ÜST - YARI KOMPLEKS DÜZLEMDE HAREKET
LE MOUVEMENT DANS LE DEMİ - PLAN COMPLEXE SUPÉRIEUR

Adem ÇELİK

E. Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Bornova - İZMİR

ÖZET

Bu çalışmada, H üst - yarı kompleks düzlemi belirtmek üzere, H^0 ile H nin iç noktalarını ve H^s ile H nin sınır noktalarını gösterelim. [1] de verilen Poincaré metriğinden esinlenerek

$$d(z, z') = \begin{cases} \dfrac{|z - z'|^2}{\mathrm{im}z \cdot \mathrm{im}z'} & , z, z' \in H^0 \\ 0 & , z = z' \\ +\infty & , z, z' \in H^s \text{ veya biri } H^s \text{ ye ait} \end{cases}$$

uzaklık fonksiyonunu ve [1], [2] de verilen Mobiüs dönüşümünden esinlenerek a, b, c, d, $t_i \in \mathbb{R}$ ve ad - bc = 1 olduğunda

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} + t_i$$

dönüşümü alınmıştır. Daha sonra [3] de verilen hareketlerden esinlenerek, H üst - yarı kompleks düzleminde d uzaklığına göre kompleks hareketler incelenmiştir.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, désignons respectivement par H^0 l'intérieur et par H^s la frontière du demi - plan complexe supérieur H. En nous inspirant d'une part de la métrique de Poincaré [1], nous considéront la fonction distance

$$d(z, z') = \begin{cases} \dfrac{|z - z'|^2}{\mathrm{im}z \cdot \mathrm{im}z'} & , z, z' \in H^0 \\ 0 & , z = z' \\ +\infty & , z, z' \in H^s \text{ ou l'un est l'élément de } H^s. \end{cases}$$

et d'autre part de l'application de Mobius [1], [2], nous prenons

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} + t_i \quad \text{où } a, b, c, d, t_i \in \mathbb{R} \text{ et } ad - bc = 1.$$

Ensuite, en nous basant sur les mouvements donnés dans [3], nous étudions les mouvements complexes dans H par rapport à d (z, z').

1. ÜST - YARI KOMPLEKS DÜZLEMDE HAREKET

H üst - yarı kompleks düzlemi göstersin. H^0 ile H nin iç noktalarını ve H^s ile H'nin sınır noktalarını gösterelim.

$$d : H \times H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}$$

uzaklık fonksiyonunu

$$d(z, z') = \begin{cases} \dfrac{|z - z'|^2}{\operatorname{im} z \,.\, \operatorname{im} z'} & , \; z, z' \in H^0 \\ 0 & , \; z = z' \\ +\infty & , \; z, z' \in H^s \text{ veya biri } H^s \text{ ye ait.} \end{cases}$$

biçiminde belirtelim. Metrik özelliklerinden üçgen eşitsizliği sağlanmaz. d (z, z') bir metrik değildir.

Tanım 1: H de d uzaklığını koruyan $\gamma : H \longrightarrow H$ dönüşümüne H de "**bir kompleks katı harekettir**" diyeceğiz.

Şimdi $a, b, c, d, t_i \in \mathbb{R}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere,

$$\gamma : H \longrightarrow H \text{ dönüşümü} \quad \gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} + t_i$$

olsun.

Teorem 1: γ dönüşümü d uzaklığına göre H de bir kompleks katı harekettir.

İspat: **i)** $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z, z' \in H^0$ olsun.

$$|\gamma(z) - \gamma(z')|^2 = \frac{1}{|cz + d|^2 \,.\, |cz' + d|^2} \,.\, |z - z'|^2 \,, \quad \operatorname{im} \gamma(z) = \frac{y}{|cz + d|^2}$$

ve $\operatorname{im} \gamma(z') = \dfrac{y'}{|cz' + d|^2}$ olduğundan, $d\,[\gamma(z), \gamma(z')] = d(z, z')$

olur.

ii) $z = z'$ olsun. $\gamma(z) = \gamma(z')$ olacağından,

$$d\,[\gamma(z), \gamma(z')] = \frac{|\gamma(z) - \gamma(z')|^2}{\operatorname{im} \gamma(z) \,.\, \operatorname{im} \gamma(z')} = 0 \text{ dır. Öte yandan } d(z, z') = 0 \text{ dır.}$$

iii) z, z'$\in H^s$ olsun; imz = 0, imz' = 0, imγ (z) = 0, imγ (z') = 0

ve $| z - z' |^2 \neq 0$, $\left| \frac{az + b}{cz + d} + t_i - \left(\frac{az' + b}{cz' + d} + t_i\right) \right|^2 \neq 0$ dır.

o zaman, d (z, z') = + ∞ = d [γ (z), γ (z')] olur.

iv) z, z' lerden biri H^s ye diğeri H^0 ' a ait olsun. Kabul edelim ki z $\in H^s$, z' $\in H^0$ dır. d (z, z') = + ∞ dır, öte yandan img (z) = 0, img (z') > 0 olduğundan, d [γ (z), γ (z')] = + ∞ olur.

Şimdi H' nin d uzaklığına göre γ (z) dönüşümlerinin oluşturduğu kompleks katı hareketlerinin kümesini Γ (γ) ile gösterelim. Yani,

$\Gamma (\gamma) = \{ \gamma \mid \gamma : H \longrightarrow H,\ d [\gamma (z), \gamma (z')] = d (z, z'),\ z, z' \in H \}$ olsun.

Önerme 1: Dönüşümlerin bileşke işlemi H de d uzaklığına göre bir kompleks katı harekettir.

İspat: $\forall \gamma_1 , \gamma_2 \in \Gamma (\gamma)$ ve z, z'$\in$ H alalım,

d [$(\gamma_1 \circ \gamma_2)$ (z), $(\gamma_1 \circ \gamma_2)$ (z')] = d [γ_1 (γ_2 (z)), γ_1 (γ_2 (z'))] dır. Oysa, γ_1 kompleks katı hareket olduğundan d uzaklığını korur. O zaman, γ_2 nin de kompleks katı hareket olduğunu dikkate alırsak, d [γ_1 (γ_2 (z)), γ_1 (γ_2 (z'))] = d [γ_2 (z), γ_2 (z')] = d (z, z') bulunur. Buradan, $\gamma_1 \circ \gamma_2 \in \Gamma (\gamma)$ bulunur. Gösterilebilir ki, $(\gamma_1 \circ \gamma_2) (z) \neq (\gamma_2 \circ \gamma_1) (z)$ dır.

Önerme 2: $\gamma \in \Gamma (\gamma)$ olsun. γ, farklı gerçel iki sabit noktası olması hariç, birebir ve örtendir.

İspat: $\forall$ z, z'$\in$ H ve z $\neq$ z' olsun. $\frac{| z - z' |^2}{imz \, . \, imz'} \neq 0$ olur.

o zaman, $\frac{| \gamma (z) - \gamma (z') |^2}{im\gamma (z) \, . \, im\gamma (z')} \neq 0$ dır. Buradan $\gamma (z) \neq \gamma (z')$ bulunur. Yani γ birebirdir.

z $\in$ H noktasını sabit bırakalım. Bu halde, γ (z) = z yazarız. γ bire bir olduğundan $\frac{az' + b}{cz' + d} + t_i \in H$ için bir z' $\in$ H vardır, öyleki d [z, γ (z')] = d (z, z') olur. Yani, γ örtendir.

Önerme 3: I (z) = z olan özdeşlik dönüşümü H de d uzaklığına göre bir kompleks katı harekettir.

İspat: Açıktır.

Önerme 4: $\gamma \in \Gamma(\gamma)$ ise, γ^{-1} de H de d uzaklığına göre bir kompleks katı harekettir.

İspat: $\gamma^{-1}(z) = \dfrac{(-d-ct_i)z + b + dt_i + ct_i^2}{cz - a - ct_i} + t_i$ dir. Öte yandan,

$$|\gamma^{-1}(z) - \gamma^{-1}(z')|^2 = \frac{1}{|cz - a - t_i.c|\,.\,|cz' - a - t_i.c|}\,.\,|z - z'|^2 ,\quad \mathrm{im}\gamma^{-1}(z) = \frac{\mathrm{im}z}{|cz - a - t_i.c|^2}$$

ve $\mathrm{im}\gamma^{-1}(z') = \dfrac{\mathrm{im}z'}{|cz' - a - t_i\,.\,c|^2}$ dir. O zaman, $d[\gamma^{-1}(z), \gamma^{-1}(z')] = \dfrac{|z - z'|^2}{\mathrm{im}z\,.\,\mathrm{im}z'}$

bulunur. Yani, $\gamma^{-1} \in \Gamma(\gamma)$ dır.

Teorem 2: $\Gamma(\gamma)$ kümesi dönüşümlerin bileşke (hareketlerin çarpımı) işlemine göre değişmeli olmayan bir grup oluşturur.

İspat: $\Gamma(\gamma)$ kümesi önerme 1, önerme 3 ve önerme 4' ten sırasıyle kapalıdır, birim elemanlıdır ve ters elemanlıdır. Birleşme özelliği ayrıca sağlanır [2].

Özel hal: $t_i = 0$ olsun. $\gamma(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ olur.

$$\Gamma_1(\gamma) = \left\{ \gamma \mid \gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d},\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1,\ z, z' \in H,\ d[\gamma(z), \gamma(z')] = d(z, z') \right\}$$

diyelim. $\Gamma_1(\gamma)$ bileşim işlemine göre bir gruptur [2].

2. Üst-yarı Kompleks Düzlemde Sabit Nokta Etrafında Dönme Hareketi

H de $\gamma \in \Gamma_1(\gamma)$ olan ve bir noktayı sabit bırakan hareketlerin kümesini $\Gamma_0(\gamma)$ ile gösterelim. Yani,

$$\Gamma_0(\gamma) = \left\{ \gamma_0 \mid \gamma_0(z') = \frac{az' + b}{cz' + d},\ \gamma_0(z_i) = z_i;\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1, z_i, z' \in H \right\}$$

olsun.

Teorem 3: $\gamma_0 \neq I$ olmak üzere, $\gamma_0 \in \Gamma_0(\gamma)$ olsun,

i) $|a + d| < 2$ ise, H^0 de tek (kompleks) sabit nokta vardır.

ii) $|a + d| = 2$ ise, H^s de tek (gerçel) sabit nokta vardır.

iii) $| a + d | > 2$ ise, $z_1 \neq z_2$ ve $z_1, z_2 \in H^s$ dir. Yani z_1 ve z_2 gibi farklı gerçel iki sabit nokta vardır.

iv) γ_0 d uzaklığına göre H de bir kompleks katı harekettir.

İspat: $\gamma_0 (z_i) = z_i$ eşitliğinden,

$$c z_i^2 - (a - d) z_i - b = 0 \qquad (1)$$

olur.

$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc \qquad (2)$$

diyelim.

i) $\Delta < 0$ ise, hipotezi de hesaba katarsak,

$$(a + d)^2 < 4 \qquad (3)$$

olur. Bu halde (1) denkleminin kompleks eşlenik iki kökü vardır ve bunlardan biri H^0 ye aittir. Ayrıca, (3) ifadesi

$$| a + d | < 2 \qquad (4)$$

bağıntısına denktir.

ii) $\Delta = 0$ ise, benzer şekilde

$$(a + d)^2 = 4 \qquad (5)$$

olur. (1) denkleminin bir tek gerçel z kökü vardır. Ayrıca, (5) ifadesi

$$| a + d | = 2 \qquad (6)$$

bağıntısına denktir.

iii) $\Delta > 0$ ise, aynı şekilde

$$(a + d)^2 > 4 \qquad (7)$$

olur. (1) denkleminin farklı gerçel iki kökü vardır. Benzer şekilde (7) ifadesi

$$| a + d | > 2 \qquad (8)$$

bağıntısına denktir.

iv) $z, z' \in H$, $\gamma_0 (z) = z$ yani $\dfrac{az + b}{cz + d} = z$ olsun.

i) gerçeklensin. Bu halde, $d [z, \gamma_0 (z')] = d [\gamma_0 (z), \gamma_0 (z')] = d (z, z')$ dır.

ii) gerçeklensin. Bu halde, $d [z, \gamma_0 (z')] = + \infty = d (z, z')$ dır.

iii) gerçeklensin. Bu halde $d(z_1, z_2) = +\infty$, $d[\gamma_0(z_1), \gamma_0(z_2)] = +\infty$ dır.

Eğer $\gamma_0 = I$ ise, olay apaçıktır.

Önerme 5: γ_0, $z_i \in H$ noktasını sabit bırakan hareketse, γ_0^{-1} de z_i noktasını sabit bırakan bir harekettir.

İspat: $\gamma_0^{-1}(z_i) = \dfrac{-dz_i + b}{cz_i - a}$ dır ve $|-d-a| = |a+d|$ dır. Teorem 3'ün i) ve ii) şıkkından hipotez gereği $|-d-a| \leq 2$ olur. Ayrıca, $d[\gamma_0^{-1}(z_i), \gamma_0^{-1}(z')] = d(z_i, z')$ dır. Yani, $\gamma_0^{-1} \in \Gamma_0(\gamma)$ dır.

Tanım 2: $\gamma_0 \in \Gamma_0(\gamma)$ kompleks katı hareketine H üst yarı kompleks düzleminde d uzaklığına göre " **z_i sabit noktası etrafında kompleks dönme hareketi** " deriz.

Sonuç 1: $\Gamma_0(\gamma)$ kompleks dönme hareketi kümesi, hareketlerin çarpımı işlemine göre değişmeli bir gruptur.

İspat: Açıktır.

3. Üst Yarı Kompleks Düzlemde Öteleme Hareketi

$T(\gamma) = \{T_0 \mid T_0(z) = z + t_i, \forall t_i \in \mathbb{R}, z \in H\}$ olan dönüşümlerin kümesini ele alalım.

$\dfrac{|z + t_i - z' - t_i|^2}{\mathrm{im}T_0(z) \cdot \mathrm{im}T_0(z')} = \dfrac{|z - z'|^2}{\mathrm{im}z \cdot \mathrm{im}z'}$ olduğundan, $T_0 \in T(\gamma)$ dönüşümü H de d uzaklığına göre bir kompleks katı harekettir.

Tanım 3: $T_0 \in T(\gamma)$ kompleks katı hareketine H üst yarı kompleks düzleminde d uzaklığına göre " **bir kompleks öteleme hareketidir** " deriz.

Teorem 4: $T(\gamma)$ ötelemeler kümesi hareketlerin çarpımı işlemine göre bir değişmeli gruptur.

İspat: Açıktır.

Sonuç 2: $\Gamma_0(\gamma) \cap T(\gamma) = \{I\}$ dır.

İspat: $\gamma \in \Gamma_0(\gamma) \cap T(\gamma)$ olsun. Bu halde $\gamma(z) = z$ ve $\gamma(z) = z + t_i$ olur. Buradan $t_i = 0$ olur ki, $\gamma = I$ dır.

Benzer şekilde diğer noktalar etrafında kompleks dönme hareketleriyle $T(\gamma)$ nın kesişimi birim harekettir.

4. H Üst Yarı Kompleks Düzleminde Genel Hareket

$T_0 \in T(\gamma)$ ve $\gamma_0 \in \Gamma_0(\gamma)$ olsun.

Önerme 6: $T_0 \circ \gamma_0$ dönüşümü ve $\gamma_0 \circ T_0$ dönüşümü H de d uzaklığına göre bir kompleks katı harekettir.

İspat: $z, z' \in H$, $z \neq z'$ için, $\gamma_0(z) = z$, $T_0(z) = z + t_i$ olsun.

$(T_0 \circ \gamma_0)(z) = z + t_i$, $(T_0 \circ \gamma_0)(z') = \dfrac{az' + b}{cz' + d} + t_i$, $(\gamma_0 \circ T_0)(z) = z + t_i$ ve

$(\gamma_0 \circ T_0)(z') = \dfrac{az' + b + at_i}{cz' + d + ct_i}$ dır. Öte yandan, $d[(T_0 \circ \gamma_0)(z), (T_0 \circ \gamma_0)(z')] =$

$d[\gamma_0(z), \gamma_0(z')] = d(z, z')$ dır. Benzer şekilde, $d[(\gamma_0 \circ T_0)(z), (\gamma_0 \circ T_0)(z')] =$

$d[T_0(z), T_0(z')] = d(z, z')$ dır.

Buradan şunu da söyleriz: " H de bir $\gamma \in \Gamma(\gamma)$ kompleks katı hareketi biri T_0 diğeri γ_0 olmak üzere, iki basit hareketin çarpımı olarak ifade edilebilir.

Tanım 4: $T_0 \circ \gamma_0$ ve $\gamma_0 \circ T_0$ hareketlerine H de d uzaklığına göre " **genel kompleks hareket** " diyeceğiz.

Teorem 5: Öteleme hareketlerini içermeyen genel kompleks hareketlerinin kümesi hareketlerin çarpımı işlemine göre kapalı değildir.

İspat: $t_i, t_j \in \mathbb{R}$ olsun. $\gamma'(z') = \dfrac{az' + at_i + b}{cz' + ct_i + d}$ ve $\gamma''(z') = \dfrac{dz - b}{-cz + a} + t_j$ alalım

γ' ve γ'' genel kompleks hareketlerdir. Fakat $(\gamma_2 \circ \gamma_1)(z) = z' + t_2 + t_j$ bir öteleme hareketidir.

Genel Sonuç: H de d uzaklığına göre γ katı hareketlerinin $\Gamma(\gamma)$ kümesi genel kompleks hareketler kümesidir.

Teorem 6: H de d uzaklığına göre bir kompleks katı hareketin bir öteleme olması için gerek ve yeter şart H deki her doğrunun bu kompleks katı hareketle kendine paralel bir doğruya dönüşmesi ve gene bu katı kompleks hareketle paralel doğruların bir kümesinin kendine paralel doğruların kümesine dönüşmesidir.

İspat: Şart gerektir. Çünkü δ H üst yarı düzleminde bir doğru ve $T_0 \in T(\gamma)$ olsun. $\forall z \in \delta$ için, $T_0(z) - z = t$ dir (Yani, doğrunun T_0 altındaki görüntüsü ile arasındaki mesafe her noktası için aynıdır). O halde $\delta \,//\, T_0(\delta)$ dır. Şimdi,

$A = \{ \delta_i \subset H \mid \forall i, \delta_{i-1} \,//\, \delta_i, i = 1, 2, \ldots, \delta_i \text{ doğru} \}$

ve bu kümenin T_0 altındaki dönüşümü

$$T_0(A) = \{ T(\delta_i) \subset H \mid \forall i,\ T_0(\delta_{i-1}) \,//\, T_0(\delta_i),\ i = 1, 2, \ldots \}$$

olsun. $\forall z' \in \delta_1$, $\forall z'' \in \delta_2, \ldots,$ $\forall z^{(n)} \in \delta_n, \ldots$ için

$$T_0(z') - z' = T_0(z'') - z'' = \ldots = T_0(z^{(n)}) - z^{(n)} = \ldots = t$$

dır. Buradan

$$\delta_1 \,//\, T_0(\delta_1) \,//\, \delta_2 \,//\, T_0(\delta_2) \,//\, \ldots \,//\, \delta_n \,//\, T_0(\delta_n) \,//\, \ldots$$

bulunur. Yani, A nın elemanları ile $T_0(A)$ nın elemanları birbirine paraleldir.

Şart yeterdir. Çünkü, $\gamma \in \Gamma(\gamma)$ olmak üzere,

$$B(\gamma) = \{ \gamma \mid \delta \,//\, \gamma(\delta),\ \forall \delta \subset H,\ \delta \text{ doğru} \}$$

olan hareketlerin kümesini ele alalım. $B(\gamma) \subset \Gamma(\gamma)$ ve $T(\gamma) \subset B(\gamma)$ olduğu açıktır. Öte yandan $T_0 \in T(\gamma)$ ve $\gamma_0 \in \Gamma_0(\gamma)$ olmak üzere, $\gamma = T_0 \circ \gamma_0$ yazılabiliyordu. $T(\gamma) \subset B(\gamma)$ olduğundan $\gamma_0 \in B(\gamma)$ bulunur. Halbuki, $\Gamma_0(\gamma)$ nın $B(\gamma)$ daki elemanı sadece birim dönüşümdür. Böylece,

$$B(\gamma) = T(\gamma) \cup I \circ T(\gamma)$$

yazılır ki, $B(\gamma) = T(\gamma)$ bulunur.

KAYNAKLAR

1. LANG, S.: $SL_2(R)$, Addison - Wesley, publising company, 1975.

2. GUNNİNG, R.C.: Lectures On Modular Forms, Princeton Newjersey, 1962.

3. HACISALİHOĞLU, H.H.: Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniv. Fen Fak. Yayınları, Mat - No:2, 1980.