



VEKTÖR-UZAYI İZDÜŞÜM METODU İLE ÖZEL AMAÇLI BİR KIRINIMSAL OPTİK ELEMAN TASARIMI

(*DESIGN OF A SPECIAL PURPOSE DIFFRACTIVE OPTICAL ELEMENT USING
VECTOR-SPACE PROJECTION METHODS*)

Damla Gürkan KUNTALP*

ÖZET/ABSTRACT

Özel amaçlı kırınımsal optik elemanlar genellikle iteratif metotlar kullanılarak tasarlanırlar. Ancak bu konudaki çalışmaların çoğu iteratif metotların yakınsama özelliklerini ve metot performansını doğrudan etkileyen ilgili faktörleri gözönünde bulundurmazlar. Bu çalışmada Vektör-Uzayı İzdüşüm metodu kullanılarak odak derinliğinin artırılmasını sağlayacak özel amaçlı bir kırınımsal optik eleman tasarımı sunulmuştur. Tasarım kısıtlamaları Vektör-Uzayı İzdüşüm metodunun sağlanması güç kısıtlamalar altındaki performansını ve yakınsama özelliklerini gözlemeye elverişli olacak şekilde seçilmiş ve tasarım sonuçlarıyla birlikte metodunun bu koşullar altındaki davranışı da incelenmiştir.

Special-purpose diffractive optical devices are often designed by iterative methods without consideration of convergence properties, and related factors that affect performance. In this paper, we use Vector-Space Projection Methods to design a special purpose optical element that yields increased-depth-of-focus and while doing this, examine the problems associated with the convergence of the projection method under impossibly demanding constraints using both sequential and parallel projection algorithms.

ANAHTAR KELİMELER/KEYWORDS

Vektör uzayı izdüşüm metodu, Kırınımsal optik eleman, Kırınmayan hüzme
Vector space projection method, Diffractive optical element, Nondiffracting beam

*DEÜ, Mühendislik Fak., Elektrik ve Elektronik Müh. Bölümü, Buca, İZMİR

1. GİRİŞ

Kırınımsal optik elemanlar (diffractive optical elements) transfer fonksiyonları yansıma ve kırılma yerine *kırınım* prensiplerine dayanan *ince* optik elemanlardır. Kırınımsal optik, geleneksel refraktif optiğin yetersiz kaldığı çeşitli dalga önü dönüşümlerini kolaylıkla başarabilme özelliği ile geleneksel optiğe hem yardımcı hem de bütünleyici bir rol üstlenir. Kaynak ve alan düzlemindeki kısıtlamaların sırasıyla uygulanmasına dayanan iteratif yöntemlerle kırınımsal optik eleman (KOE) tasarım örneklerine sıklıkla rastlanmakla birlikte, bu iteratif yöntemleri yakınsama özelliklerini de içeren matematiksel bir çerçeve içinde ele alan çalışma sayısı son derece sınırlıdır (Wood vd., 1993; Bernhardt vd., 1991; Gerchberg vd., 1972; Wyrowski vd., 1993; Catino vd., 1997; Piestun ve Shamir, 1994; Piestun vd., 1995). Piestun ve Catino'nun çalışmaları bu konudaki istisnalar arasında yer alır. Özellikle Piestun ve Shamir'in çalışmaları kırınmayan hüzme (*nondiffracting beam*) üreten optik tasarımlarda vektör-uzayı gösteriminde Fresnel alan kısıtlamalarını kullanan ilk çalışmalardır (Piestun ve Shamir, 1994).

Bu çalışmada, vektör-uzayı izdüşüm metodunun (VUİM), sağlanması güç, belki imkansız kısıtlamalar altındaki yakınsama performansını gözlemek amacıyla Piestun ve Shamir'in çalışmalarından farklı olarak düzlemsel bir KOE yerine *tek boyutlu* ve aynı zamanda *kayıpsız* (pure-phase) bir KOE ile kırınmayan hüzme elde edilmesi hedeflenmiştir. Kırınmayan hüzme, optik eksen üzerinde bulunan her noktada, en azından sınırlı bir bölgede, görüntü düzleminde *kırınım-sınırlı* görüntü elde etmek olarak tanımlanabilir. Bu nedenle kırınmayan hüzme problemi optik dalga alanlarının üç boyutta, hem optik eksen doğrultusunda hem de görüntü düzleminde, kontrolünü gerektirir. Bu üç boyutlu kontrolü sağlayacak, tek boyutlu ve kayıpsız bir optik eleman tasarımı, bu çalışmanın amacı olan sağlanması güç ya da imkansız tasarım kısıtlamaları altında VUİM performansının gözlenmesine son derece uygun bir uygulama oluşturur.

2. VEKTÖR-UZAYI İZDÜŞÜM METODU

Zaman zaman izdüşüm metotları olarak da anılan vektör-uzayı metotları operatörlerin izdüşümler ve iterasyonların yakınsama özelliklerinin izdüşüm uygulanan kümelerin sayısına ve yapısına bağlı olduğu iteratif algoritmaların bir sınıfını oluştururlar. Tipik bir problemde, Fourier ya da Fresnel bölgesinde tanımlanmış belirli kısıtlamaları sağlayacak bir kırınımsal optik eleman tasarlanması amaçlanır. Herbir kısıtlama, elemanları bu kısıt tanımına uyan bir C_i kısıt kümesi tanımlar. Doğru çözüm bütün kısıtlamaları sağlamak, dolayısı ile bütün kısıt kümelerinin kesişim kümesinin bir elemanı olmak zorundadır. Kesişim kümesine ulaşabilmek için ardışık izdüşüm algoritması

$$t_{n+1}(\mathbf{x}) = P_1 P_2 \dots P_M t_n(\mathbf{x}) \quad (1)$$

kullanılabilir. Burada P_i , $i = 1, \dots, M$, C_i kısıt kümesine izdüşümü veren izdüşüm operatörü, $t_n(\mathbf{x})$, KOE'nin n inci iterasyondaki faz profili, \mathbf{x} pozisyon değişkeni ve M kısıtlama kümelerinin sayısıdır.

Eşitlik 1'in genellikle bilgisayarda (sınırlı-durum makinası) gerçekleştirildiği gözönüne alınarak aşağıdaki çıkarımlar yapılabilir.

a) Bütün C_i 'lerin, $i = 1, \dots, M$, konveks olmaları ve kesişimlerinin boş küme olmaması durumunda, $t_n(\mathbf{x})$ kesişim kümesi $C_0 = \bigcap_{i=1}^M C_i$ da bir noktaya *kuvvetle yakınsar* (strong convergence). Bu noktada, mühendislik alanlarında sıkça kullanılan bir Hilbert uzayı verilmesi halinde, örneğin square-integrable fonksiyonlar uzayı, square-summable diziler uzayı ya da Euclidean uzayı, bir vektör dizisi \mathbf{x}_n 'in \mathbf{x} 'e kuvvetli yakınsaması $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = 0$ anlamına gelir. Bu tür yakınsama norm yakınsaması olarak da anılır. Buna karşılık $\mathbf{x}_n \xrightarrow{\omega} \mathbf{x}$ olarak gösterilen *zayıf* ya da *iç çarpım yakınsaması* Hilbert uzayındaki her bir \mathbf{z} için $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$ olduğunu gösterir. Burada $\langle \cdot \rangle$ iç ya da nokta çarpımı simgeleri. Genelde, kesişim kümesinin boş olmadığı ve konveks kümeler varsayımı altında Eşitlik 1, kesişim kümesindeki bir noktaya zayıf yakınsar. Sınırlı-boyutlu uzayda (sayısal bilgisayar gibi sınırlı-durumlu makinalarda karşılaşıldığı gibi) zayıf yakınsamanın kuvvetli yakınsama anlamına geldiği yaygın olarak kullanılan bir sonuçtur (Stark ve Yang, 1998). 1'nolu çıkarımın pratikteki etkisi Eşitlik 1'in uygulanmasından, eğer bütün tasarım kısıtlamaları konveks bir küme tanımlıyorsa ve kümelerin kesişimi boş değilse, tüm kısıtlamalara uyan bir sonuç bulunabilecek olmasıdır. Kesişim kümesinin boş olması durumunda uygulanabilir bir sonuç yoktur ve tasarımcı fizik kurallarına aykırı bir tasarım istiyor demektir. Uygulanabilir bir çözüm her zaman en iyi (optimal) çözüm olmayabilir. Optimal çözümün bulunması tüm uygulanabilir çözümler üzerinde extremize edilecek bir kriter fonksiyonunu gerektirir. Ayrıca, uygulanabilir bir sonuca ulaşılmasa bile bazen kabul edilebilir bir sonuca ulaşmak da mümkündür.

b) Eğer en az bir C_i konveks değilse ve $M=2$ ise, $t_n(\mathbf{x})$ 'den kısıt kümelerine olan uzaklıkların toplamı hiç artmaz, \mathbf{y} olarak gösterilen bir elemanın sınırlama kümelerinden olan uzaklıklarının toplamı şu şekilde tanımlanır.

$$J(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^M \|\mathbf{y} - P_i \mathbf{y}\| \quad (2)$$

Eşitlik 2'deki $J(\mathbf{y})$ "*toplam-uzaklık hatası*" (summed-distance error) (TUH) olarak adlandırılır. $M=2$ için Eşitlik 2 aşağıdaki şekli alır.

$$J(\mathbf{y}) = \|P_1 \mathbf{y} - \mathbf{y}\| + \|P_2 \mathbf{y} - \mathbf{y}\| \quad (3)$$

Şimdi $M=2$ için Eşitlik 1'i düşünelim: TUH yakınsaması, Eşitlik 1'deki iterasyonların aşağıdaki eşitliği sağlaması anlamına gelir.

$$J(t_{n+1}) \leq J(t_n) \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Bu nedenle TUH yakınsaması Eşitlik 2'de tanımlanan şekliyle kısıt kümelerine uzaklık toplamının her zaman azalacağı (veya en azından artmayacağı) anlamına gelir. Bu kesinlikle istenen bir özellik olmakla beraber, artan n ile $J(t_n) \rightarrow 0$ olacağını garantilemez. Bu nedenle, Fresnel ya da Fourier bölgesindeki büyüklük kısıtlamaları ya da kayıpsız (pure-phase) transmittans gibi konveks olmayan kısıtlamaların kullanılması *uygulanabilir* (feasible) bir

çözümüne ulaşamamasına neden olabilir. TUH yakınsamasının Eşitlik 1'deki ardışık izdüşüm algoritmasında sadece $M=2$ durumuna uygulanabildiği Levi ve Stark tarafından gösterilmiştir. Gerçekte $M>2$ için, TUH yakınsamasının gerçekleşmediği örnekler bulmak zor değildir.

c) Bazı problemlerde $M>2$ olması kaçınılmazdır. Örneğin, i) binary kayıpsız faz ii) KOE boyutu, iii) uzak-alanda (Fourier bölgesinde) büyüklük kısıtlaması gibi üç kısıtlamayı sağlaması gereken bir KOE tasarım problemini ele alalım. Kısıtlama (i) ve (iii) konveks değildir ve $M=3$ dür. Bu durumda, Eşitlik 1'in kullanımı iterasyonların çözüm kümesinden uzaklaşmasına ya da ne bir TUH limit noktası ne de uygulanabilir bir çözüm olmayan herhangi bir noktaya yakınsamasına neden olabilir. Bununla birlikte, paralel izdüşüm algoritması kullanılarak, $M>2$ durumunda bile TUH yakınsaması elde edilebilir. Bu sonuç aşağıdaki teoremden formal olarak verilmiştir.

Paralel Genelleştirilmiş İzdüşüm Algoritması Teoremi:

H , elemanları \mathbf{x}, \mathbf{y} , ve benzeri olan bir Hilbert uzayını gösterebilir. İç çarpım, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ ile ve norm, $\|\mathbf{x}\|$ ile tanımlanmış olsun. Her $\mathbf{x}_0 \in H$ ve $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ eşitliğini sağlayan her pozitif sabit değeri w_1, w_2, \dots, w_m için

$$\mathbf{x}_{n+1} = \sum_{i=1}^m w_i P_i \mathbf{x}_n \quad (5)$$

tarafından üretilen dizi

$$J(\mathbf{x}_{n+1}) \leq J(\mathbf{x}_n) \quad (6)$$

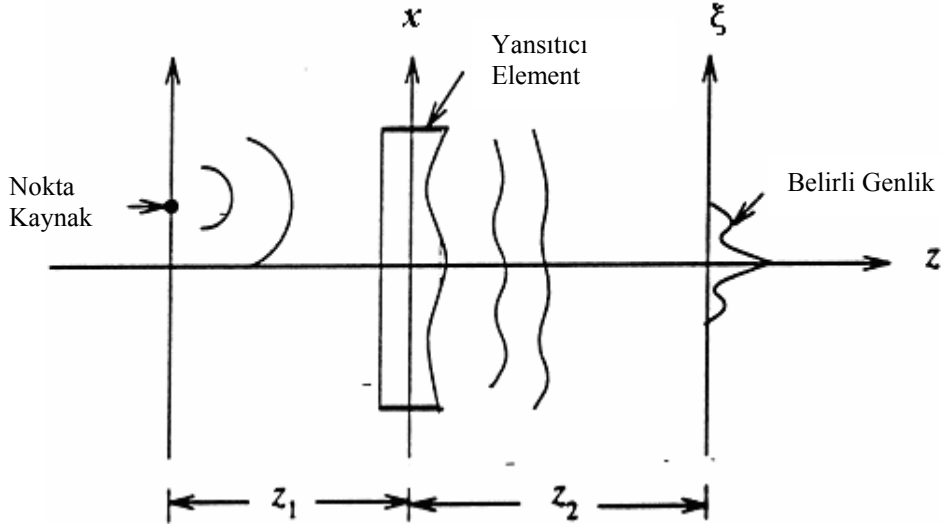
eşitsizliğini sağlar. Burada paralel TUH formülü aşağıdaki gibidir.

$$J(\mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^m w_i \|P_i \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n\|^2 \quad (7)$$

Bu çok önemli teorem, literatürde ilk kez Kotzer'in korelasyon filtresi tasarımıyla ilgili bir makalesinde sunulmuştur. Çıkarımı Levi-Stark teoremi ve çarpım uzayları prensiplerinin kombinasyonuna dayanır (Levi ve Stark, 1984; Pierra, 1984; Combettes, 1994). Teorem, Eşitlik 1'deki ardışık izdüşüm algoritması yerine Eşitlik 2'deki paralel izdüşüm algoritması kullanılması durumunda, ikiden fazla sayıda ($M>2$) konveks olmayan küme olması durumunda bile TUH yakınsaması elde edilebileceğini gösterir.

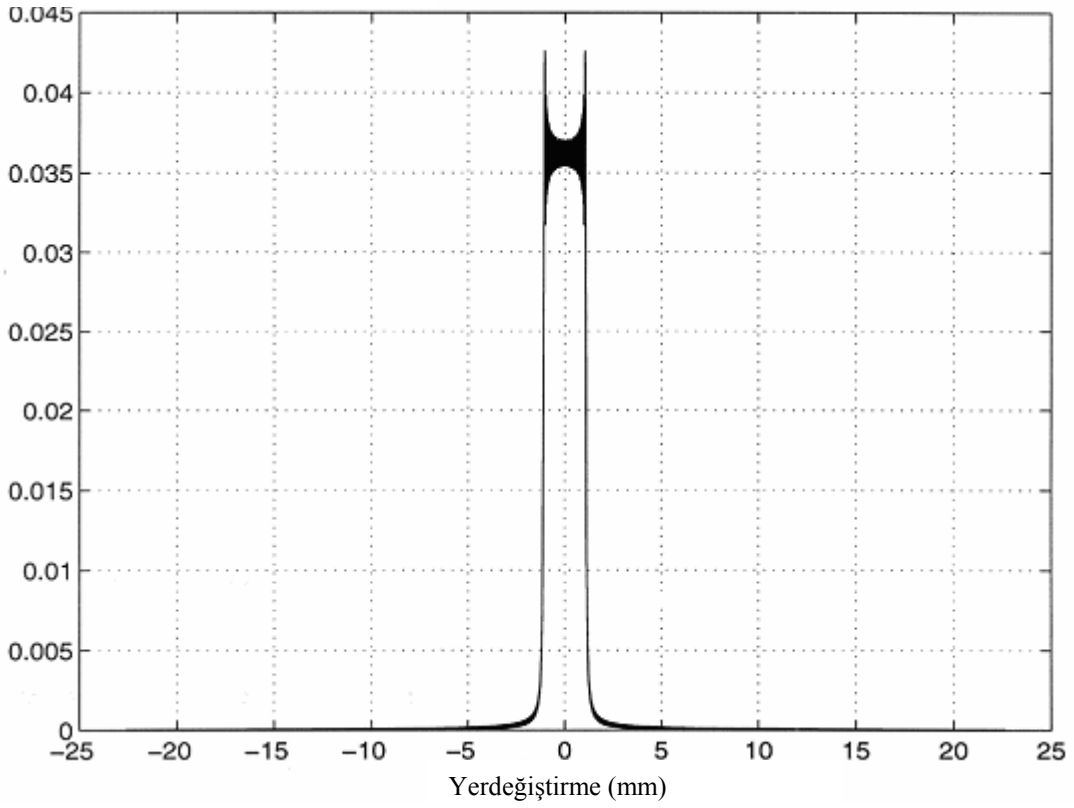
3. KONFIGÜRASYON

Bu çalışmada, kırınmayan hüzme ya da başka bir deyişle arttırılmış odak derinliği (depth of focus) sağlayacak kayıpsız bir KOE tasarımı önerilmiştir. Kullanılan konfigürasyon Şekil 1'deki gibidir ve noktasal kaynak optik eksen üzerinde $z_1 = \infty$ da varsayılmıştır. Eğer KOE yerine odak uzaklığı f olan sıradan bir mercek kullanılırsa görüntü $z_2 = f$ de oluşur. Alt index gerekli olmadığından işlemleri basitleştirmek için $z = z_2$ kullanılabilir. Çapı a olan bir

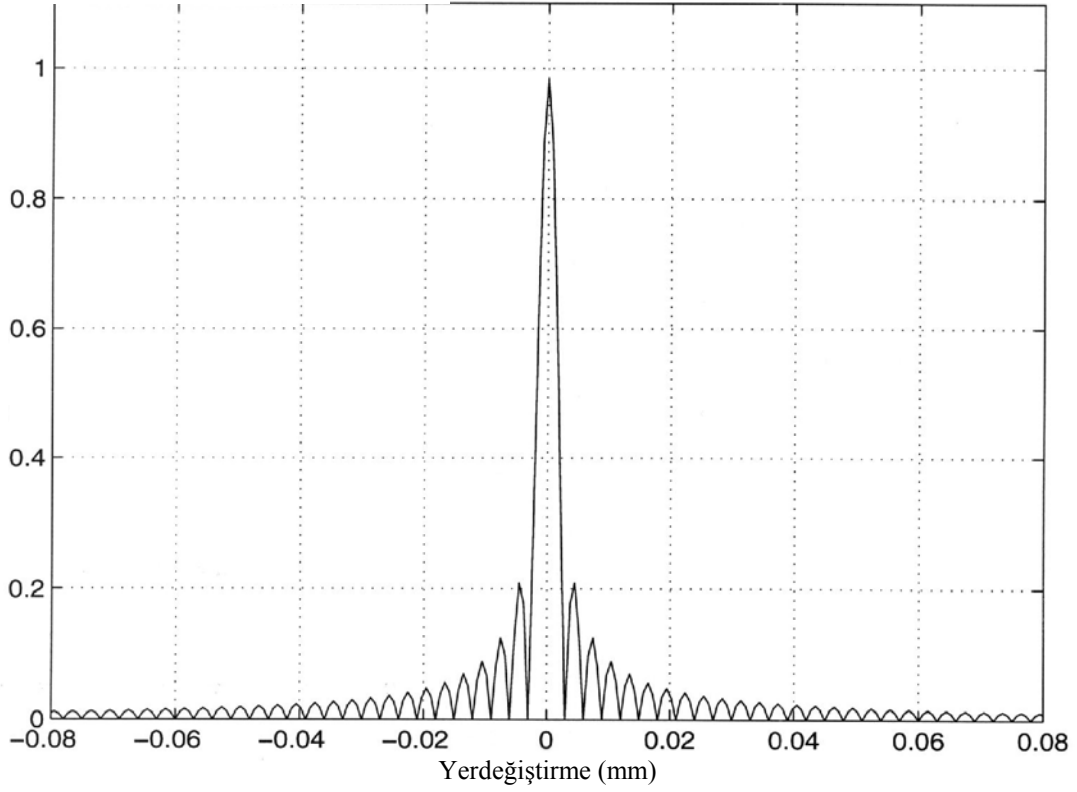


Şekil 1. Simülasyonlarda kullanılan konfigürasyon

Odaklanmış Görüntü Genliği

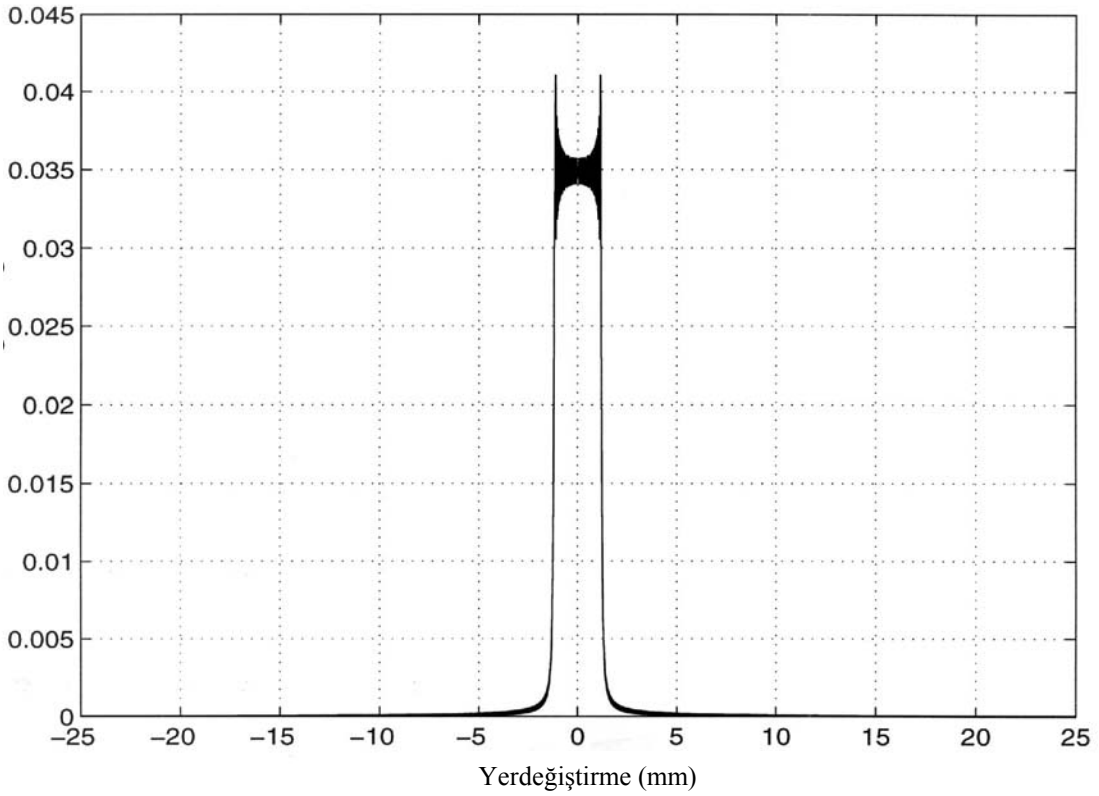
Şekil 2(a). Odak düzleminin hemen arkasında oluşan alan büyüklüğü ($r=1.1$)

Odaklanmış Görüntü Genliği



Şekil 2(b). Odak düzleminde oluşan alan büyüklüğü ($r=1.0$) (Kırınım-sınırlı alanın detay görüntüsü)

Odaklanmış Görüntü Genliği



Şekil 2(c). Odak düzleminin hemen önünde oluşan alan büyüklüğü ($r=0.91$)

mercekten z uzaklıkta, Fresnel bölgesinde oluşacak olan alan $U_z(\xi)$ 'nin aşağıda verildiği gibi olacağı Fresnel transformu kullanılarak kolaylıkla gösterilebilir.

$$U_z(\xi) = K_z T_z(\xi) \quad (8)$$

Yukarıdaki eşitlikte

$$T_z(\xi) = \int_{-0.5}^{0.5} \exp[-j\pi b(1-r)x^2] \exp[-j2\pi\rho\xi x] dx \quad (9)$$

ve

$$K_z = \frac{a}{\sqrt{\lambda z}}$$

$$r = f/z$$

$$\rho = a/\lambda f$$

$$b = a^2/\lambda f = a\rho,$$

olup diğer önemsiz sabitler ihmal edilmiştir. Seçilen parametreler $a=25$ mm, $f=150$ mm ve $\lambda=0.5 \times 10^{-3}$ mm için $r=1.1$ (odak düzleminin hemen arkası), $r=1.0$ (odak düzlemi), ve $r=0.91$ (odak düzleminin hemen önü) de oluşacak alan büyüklükleri sırasıyla Şekil 2(a), (b) ve (c) de gösterilmiştir. Bu şekillerden gözlenebileceği gibi odak düzleminde %10'luk bir sapma bile alan şiddetinde 28 dB'lik bir düşüşe neden olur.

Amaçlanan, tasarlanacak kayıpsız bir $t(x)$ elemanını, görüntüleme merceğine teğet olarak yerleştirerek, konfigürasyonumuzun odak derinliğini arttırmaktır. Bu yeni konfigürasyonda Eşitlik 8 ve Eşitlik 9, aşağıdaki eşitliklere dönüşür.

$$\tilde{U}_z(\xi) = K_z \tilde{T}_z(\xi) \quad (10)$$

Yukarıdaki eşitlikte

$$\tilde{T}_z(\xi) = \int_{-0.5}^{0.5} t(x) \exp[-j\pi b(1-r)x^2] \exp[-j2\pi\rho\xi x] dx \quad (11)$$

Bir sonraki adım olarak, sonsuzdaki bir noktasal kaynağın görüntü düzleminde oluşan normalize edilmiş kırınım-sınırlı görüntü büyüklüğünün analob için 1 ve yanlob için 0.21 olduğunu gözlemliyoruz. Bu gözleme ve yukarıdaki ifadelerle dayanarak, $t(x)$ 'in sağlaması gereken kısıt kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$C_1 = \left\{ t(x) \in L^2 : |\tilde{U}_{f-\varepsilon}(\xi)| \leq c(\xi), |\tilde{U}_{f-\varepsilon}(0)| = K_f \right\} \quad (12)$$

$$C_2 = \left\{ t(x) \in L^2 : |\tilde{U}_f(\xi)| \leq c(\xi), |\tilde{U}_f(0)| = K_f \right\} \quad (13)$$

$$C_3 = \left\{ t(x) \in L^2 : |\tilde{U}_{f+\varepsilon}(\xi)| \leq c(\xi), |\tilde{U}_{f+\varepsilon}(0)| = K_f \right\} \quad (14)$$

$$C_4 = \left\{ t(x) \in L^2 : |t(x)| = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \right\} \quad (15)$$

Yukarıda, $c(\xi) = K_f \left[\varepsilon + (1 - \varepsilon) \text{rect}\left(\frac{\xi}{2\sigma}\right) \right]$ odakta oluşan kırınım-sınırlı görüntü büyüklüğünün üst sınırlarını gösterir. $\varepsilon=0.05$, σ, f 'de oluşan görüntünün ilk sıfır noktasının orijine olan uzaklığını, K_f 'de odakta oluşan kırınım-sınırlı görüntünün orijindeki büyüklüğünü gösterir.

Sözle ifade etmek istersek, C_1, C_2 , ve C_3 sırasıyla $f-\varepsilon$ (odak düzleminden hemen önce), f (odak düzleminde) ve $f+\varepsilon$ (odak düzleminden hemen sonra) oluşan alan büyüklüklerinin $c(\xi)$ ile sınırlandırılması ve DC'de oluşan tepe büyüklüklerinin aynı olması koşullarını; C_4 ise kayıpsız transmitans fonksiyonu koşulunu tanımlar. C_1, C_2 , ve C_3 kümeleri görüntü düzlemindeki kısıtlamaları, C_4 kümesi ise nesne düzlemindeki kısıtlamayı gösterir.

4. İZDÜŞÜM OPERATÖRLERİ

Bilindiği gibi, herhangi bir C_i kümesi eğer ve yalnız eğer herhangi iki elemanın konveks toplamının yine kümeye ait olması koşuluyla konvektir. Konveks olma koşulunu matematiksel olarak ifade etmek istersek, herhangi bir $0 \leq \mu \leq 1$ ve herhangi iki vektör elemanı $y_1 \in C_i, y_2 \in C_i$ için, konveks toplam $\mu y_1 + (1 - \mu)y_2$ yine C_i kümesinin bir elemanı olmalıdır. Bu tanımların yardımıyla C_1, C_2 , ve C_3 kümelerinin konveks, C_4 kümesinin konveks olmadığı kolaylıkla gösterilebilir. C_1 kümesi üzerine olan izdüşümü bulmak için Eşitlik 10'u aşağıdaki şekilde düzenlememiz gerekir.

$$\tilde{U}_z(\xi) = K_z \int_{-0.5}^{0.5} \hat{t}(x) \exp[-j\omega x] dx \quad (16)$$

Yukarıda

$$\hat{t}(x, z) = t(x)\Phi(x, z)$$

$$\Phi(x, z) \equiv \exp[-j\pi b(1-r)x^2]$$

ve

$$\omega = 2\pi\rho\xi$$

Yukarıdaki ve daha sonra verilecek eşitliklerde eğer küçük harfle gösterilen bir fonksiyon, örneğin $h(x)$, $\Phi(x, z)$ ile çarpılıyorsa, sonuç fonksiyonu $\hat{h}(x, z)$ ile ve bu fonksiyonun Fourier transformu, örneğin $F[\hat{h}]$, $\hat{H}(\omega)$ notasyonu ile gösterilir. Ayrıca yeni bir fonksiyon, $c_z(\omega)$, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$c_z(\omega) = \frac{1}{K_z} c\left(\frac{\omega\lambda z}{2\pi a}\right)$$

Yukarıda belirtilen gösterim ve tanımlanan fonksiyon kullanılarak, yeni bir kısıt kümesi, \hat{C}_1 , aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\hat{C}_1 = \left\{ \hat{y}(x) \in L^2 : \left| \hat{T}_{f-\varepsilon}(\omega) \right| \leq c_{f-\varepsilon}(\omega), \left| \hat{T}_{f-\varepsilon}(0) \right| = \hat{K}_f \right\} \quad (17)$$

Benzer şekilde \hat{C}_2 ve \hat{C}_3 kümeleri de aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\hat{C}_2 = \left\{ \hat{y}(x) \in L^2 : \left| \hat{T}_f(\omega) \right| \leq c_f(\omega), \left| \hat{T}_f(0) \right| = \hat{K}_f \right\} \quad (18)$$

ve

$$\hat{C}_3 = \left\{ \hat{y}(x) \in L^2 : \left| \hat{T}_{f+\varepsilon}(\omega) \right| \leq c_{f+\varepsilon}(\omega), \left| \hat{T}_{f+\varepsilon}(0) \right| = \hat{K}_f \right\} \quad (19)$$

Yukarıdaki tanımlarda $\hat{K}_f = \frac{c(0)}{K_z}$ 'dir. Herhangi bir $\hat{h}(x)$ 'in \hat{C}_1 üzerine izdüşümü şu şekilde tanımlanır.

$$\hat{y}(x) = \hat{P}_1 \hat{h} \leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{C}_{f-\varepsilon}(\omega) \exp[j\theta_{\hat{H}}(\omega)] & \text{eger } |\hat{H}(\omega)| > \mathbf{C}_{f-\varepsilon}(\omega) \\ \hat{H}(\omega) \text{ ve } |\hat{Y}(0)| = \hat{K}_f & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (20)$$

İki yönlü ok, \leftrightarrow işareti, Fourier transform çiftini simgeler. Daha önce tanımlandığı üzere $\theta_{\hat{H}}(\omega)$, $\hat{H} = F[\hat{h}]$ 'nin fazını gösterir ve $\hat{Y}(\omega) = F[\hat{y}]$ 'dir. \hat{y} noktası \hat{h} 'den \hat{C}_1 'e olan uzaklığı minimize ederken benzer şekilde y^* noktası da h 'den C_1 'e olan uzaklığı minimize eder. $\|h - y^*\| = \|\hat{h} - \hat{y}\|$ olduğu için, h 'nin C_1 üzerine izdüşümü

$$y^*(x) = \hat{y}(x) \overline{\Phi(x, z)} \quad (21)$$

kullanılarak bulunur ($z = f - \varepsilon$). Üst çizgi ilgili kompleks fonksiyonun kompleks eşleniğini gösterir. Bu nedenle, C_1 üzerine izdüşüm şu şekilde verilir.

$$y^*(x) = P_1 h = \overline{\Phi(x, f - \varepsilon)} F^{-1} \left[\begin{cases} \mathbf{C}_{f-\varepsilon}(\omega) \exp[j\theta_{\hat{H}}(\omega)] & \text{eger } |\hat{H}(\omega)| > \mathbf{C}_{f-\varepsilon}(\omega) \\ \hat{H}(\omega) \text{ ve } |\hat{Y}(0)| = \hat{K}_f & \text{aksi halde} \end{cases} \right] \quad (22)$$

Aynı yaklaşım kullanılarak, P_2 and P_3 aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$y^*(x) = P_2 h = \frac{1}{\Phi(x, f)F^{-1}} \left[\begin{array}{l} \mathcal{C}_{f(\omega)} \exp[j\theta_{\hat{H}}(\omega)] \text{ eger } |\hat{H}(\omega)| > \mathcal{C}_{f(\omega)} \\ \hat{H}(\omega) \text{ ve } |\hat{Y}(0)| = \hat{K}_f \text{ aksi halde.} \end{array} \right] \quad (23)$$

$$y^*(x) = P_3 h = \frac{1}{\Phi(x, f + \varepsilon)F^{-1}} \left[\begin{array}{l} \mathcal{C}_{f+\varepsilon(\omega)} \exp[j\theta_{\hat{H}}(\omega)] \text{ eger } |\hat{H}(\omega)| > \mathcal{C}_{f+\varepsilon(\omega)} \\ \hat{H}(\omega) \text{ ve } |\hat{Y}(0)| = \hat{K}_f \text{ aksi halde} \end{array} \right] \quad (24)$$

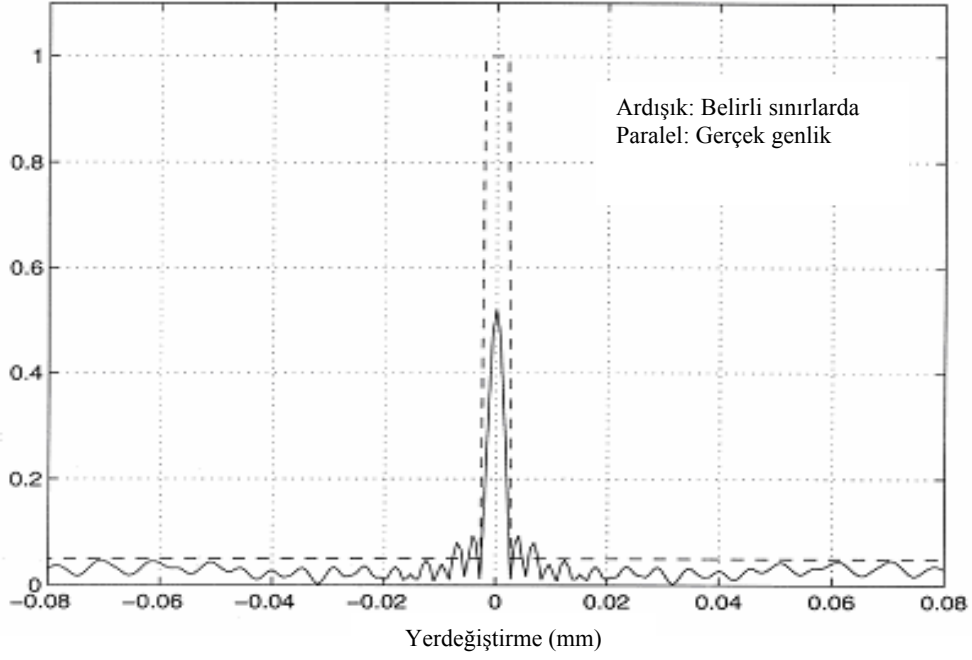
C_4 üzerine olan izdüşüm de aşağıdaki gibidir.

$$y(x) = P_4 h = \begin{cases} 0 & x \notin [-a/2, a/2] \\ \exp\{j\phi_h(x)\} & x \in [-a/2, a/2] \end{cases} \quad (25)$$

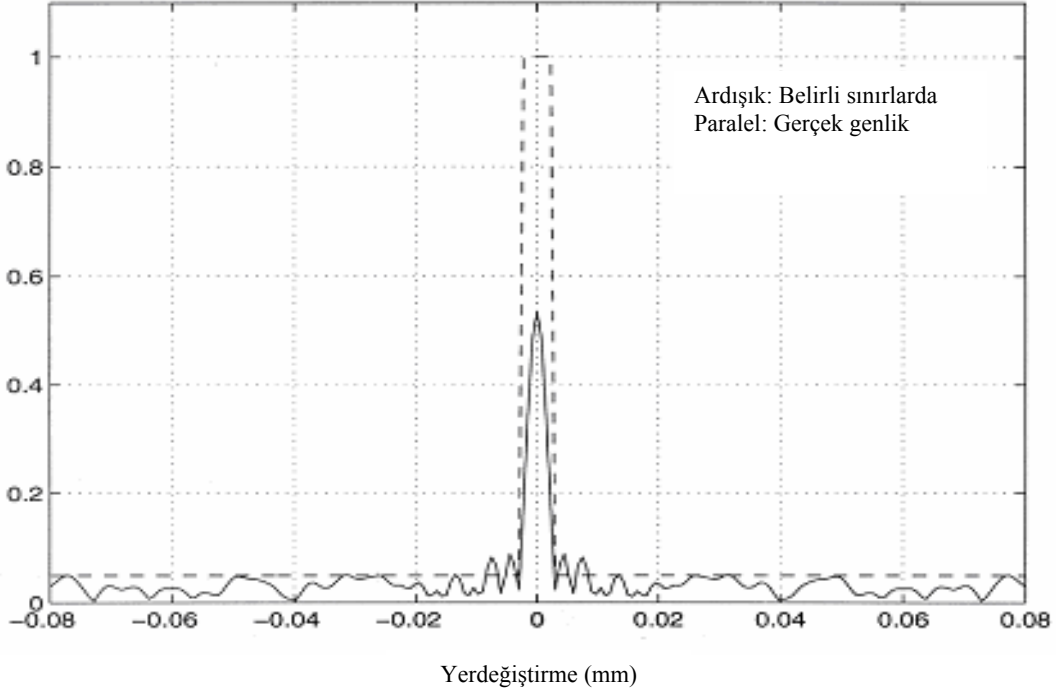
5. SİMÜLASYON SONUÇLARI

Hatırlanacağı gibi amacımız VUI metodunun sağlanması güç belkide imkansız olan kısıtlamalar altındaki performansını gözlemektir. Bu amaçla konveks olmayan kümeler içeren ve kesişimleri boş küme olan kısıtlamalar uyguladık. Ardışık izdüşüm algoritmasının 250 iterasyon sonrası sonuçları, $z=f-\varepsilon$, $z=f$, ve $z=f+\varepsilon$ için sırasıyla Şekil 3a, Şekil 3b ve Şekil 3c'de verilmiştir. Grafiklerde kesik çizgiler uygulanan kısıtlamayı, düz çizgiler elde edilen sonucu gösterir. Beklendiği gibi, kısıtlamalar bütünüyle sağlanmamakla birlikte, $z = f-\varepsilon$, $z = f$ ve $z = f+\varepsilon$ 'daki alan büyüklükleri en az 13.5 dB'lik maksimum tepe değerinin maksimum yanlob seviyesine oranıyla şaşılacak ölçüde birbirine benzemektedir. Bu nedenle, zayıflamış olmakla birlikte, sonuçta, sonsuzdaki bir noktasal kaynağın üç farklı düzlemde, kırınım-sınırlı görüntüsü elde edilmiştir. Burada vurgulanması gereken nokta, hedeflenen sonuca tam anlamıyla ulaşılamamakla birlikte, tümüyle kabul edilebilir ve uygulanabilir bir çözüm elde edilebildiğidir. Aynı probleme paralel izdüşüm algoritmasında uygulanmıştır. $z=f-\varepsilon$, $z=f$, ve $z=f+\varepsilon$ için 250 iterasyon sonrası sonuçlar, sırasıyla Şekil 4a, Şekil 4b ve Şekil 4c'de verilmiştir. Üç ayrı düzlemdeki görüntüler burada da şaşılacak derecede benzemekle beraber, orijindeki tepe daha yüksek, yanlob seviyeleri daha düşük ve maksimum tepe değerinin maksimum yanlob seviyesine oranı 19 dB ya da daha yüksektir. Bu sonuçlardan yola çıkarak paralel VUI metodunun ardışık VUI metodundan daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir. Şekil 5 paralel ve ardışık VUI algoritması için ardışık TUH formülü kullanılarak elde edilen TUH davranışını, Şekil 5'te yine her iki algoritma için paralel TUH formülü kullanılarak bulunan TUH davranışını gösterir (Eşitlik 2 ve Eşitlik 7). Paralel VUI metodunun daha iyi sonuçlar verdiği Şekil 5 ve Şekil 6'daki grafiklerden de açıkça görülmektedir. Öte yandan, ardışık VUI algoritmasının bir avantajı kayıpsızlık kısıtlamasının son izdüşüm operasyonu olarak uygulanması durumunda kayıpsız bir eleman elde edilebilmesidir. Pratikteki uygulamalarda çok önemli olan bu koşulu paralel VUI algoritmasının sağlaması bu koşullar altında (kesişim kümesi boş küme iken) mümkün değildir. Ayrıca, kısıt küme sayısı $M > 2$ olmakla beraber konveks olmayan kısıtlama küme sayısı ikiden az olduğundan TUH yakınsamasının her iki algoritma içinde elde edildiği yine Şekil 5 ve Şekil 6'dan gözlenebilir.

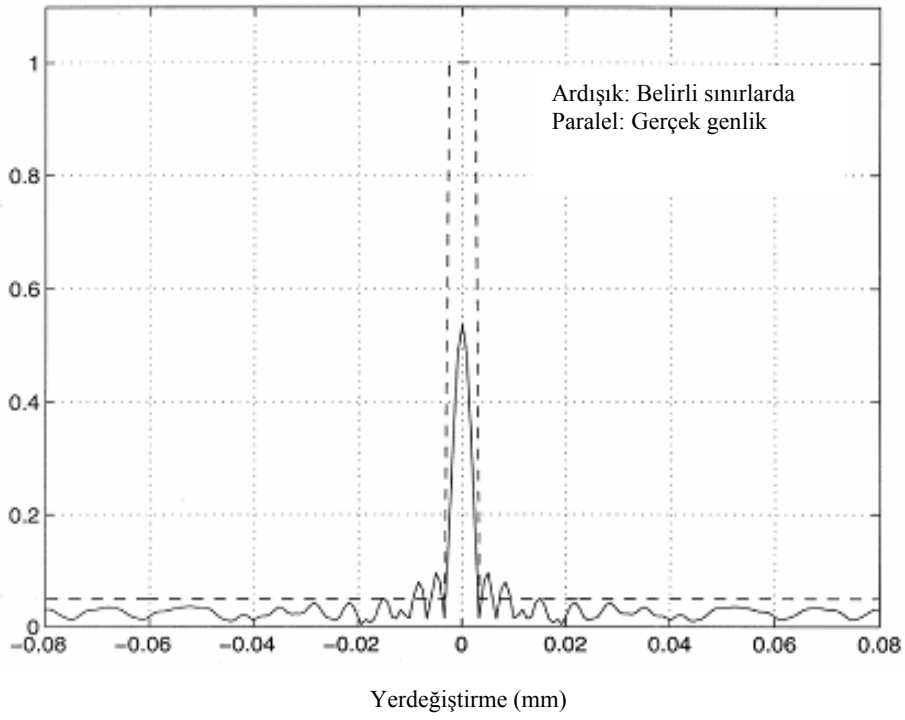
Odaklanmamış Görüntü Genliği

Şekil 3(a). Ardışık izdüşüm algoritmasının 250 iterasyon sonrası sonuçları, $=f-\varepsilon$

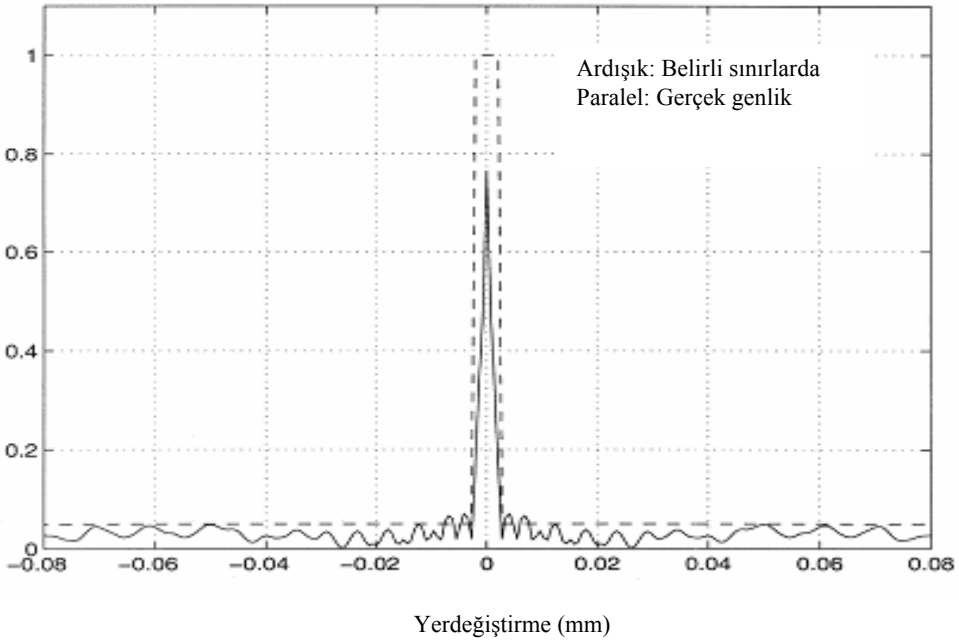
Odaklanmış Görüntü Genliği

Şekil 3(b). Ardışık izdüşüm algoritmasının 250 iterasyon sonrası sonuçları, $z=f$

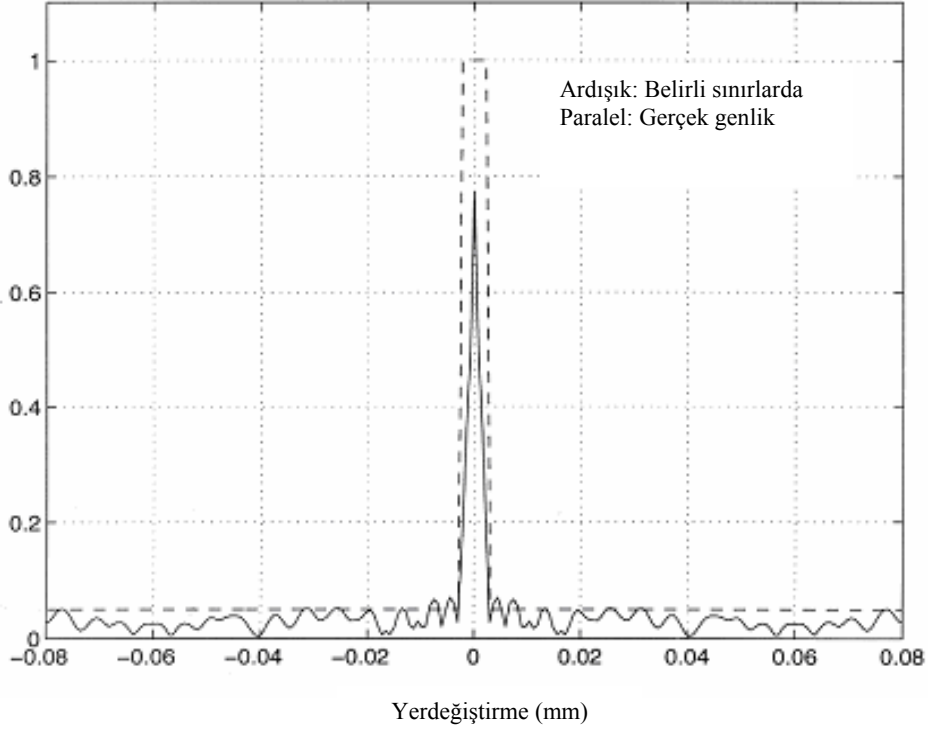
Odaklanmamış Görüntü Genliği

Şekil 3(c). Ardışık izdüşüm algoritmasının 250 iterasyon sonrası sonuçları, $z = +\varepsilon$

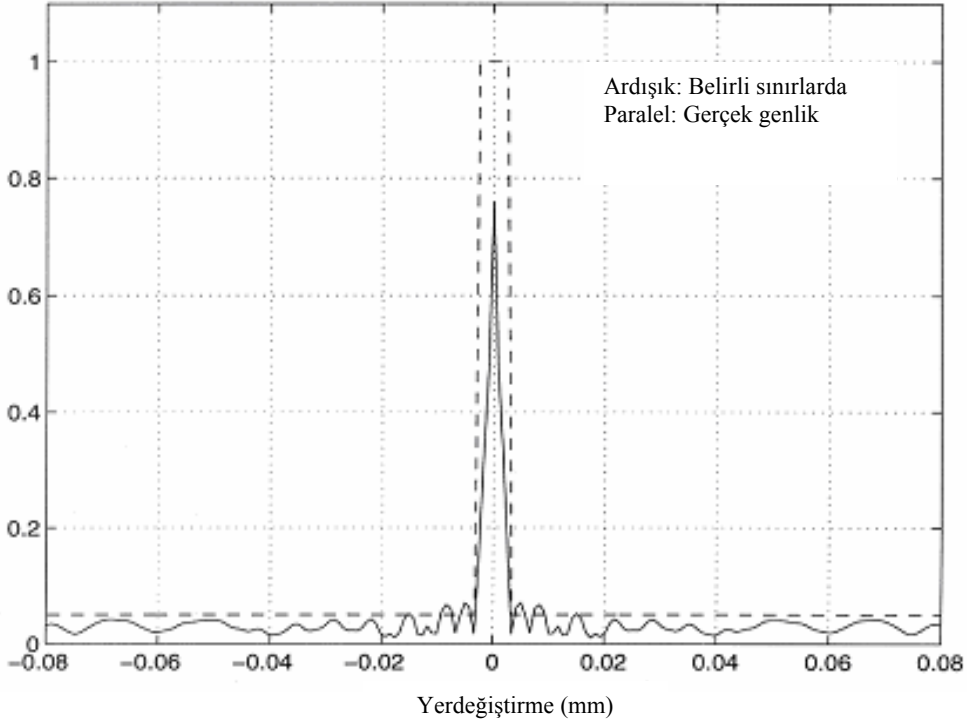
Odaklanmış Görüntü Genliği

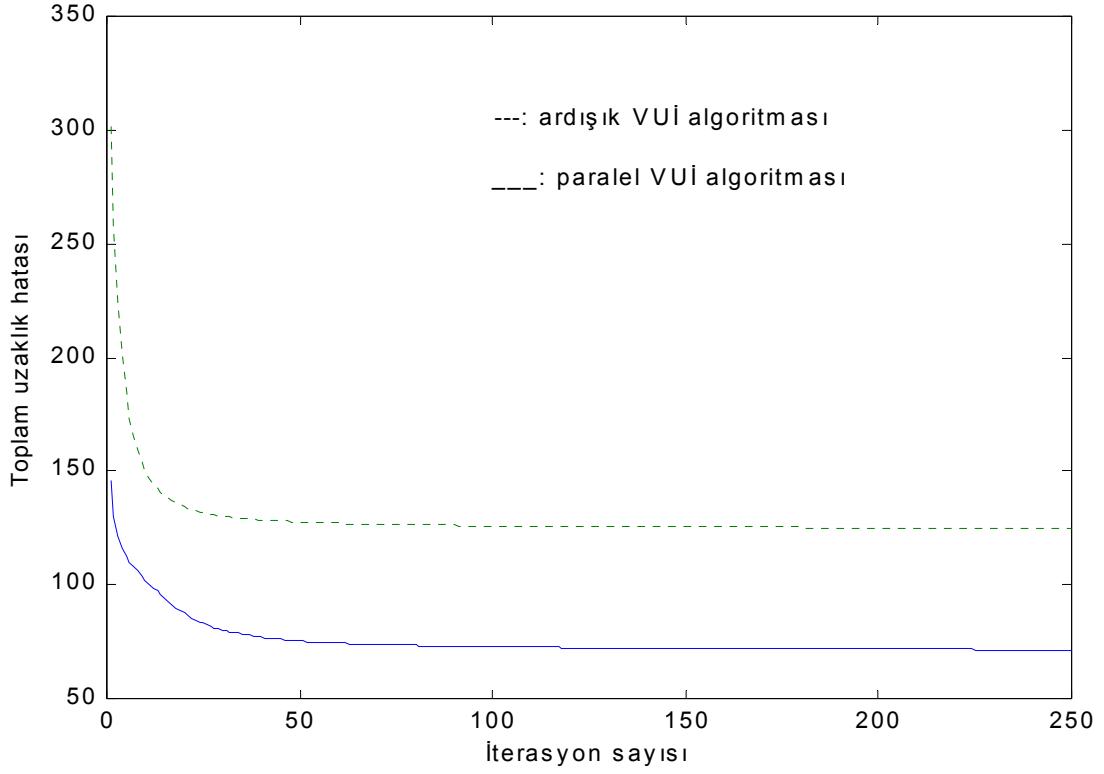
Şekil 4(a). Paralel izdüşüm algoritmasının 250 iterasyon sonrası sonuçları, $z = -\varepsilon$

Odaklanmamış Görüntü Genliği

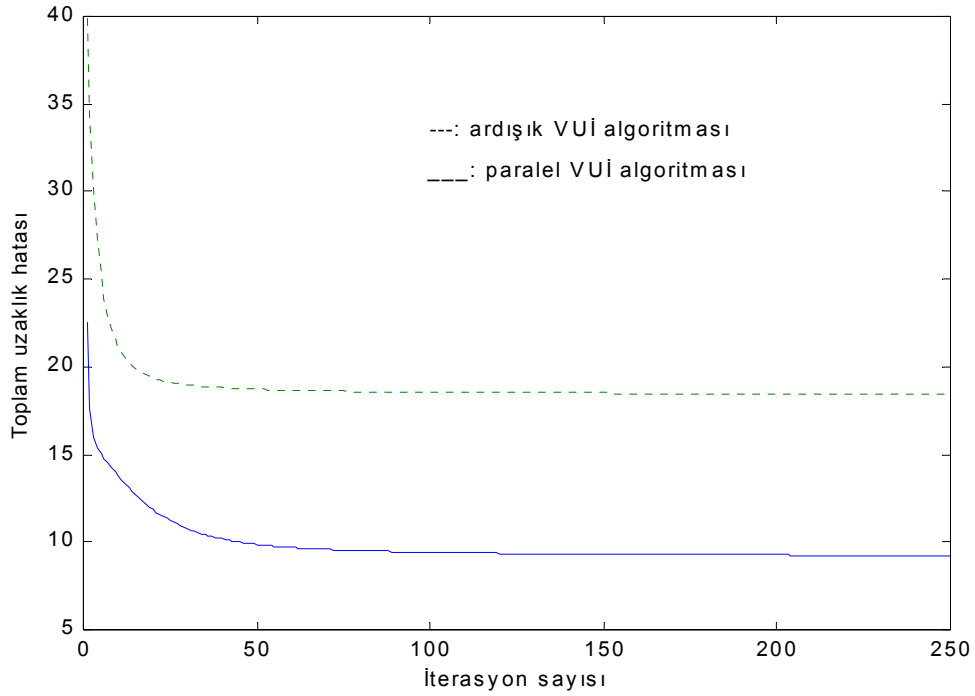
Şekil 4(b). Paralel izdüşüm algoritmasının 250 iterasyon sonrası sonuçları, $z=f$

Odaklanmış Görüntü Genliği

Şekil 4(c). Paralel izdüşüm algoritmasının 250 iterasyon sonrası sonuçları, $z=f+\epsilon$



Şekil 5. Ardışık ve paralel VUI algoritmaları için ardışık formül kullanılarak hesaplanan toplam uzaklık hatası



Şekil 6. Ardışık ve paralel VUI algoritmaları için paralel formül kullanılarak hesaplanan toplam uzaklık hatası

KAYNAKLAR

- Bernhardt M., Wyrowski F., Bryngdahl O. (1991): "Iterative Techniques to Integrate Different Optical Functions in a Diffractive Phase Element", Applied Optics, Vol. 32, pp. 4629-4635.
- Catino W.C., LoCicero J.L., Stark H. (1997): "Design of Continuous and Quantized Phase Holograms by Generalized Projections", Journal of Optical Society of America A, Vol. 14, pp. 2715-2725.
- Combettes P.L. (1994): "Inconsistent Signal Feasibility Problem: Least-Squares Solution in a Product Space", IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 42, pp. 2955-2966.
- Gerchberg R.W., Saxton W.O. (1972): "Practical Algorithm for the Determination of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures", Optik, Vol. 35(2), pp. 237-250.
- Levi A., Stark H. (1984): "Image Restoration by the Method of Generalized Projections with Application to Restoration from Magnitude", Journal of Optical Society of America A, Vol. 1, pp. 932-943.
- Pierra G. (1984): "Decomposition through Formalization in a Product Space", Mathematical Programming, Vol. 28, pp. 96-115.
- Piestun R., Shamir J. (1994): "Control of Wave-Front Propagation with Diffractive Elements", Optics Letters, Vol. 19, pp. 771-773.
- Piestun R., Spektor B., Shamir J. (1995): "Diffractive Optics for Unconventional Light Distribution", SPIE, Vol. 2404: Optoelectronic and Micro-Optical Devices.
- Stark H., Yang Y. (1998): "Vector Space Projections: A Numerical Approach to Signal and Image Processing, Neural Nets, and Optics", John Wiley & Sons, New York, NY.
- Wood D., McKee P., Dames M. (1992): "Multiple-imaging and Multiple-focussing Fresnel Lenses with High Numerical Aperture", SPIE, Vol. 1732, Holographics International, pp. 307-316.
- Wyrowski F. (1990): "Diffractive Optical Elements: Iterative Calculation of Quantized, Blazed Phase Structures", Journal of Optical Society of America A, Vol. 7, pp.961-969.