T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
EKONOMETRİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

PEARSON DAĞILIŞ AİLESİNİN GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILMASI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Mustafa ÜNLÜ

Danışman

Doç.Dr. Ali Kemal ŞEHİRLİOĞLU

İZMİR-2013

YÜKSEK LİSANS
TEZ/ PROJE ONAY SAYFASI

2011800198

Üniversite : Dokuz Eylül Üniversitesi

Enstitü : Sosyal Bilimler Enstitüsü

Adı ve Soyadı : MUSTAFA ÜNLÜ

Tez Başlığı : Pearson Dağılış Ailesinin Güvenirlilik Analizinde Kullanılması Üzerine Bir Araştırma

Savunma Tarihi : 14.08.2013

Danışmanı : Doç.Dr.Ali Kemal ŞEHİRLİOĞLU

JÜRİ ÜYELERİ

Ünvanı, Adı, Soyadı	Üniversitesi	İmza
Doç.Dr.Ali Kemal ŞEHİRLİOĞLU	DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ	....
Doç.Dr.Cenk ÖZLER	DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ	....
Yrd.Doç.Dr.Ali Rıza FİRUZAN	DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ	....

Oybirliği ( )

Oy Çokluğu ( )

MUSTAFA ÜNLÜ tarafından hazırlanmış ve sunulmuş "**Pearson Dağılış Ailesinin Güvenirlilik Analizinde Kullanılması Üzerine Bir Araştırma**" başlıklı Tezi**( ) /** Projesi**( )** kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Utku UTKULU
Enstitü Müdürü

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum " Pearson Dağılış Ailesinin Güvenilirlik Analizinde Kullanılması Üzerine Bir Çalışma" adlı çalışmanın, tarafımdan, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Tarih

…/…/…..

Mustafa ÜNLÜ

İmza

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Pearson Dağılış Ailesinin Güvenilirlik Analizinde Kullanılması Üzerine Bir Çalışma

Mustafa ÜNLÜ

Dokuz Eylül Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü
Ekonometri Anabilim Dalı
Ekonometri Programı

Günlük hayatımızda kullandığımız tüm ürünler veya sistemler zaman içinde yıpranmakta ve bunun sonucunda da bozulmaktadır. Üreticiler açısından bu olası yıpranma ve bozulmaların sebeplerinin önceden bilinmesi hayati önem taşımaktadır. Bu bakış açısıyla ürünlerin potansiyel yaşamlarının belirlenmesi amacına yönelik güvenilirlik analizi çalışmaları yapılmaktadır. Yapılan bu çalışmalar kapsamında ürünler belirli çevre koşulları altında bazı testlere tabi tutulup elde edilen hata süreleri incelenmektedir. Böylece ürünlerin beklenen yaşam süreleri ve dolayısıyla tüketici beklentilerini karşılayıp karşılamadıkları belirlenmektedir.

Güvenilirlik analizinin temelinde hata sürelerinin dağılımı vardır. Uygun dağılım belirlenirken çeşitli istatistiksel araçlardan yararlanılabilir. Güvenilirlik analizinde genellikle kümülatif dağılım fonksiyonu, güvenilirlik fonksiyonu, hazard fonksiyonu, ortamla artık yaşam fonksiyonu ve artık yaşam varyansı bu dağılımı belirlemede kullanılan en yaygın araçlardır. Aynı zamanda hata dağılışları bu fonksiyonlar arasındaki ilişkilerden yararlanılarak karakterize edilebilmektedir.

Pearson diferansiyel denklem sistemi, güvenilirlik analizinde kullanılan birçok dağılışı içerisinde barındırmaktadır. Bu nedenle güvenilirlik analizinde önemli bir yeri vardır. Bu çalışmada Pearson diferansiyel denklem sisteminin, asimetrik dağılım türeten kübik paydalı bir yapısı ele alınacaktır. Daha sonra bu yapı için koşullu momentler ile asimetri ölçüleri incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Güvenilirlik Analizi, Pearson Diferansiyel Denklem Sistemi, Koşullu Momentler

ABSTRACT

Master's Thesis

A Study Based On Using Pearson Distribution Family On Reliability Analysis

Mustafa ÜNLÜ

Dokuz Eylül University

Graduate School of Social Sciences

Department of Econometrics

Econometrics Program

In everyday life, prodcucts or systems that we use, wearing out day by day and this situation causes fails of protucts and systems. It is very important for manufacturers to forecast this kind of fails. With that perspective reliability analysis is carried out to determine the potential lifetime of products. As a part of this analysis, products are tests under specific environmental conditions and their test results are examines to determine the products failure time. By this way, products lifetime and whether they are meeting of customer expectations or not can be determined.

Failure time's distribution is the basis of the reliability analysis. While choosing the proper distribution, some statistical tools can be used. Cumulative distribution, reliability function, hazard function, mean residual life, variance residual life are the most common tools to determine proper distribution in reliability analysis. By the way failure distributions can be characterized by using relations between these functions.

Pearson Differantial Equation System includes many distributions which are also used in reliability analysis commonly. Because of this reason it has a very important place in reliability analysis. In this study, Pearson Differantial Equation System's cubic denominator structure which derives asymmetric distribution will be handled. Then asymmetry measures will be examined by using conditional moments for that structure.

Keywords: Reliability Analysis, Pearson Differantial Equation System, Conditional Moment

PEARSON DAĞILIŞ AİLESİNİN GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILMASI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

İÇİNDEKİLER

İKİNCİ BÖLÜM

PEARSON DAĞILIŞ AİLESİ

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN FARKLI YAKLAŞIMLARLA ÇÖZÜMLERİ

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

KÜBİK PAYDALI PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN KARAKTERİZASYON UYGULAMALARI

KISALTMALAR

BKZ Bakınız

CDF Kümülatif Dağılım Fonksiyonu

MTTF Hataya Kadar Geçen Ortalama Süre

MRL Ortalama Artık Yaşam

PDF Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

RF Güvenilirlik Fonksiyonu

VF Canlılık Fonksiyonu

VRL Artık Yaşam Varyansı

TABLO LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

EKLER LİSTESİ

GİRİŞ

Güvenilirlik, belirli bir zaman aralığında, belirlenmiş koşullar altında bir fonksiyonun hatasız çalışma olasılığıdır. Bu tanımda vurgulanan beş bileşen bulunmaktadır. Bunlar;

- Olasılık: Güvenilirlik hatasız çalışma olasılığıdır. Bu yüzden sıfır ile bir arasında değer almaktadır.
- Hata: Bir bileşenin ya da sistemin hatalı çalışıp çalışmadığı, bunlardan beklenen performansa bağlıdır.
- Fonksiyon: Güvenilirliği incelenen cihazın hatalarının dağılımı belirli bir fonksiyona uymaktadır.
- Koşullar: Her cihazın kendine özgü çevresel çalışma koşulları vardır. Cihazların bu koşullar altında hatasız çalışması beklenir.
- Zaman: Bir cihazın güvenilirliğinden bahsedebilmemiz için belirli bir zaman aralığı tanımlamamız gerekir. Bu kural yalnızca araçlardaki hava yastıkları gibi bir kez çalışan cihazlar için göz ardı edilebilir.(Wasserman, 2002: 2)

Gerçek hayatta hiçbir ürün ya da sistem güvenilir değildir. Çünkü zamanla birlikte aşınmalar meydana gelmekte ve bu da nihai olarak hataya yol açmaktadır. Bahsedilen hataların rassal olarak meydana gelmesi sebebiyle güvenilirlik olasılıksal bir çerçevede değerlendirilmelidir.

Güvenilirlik analizinde, hataların dağılışlarını karakterize etmek ve böylece uygun dağılışları tanımlamak amacıyla hata oranı, ortalama artık yaşam ve dayanıklılık fonksiyonu gibi araçlar geliştirilmiştir. Böylece araştırmacı hataları bu fonksiyonlar cinsinden ifade ederek model tanımlanması probleminin üstesinden gelmiş olmaktadır.(Sindu T.K, 2002: 1)

Normal dağılış, 19.yy'da tüm istatistiksel analizler için çok önemli bir rol oynamıştır. Çoğu teorik çalışmalarda dağılışın normal olduğu ya da normale yakın olduğu varsayılmıştır. Fakat gerçek hayattaki verilere uygun bir dağılış bulma isteği ortaya çıktığında, verilerin normal dağılımdan oldukça farklı karakteristikleri olduğu fark edilmiştir. Böylece 20.yy'ın başlarında normal olmayan eğriler kullanılmaya başlanmıştır. Karl Pearson bu tarz dağılışları tanımlamak için üstel, gama, beta, weibull vb. güvenilirlik analizinde sıkça kullanılan birçok önemli olasılık modelini içeren diferansiyel denklem sistemi oluşturmuştur. Bu özelliği sebebiyle Pearson diferansiyel denklemleri güvenilirlik analizi çalışmalarında sıkça kullanılmıştır. (Unnikrishnan ve Sankaran, 1991; Glanzel, 1991; Sindu, 2002; Osaki ve Li, 1988; Unnikrishnan ve Sankaran, 1998; Asadi 1998; Unnikrishnan ve diğerleri, 2003; Shakil ve diğerleri, 2010; Glanzel ve diğerleri, 1984; Kotz, 1974; Papathanasiou, 1995; Navarro ve diğerleri, 1998). Bu çalışmalarda kuadratik paydalı klasik Pearson diferansiyel denklemi kullanılarak farklı bakış açılarıyla diferansiyel denklemin çözümleri bulunmuştur. Unnikrishnan ve Sankaran, diferansiyel denklemi, güvenilirlik fonksiyonu tanımından yararlanarak karakterize etmişler ve böylece güvenilirlik analizinde kullanılan güvenilirlik fonksiyonu, canlılık fonksiyonu ve hazard fonksiyonlarıyla diferansiyel denklem arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmışlardır (Unnikrishnan ve Sankaran, 1991). Glanzel, aynı diferansiyel denklem sistemi için koşullu momentler ile Pearson Dağılış Ailesi için bir karakterizasyon önermiştir (Glanzel, 1991)

Güvenilirlik analizinde kullanılan dağılışlar genellikle asimetrik dağılışlardır. Bahsedilen tipteki dağılışlar incelenirken, asimetri ölçüleri de göz önüne alınmalıdır. Yukarıda bahsedilen çalışmalarda Pearson Diferansiyel Denklem Sistemi, kuadratik paydalı yapısıyla ele alınmış ve bahsedilen asimetri ölçüleri değerlendirilmemiştir. Bu çalışmada Pearson diferansiyel denklemi, asimetrik dağılışlar türeten kübik paydalı formuyla ele alınacaktır. Elde edilen yeni form hem Glanzel'in hem de Unnikrishnan ve Sankaran'ın önerdiği yöntemler kullanılarak karakterize edilecektir. Yapılan işlemler sonucunda da üçüncü koşullu moment elde edilerek, kübik paydalı diferansiyel denklem formuna uygun bir dağılış için asimetri ölçüleri bulunacaktır.

BİRİNCİ BÖLÜM
GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI FONKSİYONLAR

1.1 GİRİŞ

T, [0,∞) aralığında tanımlı sürekli bir değişken olmak üzere, *f(t)* bir bileşenin hata süreleri dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Bu bölümde fonksiyonlar bu varsayım üzerine incelenecektir.

1.2 KÜMÜLATİF DAĞILIM FONKSİYONU

F(t) kümülatif dağılım fonksiyonu (CDF) olmak üzere;

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(x)dx\,, \qquad t > 0$$

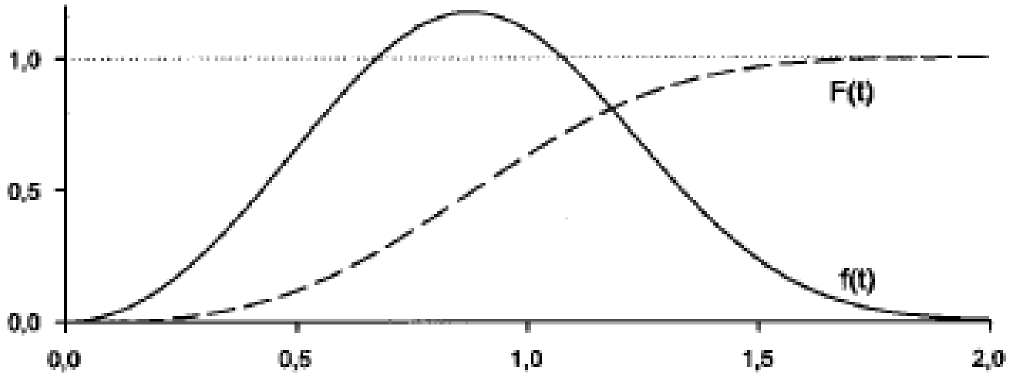
$$P[a \leq T \leq b] = \int_a^b f(x)dx$$

Böylece *F(t)*, $(0, t]$ aralığında bir bileşenin hata vermesi olasılığını göstermektedir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(t)$ şu şekilde tanımlanmıştır:

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t}$$

(0,∞) aralığında tanımlı sürekli bir değişken için şekil 1.1'de olasılık yoğunluk fonksiyonu ve kümülatif dağılım fonksiyonu arasındaki ilişki gösterilmiştir. Bu şekil incelendiğinde kümülatif dağılım fonksiyonunun değerinin 0 ile 1 arasında değiştiği, başlangıç noktasında 0 değerini aldığı ve sonsuza doğru gidildiğinde 1'e yaklaştığı görülmektedir.

Şekil 1: Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu *f(t)* ve Kümülatif Dağılım Fonksiyonu *F(t)*



Zaman (t)

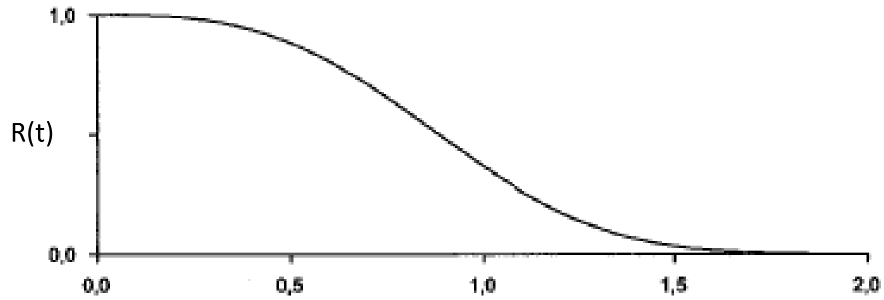
Kaynak: Rausand ve Hoyland, 2004: 17

1.3 GÜVENİLİRLİK FONKSİYONU

Bir bileşenin t zamanına kadar hayatta kalma olasılığını gösteren güvenilirlik fonksiyonu (RF) şu şekilde tanımlanmıştır;

$$R(t) = P(T \geq t) = \int_{t}^{\infty} f(x)dx\,, \qquad t > 0$$

Şekil 2: Güvenilirlik Fonksiyonu



Zaman (t)

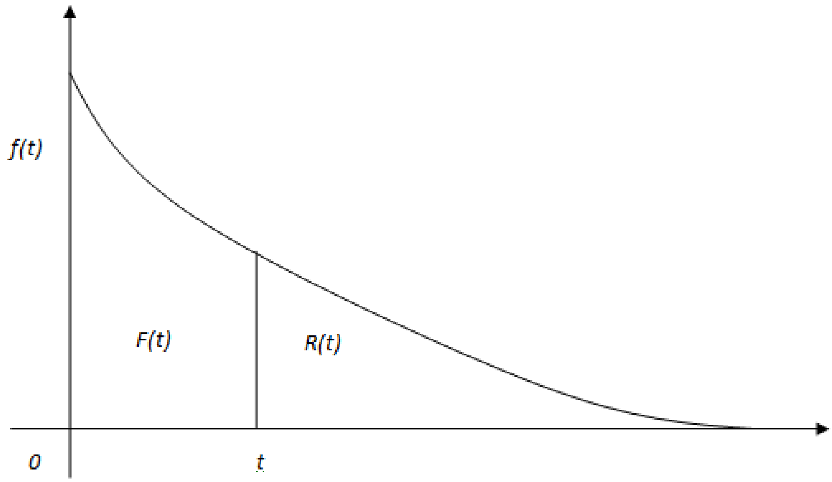
Kaynak: Rausand ve Hoyland, 2004: 17

Şekil 2'de güvenilirlik fonksiyonunun tanımı gereği 0 ile 1 arasında değer aldığı, başlangıç noktasında değeri 1 iken sonsuza doğru ilerledikçe değerinin 0'a yaklaştığı görülmektedir. Buna göre incelenen bir ürünün hayatta kalma olasılığının başlangıçta yüksek bir değerken zaman ilerledikçe bu olasılığın azalarak 0 olduğu söylenebilir.

Aynı zamanda bu fonksiyon;

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(x)dx$$

Şekil 3: Güvenilirlik Fonksiyonu ve Kümülatif Dağılım Fonksiyonu



Kaynak: Rausand ve Hoyland, 2004: 17

Şekil 3'te hata sürelerinin dağılımı *f(t)* için kümülatif dağılım fonksiyonu ve güvenilirlik fonksiyonunun ilişkisi gösterilmiştir. Buna göre herhangi bir *t* zamanı için bu noktanın sağında eğrinin altında kalan alan güvenililirliği, solunda kalan alan ise hatayı göstermektedir.

Bu fonksiyon aynı zamanda hayatta kalım (survivor) fonksiyonu olarak da adlandırılmaktadır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu ile arasındaki ilişki şu şekildedir;

$$f(t) = -\frac{d}{dt}R(t) = \frac{d}{dt}F(t)$$

$R(t)$ monoton azalan sürekli bir fonksiyondur. $R(0) = 1$ ve $R(\infty) = \lim_{t\to\infty} R(t) = 0$'dır. (Wasserman G.S, 2002: 2)

1.4 HAZARD FONKSİYONU

Yaşam dağılışları için önemli bir karakteristiktir. t zamanında çalışan bir ürünün $(t, t+\Delta t]$ aralığında hata vermesi olasılığı;

$$P(t < T \leq t + \Delta t | \, T > t) = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ olmak üzere, bu olasılığı zaman aralığını Δt'ye böldüğümüzde hazard fonksiyonu;

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t | \, T > t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

(Rausand ve Hoyland, 2004: 17)

Hazard fonksiyonu aynı zamanda şu şekilde de ifade edilebilir;

$$f(t) = -\frac{d}{dt} R(t)$$

Olmak üzere,

$$h(t) = \frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)}$$

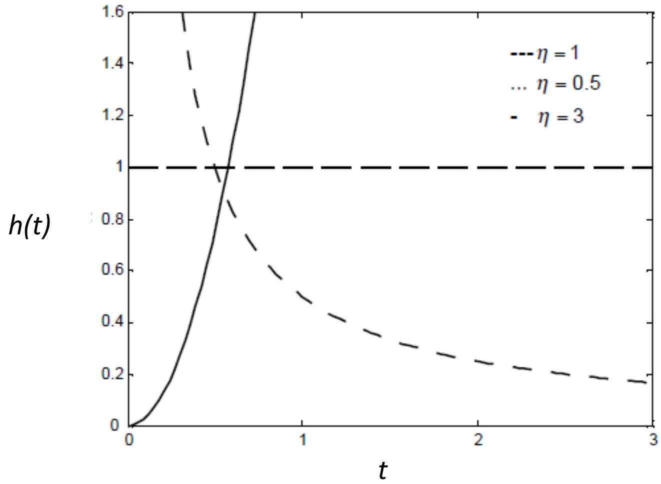
$$\int_0^t h(t)dt = -\int_0^t \frac{\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)} dt = -\ln R(t)$$

Olur. Böylece;

$$R(t) = exp\left[-\int_o^t h(t)dt\right]$$

(Wasserman G.S, 2002: 2)

Şekil 4: λ=1 Değeri İçin Weibull Dağılımının Hazard Fonksiyonu



Kaynak: Rausand ve Hoyland, 2004: 17

Şekil 4'te Weibull dağılımı gösteren bir sürekli değişken ele alınmış, farklı şekil parametresi değerleri için bu değişkenin hazard fonksiyonları gösterilmiştir.

Tablo 1: *f(t),F(t),R(t)* ve *h(t)* Arasındaki İlişki

	$\boldsymbol{F(t)}$	$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{R(t)}$	$\boldsymbol{h(t)}$
$\boldsymbol{F(t)} =$	-	$\int_0^t f(x)dx$	$1 - R(t)$	$1 - \exp(-\int_0^t h(x)dx)$
$\boldsymbol{f(t)} =$	$\frac{dF(t)}{dt}$	-	$-\frac{dR(t)}{dt}$	$h(t).\exp(-\int_0^t h(x)dx)$
$\boldsymbol{R(t)} =$	$1 - F(t)$	$\int_t^\infty f(x)dx$	-	$\exp(-\int_0^t h(x)dx)$
$\boldsymbol{h(t)} =$	$\frac{\frac{dF(t)}{dt}}{1 - F(t)}$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(x)dx}$	$-\frac{d}{dt}\ln R(t)$	-

Kaynak: Rausand ve Hoyland, 2004: 20

1.5 HATAYA KADAR GEÇEN ORTALAMA SÜRE

Hataya kadar geçen ortalama süre popülasyonun beklenen değeridir. Bir bileşenin ortalama hata zamanı şu şekilde tanımlanır;

$$E(T) = \mu = \int_0^\infty t f(t) dt$$

Kısmi integral ile

$$= \{-tR(t)|_0^\infty\} + \int_0^\infty R(t) dt$$

$\mu < \infty$ ve $-tR(t)|_0^\infty = 0$ olmak üzere bu ifade;

$$\mu = \int_0^\infty R(t) dt$$

(Rausand ve Hoyland, 2004: 17)

1.6 ORTALAMA ARTIK YAŞAM FONKSİYONU

Herhangi bir t zamanına kadar hayatta kalmış bir bileşenin kalan ortalama yaşamını belirten bir fonksiyondur. t, $(0, L)$ aralığında tanımlı sürekli bir değişken olmak üzere, $t = 0$ zamanında çalışmaya başlayıp t zamanında hala çalışıyor olan bir bileşenin bir sonraki x zamanında çalışıyor olması olasılığı;

$$R(x|t) = P(T > x + t|\ T > t) = \frac{P(T > x + t)}{P(T > t)} = \frac{R(x + t)}{R(t)}$$

t zamanındaki ortalama artık yaşam fonksiyonu ise;

$$r(t) = E(X - t|X \geq t)$$

$$r(t) = \int_0^\infty R(x|t) dx = \frac{1}{R(t)} \int_t^\infty R(x) dx$$

Burada $t = 0$ olması durumunda;

$$r(0) = \frac{1}{R(0)} \int_0^\infty R(x) dx = \mu$$

(Rausand ve Hoyland, 2004: 17)

Bu fonksiyonun diğer bazı fonksiyonlarla olan ilişkisi şu şekildedir;

$$h(t) = \frac{1 + r'(t)}{r(t)}$$

ve

$$R(t) = \frac{r(0)}{r(t)} exp\left[-\int_0^t \frac{dx}{r(x)}\right]$$

Ortalama artık yaşam fonksiyonunun bazı özellikleri şunlardır;

1) $r(t) \geq 0$
2) $r(0) = E(T)$
3) $r'(t) \geq -1$
4) $\int_0^t dx/r(x)$ ıraksak olmalıdır.

(Sankaran, 1992: 7; Sindu, 2002: 6)

1.7 CANLILIK (VITALITY) FONKSİYONU

Herhangi bir t zamanına kadar hayatta kalmış bir bileşenin kalan beklenen ömrünü tanımlar. t $(0, L)$ aralığında tanımlı sürekli bir değişken olmak üzere,

$$m(t) = E(X|X > t)$$

$$m(t) = \frac{1}{R(t)} \int_t^\infty xf(x)dx$$

Bu fonksiyonun diğer bazı fonksiyonlarla olan ilişkisi şu şekildedir;

$$m(t) = r(t) + t$$

$$m'(t) = r(t)h(t)$$

Vitality fonksiyonunun bazı özellikleri şunlardır;

1) $(-\infty, L)$ aralığında $m(t)$ azalmayan, sağdan sürekli bir fonksiyondur.
2) Tüm $t < L$ için $m(t) \geq t$
3) $\lim_{t \to L^-} m(t) = L$
4) $\lim_{t \to -\infty} m(t) = E(T)$

(Sankaran, 1992: 11; Sindu, 2002: 7)

1.8 ARTIK YAŞAM VARYANSI

Belirli bir t zamanına kadar hayatta kalmış bir bileşenin kalan ömrünün varyansını belirtir. Güvenilirlik fonksiyonu $R(t)$ olan ve negatif olmayan sürekli bir değişken için artık yaşam varyansı şu şekildedir;

$$\begin{aligned} V(t) &= V(X - t | X > t) \\ &= E[(X - t)^2 | X > t] - r^2(t) \end{aligned}$$

Aynı zamanda;

$$V(t) = \frac{2}{R(t)} \int_t^{\infty} r(x)R(x)dx - r^2(t)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = h(t)[V^2(t) - r^2(t)]$$

(Sankaran, 1992: 13; Sindu, 2002: 8)

İKİNCİ BÖLÜM
PEARSON DAĞILIŞ AİLESİ

2.1 GİRİŞ

İstatistikler, tekrar sayıları veya bir olayın oluşum frekansları şeklinde düzenlendiğinde elde edilen bu düzenlemeye frekans dağılımı adı verilir. Bu tipteki dağılımları tanımlamakta kullanılan formülün adı "frekans eğrisi"dir. Bazı dağılımlar, bağımsız değişkenin belirli değerler grubunun içine düşen durumların sayısını vermekle birlikte, bazıları bağımsız değişkenin tam değerine karşılık gelen durumların sayısını verir. Bağımsız değişkenin tam değerinin tekrar sayısını grafiksel gösterimi frekans poligonu diğerininki ise histogram adını alır. Histogramlarla yapılan çalışmalarda incelenen örnek sayısı artırılıp sınıf aralıkları azaltıldıkça blok diyagramın keskin hatları yumuşar. Elde edilen bu durum gerçek dağılım eğrisi için daha iyi bir gösterimdir. Başka bir deyişle bu tür eğriler, örnek bilgisinden hareketle ana kütleyi tanımlamak için gerçekleştirilen bir yaklaşımdır. Bazı önemli kesikli dağılımlar (poisson, binom, hirpergeometrik),

$$\frac{f_{j+1}-f_j}{f_j}=\frac{(j-a)}{b_0+b_1 j+b_2 j^2}$$

ilişkisini sağlamaktadır. Eğer bu değişken uzunluğu h olan bir aralıkta tanımlı ve katsayılar uygun bir şekilde yeniden ölçeklenmiş ise, yukarıdaki eşitliğinin $h\to 0$ için limiti,

$$\frac{1}{f}\frac{df(x)}{dx}=\frac{x-a}{b_0+b_1 x+b_2 x^2}$$

diferansiyel denklemini verir. Bu denklem Pearson dağılış ailesinin denklemidir. (Pearson, 1916: 178)

2.2 PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Teorik yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olsun. Pearson sistemini $f(x)$'in bir diferansiyel denklemi şeklinde oluşturulmuştur. Bu denklem,

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{(x-a)f(x)}{b_0+b_1 x+b_2 x^2} \tag{2.1}$$

şeklindedir ve hipergeometrik dağılımın limitinden elde edilmiştir (Elderton, 1953: 9). Alternatif yaklaşım aşağıda açıklanmıştır.

Genellikle gözlenmiş dağılımların büyük bir kısmı tek modludur. Diferansiyel denklem en fazla bir köke sahiptir, $df(x)/dx=0$ durumu sadece $x=a$ için oluşur. Eğer $f(x)$ fonksiyonu tek modlu olarak elde edilmek istenirse, mod değeri, $df(x)/dx=0$ ile belirlenebilir. Eşitliğin sağ tarafında $(x\text{-}a)$ teriminin mevcut olması durumunda eşitlik sıfırdan farklı değerler alacaktır. $x=a$ durumunda ise, sıfır değeri elde edilecektir. Bu değer, yoğunluk fonksiyonunun tek mod değerini tanımlamaktadır. Buna ilaveten, x değişkeninin uç noktalarında fonksiyon ve x-ekseni arasında düz bir temas olması istenir. Başka bir deyişle $f(x)=0$ olduğunda $df(x)/dx=0$ değeri ihmal edilecektir. Bu durumu elde edebilmek için $(x\text{-}a)$ bileşeninin $f(x)$ ile çarpılması gerekir. Böylece, $f(x)=0$ olduğunda $df(x)/dx=0$ olacaktır. Bir sonraki aşamada sağ taraftaki bu iki bileşen herhangi bir negatif olmayan $G(x)$ fonksiyonu ile bölünebilir. Böylece yukarıdaki yaklaşım sonucunda pek çok teorik dağılım elde edilebilir. Fakat bu durum bir karmaşa oluşturabilecektir. Bu karmaşayı ortadan kaldırmak için $G(x)$ fonksiyonunun her hangi bir fonksiyon olmayıp Maclaurin serisine göre açılmış olduğu ve ilk üç terimin $G(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$ yaklaşım için yeterli olduğu varsayılmıştır. Yukarıda tanımlanan prosedür Pearson diferansiyel denklemini verir.

2.3 DİFERANSİYEL DENKLEMİN GENEL ÇÖZÜMÜ

Bir Pearson dağılışının momentleri eşitlik (2.1)'deki sabitlerin değerleri ve integral sabiti ile belirlenir. Buna karşın bir Pearson eğrisinin ilk dört momenti verilmiş ise ilk olarak bu sabitler için çözüm gerçekleştirilir daha sonra eşitlik (2.1)'in çözümü elde edilir. Pearson dağılış sistemini 1'den 12'ye kadar Romen rakamları ile numaralandırmıştır. Parametre değerleri ile belirli bir tipi ilişkilendirmek için diferansiyel denklemin parametrelerini ilgili tipin parametrelerine göre ifade etmek gereklidir. Pearson bunu gerçekleştirmek için *momentler metodunu* kullanmıştır. Her iki tarafta x^n ile çarpılır integrali alınır. Şans değişkeninin sınırları r ve s olsun bu sınırlar $-\infty$ ve ∞ olabilir. Pearson diferansiyel denklemi,

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)\frac{dy}{dx} = (x-a)y$$

olarak düzenlenip integrali alındığında,

$$\int_r^s x^n (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \int_r^s x^n (x-a) y dx$$

İlk olarak eşitliğin sol tarafına kısmi integral yöntemi uygulanır, $\int v du = vu - \int u dv$.

Burada,

$$x^n (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = v \text{ ve } \left(\frac{dy}{dx}\right)dx = du$$

alınarak

$$nb_0 x^{n-1} + (n+1)b_1 x^n + (n+2)b_2 x^{n+1} dx = dv \qquad \text{ve}$$

$$f^{'}(x)dx = du \quad \Rightarrow \quad \int_r^s f^{'}(x)dx = \int du \quad \Rightarrow \quad f(x)\Big|_r^s = u$$

bulunur ve sonuç olarak,

$$\int v du = vu - \int u dv$$

$$= x^n (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) f(x)\Big|_r^s - \int f(x)\left[nb_0 x^{n-1} + (n+1)b_1 x^n + (n+2)b_2 x^{n+1}\right]dx$$

Uç noktalarda x-ekseni ile tam bir temas olduğu $\lim_{x \to r} f(x) = 0$ ve $\lim_{x \to s} f(x) = 0$,

varsayımı ile ilk terim sıfır olur,

$$\int_r^s x^n (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = -\int_r^s \left[nb_0 x^{n-1} f(x) + (n+1)b_1 x^n f(x) + (n+2)b_2 x^{n+1} f(x)\right]dx$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafı ise:

$$\int_r^s x^n (x-a) y dx = \int_r^s x^n (x-a) f(x) dx$$

$$= \int_r^s x^{n+1} f(x) dx - \int_r^s a x^n f(x) dx$$

şeklindedir. Elde edilen bu iki sonuç birlikte değerlendirilerek,

$$-\int_r^s nb_0 x^{n-1} f(x)dx - \int_r^s (n+1)b_1 x^n f(x)dx - \int_r^s (n+2)b_2 x^{n+1} f(x)dx = \int_r^s x^{n+1} f(x)dx - \int_r^s a x^n f(x)dx$$

Bu denklem dağılımın momentleri cinsinden;

$$-nb_0\mu'_{n-1} - (n+1)b_1\mu'_n - (n+2)b_2\mu'_{n+1} = \mu'_{n+1} - a\mu'_n$$

$$nb_0\mu'_{n-1} + \{(n+1)b_1 - a\}\mu'_n + \{(n+2)b_2 + 1\}\mu'_{n+1} = 0 \qquad (2.2a)$$

n=0,1,2,3, değerleri kullanılarak, tüm gerekli momentlerin, $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4$ mevcut olduğu varsayımı ile dört denklemden dört sabit a, b_o, b_1 ve b_2 belirlenebilir, $\mu'_0 = 1$ olduğundan,

$$(b_1 - a) + (2b_2 + 1)\mu'_1 = 0$$

$$b_0\mu'_0 + (2b_1 - a)\mu'_1 + (3b_2 + 1)\mu'_2 = 0$$

$$2b_0\mu'_1 + (3b_1 - a)\mu'_2 + (4b_2 + 1)\mu'_3 = 0 \qquad (2.2b)$$

$$3b_0\mu'_2 + (4b_1 - a)\mu'_3 + (5b_2 + 1)\mu'_4 = 0$$

. Bu denklemler a, b_0, b_1, b_2 için çözüldüğünde,

$$a = -\frac{\left(20\mu'_2\mu'_3\mu'^2_1 + 13\mu'_1\mu'_2\mu'_4 - 12\mu'_4\mu'^3_1 - 9\mu'_1\mu'^3_2 - 8\mu'_1\mu'^2_3 - 3\mu'^2_2\mu'_3 - \mu'_3\mu'_4\right)}{B}$$

$$b_0 = -\frac{\left(4\mu'^2_2\mu'_4 + 4\mu'^2_1\mu'^2_3 - 3\mu'_2\mu'^2_3 - \mu'^2_2\mu'_3\mu'_1 - 3\mu'_2\mu'^2_1\mu'_4 - \mu'_1\mu'_3\mu'_4\right)}{B} \qquad (2.2c)$$

$$b_1 = -\frac{\left(8\mu'_2\mu'_3\mu'^2_1 + 7\mu'_1\mu'_2\mu'_4 - 6\mu'_4\mu'^3_1 - 3\mu'_1\mu'^3_2 - 2\mu'_1\mu'^2_3 - 3\mu'^2_2\mu'_3 - \mu'_3\mu'_4\right)}{B}$$

$$b_2 = -\frac{\left(3\mu'^2_3 + 6\mu'^3_2 + 4\mu'^3_1\mu'_3 + 2\mu'^2_1\mu'_4 - 3\mu'^2_1\mu'^2_2 - 10\mu'_1\mu'_2\mu'_3 - 2\mu'_2\mu'_4\right)}{B}$$

olup, burada,

$$B = 18\mu'^3_2 - 6\mu'^2_1\mu'^2_2 - 10\mu'_2\mu'_4 - 32\mu'_1\mu'_2\mu'_3 + 10\mu'^2_1\mu'_4 + 8\mu'^3_1\mu'_3 + 12\mu'^2_3$$

olarak tanımlanmıştır. Dağılımın ortalaması orijine çekilerek, μ'_1=0 alınarak, orijini değiştirilir ve μ_0=1 olduğu hatırlanarak

$$b_1 - a = 0$$

$$b_0 + (3b_2 + 1)\mu_2 = 0 \tag{2.3}$$

$$(3b_1 - a)\mu_2 + (4b_2 + 1)\mu_3 = 0$$

$$3b_0\mu_2 + (4b_1 - a)\mu_3 + (5b_2 + 1)\mu_4 = 0$$

elde edilir. Bu denklemler a, b_0, b_1, b_2 için çözülerek ve

$$\beta_1 = \mu_3^2 \big/ \mu_2^3 \tag{2.4a}$$

$$\beta_2 = \mu_4 \big/ \mu_2^2 \tag{2.4b}$$

alınarak,

$$b_1 = a = -\frac{\mu_3\left(\mu_4 + 3\mu_2^2\right)}{A} = -\frac{\sigma\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{A'}$$

$$b_0 = -\frac{\mu_2\left(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2\right)}{A} = -\frac{\sigma^2(4\beta_2 - 3\beta_1)}{A'} \tag{2.5}$$

$$b_2 = -\frac{\left(2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3\right)}{A} = -\frac{(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)}{A'}$$

sonuçları elde edilir. Burada,

$$A = 10\mu_4\mu_2 - 12\mu_3^2 - 18\mu_2^3 \quad \text{ve} \quad A' = 10\beta_2 - 12\beta_1 - 18$$

şeklindedir. Eşitlik (2.5) de elde edilen sonuçlar eşitlik (2.1) de yerine konarak;

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = -\frac{x + \dfrac{\mu_3\left(\mu_4 + 3\mu_2^2\right)}{A}}{\dfrac{\mu_2\left(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2\right)}{A} + \dfrac{\mu_3\left(\mu_4 + 3\mu_2^2\right)}{A}x + \dfrac{\left(2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3\right)}{A}x^2} \tag{2.6a}$$

ya da,

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = -\frac{x + \dfrac{\sigma\sqrt{\beta_1}\left(\beta_2 + 3\right)}{A'}}{\dfrac{\sigma^2\left(4\beta_2 - 3\beta_1\right) + \sigma\sqrt{\beta_1}\left(\beta_2 + 3\right)x + \left(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6\right)x^2}{A'}} \tag{2.6b}$$

elde edilir. Bu denklemlerdeki orijine göre momentlerin merkezi momentler ile olan ilişkisi,

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3 \tag{2.7}$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$$

eşitlikleri ile tanımlıdır. Eşitlikten görüldüğü gibi μ_1'=0 alınması durumunda, $\mu_i' = \mu_i$ i=1,2,… olduğu görülebilir (Şehirlioğlu, 2011).

Ortalaması sıfır noktasında olan değişkenler için, eşitlik (2.5)'deki b_0, sıfır değerini alamaz. Bunun nedeni, $\beta_2 - \beta_1 - 1 > 0$ olduğundan, $4\beta_2 - 4\beta_1 - 4 > 0$ olacaktır ve daima $\beta_1 \geq 0$ olduğundan, $4\beta_2 - 3\beta_1 > 4\beta_2 - 4\beta_1 - 4 > 0$ bulunur.

Eğer dağılım simetrik ve ortalaması sıfır ise β_1=0 olup eşitlik (2.5) den görülebileceği gibi $b_1 = a = 0$ 'dır. Eşitlik (2.1) ile tanımlanan denklemin modu (türevin sıfıra eşit olduğu değer) $x = a$ noktasıdır.

Eşitlik (2.1) den a değerinin orijin ile mod arasındaki uzaklığı tanımladığı görülmektedir. Bununla birlikte μ_1' =0 alınması durumunda, orijin ortalamaya dönüştürülmüş olur ve a değeri ortalama ile mod arasındaki uzaklığı tanımlar. Eşitlik (2.6b) kullanılarak moment terimlerine göre *Pearson çarpıklık katsayısı,* $\mu_1' = 0$ ve $\mu_2 = 1$ için,

$$\frac{ortalama - \text{mod}}{\sigma} = \frac{-a}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{\sqrt{\beta_1}\left(\beta_2 + 3\right)}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18} \tag{2.8}$$

elde edilir. (Stuart ve Ord, 1987)

Genellikle, x şans değişkeninin yüzde noktaları $f(x)$ fonksiyonel formundan daha önemlidir. Bir şans değişkeni x'in bir Pearson yoğunluğuna sahip olduğu varsayılsın, ortalaması μ ve merkezi momentleri μ_2, μ_3, μ_4 ile tanımlansın. Standardize $z=(x-\mu)/\sigma$ şans değişkeninin yüzde noktaları, $\sqrt{\beta_1}$ (veya β_1) ve β_2 değerlerine göre oluşturulmuş çift yönlü tablolardan elde edilebilir. Burada $\sigma=\sqrt{\mu_2}$ parametresi, biçim (shape) parametrelerinin, β_1 ve β_2, bir fonksiyonu olarak elde edilebilir. Orijinal x şans değişkenin yüzde noktaları ise z değişkeninden elde edilir.

Pearson dağılım sistemindeki dağılış tiplerini diferansiyel denklemin paydasındaki $G(x)$ fonksiyonunun köklerine göre tanımlamıştır. Fonksiyonun iki köke sahip olduğu durumlar ana tipleri tanımlamaktadır. Katlı kök ya da tek kök durumları geçiş tiplerini tanımlamaktadır. Ana tipler;

a) Kökler reel ve farklı işaretli, Tip I
b) Kökler reel ve aynı işaretli, Tip VI
c) Kökler Karmaşık, Tip IV.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN FARKLI YAKLAŞIMLARLA ÇÖZÜMLERİ

3.1 GİRİŞ

Bu bölümde karakterizasyon kavramı, belirli dağılışların bazı fonksiyonlar arasındaki ilişkilerden yararlanılarak, bu fonksiyonlar cinsinden ifade edilmesi anlamında kullanılacaktır. Pearson Dağılış Sistemi içerisindeki dağılışları ayrı ayrı incelemek yerine, bu bölümde sistem bir bütün olarak ele alınacaktır. Böylece elde edilen sonuçlar sistemdeki tüm dağılışlar için geçerli olacaktır.

Dağılışların karakterizasyonu farklı yaklaşımlarla yapılabilmektedir. Bu bölümde güvenilirlik fonksiyonu ve koşullu momentler ile yapılan karakterizasyonlar incelenecektir.

Teorem 3.1: Olasılık yoğunluk fonksiyonu f türevlenebilir olan bir dağılış ailesi göz önüne alınsın;

$$\frac{f^{'}(x)}{f(x)} = \frac{\mu - x}{g(x)} - \frac{g^{'}(x)}{g(x)}$$

Burada µ bir sabittir.

İspat: Bu eşitlik için gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$f^{'}(x).g(x) = (\mu - x)f(x) - g^{'}(x).f(x)$$

$$f^{'}(x).g(x) + g^{'}(x).f(x) = \mu.f(x) - xf(x)$$

Eşitliğin sol tarafında çarpımın türevi görülmektedir. Bu ifadenin integrali alındığında;

$$\int_t^{\infty} xf(x)dx = \mu R(t) + g(t)\,f(t), \qquad t \geq 0$$

$$E(X|X > t) = \mu + g(t)h(t)$$

Elde edilir. Elde edilen bu sonuçla canlılık fonksiyonun hataya kadar geçen ortalama süre ve hazard fonksiyonuyla olan ilişkisi belirlenmiştir. Pearson Dağılış Ailesi için bu yaklaşımla;

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Olmak üzere;

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\mu - x}{a_0 + a_1x + a_2x^2} - \frac{a_1 + 2a_2x}{a_0 + a_1x + a_2x^2} = -\frac{x + d}{A_0 + A_1x + A_2x^2}$$

(3.1)

Olur. Burada $A_j = a_j/(1 + 2a_2), j = 0,1,2$ ve $d = a_1 - \mu/(1 + 2a_2)$’dir (Gupta ve Bradley, 2003: 2). Bu bilgiler ışığında Pearson Dağılış Ailesi için canlılık fonksiyonu şu şekilde yazılabilir;

$$m(x) = \mu + (a_0 + a_1x + a_2x^2)h(x)$$

(3.2)

3.2 KUADRATİK PAYDALI KLASİK PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ

3.2.1 Güvenilirlik Fonksiyonu Yaklaşımı

Pearson diferansiyel denkleminin kuadratik paydalı yapısı için güvenilirlik fonksiyonunun tanımından yararlanarak aşağıdaki gibi bir karakterizasyon yapılabilir.

Teorem 3.2: X değişkeni (a,b) aralığında tanımlı sürekli bir rassal değişken olmak üzere, aşağıdaki koşul sağlandığında X Pearson Dağılış Ailesi’ne aittir;

$$m(x) = \mu + (a_0 + a_1x + a_2x^2)h(x) \tag{3.2}$$

Burada a_0, a_1 ve a_2 birer sabittir.(Unnikrishnan ve Sankaran, 1991: 1). Bu denklem bir önceki başlıkta elde edilmişti.

İspat: (3.1)’deki diferansiyel denklemden,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{(x + d)}{b_0 + b_1x + b_2x^2}$$

olduğu biliniyor. Bu denklem düzenlenerek,

$$\int_x^b (b_0 + b_1t + b_2t^2)f'(t)dt = -\int_x^b (t + d)f(t)dt$$

Şeklinde yazılabilir. Kısmi integral ile bu eşitlik;

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2)f(x) + b_1R(x) + 2b_2xR(x)$$
$$+ 2b_2\int_x^b R(t)dt = -xR(x) + \int_x^b R(t)dt + dR(x)$$

Olur. $f(x) = h(x)R(x)$ (bkz Tablo 1.1) bilgisi bu eşitlikte kullanılırsa;

$$[(b_0 + b_1x + b_2x^2)h(x) + b_1 - d + (2b_2 - 1)x]R(x) = (1 - 2b_2)\int_x^b R(t)dt$$

Buna ek olarak $a_i \equiv b_i/(1 - 2b_2)$, $i = 0,1,2$, $\mu = b_1 - d/(1 - 2b_2)$ ve eşitlik (3.2)'den,

$$[(a_0 + a_1x + a_2x^2)h(x) + \mu - x)] = \int_x^b R(t)dt$$

Olur. Böylece,

$$[m(x) - x]R(x) = \int_x^b R(t)dt$$

Aynı zamanda bu eşitlikten yararlanarak;

$$m(x) - x = \frac{1}{R(x)}\int_x^b R(t)dt$$

Birinci bölümde ortalama artık yaşam fonksiyonu tanımlanmıştı. O halde bu eşitlik,

$$m(x) = r(x) + x$$

Olur. Böylece güvenilirlik fonksiyonunun tanımından yola çıkarak, kuadratik paydalı Pearson Diferansiyel Denklemi için canlılık fonksiyonu, güvenilirlik fonksiyonu ve hazard fonksiyonu arasındaki ilişki elde edilmiştir. Aynı zamanda canlılık fonksiyonu ve ortalama artık yaşam fonksiyonunun ilişkisi de gösterilmiştir.

3.2.2 Koşullu Moment Yaklaşımı

Kuadratik paydalı Pearson Diferansiyel Denklemi yapısı için aynı zamanda koşullu momentlerden yararlanılarak da bir karakterizasyon uygulaması yapılabilmektedir.

X : Ω→ H ve H=(*a*,*b*)'dır. Burada *a*<*b*; *a*=-∞ ve *b*=+∞ değerini alabilmektedir. X'in Pearson Sistemine ait olabilmesi için olasılık yoğunluk fonksiyonunun türevlenebilir ve (3.1)'deki denklemi sağlıyor olması gerekir;

Teorem 3.3: X : Ω→ H bir rassal değişken, $E(X^2) < \infty$ ve $E(X|X \geq x)$ ile $E(X^2|X \geq x)$ H üzerinde türevlenebilir olmak üzere; X'in dağılışı aşağıdaki koşul sağlandığında Pearson Dağılış Ailesi'ne aittir;

$$E(X^2|X > x) = P(x)E(X|X > x) + Q(x), \quad x\epsilon H$$

Burada P(x) ve Q(x) birinci dereceden polinomlardır. (Glanzel, 1991: 2)

İspat: $E(X^2) < \infty$ ve $P(x) = rx + t, Q(x) = ux + w$ varsayımları altında eşitlik şu şekilde ifade edilebilir;

$$E(X^2|X \geq x) = E(X|X \geq x)(rx + t) + ux + w$$

$$\int_x^b x^2 f(x)dx = (rx + t)\int_x^b xf(x)dx + (ux + w)\int_x^b f(x)dx$$

Bu denklem iki kez türevlenir ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$-x^2 f(x) = r\int_x^b xf(x)dx - (rx + t)xf(x) + u\int_x^b f(x)dx - (ux + w)f(x)$$

$$-2xf(x) - x^2 f'(x) =$$

$$-rxf(x) - (2rx + t)f(x) - (rx^2 + tx)f'(x) - 2uf(x) - (ux + w)f'(x)$$

$$[x^2(r-1) + (t+u)x + w]f'(x) = [(2-3r)x - (t+2u)]f(x)$$

$$\frac{d\log f}{dx} = -\frac{(3r-2)x + (t+2u)}{(r-1)x^2 + (t+u)x + w} \quad , \quad x\epsilon H$$

Böylece X'in dağılışının Pearson Sistemi'ne ait olduğu görülmektedir.

Şimdi X'in olasılık yoğunluk fonksiyonunun (3.1)'deki Pearson diferansiyel denklemine ait olduğu varsayılsın. O halde eşitlik (3.1) tüm $x\epsilon H$ için sağlanacaktır.

$$-(a_0 + a_1 x).f = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)f', \qquad x\epsilon H$$

Bu ifadenin x'ten b'ye integrali alınırsa

$$\int_x^b -(a_0 + a_1 x)f(x)dx = \int_x^b (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)f'(x)dx$$

Eşitliğin sağ tarafında kısmi integral uygulanırsa;

$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = u$ $\qquad$ $f'(x)dx = dv$

$b_1 + 2b_2 x = du$ $\qquad$ $f(x) = v$

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2).f(x)|_x^b - 2b_2\int_x^b xf(x)dx - b_1\int_x^b f(x)dx$$

Eşitliğin sol tarafında gerekli işlemler yapılırsa;

$$\int_x^b -(a_0 + a_1 x)f(x)dx = -a_1\int_x^b xf(x)dx - a_0\int_x^b f(x)dx$$

Elde edilir.

Bu ifadeler düzenlenerek;

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2).f(x)|_x^b - 2b_2 \int_x^b xf(x)dx - b_1 \int_x^b f(x)dx$$

$$= -a_1 \int_x^b xf(x)dx - a_0 \int_x^b f(x)dx$$

$\int_x^b f(x)dx = R(x)$ ve $\frac{1}{R(t)}\int_t^\infty tf(t)dt = E(X|X \geq t)$ Olmak üzere,

$$-(b_0 + b_1x + b_2x^2).\frac{f(x)}{R(x)} = (2b_2 - 1)E(X|X \geq x) + b_1 - a_0 = 0 \quad (3.3)$$

Şimdi eşitlik (3.1)'in pay ve paydasının x ile genişletildiği varsayılsın. O halde ;

$$-(a_1x^2 + a_0x).f(x) = (b_0x + b_1x^2 + b_2x^3).f'(x)$$

Olur.

Bu ifade için yukarıdaki işlemler uygulandığında;

$$-(b_0x + b_1x^2 + b_2x^3).\frac{f(x)}{R(x)}$$
$$= -(3b_2 - 1)E(X^2|X \geq x) + (2b_1 - a_0)E(X|X \geq x) - b_0 \quad (3.4)$$

(3.3) no'lu denklem x ile genişletilip (3.4) ile eşitlenirse;

$$x(2b_2 - 1)E(X|X \geq x) + (b_1 - a_0)x$$
$$= -(3b_2 - 1)E(X^2|X \geq x) + (2a_0 - b_1)E(X|X \geq x) - b_0$$

$$(3b_2 - 1)E(X^2|X \geq x)$$
$$= [\,(2b_2 - 1)x + (a_0 - 2b_1)]E(X|X \geq x) + (b_1 - a_0)x - b_0$$

Her iki taraf $(3b_2 - 1)$'e bölündüğünde;

$$E(X^2|X \geq x) = \left[\frac{(2b_2 - 1)}{3b_2 - 1}x + \frac{(a_0 - 2b_1)}{3b_2 - 1}\right]E(X|X \geq x) + \frac{(b_1 - a_0)}{3b_2 - 1}x - \frac{b_0}{3b_2 - 1}$$

Elde edilir. O halde;

$$r = \frac{(2b_2 - 1)}{3b_2 - 1}, t = \frac{(a_0 - 2b_1)}{3b_2 - 1}, u = \frac{(b_1 - a_0)}{3b_2 - 1} ve\ w = -\frac{b_0}{3b_2 - 1}$$

olarak bulunur. Böylece ikinci dereceden koşullu moment ile birinci dereceden koşullu moment arasındaki ilişki elde edilmiştir.

3.3 KUADRATİK PAYDALI GENELLEŞTİRİLMİŞ PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ

3.3.1 Giriş

X, dağılış fonksiyonu *F(x)* olan (*a*,*b*) aralığında tanımlı sürekli bir değişken olsun. *f(x)* olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, *f(x)* türevlenebilir ve aşağıdaki diferansiyel denklemi sağlayabilir ise Genelleştirilmiş Pearson Dağılışı gösterir;

$$\frac{d\, logf(x)}{dx} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \tag{3.5}$$

3.3.2 Koşullu Moment Yaklaşımı

Bir önceki bölümde bahsedilen koşullu moment yaklaşımı, burada Genelleştirilmiş Pearson Diferansiyel Denklemi için uygulanacaktır.

Teorem 3.4: *X* sürekli bir rassal değişken olsun.

$E(X^3) < \infty, E(X^3|X > x)\,, E(X^2|X > x)\ ve\ E(X|X > x)$ türevlenebilir olmak üzere; aşağıdaki koşul sağlandığında X Genelleştirilmiş Pearson Dağılışı göstermektedir;

$$a_2 E(X^3|X > x) = A(x)E(X^2|X > x) + B(x)E(X|X > x) + C(x)$$

Burada $A(x) = a_2 x + q$ ve B(x),C(x) birinci dereceden polinomlardır. (Sindu, 2002: 36)

İspat: $A(x) = a_2 x + q, B(x) = rx + s\ ve\ C(x) = tx + u$ yukarıdaki eşitlikte yerine yazıldığında;

$$a_2 E(X^3|X > x) = (a_2 x + q)E(X^2|X > x) + (rx + s\,)E(X|X > x) + tx + u$$

Elde edilir. Bu ifadenin iki kez türevi alınıp düzenlendiğinde;

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a_2 x^2 + (2q + 3r) + s + 2t}{(q + r)x^2 + (s + t)x + u}$$

Olur. Böylece X'in Genelleştirilmiş Pearson Dağılışı gösterdiği belirlenir.

Şimdi X'in (3.5)'deki yapıya uygun bir dağılış gösterdiği varsayılsın. O halde;

$$f(x)[a_0 + a_1 x + a_2 x^2] = f'(x)[b_0 + b_1 x + b_2 x^2]$$

Bu ifadenin x'ten b'ye integrali alınır ve R(x)'e bölünürse;

$$\int_x^b f(x)[a_0 + a_1x + a_2x^2]dx = \int_x^b f'(x)[b_0 + b_1x + b_2x^2]dx$$

Eşitliğin sağ tarafı kısmi integral ile;

$b_0 + b_1x + b_2x^2 = u$ $\qquad\qquad f'(x)dx = dv$

$b_1 + 2b_2x = u$ $\qquad\qquad f(x) = v$

$$\int_x^b f'(x)[b_0 + b_1x + b_2x^2]dx$$

$$= (b_0 + b_1x + b_2x^2)f(x)|_x^b - b_1\int_x^b f(x)dx + 2b_2\int_x^b xf(x)dx$$

Eşitliğin sol tarafı;

$$\int_x^b f(x)[a_0 + a_1x + a_2x^2]dx = a_0\int_x^b f(x)dx + a_1\int_x^b xf(x)dx + a_2\int_x^b x^2f(x)dx$$

Bu iki eşitlik birleştirilip *R(x)*’e bölündüğünde;

$$-[b_0 + b_1x + b_2x^2]\frac{f(x)}{R(x)}$$
$$= a_0 + b_1 + (2b_2 + a_1)E(X|X > x) + a_2E(X^2|X > x) \qquad (3.6)$$

Şimdi eşitlik (3.5)’in pay ve paydası x ile genişletilip aynı işlemler uygulanırsa;

$$\int_x^b f(x)[a_0x + a_1x^2 + a_2x^3]dx = \int_x^b f'(x)[b_0x + b_1x^2 + b_2x^3]dx$$

$$-[b_0x + b_1x^2 + b_2x^3]\frac{f(x)}{R(x)}$$
$$= b_0 + (2b_1 + a_0)E(X|X > x)$$
$$+ (3b_2 + a_1)E(X^2|X > x) + a_2E(X^3|X > x) \qquad (3.7)$$

Denklem (3.6) x ile genişletilip (3.7)’ye eşitlenirse;

$$(a_0 + b_1)x + (2b_2 + a_1)xE(X|X > x) + a_2xE(X^2|X > x)$$
$$= b_0 + (2b_1 + a_0)E(X|X > x)$$
$$+ (3b_2 + a_1)E(X^2|X > x) + a_2E(X^3|X > x)$$

Elde edilen bu ifade düzenlenirse,

$$a_2E(X^3|X > x) = [a_2x - (3b_2 + a_1)]E(X^2|X > x)$$
$$+[(2b_2 + a_1)x - (2b_1 + a_0)]E(X|X > x) + [(a_0 + b_1)x - b_0]$$

Elde edilir. Böylece ;

$A(x) = a_2 x - (3b_2 + a_1),$

$B(x) = (2b_2 + a_1)x - (2b_1 + a_0)$,

$C(x) = (a_0 + b_1)x - b_0$

Olur. Böylece bölüm 3.2'de bahsedilen koşullu moment yaklaşımı, burada Genelleştirilmiş Pearson Diferansiyel Denklemi için uygulanıp, üçüncü dereceden koşullu moment ile diğer iki küçük dereceli koşullu momentler arasındaki ilişki elde edilmiştir. Burada üçüncü dereceden koşullu momentin elde edilmesi, asimetrik dağılışlar söz konusu olduğunda çok önemlidir. Çünkü üçüncü dereceden koşullu moment dağılışın çarpıklığını belirlemekte kullanılmaktadır.

3.4 KÜBİK PAYDALI PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ

3.4.1 Giriş

Paydadaki fonksiyonun kübik olması durumunda Pearson diferansiyel denklemi,

$$\frac{1}{f(z)}\frac{df(z)}{dz} = \frac{z-a}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3} \tag{3.8}$$

Olacaktır (Şehirlioğlu, 2011). Denklemde z standart şans değişkenlerini $\mu_1' = 0$ ve $\mu_2' = 1$, temsil etmektedir. Kübik paydalı ($b_3 \neq 0$) Pearson sistemi simetrik bir dağılım türetemez (Şehirlioğlu, 2011). Denklemin çözümü ile momentlere dayalı bir denklem,

$$nb_0\mu_{n-1}' + (n+1)b_1\mu_n' + (n+2)b_2\mu_{n+1}' + (n+3)b_3\mu_{n+2}' = a\mu_n' - \mu_{n+1}' \tag{3.9}$$

bulunur, (bkz Ek: 3). Eşitlik (3.8) için gerçekleştirilen çözüm sonucunda elde edilen $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu B, J ya da U biçimli olabilir. Biçim genel olarak modun (antimodun) işareti ve köklere göre konumu ile belirlenir. $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun biçimini belirleyen bir diğer önemli özellik ise asimetrisinin yönü ve büyüklüğüdür. Standart değişkene göre, $\mu_1' = 0$ ve $\mu_2' = 1$, tanımlanmış dağılımlarda modun işareti sağa çarpık dağılımlar için negatif, sola çarpık dağılımlarda ise pozitiftir.

Sonuç olarak eşitlik (3.8) ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü tanımlayan bir $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilmek istendiğinde çözüm yukarıdaki açıklamalar dikkate alınarak elde edilmelidir. Çözüm genel olarak üç aşamalıdır:

1. Veri seti standart değişkene göre düzenlenir ve ilk altı momenti tahminlenerek asimetrinin yönü belirlenir.
2. Asimetrinin yönü dikkate alınarak eşitlik (3.9) ile verilen moment denkleminden a, b_0, b_1, b_2, b_3 katsayıları bulunarak denklemin kökleri r_1, r_2, r_3 elde edilir ve köklere göre a değerinin konumu belirlenerek dağılımın tipi bulunur.
3. Dağılışın tipi ve asimetrisi dikkate alınarak $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun m_1, m_2, m_3 parametre tahminleri elde edilerek dağılış tanımlanır. (Şehirlioğlu, 2011)

3.4.2 Kübik Payda İçin Dağılım Sistemi

Diferansiyel denklemin çözümü sonucunda elde edilecek dağılış ailesi paydadaki kübik denklemin köklerine bağımlıdır. Bir kübik denklemin diskriminantı genel olarak:

$$\Delta = 18b_3b_2b_1b_0 - 4b_2^3b_0 + b_2^2b_1^2 - 4b_3b_1^3 - 27b_3^2b_0^2$$

olup,

$\Delta > 0$ ise üç gerçel kök

$\Delta = 0$ ise en az iki gerçel ve katlı kök

$\Delta < 0$ ise bir gerçel iki karmaşık kök

Vardır (Şehirlioğlu, 2011). Kökler r_1, r_2, r_3 olarak tanımlanmıştır.

$$r_1 = A + B + \frac{b_2}{3b_3}$$

$$r_2 = -\frac{1}{2}(A+B) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B) + \frac{b_2}{3b_3}$$

$$r_3 = -\frac{1}{2}(A+B) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B) + \frac{b_2}{3b_3}$$

Eğer $\Delta>0$ ise dört temel durum söz konusudur. Bu tipler ana tip olarak adlandırılacaktır:

a) Aynı işaretli kökler (üç pozitif kök Tip CI ve üç negatif kök Tip CIV)

b) Farklı işaretli kökler (iki pozitif bir negatif Tip CII ve bir pozitif iki negatif Tip CIII)

Tip numarasının önündeki C harfi kübik payda ile elde edilen dağılımları Pearson'un kuadratik paydalı dağılımlarından ayırmak için kullanılmıştır. Eşitlik (3.8) ile tanımlanan diferansiyel denklemin, standart değişkenler için, çözümü modun orijine göre konumuna bağlı olarak, sağa çarpık dağılımlar, *z-a*>0 için,

$$\frac{1}{f(z)}\frac{df(z)}{dz}=\frac{z-a}{b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3}$$

ve sola çarpık dağılımlar, (*z-a*)<0 için

$$\frac{1}{f(z)}\frac{df(z)}{dz}=-\frac{z-a}{b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3}$$

denklemlerinden kısmi kesirler yöntemi kullanılarak ele edilebilir. İstatistiksel dağılımların biçimleri genel olarak B, J ve U olarak sınıflandırılabilir. Dağılımın tanım aralıklarından biri sonlu diğeri sonsuz ise bu dağılımın biçimi B ya da J olabilir. Eğer dağılımın her iki ucu da sonlu ise dağılımın biçimi B, J ya da U olabilir. Her iki ucu da sonsuz (eksi ve artı) olan dağılımlar sadece B biçimlidir.

Dağılışın tipi diskriminant değeri ve kök işaretlerine göre belirlenir. Dağılışın biçimi ise üs parametrelerinin işaretlerine göre belirlenir. Üs işaretleri ise diferansiyel denklemin pay kısmının işaretine göre belirlenir. Örneğin, sağa çarpık bir CII dağılımının simetriği sola çarpık bir CIII dağılımıdır. Bir CII (CIII) dağılımının simetriği ters yönde çarpıklığa sahip bir CIII (CII) dağılımı olup çarpıklığı etkileyen faktör tek momentlerin (μ_3 ve μ_5 parametrelerinin) işaretidir. J biçimli bir dağılımın üs işaretleri değiştiğinde aynı tipte ve ters çarpıklık yönünde bir J biçimli dağılım oluşur. Bunun nedeni modun (asimptotun) köklere göre konumunun değişmesidir. Diğer bir deyişle CII dağılımı ile CIII dağılımı birbirinin tümleyenidir. Ana tipler için birbirinin tümleyeni olan dağılımlar: Tip CI için Tip CIV, Tip CII için Tip CIII ve Tip CV için Tip CVI.(Şehirlioğlu, 2011)

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
KÜBİK PAYDALI PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN KARAKTERİZASYON UYGULAMALARI

4.1 KOŞULLU MOMENT YAKLAŞIMI

Bölüm 3'te bahsedilen koşullu moment yaklaşımı bu bölümde kübik paydalı Pearson diferansiyel denklemi için uygulanacaktır.

X sürekli bir rassal değişken olsun. X'in pdf'si *f(x)* aşağıdaki diferansiyel denklemi sağladığında Pearson Dağılış Ailesi'ne aittir;

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3} \tag{4.1}$$

Teorem 4.1: X sürekli bir rassal değişken olmak üzere, $E(X^3) < \infty, E(X^3|X > x)\,, E(X^2|X > x)\ ve\ E(X|X > x)$ türevlenebilir olmak üzere, aşağıdaki koşul sağlandığında X kübik paydalı Pearson diferansiyel denkleminin yapısına uymaktadır;

$$4b_3 E(X^3|X > x) = A(x)E(X^2|X > x) + B(x)E(X|X > x) + C(x)$$

Burada $A(x) = 3b_3 x - 3b_2,\ B(x) = (a_1 + 2b_2)x - 2b_1,\ C(x) = (a_0 + b_1)x - b_0$'dır.

İspat: $E(X|X > x) = \frac{1}{R(x)}\int_x^b tf(t)dt$ olmak üzere (bkz Bölüm 1.7),

$$4b_3 \int_x^b x^3 f(x)dx = (3b_3 x - 3b_2)\int_x^b x^2 f(x)dx$$

$$+[(a_1 + 2b_2)x - 2b_1]\int_x^b xf(x)dx + [(a_0 + b_1)x - b_0]\int_x^b f(x)dx$$

Birinci türev ile,

$$-4b_3 x^3 f(x) = 3b_3 \int_x^b t^2 f(t)dt - (3b_3 x^3 - 3b_0 x^2)f(x)$$

$$+ (a_1 + 2b_2)\int_x^b tf(t)dt - [(a_1 + 2b_2)x^2 - 2b_1 x]f(x)$$

$$+(a_0+b_1)\int_x^b f(t)dt - [(a_0+b_1)x - b_0]f(x)$$

İkinci türev,

$$-12b_3x^2f(x) - 4b_3x^3f'(x) = -3b_3x^2f(x) - (9b_3x^2 - 6b_0x)f(x)$$
$$-(3b_3x^3 - 3b_0x^2)f'(x) - (a_1+2b_2)xf(x) - [2(a_1+2b_2)x - 2b_1]f(x)$$
$$-[(a_1+2b_2)x^2 - 2b_1x]f'(x) - (a_0+b_1)f(x)$$
$$-[(a_0+b_1)x - b_0]f'(x) - (a_0+b_0)f(x)$$

Olur. Bu ifade düzenlenerek,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(3a_1+6b_2-6b_0)x + 2(a_0+b_1)}{b_3x^3 + (3b_0 - a_1 - 2b_2)x^2(2b_1 - a_0 - b_1)x + b_0}$$

Elde edilir. Böylece X'in dağılışının kübik paydalı Pearson diferansiyel denklemine ait olduğu görülmektedir.

(4.1)'deki diferansiyel denklemden,

$$f(x)[a_0+a_1x] = f'(x)[b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3]$$

Bu ifadenin x'ten b'ye integrali alınırsa;

$$\int_x^b [a_0+a_1t]\,f(t)dt = \int_x^b [b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3]\,f'(t)dt$$

Eşitliğin sağa tarafında kısmi integral uygulanırsa;

$b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3 = u$ $\qquad$ $f'(t)dt = dv$

$b_1+2b_2t+3b_3t^2 = du$ $\qquad$ $f(t) = v$

$$(b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3)f(t)|_x^b - b_0\int_x^b f(t)dt - 2b_2\int_x^b tf(t)dt - 3b_3\int_x^b t^2f(t)dt$$

Eşitliğin sol tarafı;

$$\int_x^b [a_0+a_1t]\,f(t)dt = a_0\int_x^b f(t)dt + a_1\int_x^b tf(t)dt$$

Bu iki eşitlik birleştirilip gerekli işlemler yapıldığında;

$$-(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)\frac{f(x)}{R(x)}$$
$$= (a_0+b_0) + (a_1+2b_2)E(X|X>x) + 3b_3E(X^2|X>x) \qquad (4.2)$$

Şimdi (4.1)'daki eşitliğin pay ve paydası x ile genişletilirse;

$$f(x)[a_0x+a_1x^2] = f'(x)[b_0x+b_1x^2+b_2x^3+b_3x^4]$$

Olur. Aynı işlemler bu eşitlik için uygulandığında;

$$\int_x^b [a_0 t + a_1 t^2]\, f(t)dt = \int_x^b [b_0 t + b_1 t^2 + b_2 t^3 + b_3 t^4]\, f'(t)dt$$

Sağ taraf;

$b_0 t + b_1 t^2 + b_2 t^3 + b_3 t^4 = u$ $\qquad$ $f'(t)dt = dv$

$b_0 + 2b_1 t + 3b_2 t^2 + 4b_3 t^3 = du$ $\qquad$ $f(t) = v$

$$(b_0 t + b_1 t^2 + b_2 t^3 + b_3 t^4) f(t)|_x^b - b_0 \int_x^b f(t)dt -$$

$$2b_1 \int_x^b t f(t)dt - 3b_2 \int_x^b t^2 f(t)dt - 4b_3 \int_x^b t^3 f(t)dt$$

Sol taraf;

$$\int_x^b [a_0 t + a_1 t^2]\, f(t)dt = a_0 \int_x^b t f(t)dt + a_1 \int_x^b t^2 f(t)dt$$

İki ifade birleştirilip gerekli işlemler yapıldığında;

$$-(b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + b_3 x^4) \frac{f(x)}{R(x)} = b_0 + (a_0 + 2b_1) E(X|X > x)$$

$$+(a_1 + 3b_2) E(X^2|X > x) + 4b_3 E(X^3|X > x) \qquad (4.3)$$

(4.2)’deki ifade x ile genişletilip (4.3)’ye eşitlenirse;

$$(a_0 + b_1)x + (a_1 + 2b_2) x E(X|X > x) + 3b_3 x E(X^2|X > x) =$$

$$b_0 + (a_0 + 2b_1) E(X|X > x) + (a_1 + 3b_2) E(X^2|X > x) + 4b_3 E(X^3|X > x)$$

$$4b_3 E(X^3|X > x) = [(a_0 + b_1)x - b_0] + [(a_1 + 2b_2)x$$

$$-(a_0 + 2b_1)] E(X|X > x) + [3b_3 x - (a_1 + 3b_2)] E(X^2|X > x)$$

Bu durumda;

$A(x) = 3b_3 x - (a_1 + 3b_2)$

$B(x) = (a_1 + 2b_2)x - (a_0 + 2b_1)$

$C(x) = (a_0 + b_1)x - b_0$

Olur. Bu sonuçla üçüncü dereceden koşullu moment ile ikinci ve birinci derecelerden koşullu momentler arasındaki ilişki kübik paydalı diferansiyel denklemin parametreleri cinsinden elde edilmiştir.

4.2 GÜVENİLİRLİK FONKSİYONU YAKLAŞIMI

Bölüm 3'te bahsedilen güvenilirlik fonksiyonu yaklaşımı bu bölümde kübik paydalı Pearson Diferansiyel Denklemi için uygulanacaktır.

Teorem 4.3: X sürekli bir rassal değişken olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlandığında, X'in dağılışı kübik paydalı Pearson diferansiyel denklemi yapısına uymaktadır.

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)h(x) = [(a_1 + 2b_2)\mu_1 + 3b_3\mu_2]\left(1 + \frac{1}{R(x)}\right)$$

İspat: (4.1)'deki diferansiyel denklemden,

$$\int_x^b (a_0 + a_1x)f(x)dx = \int_x^b (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)f'(x)dx$$

Olduğu biliniyor. Eşitliğin sağ tarafında kısmi integral uygulanırsa;

$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 = u$ $\qquad$ $f'(x)dx = dv$

$b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 = du$ $\qquad$ $f(x) = v$

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)f(x)|_x^b - b_1\int_x^b f(x)dx$$

$$-2b_2\int_x^b xf(x)dx - 3b_3\int_x^b x^2f(x)dx$$

Buradaki terimler incelendiğinde,

$$\int_x^b f(x)dx = R(x)$$

$$-2b_2\int_x^b xf(x)dx = -2b_2xR(x) + 2b_2\int_x^b R(x)dx$$

$$-3b_3\int_x^b x^2f(x)dx = -3b_3x^2 + 6b_3\int_x^b xR(x)dx$$

Olduğu görülmektedir. Eşitliğin sağ tarafı;

$$-(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)f(x) - b_1R(x) - 2b_2xR(x) + 2b_2\int_x^b R(x)dx$$

$$-3b_3x^2R(x) + 6b_3\int_x^b xR(x)dx$$

Olur. Sol taraf için aynı işlemler uygulanırsa;

$$\int_x^b (a_0 + a_1x)f(x)dx = a_0R(x) + a_1xR(x) - a_1\int_x^b R(x)dx$$

Elde edilen sonuçlar birleştirildiğinde;

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)f(x) + b_1R(x) + 2b_2xR(x) - 2b_2\int_x^b R(x)dx$$

$$+3b_3x^2R(x) - 6b_3\int_x^b xR(x)dx + a_0R(x) + a_1xR(x) - a_1\int_x^b R(x)dx = 0$$

Burada $f(x) = h(x).R(x)$ eşitliğinden yararlanarak;

$$[(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)h(x) + b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + a_0 + a_1x]R(x)$$

$$= (2b_2 + a_1)\int_x^b R(x)dx + 6b_3\int_x^b xR(x)dx$$

Şeklinde yazılabilir. Gerekli düzenlenmeler yapılarak,

$$[(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)h(x) + (a_0 + b_1) + (a_1 + 2b_2)x + 3b_3x^2]R(x)$$

$$= (2b_2 + a_1)\int_x^b R(x)dx + 6b_3\int_x^b xR(x)dx$$

$$[(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)h(x) + (a_0 + b_1) + (a_1 + 2b_2)x + 3b_3x^2]$$

$$= \frac{(2b_2 + a_1)}{R(x)}\int_x^b R(x)dx + \frac{6b_3}{R(x)}\int_x^b xR(x)dx$$

Elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında;

$$A = \frac{(2b_2 + a_1)}{R(x)}\int_x^b R(x)dx + \frac{6b_3}{R(x)}\int_x^b xR(x)dx$$

Olsun. Moment denklemlerinden;

$[a_0 + b_1] + [a_1 + 2b_2]\mu_1' + 3b_3\mu_2' = 0$ olduğu biliniyor (bkz. Ek: 3 Eşitlik 4.1.1). Bu bilgiden yararlanarak eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa,

$$a_0 + b_1 + (a_1 + 2b_2)\int_x^b xf(x)dx + 3b_3\int_x^b x^2 f(x)dx = 0$$

$$-3b_3\int_x^b x^2 f(x)dx = a_0 + b_1 + (a_1 + 2b_2)\int_x^b xf(x)dx$$

Olur. Kısmi integral ile;

$$\int_x^b xR(x)dx = -\frac{(a_0 + b_1)}{6b_3} - \frac{1}{6b_3}[-(a_1 + 2b_2 - 3b_3x]xR(x)$$

$$-\frac{(a_1 + 2b_2)}{6b_3}\int_x^b R(x)dx$$

Elde edilen bu sonuç A'da yerine yazıldığında,

$$A = \frac{(2b_2 + a_1)}{R(x)}\int_x^b R(x)dx$$

$$+\frac{6b_3}{R(x)}\left\{-\frac{(a_0 + b_1)}{6b_3} - \frac{1}{6b_3}[-(a_1 + 2b_2 - 3b_3x]xR(x) - \frac{(a_1 + 2b_2)}{6b_3}\int_x^b R(x)dx\right\}$$

$$= \frac{(a_1 + 2b_2)}{R(x)}\int_x^b R(x)dx$$

$$-\frac{(a_1 + 2b_2)}{R(x)}\int_x^b R(x)dx - \frac{(a_0 + b_1)}{R(x)} + [(a_1 + 2b_2) + 3b_3x]x$$

$$A = -\frac{(a_0 + b_1)}{R(x)} + [(a_1 + 2b_2) + 3b_3x]x$$

Olur. Elde edilen bu A değerini yerine koyduğumuzda;

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)h(x) + (a_0 + b_1) + (a_1 + 2b_2)x + 3b_3x^2$$

$$= -\frac{(a_0 + b_1)}{R(x)} + [(a_1 + 2b_2) + 3b_3x]x$$

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)h(x) + (a_0 + b_1) + (a_1 + 2b_2)x + 3b_3x^2$$
$$= -\frac{(a_0 + b_1)}{R(x)} + (a_1 + 2b_2)x + 3b_3x^2$$
$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)h(x) + (a_0 + b_1) = -\frac{(a_0 + b_1)}{R(x)}$$
$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)h(x) = -(a_0 + b_1)\left(1 + \frac{1}{R(x)}\right)$$

Moment denklemlerinden $-(a_0 + b_1) = (a_1 + 2b_2)\mu_1 + 3b_3\mu_2$ (bkz. Ek: 3 Eşitlik 4.1.1) olduğu biliniyor.

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)h(x) = [(a_1 + 2b_2)\mu_1 + 3b_3\mu_2]\left(1 + \frac{1}{R(x)}\right)$$

Böylece kullanılan Pearson diferansiyel denklem tipi için güvenilirlik fonksiyonu, hazard fonksiyonu, birinci moment ve ikinci moment arasındaki ilişki elde edilmiştir.

SONUÇ

Güvenilirlik analizinde hata dağılışlarının doğru modellenmesi çok önemlidir. Yapılacak olan çalışmaların doğruluğu da model seçiminin isabetli yapılmasına bağlıdır. Günlük hayatımızda kullandığımız ürünlerin çoğunun hata dağılışları asimetriktir. Dolayısıyla güvenilirlik analizinde de en çok bu tip dağılışlar kullanılmaktadır. Bu bakış açısıyla bu çalışmada Pearson diferansiyel denklemi asimetrik dağılışlar türeten bir formda kullanılmıştır.

Daha önce yapılan çalışmalarda (bkz Unnikrishnan ve Sankaran, 1991; Glanzel, 1991; Sindu, 2002) güvenilirlik fonksiyonu yaklaşımı ve koşullu momentler ayrı ayrı ele alınmıştır. Bu çalışmada parametreleri belirlenmiş bir dağılışın Pearson diferansiyel denkleminin kübik paydalı yapısına uygun olduğu durumda önce güvenilirlik fonksiyonu yaklaşımıyla birinci ve ikinci moment ile güvenilirlik fonksiyonu ve hazard fonksiyonu arasındaki ilişki elde edildi. Daha sonra koşullu moment yaklaşımı dikkate alınarak, üçüncü dereceden koşullu moment karakterize edildi. Tüm bu bilgiler beraber değerlendirilerek üçüncü dereceden koşullu moment ile güvenilirlik fonksiyonu ve hazard fonksiyonu arasındaki ilişki elde edilmiş oldu. Bu bilgilerin elde edilmesiyle araştırmacının model üzerindeki hâkimiyetinin artması hedeflenmiştir. Elde edilen bu asimetri ölçüsünün bilinmemesi durumunda aynı ortalama ve varyansa sahip fakat çarpıklık ve basıklıkları farklı dağılışlar ortaya çıkacaktır. Dolayısıyla bu farklı dağılışların her biri için farklı güvenilirlik ölçüleri olacaktır. Bu çalışmada önerilen yöntem ile böyle durumlarda araştırmacının elinde model hakkında karar vermek için daha fazla bilgi mevcut olacaktır.

KAYNAKÇA

Asadi, M. (1998). Characterization of the Pearson System of Distributions Based on Reliability Measures. Statistical Papers. 39(1): 347-360

Elderton, W.P. (1953). Frequency Curves and Correlation. London: Charles and Edwin Layton

Fisz, M. (1967). Probability Theory and Mathematical Statistics. New York: John Wiley and Sons Inc.

Glanzel, W., Telcs, A. ve Schubert, A. (1984). Characterization by Truncated Moments and Its Application to Pearson-Type Distributions. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitsheorie and Verwandte Gebiete. 66(2): 173-183

Glanzel, W. (1991). Characterization trough Some Conditional Moments of Pearson-Type Distributions and Discrete Analogues. The Indian Journal of Statistics. 53(1): 17-24

Gupta, R.C ve Bradley, D.M. (2003). Representing the Mean Residual Life in Terms of the Failure Rate. Mathematical and Computer Modelling. 37(12): 1271-1280

Hogg, R.V., Craig, A.T. (1995). Introduction to Mathematical Statistics. Hong Kong: Higher Education Press

Kotz, S. (1974). Characterizations of Statistical Distributions: A Supplement to Recent Surveys. International Statistical Review. 42(1): 39-65

Lawless, J. (2003). Statistical Models and Methods for Lifetime Data. New Jersey: John Wiley and Sons Inc.

Nair, N.U. ve Sankaran, P.G. (1991). Characterization of the Pearson Family of Distributions. IEE Transactions on Reliability. 40(1): 75-77

Nair, N.U. ve Sankaran, P.G. (2000). On Some Reliability Aspects of Pearson Family of Distributions. Statistical Papers. 41(1): 109-117

Navarro, J., Franco, M. ve Ruiz, J.M (1998). Characterization Through Moments of the Residual Life and Conditional Spacings. The Indian Journal of Statistics. 60(1): 36-48

Osaki, S. ve Li, X. (1988). Characterizations of Gamma and Negative Binomial Distributions. IEE Transactions on Reliability. 37(4): 379-382

Papathanasiou, V. (1995). A Characterization of the Pearson System of Distributions and the Associated Orthogonal Polynomials. Ann. Inst. Statist. Math. 47(1): 171-176

Pearson, K. (1916) Mathematical Contributions to the Theory of Evolution. XIX. Second Supplement to a Memoir on Skew Variation, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 216(1): 429-457

Rausand, M. ve Hoyland, A. (2004). System Reliability Theory. New Jersey: John Wiley and Sons Inc.

Sankaran, P.G. (1992). Characterization of Probability Distributions by Reliability Concepts. Cochin University of Science and Technology, Department of Statistics

Sankaran, P.G., Nair, N.U ve Sindu, T.K. (2003). A Generalized Pearson System Useful in Reliability Analysis. Statistical Papers. 44(1): 125-130

Saraçoğlu, B. ve Çevik, F. (1995). Matematiksel İstatistik. Ankara: Gazi Büro Kitabevi

Shakil, M., Kibria, B.M ve Singh, J.N (2010). A New Family of Distributions Based on the Generalized Pearson Differantial Equation with some Applications. Austrian Journal of Statistics. 39(3): 259-278

Sindu, T.K. (2002). An Extended Pearson System Useful in Reliability Analysis. Cochin University of Science and Technology, Department of Statistics

Stuart, A. ve Ord, J. K., (1987). Kendall’s Advanced Theory of Statistics. New York: Oxford University Pres

Şehirlioğlu, A.K. (2011). Pearson Dağılış Ailesi (Yayınlanmamış Ders Notları). İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi

Wasserman, G. (2002). Reliability Verification, Testing, and Analysis in Engineering Design. New York: Marcel Dekker Inc

EKLER

EK 1: Kuadratik Paydalı Klasik Pearson Diferansiyel Denkleminin Moment Denklemleri

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

Olmak üzere ,

$$\int_r^s x^n (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) f'(x) dx = -\int_r^s x^n (a_0 + a_1 x) f(x) dx$$

Eşitliğin sol tarafında kısmi integral uygulanırsa;

$x^n (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = u$ $\qquad$ $f'(x)dx = dv$

$(n+2) b_2 x^{n+1} + (n+1) b_1 x^n + n b_0 x^{n-1} = du$ $\qquad$ $f(x) = v$

$$x^n (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) f(x)|_r^s - (n+2) b_2 \int_r^s x^{n+1} f(x) dx - (n+1) b_1 \int_r^s x^n f(x) dx - n b_0 \int_r^s x^{n-1} f(x) dx$$

Sağ tarafta gerekli işlemler yapılırsa;

$$-\int_r^s x^n (a_0 + a_1 x) f(x) dx = -a_1 \int_r^s x^{n+1} f(x) dx - a_0 \int_r^s x^n f(x) dx$$

$x^n (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) f(x)|_r^s = 0$ olmak üzere, bu iki ifadeyi birleştirdiğimizde

$$[a_1-(n+2)b_2]\int_r^s x^{n+1}f(x)dx+[a_0-(n+1)b_1]\int_r^s x^n f(x)dx$$
$$-nb_0\int_r^s x^{n-1}f(x)dx=0$$

Olur.

$\int_r^s x^n f(x)dx=\mu_n^{'}$ olmak üzere ;

$$[a_1-(n+2)b_2]\mu_{n+1}^{'}+[a_0-(n+1)b_1]\mu_n^{'}-nb_0\mu_{n-1}^{'}=0$$

Denklemi elde edilir.

Burada $\mu_0^{'}=1$ olmak üzere;

n=0 için ; $(1-2b_2)\mu_1^{'}+a_0-b_1=0$ (3.2.1)

n=1 için ; $(1-3b_2)\mu_2'+(a_0-2b_1)\mu_1'-b_0=0$ (3.2.2)

n=2 için ; $(1-4b_2)\mu_3'+(a_0-3b_1)\mu_2'-2b_0\mu_1'=0$ (3.2.3)

n=3 için ; $(1-5b_2)\mu_4'+(a_0-4b_1)\mu_3'-3b_0\mu_2'=0$ (3.2.4)

EK 2: Kuadratik Paydalı Genelleştirilmiş Pearson Diferansiyel Denkleminin Moment Denklemleri

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

$$\int_r^s x^n\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) f(x) dx = \int_r^s x^n (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) f'(x) dx$$

Eşitliğin sağ tarafında kısmi integral uygulanırsa;

$x^n(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = u$ $\qquad$ $f'(x)dx = dv$

$nx^{n-1}b_0 + (n+1)x^n b_1 + (n+2)x^{n+1} b_2 = du$ $\qquad$ $f(x) = v$

$$x^n(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) f(x)|_r^s - nb_0 \int_r^s x^{n-1} f(x)\,dx - (n+1)b_1 \int_r^s x^n\, f(x) dx$$
$$- (n+2) b_2 \int_r^s x^{n+1} f(x) dx$$

Eşitliğin sol tarafı;

$$\int_r^s x^n\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) f(x) dx$$
$$= a_0 \int_r^s x^n\, f(x) dx + a_1 \int_r^s x^{n+1}\, f(x) dx + a_2 \int_r^s x^{n+2} f(x) dx$$

Olur.

$x^n(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) f(x)|_r^s = 0$ olmak üzere, her iki taraf birbirine eşitlenirse,

$$nb_0 \int_r^s x^{n-1} f(x)\,dx + [a_0 + (n+1)b_1] \int_r^s x^n\, f(x)dx$$

$$+ [a_1 + (n+2)b_2] \int_r^s x^{n+1}\, f(x)dx + a_2 \int_r^s x^{n+2} f(x)dx = 0$$

$\int_r^s x^n f(x)dx = \mu'_n$ olmak üzere;

$$nb_0\mu'_{n-1} + [a_0 + (n+1)b_1]\mu'_n + [a_1 + (n+2)b_2]\mu'_{n+1} + a_2\mu'_{n+2} = 0$$

$\mu'_0 = 0$ olmak üzere;

n=0 için; $a_0 + b_1 + (a_1 + 2b_2)\mu'_1 + a_2\mu'_2 = 0$ (3.3.1)

n=1 için; $b_0 + [a_0 + 2b_1]\mu'_1 + [a_1 + 3b_2]\mu'_2 + a_2\mu'_3 = 0$ (3.3.2)

n=2 için; $2b_0\mu'_1 + [a_0 + 3b_1]\mu'_2 + [a_1 + 4b_2]\mu'_3 + a_2\mu'_4 = 0$ (3.3.3)

n=3 için; $3b_0\mu'_2 + [a_0 + 4b_1]\mu'_3 + [a_1 + 5b_2]\mu'_4 + a_2\mu'_5 = 0$ (3.3.4)

n=4 için; $4b_0\mu'_3 + [a_0 + 5b_1]\mu'_4 + [a_1 + 6b_2]\mu'_5 + a_2\mu'_6 = 0$ (3.3.5)

n=5 için; $5b_0\mu'_4 + [a_0 + 6b_1]\mu'_5 + [a_1 + 7b_2]\mu'_6 + a_2\mu'_7 = 0$ (3.3.6)

EK 3: Kübik Paydalı Pearson Diferansiyel Denkleminin Moment Denklemleri

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}$$

$$\int_r^s x^n (a_0 + a_1 x) f(x) dx = \int_r^s x^n (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) f'(x) dx$$

Sağ taraf;

$x^n(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) = u$ $\qquad f'(x)dx = dv$

$nb_0 x^{n-1} + (n+1)b_1 x^n + (n+2)b_2 x^{n+1} + (n+3)b_3 x^{n+2} = du$ $\qquad f(x) = v$

Olmak üzere,

$$x^n(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) f(x)|_r^s - nb_0 \int_r^s x^{n-1} f(x) dx$$

$$-(n+1)b_1 \int_r^s x^n f(x) dx - (n+2)b_2 \int_r^s x^{n+1} f(x) dx - (n+3)b_3 \int_r^s x^{n+2} f(x) dx$$

Sol taraf;

$$\int_r^s x^n (a_0 + a_1 x) f(x) dx = a_0 \int_r^s x^n f(x) dx + a_1 \int_r^s x^{n+1} f(x) dx$$

O halde;

$$nb_0 \int_r^s x^{n-1} f(x) dx + [a_0 + (n+1)b_1] \int_r^s x^n f(x) dx$$

$$+[a_1 + (n+2)b_2] \int_r^s x^{n+1} f(x) dx + (n+3)b_3 \int_r^s x^{n+2} f(x) dx = 0$$

$$nb_0 \mu'_{n-1} + [a_0 + (n+1)b_1]\mu'_n + [a_1 + (n+2)b_2]\mu'_{n+1} + (n+3)b_3 \mu'_{n+2} = 0$$

$\mu'_0 = 1$ olmak üzere;

n=0 için; $[a_0 + b_1] + [a_1 + 2b_2]\mu_1' + 3b_3\mu_2' = 0$ (4.1.1)

n=1 için; $b_0 + [a_0 + 2b_1]\mu_1' + [a_1 + 3b_2]\mu_2' + 4b_3\mu_3' = 0$ (4.1.2)

n=2 için; $2b_0\mu_1' + [a_0 + 3b_1]\mu_2' + [a_1 + 4b_2]\mu_3' + 5b_3\mu_4' = 0$ (4.1.3)

n=3 için; $3b_0\mu_2' + [a_0 + 4b_1]\mu_3' + [a_1 + 5b_2]\mu_4' + 6b_3\mu_5' = 0$ (4.1.4)

n=4 için; $4b_0\mu_3' + [a_0 + 5b_1]\mu_4' + [a_1 + 6b_2]\mu_5' + 7b_3\mu_6' = 0$ (4.1.5)

n=5 için; $5b_0\mu_4' + [a_0 + 6b_1]\mu_5' + [a_1 + 7b_2]\mu_6' + 8b_3\mu_7' = 0$ (4.1.6)

EK 4: Koşullu Olasılık Dağılışları

1.Koşullu Dağılışlar:

B olayı bilindiğinde A olayının gerçekleşmesi olasılığı

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad P(B) > 0$$

olduğu biliniyor. (Fisz, 1967: 20)

İki boyutlu (X,Y) rassal değişkeni için bu olasılık;

$$P\{X = x|\ Y = y\} = \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}}$$

Olur. Buna *Y*'nin *X*'e göre koşullu olasılığı denir. Aynı şekilde *X*'in *Y*'e göre koşullu olasılığı da;

$$P\{Y = y|\ X = x\} = \frac{P\{Y = y, X = x\}}{P\{X = x\}}$$

(Saraçoğlu ve Çevik, 1995: 163)

1.1 Kesikli Dağılışlar:

h(x), X'in marjinal olasılık fonksiyonu *g(y), Y*'nin marjinal olasılık fonksiyonu ise,

X=*x* verilmişken *Y*'nin koşullu olasılık fonksiyonu,

$$g(y|X = x) = \frac{f(x,y)}{h(x)}, \qquad h(x) > 0$$

Y=*y* verilmişken *X*'in koşullu olasılık fonksiyonu,

$$f(x|Y = y) = \frac{f(x,y)}{g(y)}, \qquad g(y) > 0$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki eşitliklerden,

$f(x,y) = h(x)g(y|X = x) = g(y)f(x|Y = y)$

Eşitliği yazılabilir. *h(x)* ve *g(x)* marjinal olasılıklar olduklarından, bu fonksiyonları koşullu olasılık fonksiyonları cinsinden şu şekilde yazabiliriz,

$$h(x) = \sum_{y} f(x,y) = \sum_{y} f(x|Y=y)g(y)$$

$$g(y) = \sum_{x} f(x,y) = \sum_{x} g(y|X=x)$$

(Saraçoğlu ve Çevik, 1995: 164; Fisz, 1967: 49; Hogg ve Craig, 1995: 83)

Örnek: (X,Y) iki boyutlu kesikli rassal değişkenin ortak oyf'si,

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{x+y}\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x-y} & , \ x = 0,1 \ \ y = 0,1 \\ 0 & , diğer\ x,y\ değerleri\ için \end{cases}$$

Olmak üzere, bu fonksiyonu için,

f(x| Y=y), g(y| X=x) koşullu olasılıklarını, *h(x)* ve *g(y)* marjinal fonksiyonlarını bulalım.

f(x| Y=y)'yi bulabilmemiz için öncelikle *g(y)*'yi bulmalıyız.

$$g(y) = \sum_{x=0}^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+y}\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-y}\left(\frac{2}{3}\right)^{y}$$

Olarak bulunur. O halde,

$$f(x|Y=y) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x+y}\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x-y}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{1-y}\left(\frac{2}{3}\right)^{y}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$$

Aynı şekilde *g(y| X=x)* için *h(x)* hesaplanır.

$$h(x) = \sum_{y=0}^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+y}\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x-y} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$$

$$g(y|X=x)=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x+y}\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x-y}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-y}\left(\frac{2}{3}\right)^{y}$$

(Saraçoğlu ve Çevik, 1995: 165)

1.1.1 Kesikli Dağılışlar İçin Koşullu Beklenen Değer

Koşullu dağılışlarda değişkenlerden birinin bilinen bir değerine göre diğer değişkenin beklenen değeri bulunmak istenirse, koşullu beklenen değerden yararlanılır.

X ve *Y* iki boyutlu rassal değişkenler olmak üzere, *X*'in bilinen bir değerine karşılık *Y*'nin beklenen değerine *Y*'nin koşullu beklenen değeri denir ve *E[Y| X=x]* şeklinde yazılır.

Koşullu dağılışın kesikli olduğu durumda koşullu beklenen değer,

$$E(Y|X=x)=\sum_{y} yf(y|X=x)$$

şeklinde elde edilir. (Saraçoğlu ve Çevik, 1995: 285; Hogg ve Craig, 1995: 84)

1.1.2 Kesikli Dağılışlar İçin Koşullu Varyans

Koşullu dağılışlarda değişkenlerden birinin değeri biliniyorken diğerinin varyansına koşullu varyans denir.

X ve *Y* iki boyutlu rassal değişkenler olmak üzere, *X*'in bilinen bir değerine karşılık *Y*'nin varyansına *Y*'nin koşullu varyansı denir ve *V[Y| X=x]* şeklinde yazılır.

$$V[Y|\,X=x]=\sum[y-E(Y|X=x)]^2 f(y|X=x)$$

Şeklinde hesaplanır. (Saraçoğlu ve Çevik, 1995: 288; Hogg ve Craig, 1995: 85)

1.2 Sürekli Dağılışlar:

h(x), *X*'in marjinal olasılık fonksiyonu *g(y)*, *Y*'nin marjinal olasılık fonksiyonu ise,

X=x verilmişken *Y*'nin koşullu olasılık fonksiyonu,

$$g(y|X=x)=\frac{f(x,y)}{h(x)}, \qquad h(x)>0$$

Y=y verilmişken *X*'in koşullu olasılık fonksiyonu,

$$f(x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{g(y)}, \qquad g(y)>0$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki eşitliklerden,

$$f(x,y)=h(x)g(y|X=x)=g(y)f(x|Y=y)$$

Eşitliği yazılabilir. *h(x)* ve *g(x)* marjinal olasılıklar olduklarından, bu fonksiyonları koşullu olasılık fonksiyonları cinsinden şu şekilde yazabiliriz,

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x|Y=y)dy$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)g(y|X=x)dx$$

(Saraçoğlu ve Çevik, 1995: 168; Fisz, 1967: 49; Hogg ve Craig, 1995: 84)

Örnek: (X,Y) iki boyutlu kesikli rassal değişkenin ortak oyf'si,

$$f(x,y)=\begin{cases}3\mathrm{x}\ , & 0<y<x,\ \ 0<x<1\\ 0\ , & \text{diğer x, y değerleri için}\end{cases}$$

Şeklinde veriliyor. Bu fonksiyon için *X*'in ve *Y*'nin koşullu olasılık fonksiyonlarını, *h(x)* ve *g(y)* marjinal olasılık fonksiyonlarını bulalım.

$$g(y)=\int_{x=0}^{1} 3x dx=3\left(\frac{1}{2}x^2|_0^1\right)=\frac{3}{2}$$

$$f(x|Y=y)=\frac{3x}{\frac{3}{2}}=2x$$

$$h(x) = \int_{y=0}^{1} 3xdy = 3x(y|_0^1) = 3x^2$$

$$g(y|X = x) = \frac{3x}{3x^2} = \frac{1}{x}$$

Olarak bulunur. (Saraçoğlu ve Çevik, 1995: 169)

1.2.1 Sürekli Dağılışlar İçin Koşullu Beklenen Değer:

Koşullu dağılışlarda değişkenlerden birinin bilinen bir değerine göre diğer değişkenin beklenen değeri bulunmak istenirse, koşullu beklenen değerden yararlanılır.

X ve *Y* iki boyutlu rassal değişkenler olmak üzere, *X*'in bilinen bir değerine karşılık *Y*'nin beklenen değerine *Y*'nin koşullu beklenen değeri denir ve *E[Y| X=x]* şeklinde yazılır.

Koşullu dağılışın sürekli olduğu durumda koşullu beklenen değer,

$$E[Y|X = X] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|X = x)dy$$

olur. (Saraçoğlu ve Çevik, 1995: 285; Hogg ve Craig, 1995: 84)

1.2.2 Sürekli Dağılışlar İçin Koşullu Varyans:

Koşullu dağılışlarda değişkenlerden birinin değeri biliniyorken diğerinin varyansına koşullu varyans denir.

X ve *Y* iki boyutlu sürekli rassal değişkenler olmak üzere, *X*'in bilinen bir değerine karşılık *Y*'nin varyansına *Y*'nin koşullu varyansı denir ve *V[Y| X=x]* şeklinde yazılır.

$$V[Y|\, X = x] = \int [y - E(Y|X = x)]^2 f(y|X = x)dy$$

Olarak elde edilir. (Saraçoğlu ve Çevik, 1995: 288; Hogg ve Craig, 1995: 85)