bayisi ve yaklaşık olarak 100 adet showroomu bulunmaktadır.

Üretimi ihracat ağırlıklı olmakla birlikte yurt içinde de rakipleri arasında hatırı sayılır bir konumdadır. Bu başarıda izlemiş oldukları kalite politikası ve müşteri memnuniyeti stratejileri etkili olmuştur. İşletme gerek ulusal gerekse uluslararası birçok kalite belgesine sahip olduğu gibi ihracat yaptığı ülkelerin de kalite belgelerine sahiptir.

5.1. PROBLEMİN TANIMI

İşletme 10 çeşit seramik üretmektedir. Bu ürünlerle ilgili bilgi Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4: 2009 Haziran Ayı On Ürün İçin Üretim Miktarları - Kar ve Satış Geliri Değerleri

	ÜRETİM MİKTARLARI (m^2)	**KAR (TL)**	**SATIŞ GELİRİ (TL)**
X1	140.392,80	227.436,34	530.684,78
X2	72.502,80	119.629,62	279.135,78
X3	62.093,76	116.425,80	271.660,20
X4	60.859,20	99.504,79	232.177,85
X5	41.441,40	62.162,10	145.044,90
X6	35.027,85	55.168,86	128.727,35
X7	33.491,70	52.749,43	123.082,00
X8	29.125,00	41.940,00	97.860,00
X9	26.300,70	41.029,09	95.734,55
X10	24.639,84	48.047,69	112.111,27
TOPLAM	**525.875,05**	**864.093,72**	**2.016.218,68**

İşletme daha iyiye ulaşabilmek için üretim miktarlarında artışa gitmek istemektedir. Bunu gerçekleştirmek için işletme yönetimi tarafından 3 koşul belirlenmiştir. Bunlar;

a. Karından çok fazla olmamak şartıyla fedakârlık edilebileceği,
b. Gelire katkısı diğer ürünlerden fazla olduğu düşünülen X_3 ve X_{10} ürünlerinin her ikisinin kesinlikle üretmesi gerektiği,
c. Hammadde miktarlarının belirlenen düzeylerden fazla kullanılamayacağıdır.

Bu bilgilere göre Tablo 4'ten firma "Üretim Miktarı" hedefini en az 600.000 adet, "Kar" hedefini en az 890.000 TL ve "Satış Geliri" hedefini ise en az 2.075.000

TL olarak belirlemiştir. Belirlenen bu hedefler ve arzu edilen seviyelere göre her bir hedef aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

Birim Üretim Hedefi: Her bir üründen maksimum miktarda üretilmesi esas alınmıştır ve toplam üretim miktarı en az 600.000 adet olarak istenmektedir.

$$G_1(X): X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} \geq 600000 \quad (5.1)$$

Kar Hedefi: Her bir ürünün fabrika çıkış fiyatı ile maliyetlerinin farkından belirlenmiştir.

$$G_2(X): 1.62\, X_1 + 1.65\, X_2 + 1.88\, X_3 + 1.64\, X_4 + 1.50\, X_5 + 1.58\, X_6 + 1.58\, X_7 + 1.44\, X_8 + 1.56\, X_9 + 1.95\, X_{10} \geq 890000$$

(5.2)

Satış Geliri Hedefi: Her bir ürünün fabrika çıkış fiyatına göre belirlenmiştir.

$$G_3(X): 3.78\, X_1 + 3.85\, X_2 + 4.38\, X_3 + 3.82\, X_4 + 3.50\, X_5 + 3.58\, X_6 + 3.68\, X_7 + 3.36\, X_8 + 3.64\, X_9 + 4.55\, X_{10} \geq 2075000$$

(5.3)

İşletme yönetimi tarafından bu üç hedefin eşit önceliğe sahip olduğu kabul edilmiştir. İşletme belirlemiş olduğu bu üç hedef için üreteceği ürünlerle ilgili 33 farklı hammadde kullanmaktadır. Bu hammadde miktarları Tablo 5 'de verilmiştir.

Tablo 5: Maksimum Hammadde Kullanım Miktarları

Hammaddeler	Maks. Hammadde Kullanım Miktarları (kg)	Hammaddeler	Maks. Hammadde Kullanım Miktarları (kg)	Hammaddeler	Maks. Hammadde Kullanım Miktarları (kg)
h1	16400	**h12**	35300	**h23**	701
h2	93650	**h13**	82150	**h24**	1000
h3	1870	**h14**	24675	**h25**	3125

h4	3360	**h15**	28500	**h26**	1240
h5	213300	**h16**	10200	**h27**	574
h6	69150	**h17**	1700	**h28**	120
h7	164800	**h18**	2001	**h29**	1115
h8	73100	**h19**	59	**h30**	51
h9	57810	**h20**	328	**h31**	836
h10	50000	**h21**	1104	**h32**	284
h11	72300	**h22**	995	**h33**	1915

Seçilen her üründe farklı hammaddeler kullanılmıştır ve bu hammaddeler maksimum miktarları ile sınırlandırılmıştır. Buna göre her bir ürün için kullanılan hammadde miktarları ve bu hammaddelerin maksimum kullanım miktarlarına bağlı olarak kısıtlar aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

$$\text{h1}: 201.51\,X_1 + 247.41\,X_2 + 285.39\,X_4 + 236.79\,X_6 + 243.09\,X_7 + 128.52\,X_{10} \leq 16400000\ ,$$

$$\text{h2}: 40.39\,X_1 + 45.49\,X_2 + 55.97\,X_3 + 49.71\,X_4 + 43.32\,X_5 + 44.13\,X_6 + 45.01\,X_7 + 25.76\,X_8 + 30.146\,X_9 + 60.37\,X10 \leq 93650000\,,$$

$$\text{h3}: 0.6478\,X_1 + 0.7498\,X_2 + 0.96\,X_3 + 0.85\,X_4 + 0.71\,X_5 + 0.7262\,X_6 + 0.7402\,X_7 + 0.39\,X_8 + 0.4823\,X_9 + 1.0456\,X_{10} \leq 1870000\,,$$

$$\text{h4}: 0.6478\,X_1 + 0.7498\,X_2 + 1.06\,X_3 + 0.85\,X_4 + 0.71\,X_5 + 0.7262\,X_6 + 0.7402\,X_7 + 0.69\,X_8 + 0.938\,X_9 + 1.0456\,X_{10} \leq 3360000\,,$$

$$\text{h5}: 18\,X_1 + 18\,X_2 + 92.75\,X_3 + 18\,X_4 + 58.51\,X_5 + 18\,X_6 + 18\,X_7 + 59.04\,X_8 + 40\,X_9 + 62.95\,X_{10} \leq 213300000\,,$$

$$\text{h6}: 10\,X_1 + 10\,X_2 + 33.38\,X_3 + 60\,X_4 + 30.26\,X_5 + 28\,X_6 + 28\,X_7 + 54.23\,X_8 + 50\,X_9 + 58.57\,X_{10} \leq 69150000\,,$$

$$\text{h7}: 27\,X_1 + 27\,X_2 + 67.97\,X_3 + 27\,X_4 + 52.32\,X_5 + 27\,X_6 + 27\,X_7 + 55.09X_{10} \leq 164800000\ ,$$

$$\text{h8}: 25\,X_1 + 25\,X_2 + 32.59\,X_3 + 25\,X_4 + 30.06\,X_5 + 25\,X_6 + 25\,X_7 + 30.62\,X_{10} \leq 73100000\ ,$$

$$\text{h9}: 36.36\,X_3 + 32.92\,X_5 + 106.81\,X_8 + 234.784\,X_9 + 36.52\,X_{10} \leq 57810000\,,$$

$h10: 33.38\ X_3 + 20.26\ X_5 + 10\ X_8 + 10\ X_9 + 22.47\ X_{10} \leq 50000000$,

$h11: 37.97\ X_3 + 25.32\ X_5 + 10\ X_8 + 10\ X_9 + 28.09\ X_{10} \leq 72300000$,

$h12: 48.36\ X_3 + 32.92\ X_5 + 6.35\ X_8 + 36.52\ X_{10} \leq 35300000$,

$h13: 38.97\ X_3 + 25.32\ X_5 + 28.09\ X_{10} \leq 82150000$,

$h14: 10\ X_8 + 10\ X_9 \leq 24675000$,

$h15: 18.46\ X_8 + 10\ X_9 \leq 28500000$,

$h16: 8.46\ X_8 \leq 10200000$,

$h17: 1.41\ X_8 \leq 1700000$,

$h18: 7.4\ X_2 + 1.02\ X_3 + 0.8\ X_4 + 2.05\ X_6 + 0.5\ X_9 \leq 2001000$,

$h19: 0.22\ X_7 + 0.008\ X_{10} \leq 59000$,

$h20: 6.6\ X_1 + 5.6\ X_3 + 5.1\ X_4 \leq 328000$,

$h21: 48.04\ X_1 + 4\ X_2 + 0.4\ X_3 + 3\ X_4 + 2.3\ X_5 + 0.045\ X_8 + 26.34\ X_{10} \leq 1104000$,

$h22: 82.5\ X_1 + 8.5\ X_2 + 14.9\ X_4 \leq 995000$,

$h23: 19.3\ X_1 + 3.9\ X_4 \leq 701000$,

$h24: 16.1\ X_6 + 4.1\ X_9 \leq 1000000$,

$h25: 6.4\ X_1 + 13.18\ X_3 + 3.5\ X_4 + 37.3\ X_5 + 0.4\ X_6 + 0.05\ X_8 \leq 3125000$,

$h26: 0.5\ X_2 \leq 1240000$,

$h27: 6.95\ X_{10} \leq 574000$,

$h28: 0.26\ X_{10} \leq 120000$,

$h29: 0.6\ X_3 + 12.45\ X_7 + 18.02\ X_{10} \leq 1115000$,

$h30: 0.25\ X_7 \leq 51000$,

$h31: 0.15\ X_3 + 0.95\ X_6 \leq 83600$,

$h32: 7.2\ X_5 \leq 284000$,

$h33: 15.05\ X_1 + 5.72\ X_2 + 1.5\ X_4 + 2.2\ X_6 + 0.2\ X_9 \leq 1915000$,

ve son kısıt ise işletmenin üretmek zorunda olduğu ürünlerden kaynaklanan

$X_3\ X_{10} \geq 150000$ kısıtıdır.

5.2. KURULAN MODELLER VE ÇÖZÜMLERİ

Belirlenen hedeflere ve kısıtlara ilişkin olarak üç farklı model kurulmuştur. Bunlardan birincisi DHP, ikincisi DOHP ve üçüncüsü ise ŞKBHP modelleridir. Birinci modelin kurulmasındaki amaç, işletme yönetimi tarafından şart koşulan kısıtın geçerliliğinin araştırılmasıdır. Bu sebeple birinci modelde sadece doğrusal kısıtlara bağlı olarak çözüm gerçekleştirilmiştir.

5.2.1. Doğrusal Hedef Programlama Çözümü

DHP modeli (Ek 1) için LINGO sonuçları aşağıdaki gibidir;

Tablo 6: DHP Sonuç Tablosu

Hedefler	Sapan Değişkenler	Model-I
Birim Üretim Hedefi	d_1^-	0
	d_1^+	0
Kar Hedefi	d_2^-	0
	d_2^+	0
Gelir Hedefi	d_3^-	0
	d_3^+	0
	Temel Değişkenler	
	x_1	0
	x_2	0
	x_3	49383.11
	x_4	10089.13
	x_5	0
	x_6	11628.71
	x_7	4468.472
	x_8	524430.6
	x_9	0
	x_{10}	0
Birim Üretim Hedefi (Adet)		600.000
Kar Hedefi (T.L.)		890.000
Gelir Hedefi (T.L.)		2.075.000

Tablo 6'daki verilerden işletme, sadece beş ürün için üretim gerçekleştirmelidir. Bu ürünlerin üretim miktarları ve işletme yönetimi tarafından belirlenen arzu edilen hedef değer birlikte değerlendirildiğinde negatif sapmanın sıfır olması nedeniyle işletme "birim üretim" hedefini tam olarak gerçekleştirmiştir. Benzer olarak "kar" hedefi ve "satış geliri" hedefi içinde değerlendirme yapıldığında, bu hedefler de tam olarak sağlanmıştır.

5.2.2.Doğrusal Olmayan Hedef Programlama Çözümü

İşletmenin üretim planlaması çerçevesinde Model I'e doğrusal olmayan $X_3\ X_{10} \geq 150000$ kısıtı eklenmiştir. (Modelin genel hali Ek 2'de verilmiştir.)Yeni oluşturulan modelin LINGO sonuçları aşağıdaki gibidir;

Tablo 7: DOHP Sonuç Tablosu

Hedefler	Sapan Değişkenler	Model-II
Birim Üretim Hedefi	d_1^-	0
	d_1^+	22027,67
Kar Hedefi	d_2^-	0
	d_2^+	51856,17
Gelir Hedefi	d_3^-	0
	d_3^+	120053,8
	Temel Değişkenler	
	x_1	2266.145
	x_2	5194.101
	x_3	44210.93
	x_4	3603.436
	x_5	30560.47
	x_6	20327.84
	x_7	18535.55
	x_8	443440.9
	x_9	26393.30
	x_{10}	27495.02
Birim Üretim Hedefi (Adet)		622.027,67
Kar Hedefi (T.L.)		941.856

Gelir Hedefi (T.L.)	2.195.054

Tablo 7'den bütün hedeflerin sapan değişkenleri incelendiğinde negatif saplamaların sıfır olarak belirlendiği görülmektedir. Diğer yandan hedeflerin pozitif sapmalarının sıfırdan büyük olması, her bir hedefin karar verici tarafından belirlenen arzu edilen seviyeleri aştığını göstermektedir. Bu nedenle üretim miktarları dikkate alındığında işletme yönetimi tarafından belirlenen hedeflerin üzerinde sonuçlar elde edilmiştir.

5.2.3.Şans Kısıtlı Bulanık Hedef Programlama Çözümü

Model II'yi "Şans Kısıtlı Bulanık Hedef Programlama" yaklaşımı ile çözebilmek amacıyla öncelikle veri setinden (Ek 3) her hedef için bir dağılış belirlemesi gerekmektedir. Pearson Dağılış Sistemin de Ortalamadan Farklar Yöntemini kullanarak her bir hedef için belirlenen dağılışların Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları ve grafikleri Ek 3'te verilmiştir.

Çözümde kullanılacak olasılık değerlerini $(\beta_i < \alpha_i)$ şartı altında aşağıdaki gibi belirlenir. Bu olasılık değerlerinin belirlenmesi tamamıyla "süreklilik sağlayıcının" inisiyatifindedir. MATLAB paket programında yapılan hesaplamalar sonucu elde edilen olasılık değerleri;

Üretim Hedefi için olasılık değerleri;

$F_1^{-1}(0.8) = 41100$ $\qquad$ $F_1^{-1}(0.7) = 18375$

Kar Hedefi için olasılık değerleri;

$F_2^{-1}(0.7) = 30525$ $\qquad$ $F_2^{-1}(0.6) = 95$

Satış Geliri Hedefi için olasılık değerleri;

$F_3^{-1}(0.9) = 287250$ $\qquad$ $F_3^{-1}(0.8) = 164100$

Bulunan bu değerlerle modelin "Hedef Kısıtları" (4.40)'a uyarlandığında, Hedefler Bulanık Şans Kısıtlı Hedefler olarak aşağıdaki gibi oluşturulur.

Üretim Hedef Kısıtı:

$$\frac{G_1(X)-18375}{41100-18375}+d_1^- - d_1^+ = 1 \tag{5.4}$$

Kar Hedef Kısıtı:

$$\frac{G_2(X)-95}{30525-95}+d_2^- - d_2^+ = 1 \tag{5.5}$$

Satış Geliri Hedef Kısıtı:

$$\frac{G_3(X)-164100}{287250-164100}+d_3^- - d_3^+ = 1 \tag{5.6}$$

(5.4), (5.5) ve (5.6) hedef kısıtları ile oluşturulan modelin (Ek 4) LINGO paket programı sonucu Tablo 8'te verilmiştir.

Tablo 8: ŞKBHP Sonuç Tablosu

Hedefler	Sapan Değişkenler	Model-III
Birim Üretim Hedefi	d_1^-	0
	d_1^+	16,75346
Kar Hedefi	d_2^-	0
	d_2^+	20,90818
Gelir Hedefi	d_3^-	0
	d_3^+	10,30038
	Temel Değişkenler	
	x_1	6871,293
	x_2	3603,948
	x_3	37696,000
	x_4	3166,916
	x_5	18952,850
	x_6	6154,657
	x_7	34087,180
	x_8	104130,800
	x_9	184619,100
	x_{10}	22982,120

Birim Üretim Hedefi (Adet)	18,56205
Kar Hedefi (T.L.)	21,91127604
Gelir Hedefi (T.L.)	12,6328839

Tablo 8'den hedeflerin sapan değişkenleri incelendiğinde negatif saplamaların sıfır olarak belirlendiği görülmektedir. Diğer yandan hedeflerin pozitif sapmalarının sıfırdan büyük olması, her bir hedefin pozitif sapma kadar daha fazla elde edildiğini göstermektedir. Bu sonuçlar ilk iki modelin değerlerinden farklı yorumlanmalıdır. Çünkü Model III sonuçları şans kısıtlıdır. Buna göre hedeflerin gerçek değerleri açısından değerlendirme yapılmak istenirse, bu modelden elde edilen üretim miktarları başlangıçta verilen hedeflerde yerlerine yazılacak olursa deterministik olarak hedeflerin ulaşılan seviyeleri belirlenmiş olur. Ayrıca bu üretilen ürünleri göz önünde bulundurarak gerçekleştirilen hedefler, yedi aylık ortalama üretim, ortalama kar ve ortalama satış gelirinden daha da fazladır. Bu sebeple (4.38)'den her bir hedefin üyelik derecesi sırasıyla $\mu^* = (1.0, 1.0, 1.0)$ belirlenir.

Tablo 9: Modellerin Genel Sonuç Tablosu

Hedefler	Sapan Değişkenler	Model-I	Model-II	Model-III
Birim Üretim Hedefi	d_1^-	0	0	0
	d_1^+	0	22027,67	16,75346
Kar Hedefi	d_2^-	0	0	0
	d_2^+	0	51856,17	20,90818
Gelir Hedefi	d_3^-	0	0	0
	d_3^+	0	120053,8	10,30038
	Temel Değişkenler	Üretim Miktarları		
	x_1	0	2266.145	6871,293
	x_2	0	5194.101	3603,948
	x_3	49383.11	44210.93	37696
	x_4	10089.13	3603.436	3166,916
	x_5	0	30560.47	18952,85
	x_6	11628.71	20327.84	6154,657
	x_7	4468.472	18535.55	34087,18
	x_8	524430.6	443440.9	104130,8
	x_9	0	26393.30	184619,1

	x_{10}	0	27495.02	22582,12
Birim Üretim Hedefi (Adet)		600.000	622.027	421.864,864
Kar Hedefi (T.L.)		890.000	941.856	667.140,8906
Gelir Hedefi (T.L.)		2.075.000	2.195.053	1.588.827,77

Tablo 9'da Model I, Model II ve Model III çözümleri verilmiştir. Model III sonuçlarının deterministik olarak verilmiştir. Tabloda aynı zamanda ürünlerin üretim miktarları ve buna bağlı olarak negatif ve pozitif sapmalar belirlenmiştir. Tüm bu değerlere bağlı olarak Birim Üretim, Kar ve Satış Geliri hedeflerinin kesin değerleri hesaplanmıştır.

SONUÇ

İşletmelerde karşılaşılan problemlerdeki belirsizlikler, çözümlemede DP yaklaşımının her zaman yeterli olmadığını göstermektedir. Karşılaşılan problemin yapısının doğrusal olmaması durumunda, çözüm için geliştirilen birçok algoritma vardır. Fakat bu algoritmaların da her zaman, her çeşit problemde çözüm vermesi mümkün değildir. Bu nedenle problemin doğasına göre çözüm algoritması çeşitliliği her geçen gün artmaktadır.

DOP problemindeki belirsizlik, DP problemindeki belirsizlikten daha fazla önem kazanmaktadır. Bu noktada karar vericinin – süreklilik sağlayıcının bilgi ve deneyimi karar alma sürecinde önemli bir rol oynamaktadır.

Bu çalışmada seramik üretim sektöründe faaliyet gösteren bir işletme için Çoklu Hedef Programlama (ÇHP) uygulaması yapılmıştır. Belirsizlikleri ortadan kaldırabilmek için ÇHP şans kısıtlı olarak incelenmiş, bulanık mantık yaklaşımı ile birleştirilerek çözüm bulunmuştur.

Stokastik değişkenler "normal dağılış" gösterdiklerinde, çözüm için eşdeğer deterministik eşitliğe dönüştürülmektedirler. Ancak, rassal değişkenlerin dağılışları normal olmadığında bu yapıyı deterministik forma dönüştürmek oldukça zordur. Her zaman normal dağılışa sahip bir süreçle karşılaşılamayacağı için işletmelerin yönetim kadrolarında veya ar-ge birimlerinde "Ekonometrist / Yöneylemci" bulundurmaları bir zorunluluk olarak ortaya çıkmaktadır.

Yapılan bu çalışmada da böyle bir durum söz konusudur. Dağılışı belirleyebilmek için asimetrik dağılışların en genel formu olan Pearson Dağılış Sistemi kullanılmıştır. Pearson Dağılış Sistemi, verilerin ilk dört momentini kullanarak tahminlenen parametreler yardımıyla, onüç farklı tip dağılış tanımlar. Çalışmamızda Pearson Dağılış Sistemine göre Ortalamadan Farklar Yöntemi kullanılarak hesaplanmış olan dağılış normal dağılışa uymamakla birlikte bilinen belirli bir dağılış şekli de göstermemektedir.

Model I işletmenin üretim sürecinin genel durumunu yansıtmaktadır. Modelin çözümüyle, aynı şartlar altında, daha fazla üretim gerçekleştirilebileceği görülmüştür. Bununla birlikte kar ve satış geliri hedeflerinde de artış gözlenmiştir.

Model II ise işletmenin ihtiyaçlarından doğan $X_3 \; X_{10} \geq 150000$ doğrusal olmayan kısıtını içermektedir. Bu doğrusal olmayan kısıtlı modelin LINGO paket programı ile çözümünde tüm hedeflerde Model I'e göre bir artış olduğu sonucuna varılmıştır.

Model II'de yer alan hedeflerin sağ taraf sabitlerinin olasılık dağılışlarının belirlenmesi ile oluşturulan "Şans Kısıtlı" modele bulanık α_i arzu edilen güven seviyeleri eklenerek ŞKBHP problemi Model III olarak oluşturulmuştur. Burada Model II'deki hedefler kabul edilebilir olasılık seviyelerinde değerlendirilmiş ve ortaya çıkan belirsizlikler α_i arzu edilen güven seviyeleri ile kontrol altına alınmıştır. Elde edilen bu modelin sonucunda tüm hedeflerin karşılandığı belirlenmiştir.

Yapılan literatür taramasında, ŞKBHP konusu incelenirken verilen sayısal örneklerin azımsanamayacak bir çoğunluğunun gerçek dünya problemlerinden uzak olduğu görülmüştür. ŞKBHP problemlerinin gerçek dünya problemlerine uygulanabilirliğinin kolaylaştırılması ve bunun için farklı dağılışlar altında uygulanması konusu gelecek çalışmalarda incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Bal, Hasan, (1995), "Optimizasyon Teknikleri", Gazi Üniversitesi Yayını, Ankara

2. Baray, Ş.A., Esnaf, Ş., (2000), "Yöneylem Araştırması", İstanbul, Literatür Kitabevi

3. Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M., (2006), "Nonlinear programming Theory and Algorithms", Third Edition, John Wiley Sons Inc.,USA

4. Bellman R.E., Zadeh L.A., (1970), "Decision Making In A Fuzzy Environment", Management Science 17 (4), s.B141-B164

5. Birge, J.R., Louvenaux, F., (1997), "Introduction to Stochastic Programming", Springer Verlag, New York

6. Charnes A., Cooper W.W., (1959), "Chance-Constrained Programming", Management Science 6 (1), s.73-79

7. Chen,L-H., Tsai,F-C., (2001), "Fuzzy Goal Programming With Different Importance And Priorities", European Journal of Operational Research 133, s.548-556

8. Clayton E.R., Weber W.E, Taylor III B.W., (1982), "A Goal Programming Approach to the Optimization of Multiresponse Simulation Models", IIE Transactions 14 (4), s.282-287

9. Cooper, L., Steinberg, D., (1970), "Introduction to Methods of Optimization", Saunders, Philadelphia

10. De, P.K., Acharya, D., Sahu, K.C., (1982), "A Chance-Constrained Goal Programming Model for Capital Budgeting", Journals of The Operational Research Society 33 (7), s.635-638

11. Güneş, Mustafa, (1997), "Klasik Mantığa Alternatif: Bulanık Mantık ve Yöneylem Tekniklerine Uygulanması", III. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu Bildiri Kitabı, s. 371-383, Bursa

12. Hillier, Frederick, S., Lieberman, G.J., (2001), "Introduction to Operations Research", Seventh Edition, Mc Graw-Hill International, Singapore

13. Himmelblau, D.M., Lindsay, J.W., (1980), "An Evaluation of Substitue Methods for Derivatives in Unconstrained Optimization", Operations Reseach 28 (3-Part II), s. 668-886

14. Huang, X., (2007), "Chance-Constrained Programming Models for Capital Budgeting With NPV as Fuzzy Parameters", Journal of Computational and Applied Mathematics 198, s.149-159

15. Hu C-F., Teng C-J., Li S-Y., (2007), "A Fuzzy Goal Programming Approach to Multi-Objective Optimization Problem With Priorities", European Journal of Operational Research 176, s.1319-1333

16. Ignizio, James, P., (1976), "Goal Programming and Extensions", Lexington Books D.C. Health and Company, Toronto

17. Kocakoç, İ.D., Şehirlioğlu, A.K., (2007), "Ege Bölgesindeki Yağış Miktarlarının Pearson Dağılış Sistemi İle Belirlenmesi", 8. Türkiye Ekonometri ve İstatistik Kongresi, 24-25 Mayıs 2007, İnönü Üniversitesi, Malatya

18. Kocakoç, İ.D., (2007), "MATLAB ile İstatistiksel Veri Analizi", Nobel Yayın Dağıtım.

19. Lai, Young-Ju, Hwang, Ching-Lai, (1992), "Fuzzy Mathematical Programming Methods and Applications", Springer-Verlag, Berlin

20. Lee S.M., Olson D.L., (1985), "A Gradient Algorithm For Chance Constrained Nonlinear Goal Programming", European Journal of Operational Research 22, s.359-369

21. Liu,B., Iwamura K., (1998), "Chance Constranied Programming With Fuzzy Parameters", Fuzzy Sets and Systems 94, s.227-237

22. Masud A., Hwang C., (1981), "Interactive Sequential Goal Programming", J. Opr. Res. 32, s.391-400

23. Mohamed, Ramadan Hamed, (1997), "The Relationship Between Goal Programming and Fuzzy Programming", Fuzzy Sets and Systems 83, s.215-222

24. Mohamed, Ramadan Hamed, (1992), "A Chance-Constrained Fuzzy Goal Program", Fuzzy Sets and Systems 47, s.183-186

25. Nanda, S., Panda, G., Dash, J.K., (2008), "A New Methodology for Crisp Equivalent of Fuzzy Chance-Constrained Programming Problem", Fuzzy Decision Making – Springer Verlag, vol:7, s.59-74

26. Olson D.L., Swenseth S.R., (1987), "A Linear Approximation for Chance-Constrained Programming", Journal of the Operational Research Society 38 (3), s.261-267

27. Özkan, Mustafa M., (2003), "Bulanık Hedef Programlama", Bursa, Ekin Kitabevi

28. Rao, S.S., (1984), "Optimization Theory and Applications", Second Edition, Wiley Eastern Limited, India

29. Ravindran, Phillips, Solberg, (1984), "Operations Research: Principles and Practice", John Wiley Sons, USA

30. Romero, Carlos, (2001). "Extended Lexicographic Goal Programming: A Unifying Approach", Omega, The International Journal of Management Science 29, s.63-71

31. Saber H.M., Ravindran A., (1993), "Nonlinear Goal Programming Theory And Practice: A Survey", Computers Operations Research 20 (3), s.275-291

32. Saber H.M., Ravindran A., (1996), "A Partitioning Gradient Based (PGB) Algorithm For Solving Nonlinear Goal Programming Problems", Computers Operations Research 23 (2), s.141-152

33. Sakawa, M., (2000), "Large Scale Interactive Fuzzy Multiobjective Programming – Decomposition Approaches", Physica Verlag, Germany

34. Schniederjans, Marc, J., (1994), "Goal Programming: Methodology and Applications", Kluwer Academic Puplishers, USA

35. Schniederjans M.J.,Kwak N.K., (1982), "An Alternative Solution Method for Goal Programming Problems: a Tutorial", Journal of the Operational Research Society 33, s.247-251

36. Seppälä Y., (1988), "On Accurate Linear Approximations for Chance-Constrained Programming" , Journal of the Operational Research Society 39 (7), s. 693-694

37. Şenyay, Levent, (1987), "İşletmelerde Doğrusal Olmayan Tekniklerin Uygulanması", Yayınlanmamış Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İzmir

38. Tiwari R.N., Dharmar S.,Rao J.R., (1986), "Priority Structure In Fuzzy Goal programming" Fuzzy Sets and Systems 19, s.251-259

39. Umarusman, Nurullah, (2002), "Bulanık Çok Amaçlı Hedef Programlama ve Bir Üretim Süreci Uygulaması", Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, İzmir, Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü

40. Weistroffer H., (1983), "An Interactive Goal Programming Method for Nonlinear Multiple-Criteria Decision-Making Problems", Computers Operations Research 10, s.311-320

41. Winston, Wayne, L., (1991), "Operations Research Applications and Algorithms", Second Edition, Duxbury Pres, USA

42. Yaralıoğlu, Kaan, (2004), "Uygulamada Karar Destek Yöntemleri", İzmir, İlkem Ofset

43. Zimmermann, Hans, J., (1987), "Fuzzy Sets, Decision Making and Expert System", Kluwer Academic Puplishers, Boston

44. Zimmermann, Hans, J., (1992), "Fuzzy Sets Theory and Its Applications", Second, Revised Edition, Kluwer Academic Puplishers, Boston

EKLER

EK 1:

Model I – DHP Problemi

$Min\ Z = d_1^- + d_2^- + d_3^-$

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + d_1^- - d_1^+ = 600000$

$1.62\ X_1 + 1.65\ X_2 + 1.88\ X_3 + 1.64\ X_4 + 1.50\ X_5 + 1.58\ X_6 + 1.58\ X_7 + 1.44\ X_8 +$

$1.56\ X_9 + 1.95\ X_{10} + d_2^- - d_2^+ = 890000$

$3.78\ X_1 + 3.85\ X_2 + 4.38\ X_3 + 3.82\ X_4 + 3.50\ X_5 + 3.58\ X_6 + 3.68\ X_7 + 3.36\ X_8 +$

$3.64\ X_9 + 4.55\ X_{10} + d_3^- + d_3^+ = 2075000$

$201.51\ X_1 + 247.41\ X_2 + 285.39\ X_4 + 236.79\ X_6 + 243.09\ X_7 + 128.52\ X_{10}$
≤ 16400000 ,

$40.39\ X_1 + 45.49\ X_2 + 55.97\ X_3 + 49.71\ X_4 + 43.32\ X_5 + 44.13\ X_6 + 45.01\ X_7 +$

$25.76\ X_8 + 30.146\ X_9 + 60.37\ X10 \leq 93650000$,

$0.6478\ X_1 + 0.7498\ X_2 + 0.96\ X_3 + 0.85\ X_4 + 0.71\ X_5 + 0.7262\ X_6 + 0.7402\ X_7$

$+ 0.39\ X_8 + 0.4823\ X_9 + 1.0456\ X_{10} \leq 1870000$,

$0.6478\ X_1 + 0.7498\ X_2 + 1.06\ X_3 + 0.85\ X_4 + 0.71\ X_5 + 0.7262\ X_6 + 0.7402\ X_7$

$+ 0.69\ X_8 + 0.938\ X_9 + 1.0456\ X_{10} \leq 3360000$,

$18\ X_1 + 18\ X_2 + 92.75\ X_3 + 18\ X_4 + 58.51\ X_5 + 18\ X_6 + 18\ X_7 + 59.04\ X_8 +$

$40\ X_9 + 62.95\ X_{10} \leq 213300000$,

$10\ X_1 + 10\ X_2 + 33.38\ X_3 + 60\ X_4 + 30.26\ X_5 + 28\ X_6 + 28\ X_7 + 54.23\ X_8$

$+ 50\ X_9 + 58.57\ X_{10} \leq 69150000$,

$27\ X_1 + 27\ X_2 + 67.97\ X_3 + 27\ X_4 + 52.32\ X_5 + 27\ X_6 + 27\ X_7 + 55.09 X_{10}$

≤ 164800000 ,

$25\ X_1 + 25\ X_2 + 32.59\ X_3 + 25\ X_4 + 30.06\ X_5 + 25\ X_6 + 25\ X_7 + 30.62\ X_{10}$
≤ 73100000 ,

$36.36\ X_3 + 32.92\ X_5 + 106.81\ X_8 + 234.784\ X_9 + 36.52\ X_{10} \leq 57810000$,

$33.38\ X_3 + 20.26\ X_5 + 10\ X_8 + 10\ X_9 + 22.47\ X_{10} \leq 50000000$,

$37.97\ X_3 + 25.32\ X_5 + 10\ X_8 + 10\ X_9 + 28.09\ X_{10} \le 72300000$,

$48.36\ X_3 + 32.92\ X_5 + 6.35\ X_8 + 36.52\ X_{10} \le 35300000$,

$38.97\ X_3 + 25.32\ X_5 + 28.09\ X_{10} \le 82150000$,

$10\ X_8 + 10\ X_9 \le 24675000$,

$18.46\ X_8 + 10\ X_9 \le 28500000$,

$8.46\ X_8 \le 10200000$,

$1.41\ X_8 \le 1700000$,

$7.4\ X_2 + 1.02\ X_3 + 0.8\ X_4 + 2.05\ X_6 + 0.5\ X_9 \le 2001000$,

$0.22\ X_7 + 0.008\ X_{10} \le 59000$,

$6.6\ X_1 + 5.6\ X_3 + 5.1\ X_4 \le 328000$,

$48.04\ X_1 + 4\ X_2 + 0.4\ X_3 + 3\ X_4 + 2.3\ X_5 + 0.045\ X_8 + 26.34\ X_{10} \le 1104000$,

$82.5\ X_1 + 8.5\ X_2 + 14.9\ X_4 \le 995000$,

$19.3\ X_1 + 3.9\ X_4 \le 701000$,

$16.1\ X_6 + 4.1\ X_9 \le 1000000$,

$6.4\ X_1 + 13.18\ X_3 + 3.5\ X_4 + 37.3\ X_5 + 0.4\ X_6 + 0.05\ X_8 \le 3125000$,

$0.5\ X_2 \le 1240000$,

$6.95\ X_{10} \le 574000$,

$0.26\ X_{10} \le 120000$,

$0.6\ X_3 + 12.45\ X_7 + 18.02\ X_{10} \le 1115000$,

$0.25\ X_7 \le 51000$,

$0.15\ X_3 + 0.95\ X_6 \le 83600$,

$7.2\ X_5 \le 284000$,

$15.05\ X_1 + 5.72\ X_2 + 1.5\ X_4 + 2.2\ X_6 + 0.2\ X_9 \le 1915000$,

$$X_i \ge 0\ ,\ i = 1,2,\ldots,10 \text{ ve } d_i^- \ge 0\ ,\ d_i^+ \ge 0\ ,\ i = 1,2,3$$

Model I'in LINGO Paket Program Sonucu

Global optimal solution found.
Objective value: 0.000000

Total solver iterations: 5

Variable	Value	Reduced Cost
UNDER1	0.000000	1.000000
UNDER2	0.000000	1.000000
UNDER3	0.000000	1.000000
X1	0.000000	0.000000
X2	0.000000	0.000000
X3	49383.11	0.000000
X4	10089.13	0.000000
X5	0.000000	0.000000
X6	11628.71	0.000000
X7	4468.472	0.000000
X8	524430.6	0.000000
X9	0.000000	0.000000
X10	0.000000	0.000000
OVER1	0.000000	0.000000
OVER2	0.000000	0.000000
OVER3	0.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	-1.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	9680860.	0.000000
6	0.7616086E+08	0.000000
7	1597736.	0.000000
8	2925469.	0.000000
9	0.1772860E+09	0.000000
10	0.3800565E+08	0.000000
11	0.1607364E+09	0.000000
12	0.7083595E+08	0.000000
13	0.000000	0.000000
14	0.4310729E+08	0.000000
15	0.6518062E+08	0.000000
16	0.2958170E+08	0.000000
17	0.8022554E+08	0.000000
18	0.1943069E+08	0.000000
19	0.1881901E+08	0.000000
20	5763317.	0.000000
21	960552.9	0.000000
22	1918719.	0.000000
23	58016.94	0.000000
24	0.000000	0.000000
25	1030380.	0.000000
26	844671.9	0.000000

27	661652.4	0.000000
28	812777.8	0.000000
29	2407946.	0.000000
30	1240000.	0.000000
31	574000.0	0.000000
32	120000.0	0.000000
33	1029738.	0.000000
34	49882.88	0.000000
35	65145.26	0.000000
36	284000.0	0.000000
37	1874283.	0.000000

EK 2:

Model II – DOHP Problemi

$$Min\ Z = d_1^- + d_2^- + d_3^-$$

$$X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7 + X8 + X9 + X10 + d_1^- - d_1^+ = 600000$$

$$1.62\ X_1 + 1.65\ X_2 + 1.88\ X_3 + 1.64\ X_4 + 1.50\ X_5 + 1.58\ X_6 + 1.58\ X_7 + 1.44\ X_8 +$$

$$1.56\ X_9 + 1.95\ X_{10} + d_2^- - d_2^+ = 890000$$

$$3.78\ X_1 + 3.85\ X_2 + 4.38\ X_3 + 3.82\ X_4 + 3.50\ X_5 + 3.58\ X_6 + 3.68\ X_7 + 3.36\ X_8 +$$

$$3.64\ X_9 + 4.55\ X_{10} + d_3^- + d_3^+ = 2075000$$

$$201.51\ X_1 + 247.41\ X_2 + 285.39\ X_4 + 236.79\ X_6 + 243.09\ X_7 + 128.52\ X_{10}$$
$$\leq 16400000\ ,$$

$$40.39\ X_1 + 45.49\ X_2 + 55.97\ X_3 + 49.71\ X_4 + 43.32\ X_5 + 44.13\ X_6 + 45.01\ X_7 +$$

$$25.76\ X_8 + 30.146\ X_9 + 60.37\ X10 \leq 93650000\ ,$$

$$0.6478\ X_1 + 0.7498\ X_2 + 0.96\ X_3 + 0.85\ X_4 + 0.71\ X_5 + 0.7262\ X_6 + 0.7402\ X_7$$

$$+ 0.39\ X_8 + 0.4823\ X_9 + 1.0456\ X_{10} \leq 1870000\ ,$$

$$0.6478\ X_1 + 0.7498\ X_2 + 1.06\ X_3 + 0.85\ X_4 + 0.71\ X_5 + 0.7262\ X_6 + 0.7402\ X_7$$

$$+ 0.69\ X_8 + 0.938\ X_9 + 1.0456\ X_{10} \leq 3360000\ ,$$

$$18\ X_1 + 18\ X_2 + 92.75\ X_3 + 18\ X_4 + 58.51\ X_5 + 18\ X_6 + 18\ X_7 + 59.04\ X_8 +$$

$$40\ X_9 + 62.95\ X_{10} \leq 213300000\ ,$$

$$10\ X_1 + 10\ X_2 + 33.38\ X_3 + 60\ X_4 + 30.26\ X_5 + 28\ X_6 + 28\ X_7 + 54.23\ X_8$$

$$+ 50\ X_9 + 58.57\ X_{10} \leq 69150000\ ,$$

$$27\ X_1 + 27\ X_2 + 67.97\ X_3 + 27\ X_4 + 52.32\ X_5 + 27\ X_6 + 27\ X_7 + 55.09X_{10}$$

$$\leq 164800000\ ,$$

$$25\ X_1 + 25\ X_2 + 32.59\ X_3 + 25\ X_4 + 30.06\ X_5 + 25\ X_6 + 25\ X_7 + 30.62\ X_{10}$$
$$\leq 73100000\ ,$$

$$36.36\ X_3 + 32.92\ X_5 + 106.81\ X_8 + 234.784\ X_9 + 36.52\ X_{10} \leq 57810000\ ,$$

$$33.38\ X_3 + 20.26\ X_5 + 10\ X_8 + 10\ X_9 + 22.47\ X_{10} \leq 50000000\ ,$$

$$37.97\ X_3 + 25.32\ X_5 + 10\ X_8 + 10\ X_9 + 28.09\ X_{10} \leq 72300000\ ,$$

$$48.36\ X_3 + 32.92\ X_5 + 6.35\ X_8 + 36.52\ X_{10} \leq 35300000\ ,$$

$38.97\ X_3 + 25.32\ X_5 + 28.09\ X_{10} \leq 82150000$,

$10\ X_8 + 10\ X_9 \leq 24675000$,

$18.46\ X_8 + 10\ X_9 \leq 28500000$,

$8.46\ X_8 \leq 10200000$,

$1.41\ X_8 \leq 1700000$,

$7.4\ X_2 + 1.02\ X_3 + 0.8\ X_4 + 2.05\ X_6 + 0.5\ X_9 \leq 2001000$,

$0.22\ X_7 + 0.008\ X_{10} \leq 59000$,

$6.6\ X_1 + 5.6\ X_3 + 5.1\ X_4 \leq 328000$,

$48.04\ X_1 + 4\ X_2 + 0.4\ X_3 + 3\ X_4 + 2.3\ X_5 + 0.045\ X_8 + 26.34\ X_{10} \leq 1104000$,

$82.5\ X_1 + 8.5\ X_2 + 14.9\ X_4 \leq 995000$,

$19.3\ X_1 + 3.9\ X_4 \leq 701000$,

$16.1\ X_6 + 4.1\ X_9 \leq 1000000$,

$6.4\ X_1 + 13.18\ X_3 + 3.5\ X_4 + 37.3\ X_5 + 0.4\ X_6 + 0.05\ X_8 \leq 3125000$,

$0.5\ X_2 \leq 1240000$,

$6.95\ X_{10} \leq 574000$,

$0.26\ X_{10} \leq 120000$,

$0.6\ X_3 + 12.45\ X_7 + 18.02\ X_{10} \leq 1115000$,

$0.25\ X_7 \leq 51000$,

$0.15\ X_3 + 0.95\ X_6 \leq 83600$,

$7.2\ X_5 \leq 284000$,

$15.05\ X_1 + 5.72\ X_2 + 1.5\ X_4 + 2.2\ X_6 + 0.2\ X_9 \leq 1915000$,

$X_3\ X_8 \geq 150000$

$$X_i \geq 0\ ,\ i = 1,2,\ldots,10 \text{ ve } d_i^- \geq 0\ ,\ d_i^+ \geq 0\ ,\ i = 1,2,3$$

Model II'nin LINGO Paket Program Sonucu

Local optimal solution found.
Objective value: 0.000000
Total solver iterations: 13

Variable	Value	Reduced Cost
UNDER1	0.000000	1.000000
UNDER2	0.000000	1.000000
UNDER3	0.000000	1.000000
X1	2266.145	0.000000
X2	5194.101	0.000000
X3	44210.93	0.000000
X4	3603.436	0.000000
X5	30560.47	0.000000
X6	20327.84	0.000000
X7	18535.55	0.000000
X8	443440.9	0.000000
X9	26393.30	0.000000
X10	27495.02	0.000000
OVER1	22027.67	0.000000
OVER2	51856.17	0.000000
OVER3	120053.8	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	-1.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	776996.5	0.000000
6	0.7373478E+08	0.000000
7	1554532.	0.000000
8	2895051.	0.000000
9	0.1775454E+09	0.000000
10	0.3839265E+08	0.000000
11	0.1573333E+09	0.000000
12	0.6865044E+08	0.000000
13	631676.3	0.000000
14	0.4258893E+08	0.000000
15	0.6437684E+08	0.000000
16	0.2833594E+08	0.000000
17	0.7888097E+08	0.000000
18	0.1997666E+08	0.000000
19	0.2005015E+08	0.000000
20	6448490.	0.000000
21	1074748.	0.000000
22	1859717.	0.000000
23	54702.22	0.000000
24	47084.70	0.000000
25	131400.5	0.000000
26	710202.0	0.000000
27	643210.0	0.000000
28	564509.2	0.000000

29	1344976.	0.000000
30	1237403.	0.000000
31	382909.6	0.000000
32	112851.3	0.000000
33	362245.6	0.000000
34	46366.11	0.000000
35	57656.91	0.000000
36	63964.61	0.000000
37	1795779.	0.000000
38	0.1688984E+09	0.000000
39	0.1960493E+11	0.000000

EK 3:

Veri Setinden Hesaplanan Dağılış Fonksiyonları

Gözlenen verilere teorik dağılımlar uydurmak için bilinen en iyi sistem Karl Pearson tarafından ortaya atılan Pearson dağılış sistemidir. Pearson dağılış sisteminde onüç teorik dağılım vardır ve bu dağılımlar Pearson'un ortaya koyduğu diferansiyel denklem sistemlerinin farklı çözümleridir (Kocakoç ve Şehirlioğlu, 2007) Aşağıdaki tabloda veri seti verilmiştir. MATLAB paket programında verilerin Pearson dağılış parametreleri hesaplanmış ve hangi tip dağılışa denk geldikleri bulunmuştur. Veri setine ait dağılış tipleri Tip I-J 'dir. Sonuçlara bakıldığında, verilerin Tip-I (Beta dağılışı) olduğu görülmektedir.

Dağılış fonksiyonları için olasılık yoğunluk fonksiyonlarının oluşturulmasında, grafiklerinin çizilmesinde ve olasılık değerlerinin hesaplanmasında MATLAB paket programı kullanılmıştır.

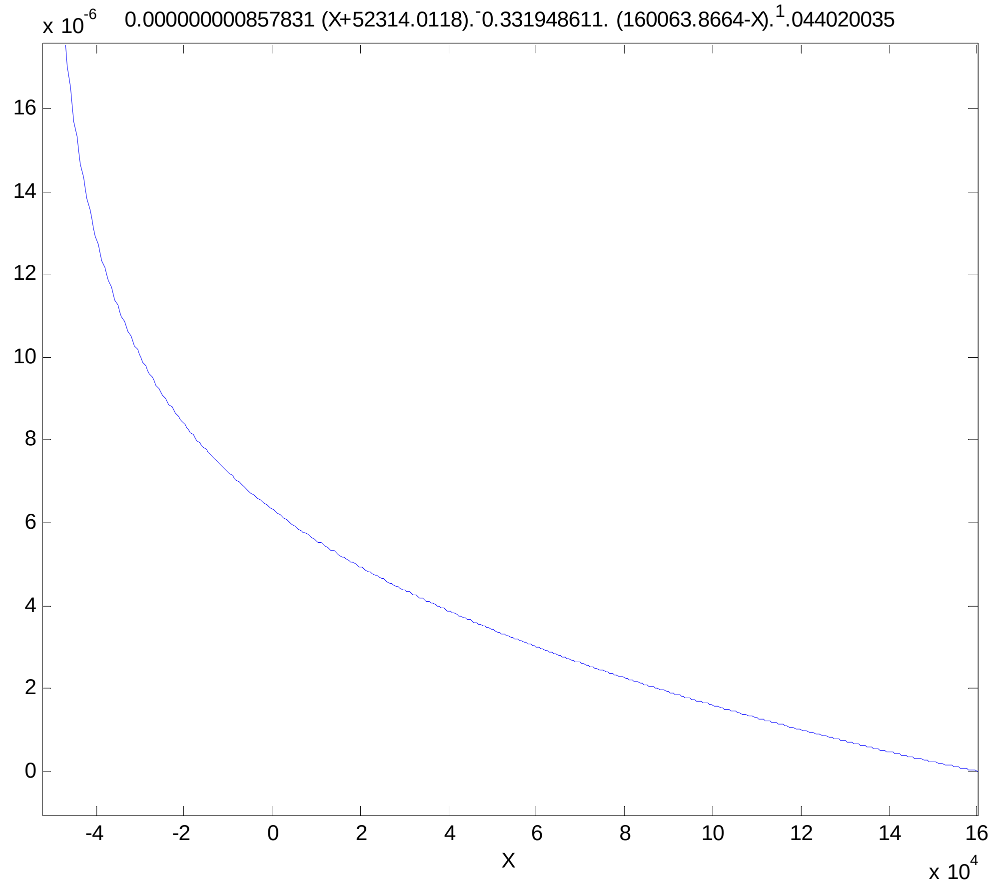
Birim Üretim Miktarı İçin Veri Seti:

	Haz.09	Tem.09	Ağu.09	Eyl.09	Eki.09	Kas.09	Ara.09
x_8	29.125,00	4.975	0,00	15.700,00	2.400,00	3.500,00	0,00
x_9	26.300,00	13.564	0,00	18.021,80	17.539,20	0,00	0,00
x_2	72.503,00	60.451	53.346,00	81.552,80	87.052,01	0,00	0,00
x_1	140.393,00	89.951	112.067,20	31.140,20	124.464,20	0,00	0,00
x_4	60.859,00	7.886	74.141,00	92.774,40	48.212,40	27.119,40	0,00
x_3	62.094,00	44.614	60.389,12	50.208,52	64.172,16	0,00	0,00
x_{10}	24.640,00	511	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
x_6	35.028,00	32.811	29.650,20	29.501,40	17.001,60	37,95	0,00
x_7	33.492,00	30.626	0,00	12.555,65	5.275,05	5.275,05	265,65
x_5	41.441,00	190	25.198,80	10.929,60	5.085,30	10.436,25	0,00

Üretim Miktarı Hedef Kısıtı için Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$$f(X) = 0.000000000857831\,(X + 52314.00118)^{-0.331948611}\;(160063.8664 - X)^{1.044020035}$$

Üretim Miktarı İçin Dağılış Fonksiyonu Grafiği



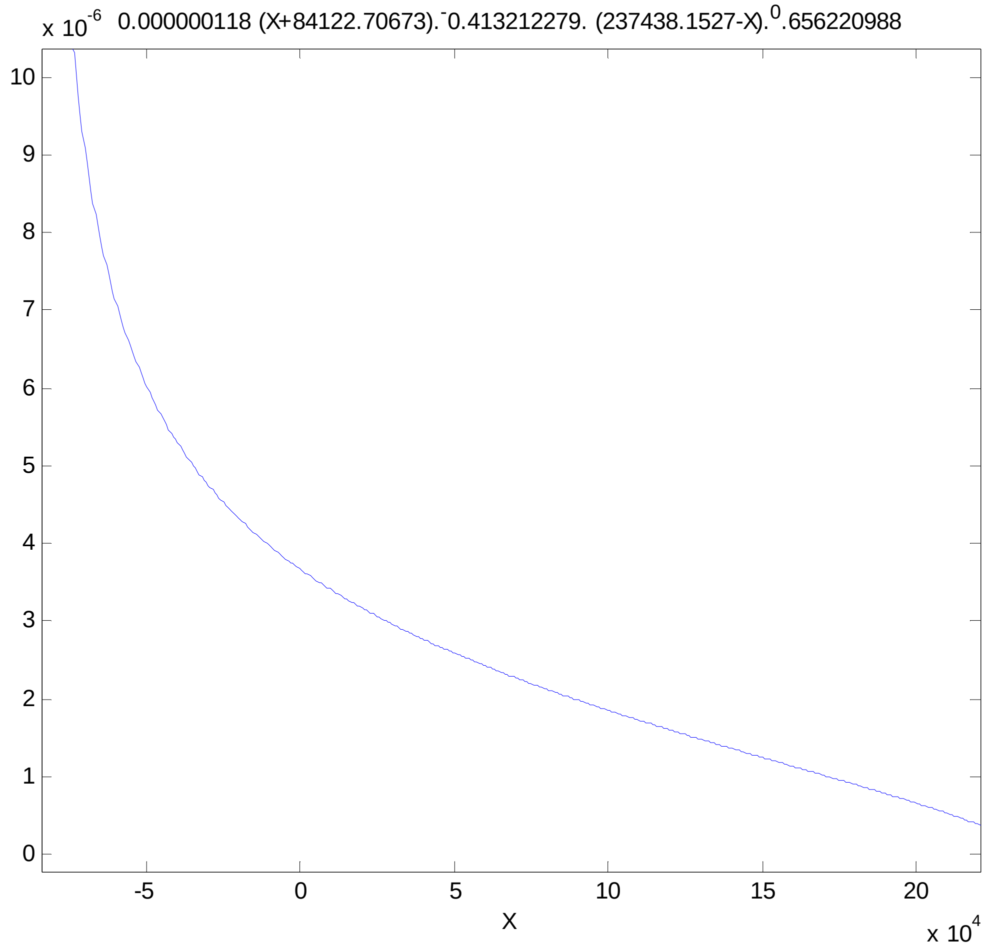
Kar Hedefi İçin Veri Seti:

	Haz.09	Tem.09	Ağu.09	Eyl.09	Eki.09	Kas.09	Ara.09
x_8	41.940,00	7.164,00	0,00	22.608,00	3.456,00	5.040,00	0,00
x_9	41.028,00	21.160,31	0,00	28.114,01	27.361,15	0,00	0,00
x_2	119.629,95	99.743,49	88.020,90	134.562,12	143.635,82	0,00	0,00
x_1	227.436,66	145.720,30	181.548,86	50.447,12	201.632,00	0,00	0,00
x_4	99.504,47	12.894,26	121.220,54	151.686,14	78.827,27	44.340,22	0,00
x_3	116.426,25	83.651,70	113.229,60	94.140,97	120.322,80	0,00	0,00
x_{10}	48.048,00	996,84	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
x_6	55.169,10	51.677,25	46.699,06	46.464,70	26.777,52	59,77	0,00
x_7	52.749,90	48.235,40	0,00	19.775,15	8.308,20	8.308,20	418,40
x_5	62.161,50	284,63	37.798,20	16.394,40	7.627,95	15.654,38	0,00

Kar Hedefi Kısıtı için Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$$f(X) = 0.000000118\,(X + 84122.70673)^{-0.4132122279}\ (237438.1527 - X)^{0.656220988}$$

Kar İçin Dağılış Fonksiyonu Grafiği



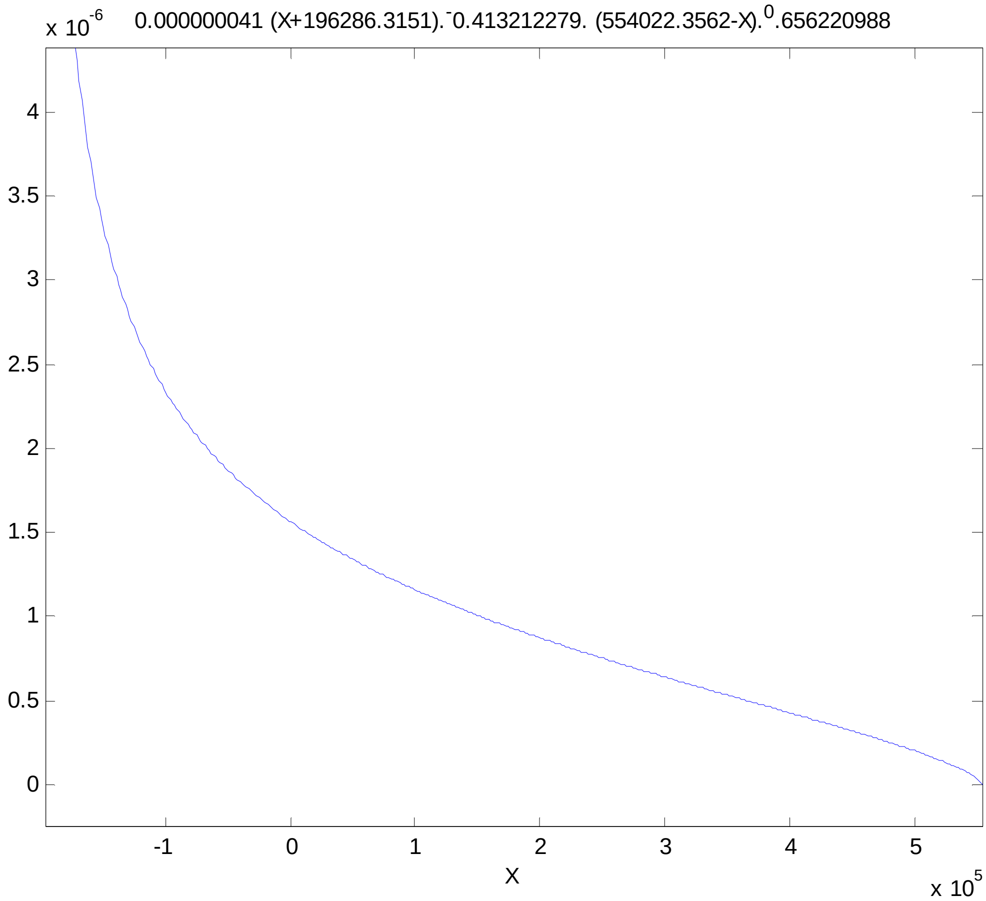
Satış Geliri Hedefi İçin Veri Seti:

	Haz.09	Tem.09	Ağu.09	Eyl.09	Eki.09	Kas.09	Ara.09
x_8	97.860,00	16.716,00	0,00	52.752,00	8.064,00	11.760,00	0,00
x_9	95.732,00	49.374,05	0,00	65.599,35	63.842,69	0,00	0,00
x_2	279.136,55	232.734,81	205.382,10	313.978,28	335.150,24	0,00	0,00
x_1	530.685,54	340.014,02	423.614,02	117.709,96	470.474,68	0,00	0,00
x_4	232.177,09	30.086,62	282.847,92	353.934,34	183.930,31	103.460,51	0,00
x_3	271.661,25	195.187,30	264.202,40	219.662,28	280.753,20	0,00	0,00
x_{10}	112.112,00	2.325,96	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
x_6	128.727,90	120.580,24	108.964,49	108.417,65	62.480,88	139,47	0,00
x_7	123.083,10	112.549,26	0,00	46.142,01	19.385,81	19.385,81	976,26
x_5	145.043,50	664,13	88.195,80	38.253,60	17.798,55	36.526,88	0,00

Satış Geliri Hedef Kısıtı için Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$$f(X) = 0.000000041\,(X + 196286.3151)^{-0.4132122279}\ (554022.3562 - X)^{0.656220988}$$

Satış Geliri Hedefi İçin Dağılış Fonksiyonu Grafiği



EK 4:

Model III – ŞKBHP Problemi

MIN=UNDER1+UNDER2+UNDER3;

0.000044*X1+0.000044*X2+0.000044*X3+0.000044*X4+0.000044*X5+0.000044*X6+0.000044*X7+0.000044*X8+0.000044*X9+0.000044*X10-OVER1+UNDER1=1.8086;

0.00005324*X1+0.00005422*X2+0.00006162*X3+0.00005373*X4+0.00004929*X5+0.00005176*X6+0.00005176*X7+0.00004732*X8+0.00005127*X9+0.00006408*X10-OVER2+UNDER2=1.0031;

0.00003069*X1+0.00003126*X2+0.00003553*X3+0.00003098*X4+0.00002842*X5+0.00002984*X6+0.00002984*X7+0.00002728*X8+0.00002956*X9+0.00003695*X10-OVER3+UNDER3=2.3325;

201.51*X1+247.41*X2+285.39*X4+236.79*X6+243.09*X7+128.52*X10<=16400000;

40.39*X1+45.49*X2+55.97*X3+49.71*X4+43.32*X5+44.13*X6+45.01*X7+25.76*X8+30.146*X9+60.37*X10<=93650000;

0.6478*X1+0.7498*X2+0.96*X3+0.85*X4+0.71*X5+0.7262*X6+0.7402*X7+0.39*X8+0.4823*X9+1.0456*X10<=1870000;

0.6478*X1+0.7498*X2+1.06*X3+0.85*X4+0.71*X5+0.7262*X6+0.7402*X7+0.69*X8+0.938*X9+1.0456*X10<=3360000;

18*X1+18*X2+92.75*X3+18*X4+58.51*X5+18*X6+18*X7+59.04*X8+40*X9+62.95*X10<=213300000;

10*X1+10*X2+33.38*X3+60*X4+30.26*X5+28*X6+28*X7+54.23*X8+50*X9+58.57*X10<=69150000;

27*X1+27*X2+67.97*X3+27*X4+52.32*X5+27*X6+27*X7+55.09*X10<=164800000;

25*X1+25*X2+32.59*X3+25*X4+30.06*X5+25*X6+25*X7+30.62*X10<=73100000;

36.36*X3+32.92*X5+106.81*X8+234.784*X9+36.52*X10<=57810000;

33.38*X3+20.26*X5+10*X8+10*X9+22.47*X10<=50000000;

37.97*X3+25.32*X5+10*X8+10*X9+28.09*X10<=72300000;

48.36*X3+32.92*X5+6.35*X8+36.52*X10<=35300000;

38.97*X3+25.32*X5+28.09*X10<=82150000;

10*X8+10*X9<=24675000;

18.46*X8+10*X9<=28500000;

8.46*X8<=10200000;

1.41*X8<=1700000;

7.4*X2+1.02*X3+0.8*X4+2.05*X6+0.5*X9<=2001000;

0.22*X7+0.008*X10<=59000;

6.6*X1+5.6*X3+5.1*X4<=328000;

48.04*X1+4*X2+0.4*X3+3*X4+2.3*X5+0.045*X8+26.34*X10<=1104000;

82.5*X1+8.5*X2+14.9*X4<=995000;

19.3*X1+3.9*X4<=701000;

16.1*X6+4.1*X9<=1000000;

6.4*X1+13.18*X3+3.5*X4+37.3*X5+0.4*X6+0.05*X8<=3125000;

0.5*X2<=1240000;

6.95*X10<=574000;

0.26*X10<=120000;

0.6*X3+12.45*X7+18.02*X10<=1115000;

0.25*X7<=51000;

0.15*X3+0.95*X6<=83600;

7.2*X5<=284000;

15.05*X1+5.72*X2+1.5*X4+2.2*X6+0.2*X9<=1915000;

X3*X10>=150000;

$$X_i \geq 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,10 \ \text{ve} \ d_i^- \geq 0 \ , \ d_i^+ \geq 0 \ , \ i = 1,2,3$$

Model III'ün LINGO Paket Program Sonucu

Local optimal solution found.

Objective value: 0.000000

Total solver iterations: 13

Variable	Value	Reduced Cost
UNDER1	0.000000	1.000000
UNDER2	0.000000	1.000000
UNDER3	0.000000	1.000000

X1	6871.293	0.000000
X2	3603.948	0.000000
X3	37696.00	0.000000
X4	3166.916	0.000000
X5	18952.85	0.000000
X6	6154.657	0.000000
X7	34087.18	0.000000
X8	104130.8	0.000000
X9	184619.1	0.000000
X10	22582.12	0.000000
OVER1	16.75346	0.000000
OVER2	20.90818	0.000000
OVER3	10.30038	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	-1.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	574038.0	0.000000
6	0.7870313E+08	0.000000
7	1627544.	0.000000
8	2998405.	0.000000
9	0.1927707E+09	0.000000
10	0.4969605E+08	0.000000
11	0.1585473E+09	0.000000
12	0.6926320E+08	0.000000
13	522923.4	0.000000
14	0.4496280E+08	0.000000
15	0.6686697E+08	0.000000
16	0.3136716E+08	0.000000
17	0.7956677E+08	0.000000
18	0.2178750E+08	0.000000
19	0.2473155E+08	0.000000
20	9319053.	0.000000
21	1553176.	0.000000
22	1828421.	0.000000
23	51320.16	0.000000
24	55400.59	0.000000
25	91817.55	0.000000
26	350297.7	0.000000
27	556033.1	0.000000
28	143971.8	0.000000
29	1858497.	0.000000
30	1238198.	0.000000
31	417054.2	0.000000
32	114128.6	0.000000
33	261067.1	0.000000

34	42478.20	0.000000
35	72098.68	0.000000
36	147539.5	0.000000
37	1735758.	0.000000
38	0.8511058E+09	0.000000