D.E.Ü. İ.İ.B.F. Dergisi
Cilt: 10, Sayı: II, 1995, ss.333-347

SKOKASTİK SÜREÇLERİN SINIFLANDIRILMASI VE ALT STOKASTİK SÜREÇLER ÜZERİNE BİR İNCELEME

ÖMER ÖNALAN (*)

ÖZET

Bu çalışmada teknik ayrıntılara girmeksizin stokastik süreçler, yörüngelerinin davranışı ve süreci oluşturan alt süreçlerine ayrılıp, sonra da bu alt süreçlerden bazıları, süreç için köşetaşı niteliğindeki özellikler ve sürecin diğer süreçlerle olan ilişkisi açısından incelenmiştir.

1. GİRİŞ

Hepsi aynı (Ω , $\mathcal{F}$, P) ihtimal uzayı üzerinde tanımlı tesadüfi değişkenlerin bir topluluğu olarak tanımladığımız stokastik süreçler genel anlamda,

$$X : \Omega \times IR^d,$$

$$(w, t) \rightarrow X (w,t) = X_t (w)$$

şeklindeki tasvirlerin bir ailesi olup, X, (X_t) veya $(x_t) \in IR^+$ şekillerinden biri ile gösterilir. Sabit bir $w \in$ R için $t \rightarrow X_t$ (w) tasvirine X sürecinin **örnekler eğrisi** veya **yörüngesi** denir. t parametresinin vektör olması durumunda sürece **tesadüfi cisim** denir.

Stokastik sureçleri incelerken esas amacımız; süreci oluşturan tedasüfi değışkenlerin özelliklerinin ve sürecin yörüngelerinin incelenmesidir. Stokastik süreçleri sınıflandırmak için, tesadüfi değişkenler üzerine belirli koşullar konularak sürecin yörüngelerinin davranışı incelenir. Dağılımlar tesadüfi değişkenler arasındaki ilişkiyi verdiğinden, sürecin bileşik dağılımı sınıflandırmada önemli rol oynamaktadır. Bileşik dağılımı, sonlu boyutlu varlığı, belirli şartlar altında **Daniell - Kolmogarov genişleme teoremi** ile kanıtlanabilmektedir. Öyleki sayılmaz sayıdaki tesadüfi değışken tarafından tanımlanan cümlelerin ihtimallerinin belirlenmesinde sonlu boyutlu dağılımlar dahi yeterli olmamaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Temel tanımlar üzerinde kısa açıklamalarda bulunmak çalışmanın sonraki kısımları için yararlı olacaktır. İhtimal uzayına filtrasyonun ilave edilmesi ile süreçlerin derinlemesine incelenme imkanı da artmıştır. Tüm s< t için $\mathcal{F}$ 'nun artan ($\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$) alt σ - cisimlerinin bir { $\mathcal{F}_t$; $t \in R_t$ } ailesine **filtrasyon**

(*) M.Ü. İ.İ.B.F. İşletme Bölümü, Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı.

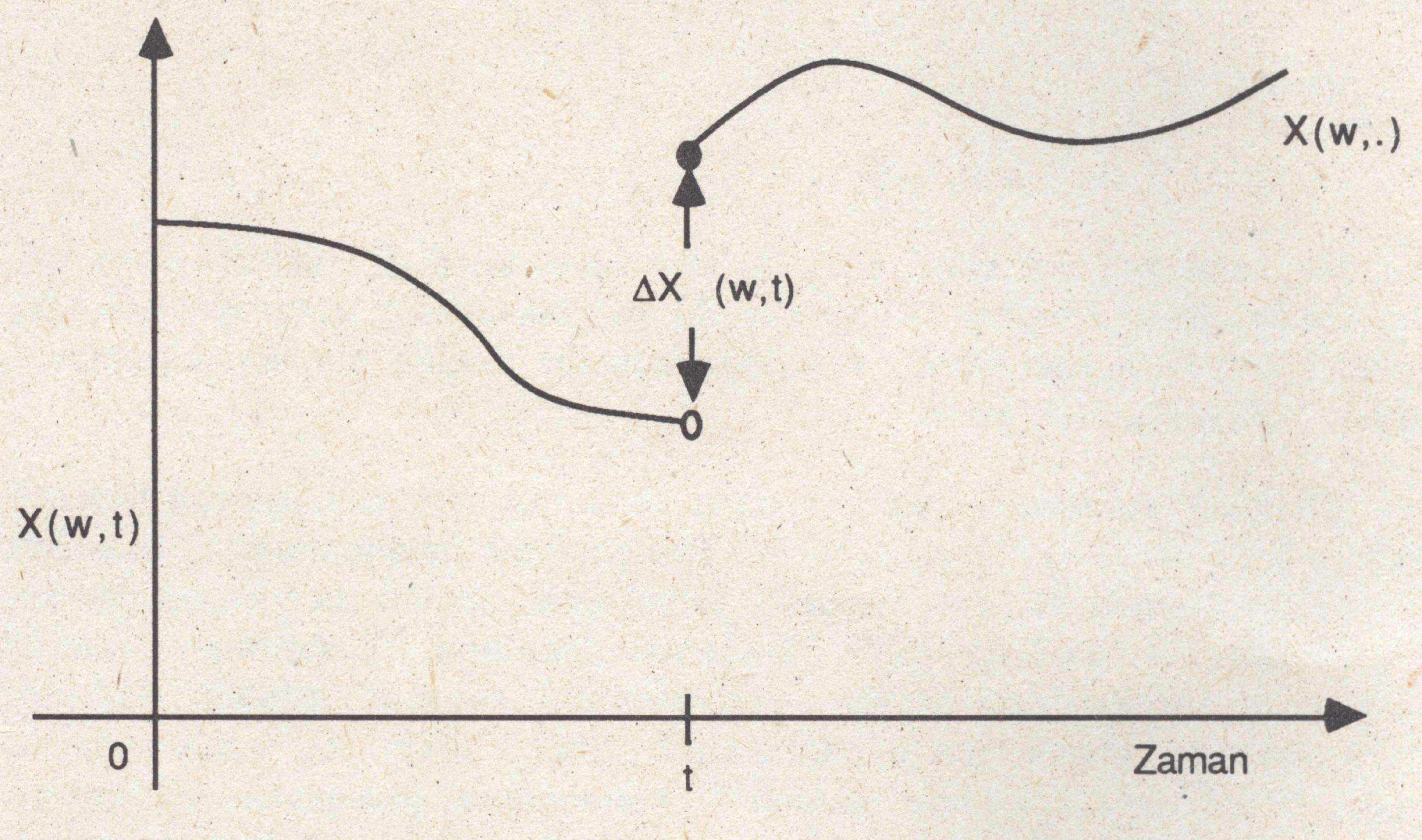
denir.İlaveten aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa $\{ \mathcal{F}_t \; ; t \in R_t \}$ ' ye **standart filtrasyon** denir. < Chung, 1983, s.6.>

(i) Tüm t için $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{F}_t + t \equiv \cap s > t \, \mathcal{F}_s$

(ii) $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}$ 'deki tüm P- etkisiz kümeleri ihtiva etmektedir.

Bir $F = \{ \mathcal{F}_t , t \in IR_+ \}$ filtrasyonu ile donatılmış $(\Omega, \mathcal{F} , F, P)$ uzayına **skolastik baz** denir. (Jocod, shiryayev, 1977, s.52). Yörüngelerinin tümü sol limitler ile sağ sürekli bir sürece **cad - log** denir. Genel olarak sürecin yörüngelerle ilgili analitik özellikleri, tesadüfi değişkenlerin uzayla ilgili özelliklerinden daha güçlüdür. Örneğin X 'in yörungesinin sürekliliği hemen her-yerde X 'in sürekliliğini gerektirir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Sol limitlerle sağ sürekli bir yörüngeyi aşağıdaki şekilde şematize edebiliriz.



Şekil 1.Sol limitlerle sağ sürekli bir örneklem eğri.

Tüm $t \geq 0$ için X_t, $\mathcal{F}_t$ ölçülebilir bir tesadüfi değişken ise X stokastik sürecine $F = (\mathcal{F}_t) \, t \in IR$ +fonksiyonuna göre (adapted) uyarlanmış denir. Her bir $t \geq 0$ için, $T_t \times \Omega$, ye kısıtlanmış

$$(s, w) \rightarrow X (s, w)$$

tasviri $B_t \times \mathcal{F}_t$ ölçülebilirse $X = \{X_t ; t \in T\}$ stokastik sürecine $\{\mathcal{F}_t , t \in T\}$'ye göre devamlı (progressively) ölçülebilir denir. Yani her bir t, için $Xt \in \mathcal{F}_t$ olmaktadır. < Chung; 1982,s.36 >

Hemen hemen tüm örnekle eğrileri için

$P\ (X_t = Y_t : 0 \leq \infty) = +1$

ise **X ve Y 'ye birbirinden ayrıştırılamaz** denir. Tüm $t \in I\ R_t$ için $\{w \in \Omega;\ T(w) < t\} \in \mathcal{F}_t$ olacak şekildeki, pozitif reel değerli T, tesadüfi değişkenine **durma zamanı** denir. X, F uyarılmış bir süreç ve T bir durma zamanı ise T zamanında durmuş süreç $X^T = X_{T \wedge t}$ ile gösterilir. Yani tüm $t \leq$ için

$X^T\ (t) = X\ (t)$ ve tüm $t>T\ X^T\ (t) = X\ (T)$ dır. < Duffie, 1988, s.136.>

3. SINIFLANDIRMA

Stokastik süreçler genel olarak aşağıdaki ifadeleri kapsamak üzere farklı şekillerde sınıflandırılabilirler.

i. İhtimal yapısına

ii. Özel süreçlere

iii. Kullanılan metoda ve probleme

iv. Uygulamalara, göre

Stokastik süreçler, sürecin yapısı ve özellikleri gözönünde bulundurularak aşağıdaki şekilde sınıflandırmaya tabi tutulabilirler.

* Nokta Süreçleri:
  . Poisson, Bileşik Poisson ve COX süreçleri
  . Sonsuz Bölünebilir ve Bağımsız artmalı nokta süreçleri
  . Aralık özellikleri ile tanımlanan süreçler
  . Durağan Nokta Süreçleri
  . Kümeleyici Süreçler
  . Stokastik hesapla ilişkili nokta süreçleri
  . Martingalelerle nokta sür.
* Dallanma Süreçleri: Diffisyonlar
* Semi - Markov Süreçleri
* Doğum - ölüm Süreçleri
* Tesadüfi Yürüyüşler
* Makrov Süreçleri : . Feller süreci

. Hunt süreci

* Martingaleler: . Amartlar

. Quasimartingaleler

. Semi Martingaleler

. Lokal Martingaleler

. Games fairer with time (zamanla adilleşen oyunlar)

* Brownian Hareket, . Geometrik Brownian Hareket

. Karşılıklı Bağlantılı Brownian Hareket

* Durağan Süreçler

* Bağımsız artmalı süreçler

Sürecin dağılımına bakılarak sınıflandırma.

* Normal süreçler: . Couchy süreci

. Bessel süreci

. Kararlı süreçler

Stokastik süreçler, çalışmada kullanılan metodlara ve problemin yapısına göre de sınıflandırılmaktadırlar. Süreçlerin genel teorisi tarafından ihtiva edilen method ve problemleri ise şu şekilde sıralayabiliriz.

Süreçlerin yörüngelerinin davranışının analizi, yakınsama problemleri, seçimli ve kestirilebilir süreçler, geçiş problemleri, sureçlerin dönüşümleri, sureçlerin dağılımlarının özellikleri, Harmonik fonksiyonlar ve Dirchlet problemi, sınır deger teori, stokastik integraller, Ito hesabı, harmonik analiz. Ergodik teori, fonksiyonel gosterim, yeniden oluşan olaylar, Wiener - Hopf tekniği, stokastik yaklaşım.

4. Alt Stokastik Süreçler: Bu kısım uygulamalarda sık sık karşılaşabileceğimiz bazı alt sureçlerin en temel özellikleri sunulacaktır.

4.1. Tesadüfi Yürüyüşler: $\xi = \{ \xi_n : n \geq 1\}$ Bağımsız benzer dağılmış tesadüfi değişkenlerinin, $S = \{ S_n ; n \geq 0\}$ kısmi toplamlarına **tesadüfi yürüyüş** denir. Tesadüfi değişkenleri ± 1 değerlerini p ve $q = 1-p$ ihtimalle aldığında sürece **Bernoulli Tesadüfi Yürüyüşü** denir. $p = q = \frac{1}{2}$ ise sürece **Basit Tesadüfi Yürüyüş** denir. Tesadüfi yürüyüşler, uzun süredir çalışıyor olmalarına rağmen hala yeni seçkin özellikleri keşfedilmektedir. < Kesten, H. 1993 >

Tesadüfi yürüyüşler bağımsız benzer dağılmış tesadüfi değişkenlerin toplamı söz konusu olduğunda ortaya çıkmaktadır. I = 0, ± 1, ± 2, ... için S aşağıdaki bir adım geçiş ihtimalleri ile bir markov zinciridir.

$$P(S_n + 1 = i + 1 \mid S_n = 1) = p$$
$$P(S_n + 1 = i + 1 \mid S_n = 1) = q \qquad (1)$$

Şu halde,

$$E\,(S_n + 1 \mid S_n) = S_n + (p - q) \qquad (2)$$

olur. p = q ise S bir Martingale 'dir.

Hisse senedi piyasasında "Tesadüfi yürüyüş hipotezi", hisse senedi fiyatındaki günlük değişimin, bağımsız benzer dağılmış tesadüfi değışkenler ve fiyatların bir dizisinin tesadüfi yürüyüşe uyduğunu iddia eder. Bu hipotez altında fiyatların geçmişteki değişimleri, gelecek değişimler hakkında bilgi vermez. Tesadüfi yürüyüş hipotezinin modern genişlemesi ardaşık fiyat oranlarını martingalelerin terimleri ile ilişkilendirir. (f(S, S, ... S) tesadüfi değışkenleri üzerindeki çalışmalar ise Dalgalanma Teorisi 'ni oluşturur. < Taylor, H.M. 1990 >

4.2. Brownian Hareketi: Brownian hareket, İngiliz Botanikçi R. Brown 'un adına itahafen suda salınan çiçek tozlarının düzensiz hareketlerine verilen addır. Hareketin matematiksel modeli N. Wiener tarafından formüle edilmiştir. Günümüzde Brownian hareketin, hisse senedi fiyat modellemesinde kuyruk sistemlerinin limit davranışının analizinde ve ekonomik, biyolojik, fiziksl sistemlerdeki tesadüfi değişimin modellemesinde geniş bir uygulama alanı bulduğu görülmektedir.

Standart Brownian hareket (Wiener Süreci), $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ihtimal uzayı üzerinde tanımlı aşağıdaki özellikleri sağlayan bir, $B = \{B_t, \mathcal{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ Stokastik sürecidir.

i) $B_0 = 0$

ii) $\{B_t, \mathcal{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ bağımsız artmalara sahiptir.

iii) $0 \leq s < t$ için,

$$P\{B_t - B_s \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{x} e^{\left(-\frac{u^2}{2(t-s)}\right)} du. \qquad (3)$$

Bağımsız artmalı herhangi bir $\{B_t\}$ bir Markov süreci olduğundan Brownian hareketin durağan geçiş ihtimal fonksiyonu,

$$P\{B_t + \tau \leq x \mid B_t = y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{x-y} e^{\left(-\frac{u^2}{2\tau}\right)} du. \qquad (4)$$

şeklindedir.

$0 \leq s \leq t$ için

$$Var\{B_t - B_s\} = t - s$$

$$E\{B_s B_t\} = E\{B_s [B_t - B_s] + B^2{}_s\}$$

$$= E\{B^2{}_s\} = s$$

Brownian hareket bağımsız artmalara sahip olduğundan $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ için $(B, B_t, \dots, B_{tn})$ 'nin bileşik ihtimal yoğunluğu aşağıdaki şekilde belirlenir.

$$F_{t1,t2,\dots,tn}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{t_1}(x_1)\, f_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \dots f_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) \qquad (5)$$

burada, $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{\left(-\frac{x^2}{2t}\right)}$ şeklindedir. Bir ayrılabilir Brownian hareketin her örneklem fonksiyonu her sonlu aralık üzerinde düzgün süreklidir.

$$X_t = \alpha_t + B_t \qquad (6)$$

şeklinde tanımlanan $\{X_t;\ 0 \leq t < \infty\}$ sürecine a yoğunluklu < drift> 'lu Brownian hareket denir.

$$Z_t = B_t - tB_1$$

şeklinde tanımlanan $\{Zt;\ 0 \leq t \leq 1\}$ stokastik surecine ise **Brownian köprüsü** denir. Hemen her $w \in \Omega$ için B. (w) örneklem eğrileri hiçbir $t \geq o$ 'da diferansiyellenemez. < Karatzas ve Shereve 1988, s. 110 >.

Bir Brownian hareketin örneklem eğrilerinin hemen hepsi herhangi bir keyfi küçük zaman aralığında sonsuz değişime sahiptir.

Her Brownian süreç bağımsız ve normal dağılmış artmalara sahiptir. Bunlarda surecin özelliklerini belirlemektedir. Örneklem eğrileri kesinlikle sürekli olan bağımsız artmalı her stokastik süreç normal (Gaussin) dır. (Daha fazla bilgi için bakınız Karatzas, Shreve 1988).

Brownian hareket bir Markov süreci ayrıca da Martingale dır. Brownian süreçlerinin ekonomik sahadaki uygulamaları daha çok kapital teorisi ve finansal piyasalar üzerinde yoğunlaşmaktadır. Bu süreçler opsiyon fiyatlama teorisinde merkezi bir rol oynamaktadır. Bu sureçler opsiyon fiyatlama teorisinde merkezi bir rol oynamakla birlikte samuelson bir hisse senedi fiyatının logoritmasındaki değişimlerin oluşturduğu surecin bir Brownian hareket olduğünü iddia etmektedir.

4.3. Markov Süreçleri: Bir Markov sürecini çeşitli şekillerde tanımlamak mümkündür. Şöyleki, sürecin şu anki durum X_s verildiğinde geleceği α $(X_u, u \geq s)$ geçmişinden α $(X_u, u \leq s)$ bağımsız (Markov özelliği) olan $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in IR_t\}$ stokastik sürecine **markov süreci** denir.

Diğer bir tanımı ise, şu şekilde verebiliriz. Herhangi bir ölçülebilir f fonksiyonu için $t \geq s$ olduğunda

$$E(f(X_t) \mid \mathcal{F}_s) = E(f(X_t) \mid X_s) \tag{8}$$

özelliğini gerçekleyen süreçte bir Markov sürecidir. $s \geq t$ ve sabit bir x için reel doğrunun A Borel kümeleri üzerinde bir ihtimal ölçülebilir bir fonksiyon olan,

$$P_{s,t}(x, A) = P(X_t \in A) \mid X_s = x) \tag{9}$$

ailesine Markov sürecinin geçiş fonksiyonu denir. Chapman - kolmogorov denklemi Markov özelliğinin bir sonucudur.

$$P_{s,t}(x, A) = \int P_{s,u}(x, dy)\, P_{u,t}(y, A), \quad s \leq u \leq t \tag{10}$$

π başlangıç dağılımını ve $P_{s,t}$ (x, A) geçiş fonksiyonlarının bir ailesi verildiğinde bir markov sürecinin varlığı Daniel - Kolmogorov teoremi ile gösterilebilir. Markov süreçlerinin sınıflandırılması, sürecin durum uzayı, geçiş fonksiyonları ve yörüngeleri üzerine konan çeşitli kriterlere göre yapılabilir.

Markov süreçlerinin sınıflandırılması:

Yarı grup formundaki $(P_t, \ t \geq 0)$ geçiş fonksiyonuna gore bir sınıflandırma aşağıdaki şekilde olacaktır.

4.3.1. Feller süreci: Eğer Pt operator tasvirleri, sürekli fonksiyonlardan sürekli fonksiyonlara tasvirler ve

$$\| f \| = \sup_{x \in E} | f(x) | \tag{11}$$

Supremun normunda, $\lim_{t \to 0} \| P_t f - f \| = 0$ (12)

ise (P_t) 'nin Feller özelliğine sahip olduğu söylenir. Bu özelliği sağlayan sürece ise Feller sureci denir. < Chung 1982, s. 49). Bir Feller süreci bir markov sürecidir. Bir geçiş fonksiyonu,

$$P_t(x, A) = \int_A P_t(x, y)\, dy \tag{13}$$

şeklinde bir yoğunluğa sahiptir. Sağ sürekli örneklem eğrileri ile Feller süreçleri güçlü markov özelliğine sahiptirler. Güçlü markov özelliği, cisimlerin sağ sürekliliği, ılımlı markov özelliği ve yarı sol sürekliliği Feller sürecinin önemli özelliklerinden bir kaçı olarak sayabiliriz. Feller tarafından kurulan bu teorinin Dynkin tarafından ihtimaller teorisi metodlarıyla geliştirildiği görülmektedir.

4.3.2. Hunt Süreci: (P_t), geçiş fonksiyonu $\mathcal{F}_t$, a - cismi, $\mathcal{F}_t$, F 'nin tüm sıfır ihtimalli alt kümeleri ve F_t 'nin birleşimi tarafından doğrulan sınıfı göstermek üzere, aşağıdaki koşuları sağalyan $\{X_t, \mathcal{F}_t; t \in T\}$ homojen markov sürecine **Hunt süreci** denir.

(i) Süreç sağ süreklidir.

(ii) Güçlü markov özelliğine sahiptir.

(iii) Yarı sol süreklidir.

(iv) $\{ \mathcal{F}_t \}$ sağ süreklidir.

(v) $\{ X_t \}$, $\{ \mathcal{F}_t \}$ 'ye devamlı olarak ölçülebilir.

(vi) (P_t), Borelyendir.

Bir Hunt sureci örneklem fonksiyonlarının davranışına bakılarak tarif edilebilir. < Chung, 1982, s.75) Hunt surecinin diğer önemli özellikleri: Hemen hemen tüm orneklem eğrileri $(0, \infty)$ da sol limitlere sahiptir. Örneklem egrilerinin sürekliliği için aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verebiliriz. $\{ X_t \}$, $(0, \infty)$ da sol limitlerle, sağ surekli eğrilere sahip bir markov sureci olsun. Geçiş fonksiyonunun aşağıdaki şartları sağladığı kabul edildiğinde, herbir $\varepsilon > 0$ kompakt $K \subset E$ için, $B(x, \varepsilon) = \{ y \in E \mid d(x,y) \le \varepsilon \}$ olmak üzere,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \sup_{x \in E} [1 - P(x, B(x, \varepsilon))] = 0 \qquad (14)$$

olduğunda hemen hemen tüm örneklem eğrileri süreklidir. < Chung, 1982, s. 77 >

Hunt süreçlerinin analizinde Hunt tarafından (excessive) ölçüsüz olarak isimlendirilen fonksiyonlar sınıfı temel bir araçtır. Bu ise klasik potansiyel teorideki süper harmonik fonksiyonlar sınıfının geniş ölçüdeki bir genelleştirilmesidir. < Chung, 1982, s. 80 >

4.4. Martingale: Martingale hilesiz bir oyunun matematiksel bir modelidir. Martingale kelimesi değişik anlamlara gelmekle birlikte çoğunlukla, her kaybedilen bahsin katlandığı bir kumar sistemi anlamında kullanılmaktadır. Bir martingale, matematiksel beklentiye göre belirli değişmezlik özelliği gösteren bir stokastik süreçtir. Sürecin zaman parametresi kesikli veya sürekli olabilmektedir. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{M_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty\}$ stokastik sürecine $\{\mathcal{F}_t\}$ filtrasyonuna göre bir Mantingale denir.

i) Her t için M_t, $\mathcal{F}_t$ ölçülebilirdir. (Yani sürecin t 'deki durumu [0,t] aralığında gözlenebilir)

ii) Her t için $E\left[|M_t|\right] < \infty$, dir.

iii) Tüm $s \leq t$ için $E\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s$ (15)

Martingale ortalama sabittir. Yani her t için $E[M_t] = E[M_0]$ dir. Bir diğer Martingale özelliğini ise şu şekilde ifade ederiz.

$0 \leq s < t < \infty$ için $E[M_t - M_s \mid \mathcal{F}_t] = 0$ (16)

bu özelliği diferansiyel formda ifade etmeye çalışırsak

$E[dM_t \mid \mathcal{F}_t] = 0$ (17)

şeklinde olur. (15) deki eşitlik "≥" ile yer değiştirdiğinde $\{M_t\}$ 'ye **submartingale** eşitlik "≤" ile yer değiştirdiğinde ise sürece **supermartingale** denir. Bir anlamda tüm Martingaleler, Brownian Hareket ve poisson sürecinin konveks bir genelleştirimidir. Öyleki, $B = [M_t, t \in R_t\}$ bir Brownian Hareket olsun. O zaman $\{B_t, \mathcal{F}_t, t \in R_t\}$ ve $\{B^2_t - t, \mathcal{F}_t, t \in R_t\}$ nın her ikisi de Martingallerdir. Bunun yanında $N = \{N_t, t \in R_t\}$, $a > 0$ paremetresi ve $\{\mathcal{F}_t\}$ ile bir poisson süreci olduğunda $\{N_t - \alpha_t, t \in R_t\}$ sağ sürekli bir martingale 'dir. < Chung and William, 1983, s. 15>

Martingale teoride "kare integrallenebilir Martingaleler" özel bir öneme sahiptir.

$$\sup_t E\left[M_t^2\right] < \infty \qquad (18)$$

ise $\{M_t\}$ $t \geq 0$ 'ye kare integrallenebilir Martingale denir. $\{M_t\}$ $t \geq 0$ 'nın kare integrallenebilir olması durumunda bir <M> kestirilebilir süreci vardır. Şimdi bunu biraz açalım. **Doob - Meyer Ayrışımı** bir submartingale 'in bir Martingale ve bir artan sürecin toplamı olarak yazılabileceğini söyler. M, düzgün integrallenebilir ve artan süreç integrallenebilirse bu ayrışım tektir. $\{A_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t < \alpha\}$ doğal artan bir süreç ve M kare integrallenebilir bir Martingale olduğunda, M 'nin ikinci dereceden değişimi $<M>_t = A_t$ olarak tanımlanır. Ayrıca hemen her yerde $<M>0 = 0$ olmak üzere $M_t - <M>_t$ bir Martingaledir. <Karatzas, Shereve, 1988, s.31>

Martingalelerle ilgili teorik sonuçlar üç sınıfta toplanmaktadır. Bunlar Martingale eşitsizlikleri, martingale dönüşüm teorimleri ve Martingale yakınsamı teorimleridir. Eski literatürlerde "Martingale sistem teoremleri" olarak da isimlendirilen martingale dönüşümleri, Martingalelerin belirli şartlar altında Martingale olarak kalmaları için gerekli şartları verir. $P\left\{\operatorname{sub}_{s \leq t} |M_s| > c\right\}$ formülündeki ihtimaller için üst sınırlar maximal eşitsizliklerden sağlanır. Ayrıca bu eşitsizlik yapıları Martingalelerle matematik analiz arasındaki ilişkiyi de kurar. Martingale yakınsama teorimleri eşitsizliklerle elde edilir ve genel şartlar altında, $t \to \alpha$ yaklaştığındahemen her yerde $M_t \to M_\alpha$ olacak şekilde bir M_α tesadüfi değişkeni ise T markov zamanları için,

$$E\,[M_0] \geq E\,[M_t\colon T < \alpha] \tag{19}$$

$$\text{ve } E\,[M_t; T < \alpha] = \int_{\{T < \alpha\}} MdP \tag{20}$$

dir. Ayrıca M düzgün integrallenebilir bir martingale ve T sonlu bir markov zamanı ise,

$$E\,[M_t] = E\,[M_0] \tag{21}$$

dır. Martingale dönüşümlerinin sürekli zamandaki ifadesi **stokastik integrallerdir**. M kare integrallenebilir bir martingale, C kestirilebilir bir süreç olsun. Bu durumda stokastik integral süreci,

$$(CxM)_t = \int_0^t C_\cdot dM. \tag{22}$$

şeklinde tanımlanır ve buda bir Martingaledir. Durma zamanlarının aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{T_k;\ k \geq 1\}$ dizisi varsa $\{M_t, \mathcal{F}_t, t \in R+\}$ sürecine **Lokal özellik** 'e sahiptir denir.

i) $k \to \alpha$ olduğunda hemen her yerde $T_k \to \alpha$

ii) Her k için süreç X $(.\wedge T_k)$ özelliğine sahip ise, stokastik integrallerin bir semimartingale'in diferansiyeline göre tanımlanışı, M lokal Martingale 'ine göre tanımlandığı gibidir. Stokastik integralleri tanımlamak için semimartingaleler oldukça genel süreçlerdir. <Taylor, 1990>

Martingalelerin, matematik istatistik, kuyruk teorisi, işaret süreçleri ve ekonomik sahada çeşitli uygulamaları görülmektedir. Özellikle, hisse senedi piyasasının davranışı Martingalelere tanımlandığında hisse senedi fiyat hareketi için tanımlanan modelin daha başarılı olacağı düşünülmektedir.

4.5. Gaussian (Normal) Süreç: Normal dağılımın ihtimaller teorisindeki önemi, birçok tesadüfi değişkenin normal olarak dağıldığının düşünülebileceğinden ve normal dağılımın işlemlere elverişli olmasından kaynaklanmaktadır. Herhangi bir $n \in Z$ ve T 'nin herbir $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ alt kümesi için $X_{t1}, X_{t2}, ..., X_{tn}$ tesadüfi değişkenlerinin bileşik dağılımı normalse $\{X_t, t \in T\}$ stokastik sürecine **Normal Süreç** denir.

4.6. Nokta Süreçleri: Genel olarak bir nokta süreci, bir uzayın belirli bir bölgesindeki noktaların sayısını veya belirli bir olayın zaman aralıklarındaki oluşumlarının sayısını tanımlamak için bir modeldir. Bir nokta sürecinin standart tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Sürecin noktalarının içinde bulunacağı uzay E, R_t, R^d, [a,b] şeklinde bir öklit uzayı olacağı gibi çok genel bir topolojik uzayda olabilir. ξ E 'nin Borel kümelerinin sınıfını göstermek üzere E' üzerine bir Nokta Süreci E 'de bir tesadüfi elemandır. Yani, herbir $w \in \Omega$ için (Ω, $\mathcal{F}$, P) ihtimal uzayı üzerinde bir sayım ölçümü * olan $A \rightarrow N (w, A)$ tesadüfi değişkenlerine ($\{N (A): A \in \xi\}$) Nokta Süreci denir. N(A) sürecin A kümesindeki noktalarının sayısını gösterir. N, E üzerinde bir nokta süreci olsun. $\{0, 1, ..., \infty\}$ değerlerle bir ζ tesadüfi değişkeni ve E 'deki değerlerle X1, X2, ..., $X\varphi$ tesadüfi değişkeni vardır öyleki,

$$N(A) = \sum_{k=1}^{\nu} \mathcal{I}x_k(A), \qquad A \in \xi \tag{23}$$

olur. Burada $X_1, X_2, ..., X\varphi$ noktaların yerlerini $\varphi = N$ (E) 'de noktaların toplam sayısını gösterir. Her bir $x \in E$ için N ({x}) = 0 veya 1 ise N 'ye Basit denir. | A | 'A' nın alanını göstermek üzere | A | → 0 yaklaştığında,

$$p\{N(A) \geq 2\} = 0(|A|) \tag{24}$$

* β, sınırlı Borel kümelerinin sınıfını göstermek üzere,

$\mu(\phi) = 0, \mu(B) < \infty, B \in \beta$

ve b deki ayrık $B_1, B_2, ...$ kümeleri için,

$$\mu\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_n \mu(B_n)$$

özelliklerini sağlayan,

$\mu: \xi \rightarrow \{0,1,2, ..., \infty\}$

tasvirinde E üzerinde bir sayım ölçümü denir olması N 'nin basit olması için yeterli bir koşuldur. N 'E = R+ üzerinde bir nokta süreci olduğunda X_k 'lar yerine genelde T_k 'lar kullanılmalıdır. Böyle bir süreç çoğunlukla k. ıncı oluşum zamanı T_k ile gösterilen bir olayın oluşumlarını modellemek için kullanılır. R+ doğal bir sıraya sahip olduğundan T_k 'lar sıralanabilir ve N (A) üzerindeki çalışmalar,

$$N_t = N\,[0,t],\ t \geq 0 \qquad (25)$$

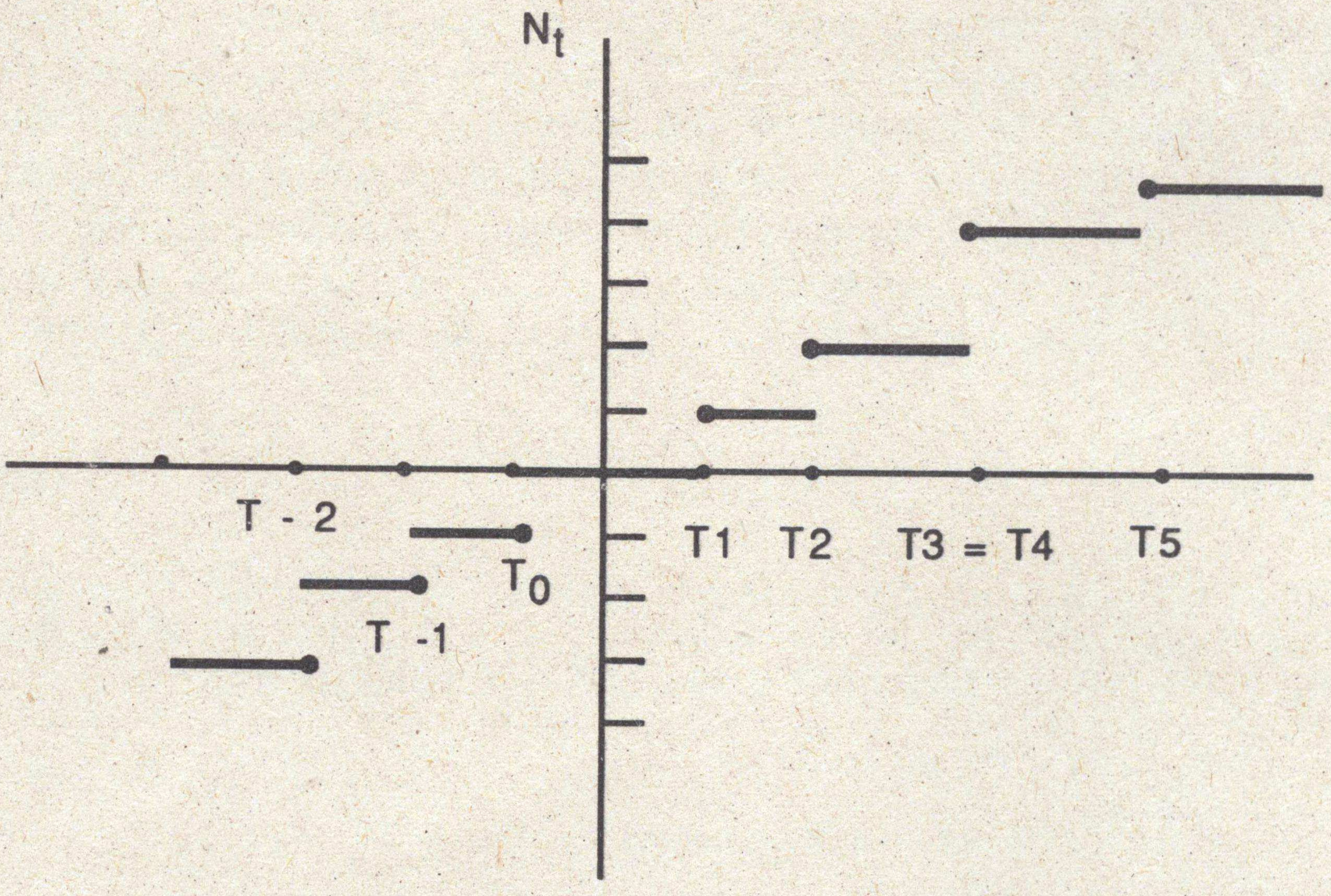
artan stokastik süreci üzerindeki çalışmalara indirgenir. Her bir N (A), N_t 'lerle ifade edilebilir.

$$N_t \equiv \begin{cases} N[0,t], & t \geq 0 \\ -N[t,0], & t < 0 \end{cases} \qquad (26)$$

Bileşik artan süreci ve (....... $\leq T_{-2} \leq T_{-1}\ T_0 \leq 0\ T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq$......)

$$N(A) = \sum_{n=-\nu_1}^{\nu_2} \tau T_k(A) \quad , A \in \xi \qquad (27)$$

E = R üzerindeki N ' için standart gösterimidir. <Serfozo, 1990, s.9>



Şekil 2. Doğru üzerindeki nokta süreci

5. STOKASTİK SÜREÇLERİN TAKTİRİ

Gerçek verilerin stokastik modele uydurulmasında ve sürecin herbir evresinde istatistiksel metotlar önemli rol oynar.

5.1. Kesikli Markov Cisimleri Üzerinde Takdir: Markov cisimleri uzaysal yerleştirilmiş (spatially located) tesadüfi değişkenler arasındaki karşılıklı etkileşimlerin ölçüsünü ve doğasının tanımlanması için parametrik modeller sağlar. Bir Markov cismi, bir yönsüz grafiğin matematiksel yapısına sahip bir indis kümesi üzerinde bir stokastik süreçtir. Aşağıdaki özelliğe uzaysal markov özelliği denir.

$$\{X_i \mid \{X_j : j \neq i\} = \{X_i \mid X_j;\ i \text{ ve } j \text{ komşular}\}\} \qquad (28)$$

özellikle değişkenler kesikli olduğunda markov cisminin birleşik tarif (specification) i, şaşırtıcı şekilde karışık olabilir. Büyük düzenli ağlar üzerindeki lokal şartların aynı kalması parametrelerin küçük bir kümesini ortaya çıkarır. Burada da zaman serilerinde olduğu gibi bağımsız gözlemler nadiren elde edilir. Bu nedenle istatistiksel taktirler modeldeki lokal yapının tekrarlanmasına dayanmalıdır. Asimtotik taktir, verilen lokal şartlı yapı korunuyor iken ağın sonsuz olarak genişletilmesi ile son bulur. Bununla birlikte bazı beklenmedik engeller vardır. Verilen bir lokal yapı, global bir yapıdan tek bir şekilde belirlenemeyebilir. Asimtotik bağımsızlık genellikle limit dağılımlarını elde etmek için gereklidir. En basit durumda bile özel taktirler için hesaplamalar yapmak büyük ölçüde etkisiz olabilir. Çünki normalleştirici sabitler çok karışıktır.

Şu halde kesikli markov cismi için asimtotik taktir, limit teoremleri ve hesaplamalardan ibarettir.

SONUÇ

Süreçlerin genel teorisi ve özelliklede Markov süreleri, Martingaleler, nokta süreçleri vb. alt süreçlerdeki gelişmeler yüksek boyutlara ulaşmıştır. Yapılan bu çalışmalar analitik ve/veya ölçü teorisi ile ifade edilmektedir.

Bu gelişmelerin bir sonucu olarak herbir alt süreç kendi sınıfını oluşturacak kadar büyümüştür. Neticede kullanılacak yöntemler ileri düzeyde olup oldukça karmaşık bir hal almaktadır.

Bu bağlamda stokastik süreçler belirli özelliklerine göre sınıflandırılıp, uygulamalarda sıksık karşılaşılan alt stokastik süreçler, temel özellikleri ve diğer alt süreçlerle olan ilgileri açısından incelendiğinde bu süreçlerin birbirinden tamamen farklı olmadığı belli koşullar altında birinin diğerinin özelliklerini taşıdığı görülmektedir.

Stokastik süreçler gerçek hayatta tesadüfiliğin etkili olduğu bir çok alana uygulanabilmektedir. Stokastik olarak modellenen olayın temel bir analizini yapabilmek için bazan birden çok alt stokastik süreci birlikte kullanmak gerekebilir.

Bu nedenle uygulamalarda "stokastik süreçlerin bir sistem olduğu" görüşüne yaklaşılması gerektiği kanaatindeyim.

SUMMARY

Stochastic processes classifies the sample path (trejectory) behevior under certain limitation random veriables which constitutes this process. These proces classifications are not entirely different from each other. Stochastic processes have a great practice possibility in areas where randomness has an influence. Randomness of phenomenon can be controlled by exact probability space. When buildinga stochastic model for problems in practice., many times more the one processes should be used simultaneously or a mix of processes should be used.

KAYNAKÇA

BHATTACHARVA, R.N., (1990) **Stohastic Processes with Applications.** Johnwiley and Sans. inc., Canada.

CHUNG, K.L., (1982) **Lestures from Markov Processes to Brownian Motion,** springer - verlag, New York.

CHUNG, K.L., Williams, R.J., (1983) **An. Introduction to Stochastic Integration.** Birkhauser Bostoninc.

ÇINLAR, E. (1992) **Sunset Over Brownistan,** stoch. Proch. Appl. 40, 45, 653.

DALEY, D.J., Vere - Jones (1988) **An Intraduction to the theory of Point Processes,** springer - Verlag, Berlin.

DUFFIE, D., (1988) **Security Markets: Stachastic Models,** Acedemicpress, San Diego.

HARRISON, J.M., Kreps, D.M., (1979) **Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets,** J. Econ. Theory, 20, 381 - 408 in

JACOB, J., shiryayev, A.N., (1987) **Limit Teorems for Stochastic Processes,** springerverlag, heidelberg

KARATZAS, I., (1987) **Applications of stochastic Calculus in Financial Economics,** unpublished. Graduate School of Businness, Colombia University.

KARATZAS, I., Shereve, S.E., (1988) **Brownian Motion and Stochastic Calculus,** springer - verlag, New York.

KARLIN, S., Taylor, H.M. (1981) **Second Course in Stochastic Processes,** Acedemic Press, New York

KARR, A.F., (1986) **Point Processed and Their Statistical Inference,** Marcel Dekker, New York.

KESTEN, h., (1993), **Frank Spitzer 's Work on Random Walk and Brownian Motion,** The Annals Prob., 21, 2, 593 - 607.

KINDERMAN, R., Snell., J.K. (1980) **Markov Random Fields and Their Applications,** American Mathematical Society, Providence, R.V.

LIPSTER, R.S., Shiryayev, A.N., (1978) **Statistic of Random Processes,** springerverlag, New York.

ÖNALAN, Ö., (1994) **Markov Süreçleri,** M.Ü. Sos. Bil. Ens. Derg. ÖNERİ, 1,1,125 - 130

SAATY, T.L., (1981) **Thinking With Models,** Pergaman Press Ltd. England.

SERFZO, R.F. (1989) **Poisson Functionals of Markov Processes and Queveing Networks,** Adv. Appl. Prob. 21, 595 - 611.

SERFZO, R.F. (1990) Neyman, D.P., M.J., **Point Processes, Stochastic Models,** Elsevier Science, Pub. B.V.

TAYLOR, H.M., (1990) Heyman, D.P., Sobel. M.J. **Martingales and Random Walks,** Elsevier science Pub. B. V.