D.E.Ü. İ.İ.B.F. Dergisi
Cilt: 10, Sayı: II, 1995, ss.359-369

DUAL CEVAP YÜZEYİ OPTİMİZASYONU (*)

DENNIS K. S. LIN (**) **Çeviren: Cenk ÖZLER (****)**

WAN ZHU TU (***)

ÖZET

Vining ve Myers, Taguchi felsefesinin amaçlarını gerçekleştirmek için, bu felsefeye dual cevap yaklaşımını adapte etmişlerdir. Bu mükemmel yaklaşımın, bu makalede belirtilen bazı eksiklikleri bulunmaktadır. Ayrıca, dual cevap yüzeyi yaklaşımında, daha genel (karmaşık) cevap modellerinin de kabul edilmesine imkan veren, daha tahmin edici ve esasen daha basit bir optimizasyon prosedürü önerilmiştir. Yeni yöntem, Vining ve Myers' te verilen örnek kullanılarak, ortalama karesel hatanın % 25 daha küçük olduğu bir çözümü vermiştir.

1. GİRİŞ

İlk olarak Box ve Wilson (1951) tarafından tanıtılan Cevap Yüzeyi Yöntem Bilimi (Response Surface Methodology), cevap Y' yi maksimize (veya minimize) eden girdi veya tasarım değişkenleri setinin optimal kombinasyonunu bulmak için tasarlanmıştır. Bu tip bir problem, doğrudan Y' nin ortalama değeri üzerinde odaklanmaktadır. Y' nin varyansı küçük ve kararlı olduğunda (yani, varyansın bilinen veya bilinmeyen bir sabit değer olduğu varsayıldığında), bu yaklaşım iyi sonuçlar vermektedir.

Varyans, sabit bir değer olmadığında, şüphesiz klasik cevap yüzeyi yöntembilimi yanıltıcı sonuçlar verebilir. Vining ve Myers (1990); dual cevap yaklaşımını (bkz. Myers ve Carter (1973)) kullanarak, böyle bir problemin üstesinden gelmek için, sade bir yöntem önermişlerdir. Vining ve Myers, ilk olarak hem birincil hem de ikincil cevap yüzeylerine ikinci-derece modellerin uyumunu yapmış, ardından ikincil cevabın değeri üzerindeki uygun bir kısıt altında birincil cevabı optimize etmek için, dual-cevap yüzeyi yaklaşımını uygulamıştır (Bundan böyle Vining ve Myers (1990)' den, VM olarak bahsedilecektir).

VM' nin yaklaşımının arkasındaki temel fikir mükemmeldir. Bununla beraber, VM' nin optimizasyon prosedürünün iyileştirilebileceğine inanmaktayız. VM prosedürünün eksiklikleri spesifik olarak şunlardır: (1) Lagrange çarpanlarının kullanıldığı optimizasyon prosedürü yanıltıcıdır. Bu prosedür, ikincil-cevabın tahmininin sabit bir değere eşit olması kısıtını getir-

---

(*) "Dual Response Surface Optimization", **Journal of Quality Technology**, Vol.27, No:1, Ocak 1995' te yayınlanmıştır.
(**) University of Tennessee, Knoxville, TN 37996
(***) University of South Carolina, Columbia, SC 29208
(****) D.E.Ü. İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü, Arş. Gör.

diği için, aslında daha iyi olan başka koşulları bertaraf etmiş olabilir. İlerideki kesimlerde göreceğimiz gibi, ortalama karesel hata (mean squared error= MSE) ölçüsüne dayanan, daha iyi bir prosedürün kullanılması gerekmektedir. (2) Gerek birincil, gerek ikincil-cevap yüzeyleri için uyumu yapılan tam ikinci-derece model üzerindeki kısıtlama gerçekçi değildir. Tercihan en iyi alt (subset) modeller ele alınmalıdır. Gerçekte, burada verilen ortalama karesel hata (OKH) prosedürü, doğrusal olmayan (polinomial olmayan) cevap yüzeyleri için bile iyi sonuçlar vermektedir.

İzleyen kesimde, kısaca VM yaklaşımına değinilmiştir ve eksiklikleri belirtilmiştir. Bunu izleyen değerlendirmemizde, daha tatmin edici bir formulasyon tanımlanmıştır. Tarafsız bir karşılaştırma yapmak için yöntemimiz VM' de kullanılan aynı örnek üzerinde uygulanmıştır.

2. VINING VE MYERS YAKLAŞIMININ GÖZDEN GEÇİRİLMESİ

VM notasyonları izlenirse, birincil ve ikincil cevaplar

$$\eta_p = \beta_o + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \sum\sum_{i<j}^{k} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon_p \qquad (1)$$

$$\eta_s = \gamma_o + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ii} x_i^2 + \sum\sum_{i<j}^{k} \gamma_{ij} x_i x_j + \varepsilon_s \qquad (2)$$

şeklinde yazılabilir. Uyumu yapılmış cevap yüzeyleri

$$\hat{\omega}_p = b_0 + \mathbf{x}'\mathbf{b} + \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} \qquad (3)$$

$$\hat{\omega}_s = c_0 + \mathbf{x}'\mathbf{c} + \mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} \qquad (4)$$

eşitlikleriyle temsil edilebilir. Burada $b_0 = \hat{\beta}_0$, $c_0 = \hat{\gamma}_0$, $\mathbf{b} = \left(\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k\right)'$, $\mathbf{c} = \left(\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_k\right)'$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\hat{\beta}_{11} & \hat{\beta}_{12} & \cdots & \hat{\beta}_{1k} \\ \hat{\beta}_{12} & 2\hat{\beta}_{22} & \cdots & \hat{\beta}_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\beta}_{1k} & \hat{\beta}_{2k} & \cdots & 2\hat{\beta}_{kk} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{C} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\hat{\gamma}_{11} & \hat{\gamma}_{12} & \cdots & \hat{\gamma}_{1k} \\ \hat{\gamma}_{12} & 2\hat{\gamma}_{22} & \cdots & \hat{\gamma}_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\gamma}_{1k} & \hat{\gamma}_{2k} & \cdots & 2\hat{\gamma}_{kk} \end{bmatrix}$$

olmaktadır. b_0, c_0, **b**, **c**, **B** ve **C**, katsayı tahminlerinin oluşturduğu vektör ve matrisleridir.

VM, Lagrange çarpanlarını kullanarak, $\hat{\omega}_s = T$ kısıtı altında $\hat{\omega}_p$ ' yi optimize edecek **x**' in bulunması için bir yöntem önermiştir. Burada T, kısıt cevabın istenilen hedef değeridir ve ilgilenilen bölgenin küresel olduğu varsayılmıştır. Diğer bir değişle

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0 \qquad (5)$$

koşulunu sağlayan **x** bulunmaktadır. Burada

$$L = b_0 + \mathbf{b}'\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} + \lambda\left(c_0 + \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} - T\right) \qquad (6)$$

olmaktadır.

Ortalama için uyumu yapılmış cevap yüzeyi $\hat{\omega}_\mu$, standart sapma için uyumu yapılmış cevap yüzeyi $\hat{\omega}_\sigma$ ile gösterilsin. VM' de aşağıdaki üç durum ele alınmıştır:

Durum 1: "Hedef değer en iyidir", σ^2 minimize edilirken, μ' nün belli bir hedef değer μ_0' da sabit tutulacağı anlamına gelir. Diğer bir ifadeyle

minimize $\hat{\omega}_\sigma$

kısıt: $\hat{\omega}_\mu = \mu_0$

yazılabilir.

Durum 2: "Daha büyük daha iyidir", σ^2 kontrol altındayken, μ' nün mümkün olduğu kadar büyük yapılması anlamına gelir. Diğer bir ifadeyle

maksimize $\hat{\omega}_\mu$

kısıt: $\hat{\omega}_\sigma = \sigma_0$

yazılabilir.

Durum 3: "Daha küçük daha iyidir", σ^2 kontrol altındayken μ 'nün mümkün olduğu kadar küçük yapılması anlamına gelmektedir. Diğer bir ifadeyle,

minimize $\hat{\omega}_\mu$

kısıt: $\hat{\omega}_\sigma = \sigma_0$

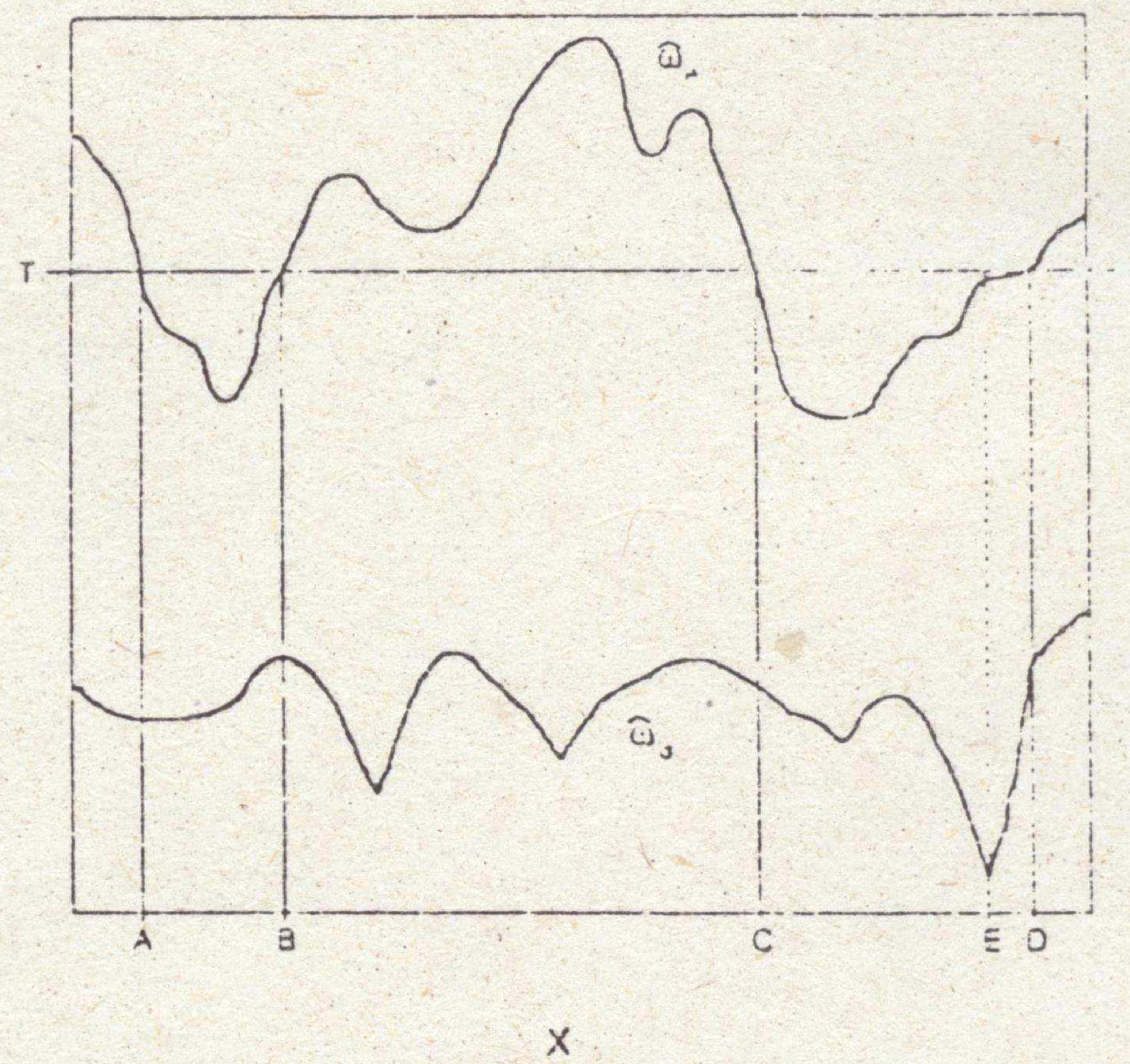
yazılabilir.

Birincil ve ikincil cevapların, deneyin amaçları doğrultusunda belirlendiğini görüyoruz. Buradaki büyük bir eksiklik, eşitlik kısıtlarının yeterince gerçekçi olmamasıdır. $\hat{\omega}_\sigma$ ve $\hat{\omega}_\mu$ ' nın "gerçek" cevaplara (şansa bağlı hataları içermektedir) yalnızca bir yaklaşım olduğuna dikkat ediniz. Optimizasyonun eşitlik kısıtları ile sınırlandırılması durumunda, global olarak tercih edilen değerlerin dışlanacağı kaçınılmazdır. Bu durum, Durum 2 ve 3' de daha açık bir şekilde görülebilir. Burada σ^2 normal olarak bilinmemektedir (ancak gerçekte ne kadar küçükse o kadar iyidir).

3. ÖNERİLEN OPTİMİZASYON PROSEDÜRÜ

Önerilen optimizasyon prosedürü en iyi şekilde, izleyen örnekle açıklanmıştır. Buradaki temel fikri açıklamak için yalnızca "hedef değer en iyidir" durumu üzerinde durulmuştur ve diğer durumlar izleyen kesimde tartışılmıştır. Şimdi Şekil 1'i ele alalım. Burada tahminlenmiş ortalama cevap eğrisi $\hat{\omega}_\mu$ ve tahminlenmiş standart sapma cevap eğrisi $\hat{\omega}_\sigma$ ile gösterilmiştir. Amacımız ise standart sapma $\hat{\omega}_\sigma$ küçük tutulduğunda, $\hat{\omega}_\mu$ 'yı hedef değer T' ye yaklaştıracak optimal koşullar setini bulmaktır. Varsayalım, ortalama için hedef değer belirtildiği gibi T olsun. Bu durumda, VM yaklaşımına göre önce $\omega_\mu = T$ kısıt olarak alınır. Dört nokta (A, B, C ve D) bu kısıtı sağlamaktadır. Bu noktalar arasında A, minimum varyanslıdır ve böylece "optimal" koşullar setini vermektedir.

$\hat{\omega}_\mu$ ve $\hat{\omega}_\sigma$ 'nın davranışı incelendiğinde, E noktasının A' dan daha iyi bir seçim olacağı açık bir şekilde görülmektedir. Hedef değerden küçük bir sapmaya göz yumulduğunda, varyansta büyük bir azalma olacaktır. Gerçekte, E noktası ortalama karesel hatayı $\left(OKH = \left(\hat{\omega}_\mu - T\right)^2 + \hat{\omega}_\sigma^2\right)$ minimize etmektedir.



Şekil 1

OKH ölçüsü, iki ana terimden oluşmaktadır. Bunlar sapma ve varyanstır. Her iki cevap fonksiyonunun da tahmini ile çalışmak zorunda olduğumuz için, OKH ölçüsü hedef değer etrafındaki ufak sapmalara imkan vermektedir; bu arada varyans küçük tutulmaktadır. Bu ise, VM' deki eşitlik kısıtlarından daha iyi bir yaklaşım olarak düşünülebilir. Böylece, problemin daha tatmin edici bir formülasyonu, aşağıdaki adımlar takip edilerek sağlanabilir:

1. $\hat{\omega}_\mu$ ve $\hat{\omega}_\sigma$ için bir model bulun (her ikisi de **x'** in fonksiyonudur)

2. $OKH = \left(\hat{\omega}_\mu - T\right)^2 + \hat{\omega}_\sigma^2$ ' yi minimize edecek **x'** i bulun. Adım 1'de modeller hakkında spesifik varsayımlar yapılmadığına dikkat ediniz.

4. ÖRNEK

VM' deki optimizasyon ile yapılan karşılaştırmalarda doğru bir taban oluşturmak için, VM' nin kullandığı aynı veri seti analiz edilmiştir. Veriler Tablo 1'de verilmiştir. Box ve Drager (1987)' de tanımlanan bu deney, üç değişken x_1 (hız), x_2 (basınç) ve x_3 (aralık)' ün, bir basım sürecinin kalitesinin üzerindeki etkisini bulmak için kurulmuştur. Buradaki basım sürecinin kalitesi, renkli mürekkeplerin paket etiketlerine uygulamasında, makinanın kabiliyeti ile ölçülmektedir. Kurulu deney, her noktasında 3 tekrar yapılan bir 3^3 faktöryel tasarımdır.

Tablo 1. Basım Süreci Verileri

u	x_1	x_2	x_3	Y_{u1}	Y_{u2}	Y_{u2}	$\bar{Y}_u$	S_u
1	-1	-1	-1	34	10	28	24.0	12.49
2	0	-1	-1	115	116	130	120.3	8.39
3	1	-1	-1	192	186	263	213.7	42.80
4	-1	0	-1	82	88	88	86.0	3.46
5	0	0	-1	44	178	188	136.7	80.41
6	1	0	-1	322	350	350	340.7	16.17
7	-1	1	-1	141	110	86	112.3	27.57
8	0	1	-1	259	251	259	256.3	4.62
9	1	1	-1	290	280	245	271.7	23.63
10	-1	-1	0	81	81	81	81.0	0.00
11	0	-1	0	90	122	93	101.7	17.67
12	1	-1	0	319	376	376	357.0	32.91
13	-1	0	0	180	180	154	171.3	15.01
14	0	0	0	372	372	372	372.0	0.00
15	1	0	0	541	568	396	501.7	92.50
16	-1	1	0	288	192	312	264.0	63.50
17	0	1	0	432	336	513	427.0	88.61
18	1	1	0	713	725	754	730.7	21.08
19	-1	-1	1	364	99	199	220.7	133.80
20	0	-1	1	232	221	266	239.7	23.46
21	1	-1	1	408	415	443	422.0	18.52
22	-1	0	1	182	233	182	199.0	29.45
23	0	0	1	507	515	434	485.3	44.64
24	1	0	1	846	535	640	673.7	158.20
25	-1	1	1	236	126	168	176.7	55.51
26	0	1	1	660	440	403	501.0	138.90
27	1	1	1	878	991	1161	1010.0	142.50

VM' nin önerdiği optimizasyon yöntemi, modelin kuadratik formuna dayandığı için, model uyumlarının anlamlılık seviyelerine bakılmaksızın, bir tam ikinci-derece modeli gerektirmektedir. Kuadratik modelin yeterli (bkz izleyen kesim) olduğunu varsayarak, VM, önce ilgili karakteristiğin ortalaması için bir cevap yüzeyinin uyumunu yapmışlardır:

$$\hat{\omega}_\mu = 327.6 + 177.0x_1 + 109.4\,x_2 + 131.5\,x_3 + 32.0\,x_1^2 - 22.4\,x_2^2 - 29.3\,x_3^2 + 66.0\,x_1 x_2 + 75.5\,x_1 x_3 + 43.6\,x_2 x_3 \qquad (7)$$

Ardından standart sapma için cevap yüzeyi

$$\hat{\omega}_\sigma = 34.9 + 11.5x_1 + 15.3\,x_2 + 291.2\,x_3 + 4.2\,x_1^2 - 1.3\,x_2^2 - 16.8\,x_3^2 + 7.7\,x_1 x_2 + 5.1\,x_1 x_3 + 14.1\,x_2 x_3 \qquad (8)$$

şeklinde elde edilmiştir. VM, $\hat{\omega}_\mu = 500$ kısıtı altında $\hat{\omega}_\sigma$ ' yı minimize edecek (x_1, x_2, x_3)'ü aramayı amaçlamıştır. Bizim buradaki yaklaşımımız ise $OKH = (\hat{\omega}_\mu - T)^2 + \hat{\omega}_\sigma^2$ ' yi minimize edecek (x_1, x_2, x_3)'ü aramaktadır.

Bu tip modellere dayanıldığında, bu iki yaklaşıma göre elde edilen özet sonuçlar Tablo 2' de verilmiştir. Burada, ilgilenilen bölgenin kübik olduğu, başka bir deyişle i = 1, 2, 3 için $-1 \leq x_i \leq 1$ olduğu varsayılmıştır.

Küresel bölge kısıtına dayanan VM yaklaşımı optimal koşullar seti olarak $(x_1, x_2, x_3) = (0.614, 0.228, 0.1)$ kombinasyonunu vermektedir. Buradaki beklenen ortalama 500 ve varyans 2679.698 (OKH = 2679.698) olmaktadır. Eğer OKH ölçüsünü kullanırsak en iyi koşullar seti $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0.07, -0.25)$ olarak bulunur. Burada beklenilen ortalamadan çok az bir sapma söz konusudur, ancak varyans oldukça küçülmüştür (OKH = 2005.145; OKH %25.17 daha küçüktür). Eşitlik (7) ile ortaya çıkan değişkenliğe dayanarak $\alpha = 0.05$ seviyesinde, H_0: $\mu = 500$ hipotezini reddedemediğimiz için, ortalama cevaptaki sapmanın anlamsız olduğuna dikkat ediniz.

Burada aşağıdaki hususlara dikkat edilmelidir:

1. Orjinal ilgili bölgenin ötesinde bir genelleme yapılması engellendiğinde, genellikle VM yaklaşımı için bir çözüm varolmayabilir. Bu da, $\omega_\mu = \mu_0$ eşitliğinin $-1 \leq x_i \leq 1$ aralığında bir çözümü olmamasından kaynaklanabilir.

2. VM çözümü, eğer varsa, her zaman hedef değer üzerinde olacağından, beklenen varyans her zaman OKH' ya eşit olur.

3. VM yaklaşımı kullanıldığında, kübik bölgede "daha iyi" bir sonuç olan $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0.119, -0.26)$ bulunmuştur. Buradaki ortalama 500,

varyans ise 2034.012 (OKH = 2034.012) olarak ortaya çıkmaktadır. Böyle bir "optimal kombinasyon", bizim OKH-optimal kombinasyonuna oldukça yakındır.

Tablo 2. Kuadratik Model İçin Optimal Kombinasyonların Karşılaştırılması

Yöntem	Optimal Koşullar	$\hat{\omega}_{\mu}$	$\hat{\omega}_{\sigma}^{2}$	OKH
Vining & Myers	(0.614, 0.228, 0.1)	500	2679.70	2679.70
OKH Yöntemi	(1.0, 0.07, -0.25)	494.44	1974.02	2005.14

Burada kullanılan optimizasyon algoritması, bir doğrusal olmayan programlama prosedüründeki bir standart subroutine' dir. Burada bir VAX Cluster sisteminde, IMSL MATH/LIBRARY (1987) tarafından sağlanan BCPOL subroutine' ni kullanılmıştır. Bu tip bir subroutine, bölgenin biçimi konusunda oldukça esnektir. Örneğin, Tablo 2' deki sonuç kübik bir bölgeye dayanmaktadır. Böylece $-1 \leq x_i \leq 1$ şeklindeki bir kısıt programa eklenmiştir. Aynı şekilde, söz konusu bölge kübik ise, spesifik bir ρ değeri için $\mathbf{x'x} \leq \rho$ şeklinde bir kısıt eklenebilir.

Büyük/küçük ölçekli, doğrusal olamayan optimizasyon problemleri için elde edilebilecek bir kaç paket program mevcuttur. Genel olarak, burada herhangi bir algoritma kullanılabilir. Örneğin, Del Castillo ve Montgomery (1993), VM' nin problemini eşitsizlik kısıtları ile optimize etmek için bir genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan (generalized reduced gradient = GRG) algoritmasını kullanmışlardır. Tablo 3 Del Castillo ve Montgomery (1993, Tablo 1)' den alınan sonuçlarla karşılaştırmalar yapmaktadır. Bizim bulduğumuz sonuçlar, genellemeye imkan verildiği ve söz konusu bölgenin küresel olduğu varsayımlara dayanmaktadır. Ancak dual cevap yüzeylerinin, $(x_1, x_2, x_3)'$ ün kübik bölgesine dayandırılarak hesaplandığını tekrar hatırlayalım. Tablo 3' te gösterildiği gibi, tahminlenmiş ortalama cevapta küçük bir sapmaya göz yumulduğunda, varyans büyük ölçüde azaltılabilir. Örneğin, ρ=3 durumunda, OKH' da %25' in de üzerinde bir azalma bulunmuştur. Özel bir durum olarak, eğer işletim koşulları altında mümkünse, ρ^2=7.88 için bulunan (x_1, x_2, x_3) = (6.4347, -4.2938, 1.0371) kombinasyonu, beklenen değer olarak 500' ü ve minimum varyansı (beklenen standart sapma=0) vermiştir. Ancak, deney yapan kişi, genellemenin her zaman güvenilir olamayacağını unutmamalıdır. GRG algoritması, büyük ölçekli optimizasyon problemlerini çözmek için klasik bir araçtır. Ayrıca burada yeni bir algoritma olan LANCELOT (Conn, Gould ve Toint (1992)) de kullanılmıştır.

Tablo 3. Del Castillo ve montgomery (1993)' deki sonuçlar ile Karşılaştırma (D&M= Del Castillo ve Montgomery; L&T= Burada önerilen yöntem)

$x'x \leq \rho$	Yöntem	Optimal Kombinasyon	$\hat{\omega}_\mu$	$\hat{\omega}_\sigma^2$	OKH
1.0	D&M	(0.9839, 0.0265, -0.1760)	500	2053.75	2053.75
	L&T	(0.9831, 0.0036, -0.1829)	494.54	1992.73	2022.78
1.5	D&M	(1.1897, -0.2237, -0.1857)	500	1901.41	1901.41
	L&T	(1.1856, -0.2454, -0.1847)	495.20	1854.79	1877.84
2.0	D&M	(1.3395, -0.4261, -0.1544)	500	1802.41	1802.41
	L&T	(1.3347, -0.4421, -0.1547)	495.51	1761.06	1781.25
3.0	D&M	(0.9525, 1.2461, -0.7348)	500	2207.58	2207.58
	L&T	(1.5651, -0.7373, 0.0883)	495.68	1615.88	1634.57

5. EN İYİ ALT MODEL ÜZERİNDE OPTİMİZASYON

VM tarafından da belirtildiği gibi, modelin kestirim kabiliyeti, bir dual cevap problemini optimize ederken ele alınması gereken çok önemli bir konudur. (7) ve (8) modelleri için R^2 değerleri 0.8741 ve 0.4542' dir ve yeterince tatmin edici değildir. Ayrıca, tam ikinci-derece modeldeki bir çok terimin anlamlı olmadığı görülmektedir (bkz VM, Tablo 2 ve 3). Bununla beraber, MURSAC yazılımı (VM' de tanımlanmıştır), tam ikinci-derece modelin kullanımını gerekmektedir.

Ortalama ve standart sapma için en iyi modellerin uyumunu yapmak için, önce "tam" kübik modeli ele alırız (yani x_1, x_2, x_3 , x_i^2 x_j' ler, x_i x_j' ler, x_i 'ler gibi terimler). Bir kaç değişik model seçim prosedürü (basamaklı regresyon, tüm olası alt regresyon, C_p, PRESS, vs.) uygulandığında aşağıdaki en iyi modeller elde edilmiştir:

$$\hat{\omega}_\mu = 314.667 + 177.0\, x_1 + 109.426\, x_2 + 131.463\, x_3 + 66.028\, x_1 x_2 + 75.472\, x_1 x_3 + 43.583\, x_2 x_3 + 82.792\, x_1 x_2 x_3 \qquad (9)$$

ve

$$\hat{\omega}_\sigma = 47.994 + 11.527\, x_1 + 15.323\, x_2 + 29.190\, x_3 + 29.566\, x_1 x_2 x_3 \qquad (10)$$

Ortalama ve standart sapma için varyans analizi tabloları, Tablo 4 ve Tablo 5 ile verilmiştir. Burada, R^2 değerleri 0.9570 ve 0.4839 olarak bulunmuştur (tam ikinci-derece modellerdeki 0.8741 ve 0.4542 ile karşılaştırıldığında, artış sözkonusudur). Düzeltilmiş R^2, R_a^2 değerleri ise 0.9416 ve 0.3901 olarak bulunmuştur (0.8074 ve 0.1652 ile karşılaştırıldığında, artış sözkonusudur).

Tablo 4. Ortalama Cevap İçin Varyans Analizi

Kaynak	sd	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F- oranı	R^2
Model	7	1288838.2	184119.7	60.441	0.957
Hata	19	57878.87	3042.26		

Değişken	Kısmi t	p değeri
x_1	13.606	0.0001
x_2	8.411	0.0001
x_3	10.105	0.0001
$x_1 x_2$	4.144	0.0006
$x_1 x_3$	4.737	0.0001
$x_2 x_3$	2.735	0.0131
$x_1 x_2 x_3$	4.243	0.0004

Tablo 5. Standart Sapma İçin Varyans Analizi

Kaynak	sd	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F- oranı	R^2
Model	4	28948.527	7237.1318	5.157	0.4839
Hata	22	30871.972	1403.2715		

Değişken	Kısmi t	p değeri
x_1	1.305	0.2052
x_2	1.735	0.0967
x_3	3.306	0.0032
$x_1 x_2 x_3$	2.232	0.0361

Bu modeller ve bir kübik bölge altında, optimal kombinasyon $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, -0.525)$ olarak bulunmuştur. Bu noktada ortalama 492.285 ve standart sapma 44.01 (sonuçta, OKH=1996.6) olarak hesaplanmıştır. Böyle bir kombinasyondaki OKH, tam ikinci-derece model için optimal kombinasyondaki OKH' ya yakındır; ancak VM' nin seçiminden uzaktır.

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRMELER

Dual cevap yaklaşımı konusu, endüstriyel problemlerde oldukça önemlidir. Böyle bir yaklaşım, gelecekte artan bir şekilde kullanılacaktır. Bununla beraber, VM tarafından verilen optimizasyon prosedürünün daha da iyileştirilebileceğine inanmaktayız. Daha spesifik olarak şunları söyleyebiliriz:

1. OKH yaklaşımı, tam ikinci-derece model ile sınırlandırılmamıştır. Gerçekte, daha gerçekçi ve polinominal modellerden daha karmaşık yapıda olan modeller kullanılabilir.

2. Tahminlenmiş ikincil-cevabın, bir kısıt olarak spesifik bir değere eşitlenmesi yanıltıcı olabilir. Bir yazar, hedef değer etrafındaki küçük bir sapmanın hesaba katılabilmesi için, ortalama cevap üzerinde eşitsizlik kısıtlarının yerleştirilebileceği bilgisayar paket programlarına dikkat çekmiştir. Gerçekte bu fikir, dual cevap yüzeyi optimizasyonunu gerçekleştirmede bizim için temeldir.

Elbette, hedef değere sıkı bir şekilde bağlı olunması gerektiği durumlar da olabilir. OKH yaklaşımı

$$OKH^* = \lambda_1\left(\hat{\omega}_\mu - T\right)^2 + \lambda_2\hat{\omega}_\sigma^2$$

şeklinde düzeltilebilir. Burada λ_1 ve λ_2 , daha önceden belirlenmiş pozitif sabitlerdir. Kullanıcı, ridge analizinde olduğu gibi, sözkonusu (λ_1, λ_2) değerlerine dayanarak değişik işletim koşullarını değerlendirebilir. Daha önce vurgulanan iki özel durum aşağıda verilmiştir.

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; bu makalede önerilen amaç fonksiyonunu vermektedir.

2. $\lambda_1 = \infty$ ve $\lambda_2 = 1$; VM ve Del Castillo ve Montgomery (1993)' te verilen amaç fonsiyonudur.

OKH ölçüsüne dayanan optimizasyon, dual cevap yüzeyi problemini çözmek için oldukça genel bir yöntemdir. Bu yaklaşım doğal ve caziptir. Ayrıca bu yaklaşım yalnızca Durum 1'e (hedef değer en iyidir) değil, Durum 3'e (daha küçük daha iyidir) de uygulanabilir. Cevabın fiziksel ölçümleri normal olarak negatif olmadığından, $OKH = \hat{\omega}_\mu^2 + \hat{\omega}_\sigma^2$ 'yi minimize etmek doğaldır. Örneğin, tam ikinci-derece model kullanıldığında, $(x_1, x_2, x_3) = (-0.524, -1, 1)$ koşulları ile, beklenen değer 68.99, standart sapma 21.84 olarak bulunmuştur.

bu sonuçların, VM' nin $\hat{\omega}_\sigma$ = 60, 75 ve 90 ($\hat{\omega}_\mu$ = 494.8, 585.0, 671.7' lere karşılık olarak) şeklindeki varsayımlardan daha iyi olduğu açıkça görülmektedir. En iyi alt model kullanıldığında, optimum koşullar, (x_1, x_2, x_3) = (-1, -1,-0.3602) olarak bulunmuştur. Burada ise beklenen ortalama 60 ve beklenen standart sapma 0 olmaktadır. Diğer taraftan, VM' nin yaklaşımı $\hat{\omega}_\mu$ 'yı minimize etme ve $\hat{\omega}_\sigma$ 'yı aşırı büyük tahmini değerlerde sabit tutma eğilimindedir. Bu durumda VM' nin yaklaşımı kesinlikle tavsiye edilemez.

Dual cevap yaklaşımı, yalnızca cevaplar biribirlerinden bağımsız olduklarında (diğer bir deyişle, ortalama ve varyans biribirlerinden bağımsız olduklarında) kullanışlıdır. Bu varsayımın zayıfladığı durumlar için, ilk önce ilişkinin yapısının anlaşılması gerekmektedir. Sonuç olarak, dual cevap yaklaşımı bu durumda uygun görünmemektedir. Bununla beraber bu durumun daha detaylı olarak incelenmesi gerekmektedir.

KAYNAKLAR

BOX, G.E.P. ve DRAPER, N.R. (1987). **Empirical Model Building and Response Surfaces**, John Wiley & Sons, New York, NY.

BOX, G.E.P. ve WILSON, K.B. (1951)."On the Experimental Attainment of Optimum Conditions". **Journal of the Royal Statistical Society B**, 13, s.1-45.

CONN, A.R., GOULD, N.I.M. ve TOINT, P.L. (1992). **LANCELOT: A Fortran Package for Large-Scale Nonlinear Optimization (Release A)**. Springer Verlag, Hiedelberg, Germany.

DEL CASTILLO, E. ve MONTGOMERY, D.C. (1993). "A Nonlinear Programming Solution to the Dual Response Problem". **Journal of Quality Technology**, 25, s.199-204.

IMLS MATH / LIBRARY (1987). Version 1.0, IMLS Inc., Howston, TX.

MYERS, R.H. ve CARTER, W.H. (1973). "Response Surface Techniques for Dual Response System". **Technometrics**, 15, s.301-317.

VINING, G.G. ve MYERS, R.H. (1990). "Combining Taguchi and Response Surface Philosophies: A Dual Response Approach". **Journal of Quality Technology**, 22, s.38-45.

Anahtar Kelimeler: Kısıtlı Optimizasyon, Çoklu Cevaplar, Optimizasyon, Cevap Yüzeyi Yöntem Bilimi.